А.В. Михеев[1]

ВЛИЯНИЕ СДВИГА НА ЛОКАЛЬНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

[1] *Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет*
pop1011@yandex.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается модель Тимошенко, учитывающая влияние сдвига, для пологих оболочек, находящихся на упругом основании. Рассмотрена зависимость критической нагрузки от коэффициента сдвига и жесткости основания в применении к различным частным случаям.

1. Введение. Для решения задачи о потере устойчивости тонких пологих оболочек под действием безмоментных усилий в ряде случаев применим так называемый локальный подход. Его суть заключается в том, что граничные условия игнорируются, а величина прогиба w, функция усилий Φ, и кроме того, в случае учета сдвига, угловые параметры Ψ, Θ, ищутся в виде комплекснозначных функций вида $re^{(px+qy)i}$. Параметр нагружения λ выражается из системы уравнений устойчивости и находится минимизацией по параметрам p, q.

Модель Кирхгоффа-Лява. В статье [1] рассматривается локальный подход в случае отсутствия начальных усилий сдвига, в работе [2] исследован общий случай локальной потери устойчивости пологих оболочек. В книге [3] рассмотрен вопрос потери устойчивости тонких оболочек как для локального подхода, так и в других случаях, когда локальный подход неприменим. В статье [4] рассмотрено применение локального подхода с целью изучения вопроса устойчивости тонких оболочек на упругом основании.

Модель Тимошенко. Модель Тимошенко является обобщением модели Кирхгоффа-Лява, в котором введены два независимых угла сдвига для поперечных волокон. Система уравнений устойчивости здесь имеет не восьмой, а десятый порядок.

В настоящей статье для сравнения мы будем использовать результаты, содержащиеся в работе [4]. Оболочка предполагается трансверсально изотропной.

2. Уравнения устойчивости пологих оболочек на упругом основании с учетом сдвига. Система уравнений равновесия для оболочки на упругом основании в проекциях на орты после деформации имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BT_1)}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\beta}T_2+\frac{\partial(AS)}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}S\right)-k_1Q_1+q_1=0, \qquad \{1,2\}\\
&\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BQ_1)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AQ_2)}{\partial\beta}\right)+(k_1+\varkappa_1)T_1+2\tau S+(k_2+\varkappa_2)T_2+q_n+P=0,\\
&\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2+\frac{\partial(AH)}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}H\right)+Q_1=0 \qquad \{1,2\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где A, B — коэффициенты первой квадратичной формы, T_1, T_2, S — тангенциальные усилия, Q_1, Q_2 — перерезывающие усилия, M_1, M_2, H — изгибающие и крутящий моменты, q_1, q_2, q_n — проекции интенсивности внешней нагрузки, отнесенные к единице площади серединной поверхности, P — реакция основания, k_1, k_2 — главные кривизны серединной поверхности,

$$
T_1=\frac{Eh(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)}{(1-\nu^2)},\; Q_1=G'h\delta_1,\; M_1=\frac{Eh^3(\varkappa_1'+\nu\varkappa_2')}{12(1-\nu^2)}, \quad \{1{,}2\}
$$

$$
S=\frac{Eh\omega}{2(1+\nu)},\; H=\frac{Eh^3\tau'}{12(1+\nu)},
$$

$$
\epsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_2-k_1w,\; \delta_1=\varphi_1-\gamma_1,
$$

$$
\omega_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u_1,\; \gamma_1=-\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-k_1u_1,
$$

$$
\varkappa_1=-\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\gamma_2,\; \varkappa_1'=-\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}-\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi_2, \quad \{1{,}2\}
$$

$$
\omega=\omega_1+\omega_2=\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_2}{B}\right)+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_1}{A}\right),
$$

$$
\tau=-\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_2+k_1\omega_1,
$$

$$
\tau'=-\frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\varphi_2}{B}\right)+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\varphi_1}{A}\right)\right)
$$

Здесь φ_1, φ_2 — углы поворота волокон, u_1, u_2, w — проекции перемещения, h — толщина оболочки, G' — коэффициент сдвига в трансверсальном направлении, α, β — ортогональные криволинейные координаты на серединной поверхности.

Полагая оболочку пологой, нагрузку — следящей, а начальное состояние — безмоментным, заменим каждую из входящих в систему (1) неизвестных функций u, v, w, φ_1, φ_2, T_1, T_2, S, M_1, M_2, H суммами двух слагаемых $u^0 + u$, $v^0 + v$, $w^0 + w$, $\varphi_1^0 + \varphi_1$, $\varphi_2^0 + \varphi_2$, $T_1^0 + T_1$, $T_2^0 + T_2$, $S^0 + S$, $M_1^0 + M_1$, $M_2^0 + M_2$, $H^0 + H$, где первые слагаемые — функции, соответствующие исследуемому напряженному состоянию, а вторые — их малые вариации. Производя линеаризацию, получаем следующую систему уравнений устойчивости:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BT_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\beta}T_2 + \frac{\partial(AS)}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}S\right) - k_1 Q_1 = 0, \\
\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BQ_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AQ_2)}{\partial\beta}\right) + k_1T_1 + k_2T_2 + T_1^0\varkappa_1 + 2S^0\tau + T_2^0\varkappa_2 + P = 0, \\
\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2 + \frac{\partial(AH)}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}H\right) + Q_1 = 0 \quad \{1,2\}
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\{T_1^0, T_2^0, S^0\} = -\lambda\{t_1, t_2, t_3\}$, T_1^0, T_2^0, S^0 — начальные усилия, λ — параметр нагружения. Введем функции Φ, Ψ, Θ следующим образом:

$$T_1 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\, T_2 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\, S = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y},$$
$$\varphi_1 = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial y},\, \varphi_2 = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Theta}{\partial x},$$

где $x = \alpha A, y = \beta B$. Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{aligned}
&(Eh)^{-1}\Delta\Delta\Phi + \Delta_k w = 0 \\
&G'h(\Delta w - \Delta\Psi) + \Delta_k\Phi + \Delta_T(w) + p = 0 \\
&-D\Delta\Psi = G'h(w - \Psi) \\
&\frac{D(1-\nu)}{2}\Delta\Theta - G'h\Theta = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta_k = k_2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$,

$$\Delta_T = T_1^0\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2S^0\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + T_2^0\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Последнее уравнение системы (3), служащее для определения функции Θ, независимо от трех остальных уравнений системы и не участвует в решении задачи устойчивости в случае локального подхода. Будем искать решения (3) в виде:

$$w = w_0 e^{(px+qy)i}, \Psi = \Psi_0 e^{(px+qy)i}, \Phi = \Phi_0 e^{(px+qy)i}$$

Согласно модели винклеровского основания с коэффициентом постели, зависящим от волнообразования, рассмотренной в [5], для прогиба w, имеющего вышеуказанный вид, реакция основания равна $P = -E_0 a_2 r w$, где $r = \sqrt{p^2+q^2}$, E_0, ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона основания соответственно,

$a_2 = \dfrac{2\,(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)\,(3-4\nu_0)}$.

Сделав замену $p = rcos(\varphi)$, $q = rsin(\varphi)$ и выражая из системы (3) параметр нагружения, получим:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{Eh} = \left(\frac{\mu^4 r^2}{\frac{\mu^4 E}{G'} r^2 + 1} + \frac{f_k(\varphi)}{r^2} + \frac{e}{\mu^2 r} \right) \frac{1}{f_T(\varphi)}$$

Здесь $\mu^4 = \dfrac{h^2}{12(1-\nu^2)}$, $e = \dfrac{E_0 a_2}{E\sqrt{12(1-\nu^2)}}$,

$f_k(\varphi) = (k_2 cos^2\varphi + k_1 sin^2\varphi)^2$,$f_T(\varphi) = t_1 cos^2\varphi + 2t_3 sin\varphi cos\varphi + t_2 sin^2\varphi$.

Полагая $r = \dfrac{s}{\mu}$, $e = 2\mu^3\omega$, $g(r,\varphi) = \dfrac{\Lambda}{\mu^2}$, $a = \dfrac{\mu^2 E}{G'}$, получим:

$$g(s,\varphi) = \left(\frac{s^2}{as^2+1} + \frac{f_k(\varphi)}{s^2} + \frac{2\omega}{s} \right) \frac{1}{f_T(\varphi)}$$

Критическое значение параметра нагружения получаем после минимизации функции $g(s,\varphi)$ по переменным s,φ:

$$g_* = \min_{s,\varphi}{}^{+} g(s,\varphi) = g(s_*,\varphi_*)$$

где знак $^+$ говорит о том, что ищется положительный минимум, а звездочка указывает на критические значения соответствующих величин. Предполагается также, что существуют такие φ, при которых $f_T(\varphi) > 0$.

3. Частные случаи. Перейдем к рассмотрению наиболее важных частных случаев. В каждом из них мы исследуем зависимость параметра волнообразования s_*, угла наклона вмятин φ_* и параметра критической нагрузки g_* от коэффициента сдвига a и коэффициента жесткости основания ω.

3.1. *Однородное сжатие сферы.*

$k_1 = k_2 = 1$, $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 0$, $f_k = f_T = 1$,
$g(s, a, \omega) = \dfrac{2\omega}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{s^2}{1 + as^2}$.

Поскольку параметр φ не входит в функцию нагружения g, любой угол наклона вмятин удовлетворяет условию потери устойчивости.

3.1.1. Положим сначала $\omega \ll 1$. Тогда можно показать, что s_*, g_* раскладываются в ряд по параметру ω следующим образом:

$$s_* = K(a, \omega) = \frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{1}{4(1-a)^2}\omega + \frac{6a-1}{8(3a+4)\sqrt{(1-a)^7}}\omega^2 + O(\omega^3)$$

$$g_* = G(a, \omega) = (2-a) + 2(\sqrt{1-a})\omega + \frac{1}{4(a-1)}\omega^2 + O(\omega^3)$$

При отсутствии сдвига (a=0) получается ряд, совпадающий с приведенным в [4].

Теперь рассмотрим графические зависимости $s_*(a)$ и $g_*(a)$, приведенные на рисунке 1. Кривая 1 соответствует $\omega = 0$, кривая 2 — $\omega = 0,2$, кривая 3 — $\omega = 0,5$. Как мы видим, при увеличении коэффициента сдвига параметр волнообразования увеличивается, а критическая нагрузка убывает. К примеру, для $\omega = 0,2$ при возрастании коэффициента сдвига от $a = 0$ до $a = 0,5$ критическая нагрузка уменьшается приблизительно на 26% по сравнению с исходным значением. С увеличением ω при фиксированном коэффициенте сдвига параметр волнообразования и критическая нагрузка возрастают. Для получения более полного представления о характере зависимости параметров волнообразования и критической нагрузки от коэффициента сдвига некоторые их значения при разных a, ω представлены в таблицах 1 и 2. В частности, при a=0 значения совпадают с полученными в [4].

3.1.2. Пусть $\omega \gg 1$. Тогда $g(s,a)$ является функцией, строго убывающей по s и $\lim\limits_{s\to+\infty} g(s,a) = \dfrac{1}{a}$. Отсюда видно, что при достаточно больших значениях ω критическая нагрузка преимущественно зависит от коэффициента сдвига.

Рис.1. Зависимости параметра волнообразования(слева) и критической нагрузки(справа) от коэффициента сдвига при однородном сжатии сферической оболочки.

Таблица 1.

Зависимость параметра волнообразования от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (однородное сжатие сферической оболочки).

ω	$a = 0$	$0,005$	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,5$
0	1,0000	1,0025	1,0050	1,0260	1.0541	1,4142
0,3	1,0722	1,0755	1,0788	1,1067	1,1450	1,8108
0,6	1,1391	1,1432	1,1474	1,1828	1,2326	—
0,9	1,2011	1,2061	1,2111	1,2546	1,3171	—

Таблица 2.

Зависимость параметра критической нагрузки от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (однородное сжатие сферической оболочки).

ω	$a = 0$	$0,005$	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,5$
0	2,0000	1,9950	1,9900	1,9500	1.9000	1,5000
0,3	2,5791	2,5725	2,5658	2,5127	2,4459	1,8786
0,6	3,1217	3,1133	3,1050	3,0369	2,9507	—
0,9	3,6344	3,6240	3,6136	3,5292	3,4214	—

3.2. *Кручение сферы(чистый сдвиг).*

$k_1 = k_2 = 1,\ t_1 = t_2 = 0,\ t_3 = 1,\ f_k = 1,\ f_T(\varphi) = \sin 2\varphi,$
$g(s, \varphi, \omega) = \dfrac{1}{\sin 2\varphi}\left(\dfrac{2\omega}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{s^2}{1 + as^2}\right).$

Экстремум функции g достигается при $\varphi_* = \dfrac{\pi}{4}$, а значения s_* и g_* совпадают с полученными в п. 3.1., т.е. $s_* = K(a, \omega)$, $g_* = G(a, \omega)$.

3.3. *Цилиндрическая оболочка при осевом сжатии.*

$k_1 = 0, k_2 = 1,\ t_1 = 1,\ t_2 = t_3 = 0,\ f_k(\varphi) = \cos^4 \varphi,\ f_T(\varphi) = \cos^2 \varphi,$
$g(s, \varphi, \omega) = \dfrac{1}{\cos^2 \varphi}\left(\dfrac{2\omega}{s} + \dfrac{\cos^4 \varphi}{s^2} + \dfrac{s^2}{1 + as^2}\right).$

Находя минимум, убеждаемся, что он достигается при значении угла наклона вмятин $\varphi_* = 0$, $s_* = K(a, \omega)$, $g_* = G(a, \omega)$.

3.4. *Цилиндрическая оболочка при кручении.*

$k_1 = 0, k_2 = 1,\ t_1 = t_2 = 0,\ t_3 = 1,\ f_k(\varphi) = \cos^4 \varphi,\ f_T(\varphi) = \sin 2\varphi,$
$g(s, \varphi, \omega) = \dfrac{1}{\sin 2\varphi}\left(\dfrac{2\omega}{s} + \dfrac{\cos^4 \varphi}{s^2} + \dfrac{s^2}{1 + as^2}\right)$

Поскольку локальный подход при отсутствии основания в данном случае неприменим, мы считаем что $\omega > 0$. Как показано в [4], при отсутствии сдвига (a=0) и $\omega \ll 1$

$$s_* = \left(\frac{5\omega}{2}\right)^{\frac{1}{3}},\ \varphi_* = \frac{\pi}{2} - c_2\omega^{\frac{1}{3}},\ g_* = c_1\omega^{\frac{1}{3}}$$

$c_1 = 2^{2/3}3^{3/4}5^{-5/12} = 1.85$, $c_2 = 2^{-1/3}3^{1/4}5^{-1/12} = 1.24$.

Если a=0 и $\omega \gg 1$, то $s_* = \omega^{\frac{1}{3}}$, $\varphi_* = \dfrac{\pi}{4}$, $g_* = 3\omega^{\frac{2}{3}}$.

Графические зависимости $s_*(a)$, $\varphi_*(a)$ и $g_*(a)$ приведены на рисунках 2 и 3. Кривая 1 соответствует $\omega = 0,1$, кривая 2 — $\omega = 0,3$, кривая 3 — $\omega = 0,5$. Из них мы видим, что при увеличении коэффициента сдвига параметр волнообразования увеличивается, а угол наклона вмятин и критическая нагрузка убывают. К примеру, для $\omega = 0,2$ при возрастании коэффициента сдвига от $a = 0$ до $a = 0,5$ критическая нагрузка уменьшается приблизительно на 10% по сравнению с исходным значением. Таким образом, в случае кручения цилиндра с увеличением сдвига критическая нагрузка убывает значительно медленнее, чем при однородном сжатии сферы(см. п. 3.1). С увеличением ω при фиксированном коэффициенте сдвига параметр волнообразования и критическая нагрузка возрастают, а угол наклона вмятин убывает. Более подробно о зависимости параметров волнообразования, угла наклона вмятин и критической нагрузки от коэффициента сдвига можно узнать из таблиц 3, 4 и 5.

Рис. 2. Зависимость параметра волнообразования(слева) и угла наклона вмятин(справа) от коэффициента сдвига при кручении цилиндрической оболочки.

Рис. 3. Зависимость параметра волнообразования от коэффициента сдвига при кручении цилиндрической оболочки.

Таблица 3.

Зависимость параметра волнообразования от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (кручение цилиндрической оболочки).

ω	$a = 0$	$0,005$	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,5$
0,2	0,6872	0,6883	0,6894	0,6984	0,7103	0,8419
0,6	0,9190	0,9215	0,9240	0,9452	0,9742	1,4745
0,9	1,0267	1,0302	1,0337	1,0638	1,1059	—

Таблица 4.

Зависимость угла наклона вмятин от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (кручение цилиндрической оболочки).

ω	$a = 0$	$0,005$	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,5$
0,2	0,9994	0,9991	0,9988	0,9966	0,9937	0,9644
0,6	0,8838	0,8835	0,8832	0,8807	0,8774	0,8378
0,9	0,8531	0,8528	0,8525	0,8501	0,8470	—

Таблица 5.

Зависимость параметра критической нагрузки от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (кручение цилиндрической оболочки).

ω	$a = 0$	$0,005$	$0,01$	$0,05$	$0,1$	$0,5$
0,2	1,3579	1,3567	1,3555	1,3456	1,3331	1,2249
0,6	2,3880	2,3844	2,3807	2,3512	2,3135	1,9585
0,9	3,0123	3,0067	3,0011	2,9554	2,8966	—

3.5. *Устойчивость выпуклых оболочек.*

3.5.1. Пусть сначала существует такой угол $\varphi = \varphi_*$, при котором функция $f_k(\varphi)$ минимальна, а функция $f_T(\varphi)$ максимальна. Тогда при $\varphi = \varphi_*$ после минимизации функции g по параметру s мы получим:

$$g_*(a,\omega) = \min_s g(s,\varphi_*,a,\omega) = \frac{\sqrt{f_{k*}}}{f_{T*}} G(a',\omega'),\ s_*(a,\omega) = K(a',\omega')(f_{k*})^{\frac{1}{4}},$$

где $f_{k*} = f_k(\varphi_*)$, $f_{T*} = f_T(\varphi_*)$, $a' = a(f_{k*})^{\frac{1}{2}}$, $\omega' = \omega(f_{k*})^{-\frac{3}{4}}$.

3.5.2. Пусть теперь особого угла нет. В этом случае задача сводится к минимизации функции g по двум параметрам s, φ. После минимизации по s, аналогично п. 3.5.1, получим:

$$g_*(a,\omega) = \min_\varphi \frac{\sqrt{f_k(\varphi)}}{f_T(\varphi)} G(a',\omega'),\ s_*(a,\omega) = K(a',\omega')(f_k(\varphi))^{\frac{1}{4}}.$$

где $a' = a(f_k(\varphi))^{\frac{1}{2}}$, $\omega' = \omega(f_k(\varphi))^{-\frac{3}{4}}$.

При отсутствии основания($\omega = \omega_1 = 0$)

$$g_* = \min_\varphi \frac{\sqrt{f_k(\varphi)}(2 - a * \sqrt{f_k(\varphi)}\ )}{f_T(\varphi)} = \frac{\sqrt{f_k(\varphi_0)}(2 - a * \sqrt{f_k(\varphi_0)}\ )}{f_T(\varphi_0)}.$$

Если же $\omega \gg 1$ то слагаемым $f_k(\varphi)$ в выражении функции g можно пренебречь и $g_* = \min\limits_\varphi \dfrac{1}{a * f_T(\varphi)}$.

Указатель литературы

[1] *Работнов Ю. Н.* Локальная устойчивость оболочек // Докл. АН СССР. 1946. т. 52, №2 С. 111–112.

[2] *Ширшов В. П.* Локальная устойчивость оболочек // Труды второй всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Киев: 1962. С. 314–317.

[3] *Товстик П. Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995.

[4] *Товстик П. Е.* Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Известия РАН. 2005. Вып.1 С. 147–160.

[5] *Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В.* Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1977.