ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2011, том 438, № 4, с. 439–443

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

ЛОКАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

© 2011 г. А. Д. Брюно, А. В. Парусникова

Представлено академиком Д.В. Аносовым 09.02.2011 г.

Поступило 10.02.2011 г.

В этой работе методами степенной геометрии находятся асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве при $x \to 0$ для всех значений его четырех комплексных параметров. Получено 30 семейств разложений решений уравнения; 22 из них получены из опубликованных разложений решений шестого уравнения Пенлеве; среди остальных восьми семейств одно было известно, еще два могут быть получены из разложений решений третьего уравнения Пенлеве. Новыми являются три семейства полуэкзотических и два семейства сложных разложений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пятое уравнение Пенлеве имеет вид

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \\ + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}, \qquad (1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – комплексные параметры, x – независимая, y – зависимая комплексные переменные, $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Уравнение (1) имеет две особые точки $x = 0$ и $x = \infty$.

В этой работе методами двумерной степенной геометрии [1–4] ищем все асимптотические разложения решений уравнения (1) при $x \to 0$ вида

$$y = c_r x^r + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s x^s, \qquad (2)$$

где $c_r(x), c_s(x), r, s \in \mathbb{C}$, $\mathbf{K} \subset \{s\colon \mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, r\}$, множество $\mathbf{K}$ счетно. Различаем пять типов разложений (2).

Тип 1. Степенные разложения: c_r и c_s – постоянные.

Тип 2. Степенно-логарифмические разложения: c_r – постоянный коэффициент, $c_s = c_s(x)$ – многочлены от $\ln x$.

Тип 3. Сложные разложения: $c_r = c_r(x)$ и $c_s = c_s(x)$ – ряды по убывающим степеням $\ln x$.

Тип 4. Экзотические разложения: $c_r(x)$ и $c_s(x)$ – ряды по степеням x^i, в c_r содержится счетное число слагаемых и показатели степени x^i ограничены либо сверху, либо снизу.

Тип 5. Полуэкзотические разложения: $c_r(x)$ – конечная сумма степеней x^i с комплексными коэффициентами и $c_s(x)$ – ряды по степеням x^i.

Представим уравнение (1) в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $x^2 y(y-1)$ и перенесем все члены уравнения в правую часть. Получим уравнение

$$f(x, y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -x^2 y(y-1)y'' + x^2\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right)(y')^2 - xy(y-1)y' + \\ + (y-1)^3(\alpha y^2 + \beta) + \gamma x y^2(y-1) + \delta x^2 y^2 (y+1) = 0. \qquad (3)$$

Уравнения (1) и (3) инвариантны относительно замены (симметрии)

$$(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\tilde{x}, \frac{1}{\tilde{y}}, -\tilde{\beta}, -\tilde{\alpha}, -\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}\right). \qquad (4)$$

При $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (3), многоугольник $\Gamma(f)$ и его ребра $\Gamma_j^{(1)}$ изображены на рис. 1. Поскольку мы рассматриваем случай $x \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \le 0\}$, т.е. нас интересуют только вершины $\Gamma_1^{(0)} = (0, 0)$, $\Gamma_4^{(0)} = (0, 5)$ и ребро $\Gamma_4^{(1)}$. Укороченные уравнения, соответствующие вершинам, являются алгебраическими и, согласно замечанию 1.1 из [1], не дают решений. Ребру $\Gamma_4^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$-x^2 y(y-1)y'' + x^2\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right)(y')^2 - \\ - xy(y-1)y' + (y-1)^3(\alpha y^2 + \beta) = 0 \qquad (5)$$

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

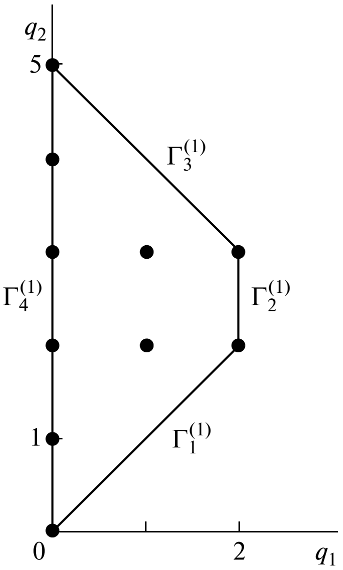

Рис. 1. Носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (3), многоугольник $\Gamma(f)$ и его ребра $\Gamma_j^{(1)}$.

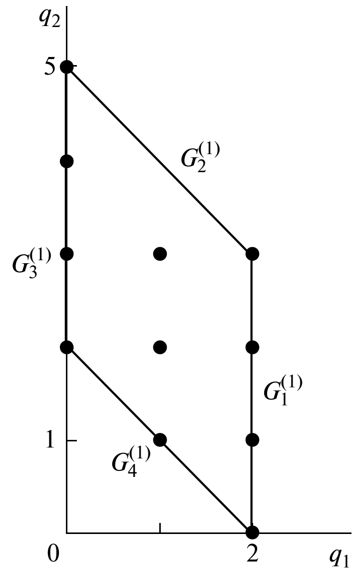

Рис. 2. Носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (7), многоугольник $\Gamma(g)$ и его ребра $G_j^{(1)}$.

и нормальный конус $\mathbf{U}_4^{(1)} = \{\lambda(-1, 0), \lambda > 0\}$. Ищем решение уравнения (5) в виде $y = c$, $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$; получаем определяющее уравнение

$$(c-1)^3(\alpha c^2 + \beta) = 0. \tag{6}$$

Его решениями являются $c = 1$, при $\alpha \neq 0$ также $c_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{\beta}{\alpha}}$, а при $\alpha = \beta = 0$ – любое c. Первая вариация суммы (5) при подстановке $y = c$, равна $\mathcal{L}(x) = -x^2c(c-1)\dfrac{d^2}{dx^2} - xc(c-1)\dfrac{d}{dx} + (c-1)^2(5\alpha c^2 + \beta)$. Для $c \neq 0$ этот оператор равен нулевому только при $c = 1$, поэтому $c = 1$ является единственным решением уравнения (6), обращающим оператор $\mathcal{L}(x)$ в нулевой.

Сделав в уравнении (3) замену $y = 1 + z$, получаем уравнение

$$g(x, z) \overset{\text{def}}{=} -x^2zz'' - x^2z^2z'' + \frac{3}{2}x^2z(z')^2 + x^2(z')^2 - $$
$$- xzz' - xz^2z' + \alpha z^3(z+1)^2 + \beta z^3 + \gamma xz(z+1)^2 + $$
$$+ 2\delta x^2(z+1)^2 + \delta x^2z(z+1)^2 = 0. \tag{7}$$

При $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (7), многоугольник $\Gamma(g)$ и его ребра $G_j^{(1)}$ изображены на рис. 2. Внешние нормали N_j к ребрам $G_j^{(1)}$ – это $N_1 = (1, 0)$, $N_2 = (1, 1)$, $N_3 = (-1, 0)$, $N_4 = (-1, -1)$.

Поскольку мы рассматриваем случай $x \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0\}$, а значит, нас интересуют только вершины $G_1^{(0)} = (2, 0)$, $G_3^{(0)} = (0, 5)$, $G_4^{(0)} = (0, 2)$ и ребра $G_3^{(1)}$, $G_4^{(1)}$. Вершинам $G_1^{(0)}$ и $G_3^{(0)}$ соответствуют алгебраические укороченные уравнения, которые не дают решений. Вершина $G_4^{(0)}$ лежит на ребре $G_3^{(1)}$.

2. РАЗЛОЖЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РЕБРУ $G_4^{(1)}$

Ребру $G_4^{(1)}$ многоугольника $\Gamma(g)$ (рис. 2) соответствуют укороченное уравнение

$$-x^2zz'' + x^2(z')^2 - xzz' + \gamma xz + 2\delta x^2 = 0 \tag{8}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_4^{(1)} = \{\lambda(-1, -1), \lambda > 0\}$. Ищем решение уравнения (8) в виде $z = c_1x$. Получаем $c_1 = -\dfrac{2\delta}{\gamma}$, т.е. $z = -\dfrac{2\delta x}{\gamma}$. Первая вариация суммы (8) равна

$$-x^2z\frac{d^2}{dx^2} - x^2z'' + 2x^2z'\frac{d}{dx} - xz\frac{d}{dx} - xz' + \gamma x. \tag{9}$$

Характеристический многочлен значения оператора (9) при $z = c_1x$ равен $\nu(k) = (k-1)^2 + \dfrac{\gamma^2}{2\delta}$ $\left(\text{его корни } k_{1,2} = 1 \pm \dfrac{\gamma}{\sqrt{-2\delta}}\right)$. Конус задачи – это $\mathcal{K} = \{k\colon \operatorname{Re} k \geq 1, k \neq 1\}$.

Случай $\mathrm{Re}\,k_{1,2} \ne 1$. Введем обозначение $a = \left(\mathrm{sign}\,\mathrm{Re}\,\frac{\gamma}{\sqrt{-2\delta}}\right)\frac{\gamma}{\sqrt{-2\delta}}$; имеется единственное критическое число $k = 1 + a$. Рассмотрим следующие два подслучая:

1) $a \notin \mathbb{N}$. Получаем семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_1\colon y = 1 - \frac{2\delta}{\gamma}x + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s x^s, \tag{10}$$

где $\mathbf{K} = \{s\colon s = l + m + ma, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \ge 0, l + m > 0\}$, c_{a+1} – произвольная константа, остальные коэффициенты c_s однозначно определены. При $a \in \mathbb{Q}$ разложение (10) сходится по теореме 1.7.2 из [4];

2) $a \in \mathbb{N}$. Получаем семейство степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{H}_2\colon y = 1 - \frac{2\delta}{\gamma}x + \sum_{s=2}^{\infty} c_s x^s, \tag{11}$$

где c_s – постоянные для $1 \le s \le a$ и c_s – многочлены от $\ln x$ с однозначно определенными коэффициентами для $s \ge a + 2$, $c_{a+1} = A\ln x + C$, где C – произвольная постоянная. Например, если $a = 1$, то

$$y = 1 - \frac{2\delta}{\gamma}x + \left(C + \frac{(\alpha+\beta)\gamma^2}{2}\ln x\right)x^2 + \sum_{s=3}^{\infty} c_s x^s.$$

После степенного преобразования

$$z = xu$$

и сокращения на x^2 уравнение (8) принимает вид

$$-x^2uu'' + x^2(u')^2 - xuu' + \gamma u + 2\delta = 0, \tag{12}$$

нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_4^{(1)}$ переходит в $\mathbf{U}^* = \{\lambda(-1, 0), \lambda > 0\}$. Решим уравнение (12). Для этого сделаем логарифмическое преобразование

$$\ln x = \xi$$

и получим уравнение

$$-u\ddot{u} + \dot{u}^2 + \gamma u + 2\delta = 0. \tag{13}$$

Здесь и далее точка обозначает дифференцирование по переменной ξ.

Первый интеграл уравнения (13)

$$\dot{u} = \pm\sqrt{Cu^2 - 2\gamma u - 2\delta}, \tag{14}$$

где C – произвольная постоянная.

Предположим сначала, что $\gamma\delta \ne 0$ и рассмотрим следующие три случая.

1-й случай. $C = 0$. Проинтегрировав уравнение (14), получаем [8]

$$\mp\frac{1}{\gamma}\sqrt{-2\gamma u - 2\delta} = \xi + C_1,$$

откуда

$$u = -\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\gamma}{2}(\xi + C_1)^2 = -\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\gamma}{2}(\ln x + C_1)^2,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Это решение соответствует нормальному конусу $\mathbf{U}^*$.

2-й случай. Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, равен нулю, т.е. $C = -\frac{\gamma^2}{2\delta}$. Проинтегрировав уравнение (14), получаем

$$u = -\frac{2\delta}{\gamma} + C_1 e^{\pm i\gamma\xi/\sqrt{2\delta}} = -\frac{2\delta}{\gamma} + C_1 x^{\pm i\gamma/\sqrt{2\delta}},$$

$$C_1 \ne 0.$$

Это решение соответствует нормальному конусу $\mathbf{U}^*$ только при $\frac{\gamma}{\sqrt{2\delta}} \in \mathbb{R}$. В этом случае $\mathrm{Re}\,k_{1,2} = 1$, где $k_{1,2}$ – корни характеристического многочлена $\nu(k)$ оператора (9).

3-й случай. $C \ne 0$ и дискриминант не равен нулю, т.е. $C \ne -\frac{\gamma^2}{2\delta}$. Решения уравнения (14) имеют вид

$$u = \frac{\gamma}{C} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\gamma}{C}\right)^2 + \frac{2\delta}{C}}\left(x^{\sqrt{C}}C_1 + x^{-\sqrt{C}}C_1^{-1}\right),$$

$$C_1 \ne 0.$$

Эти решения соответствуют нормальному конусу $\mathbf{U}^*$ только при вещественном отрицательном C, т.е. $C < 0$.

Пусть теперь $\gamma \ne 0$, $\delta = 0$. Тогда случай 2 невозможен, а случаи 1 и 3 сохраняются, только в соответствующие формулы надо подставить $\delta = 0$.

Пусть теперь $\gamma = 0$, $\delta \ne 0$. Уравнение (14) принимает вид

$$\dot{u} = \pm\sqrt{Cu^2 - 2\delta}. \tag{15}$$

Случай 2 опять невозможен; в случае 1, проинтегрировав уравнение (15), получаем решения

$$u = \pm\sqrt{-2\delta}(\xi + C_1) = \pm\sqrt{-2\delta}(\ln x + C_1).$$

Эти решения соответствуют конусу $\mathbf{U}^*$. В случае 3 решения сохраняются, только надо подставить $\gamma = 0$.

Если $\gamma = \delta = 0$, то ребро $G_4^{(1)}$ (рис. 2) отсутствует, зато уравнение (7) имеет двукратное решение $z = 0$, т.е. уравнение (1) имеет решение $y = 1$.

Теперь продолжим найденные решения укороченного уравнения (8) как разложения решений полного уравнения (3). Согласно критерию из [2], в случае 1 решения укороченного уравнения (8) продолжаются в виде сложных разложений; в случаях 2 и 3 – в виде полуэкзотических разложений согласно [3].

Сформулируем все эти результаты в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. *При $x \to 0$ в случае $\gamma\delta \neq 0$ решения уравнения* (3) *образуют*:

семейство степенных разложений $\mathcal{H}_1$ (10);

семейство степенно-логарифмических разложений $\mathcal{H}_2$ (11);

семейство сложных разложений

$$\mathcal{H}_3: y = 1 - \frac{\delta}{\gamma}x - \frac{\gamma}{2}(\ln x + C)^2 x + \sum_{p=2}^{\infty} \varphi_p x^p, \qquad (16)$$

где C — произвольная комплексная постоянная, φ_p — ряды по убывающим степеням $\ln x$ *с однозначно определенными комплексными коэффициентами*;

три семейства полуэкзотических разложений

$$\mathcal{H}_1^\tau: y = 1 + \left(-\frac{2\delta}{\gamma} + Cx^{i\tau\gamma/\sqrt{2\delta}}\right)x + \sum_{\mathrm{Re}\, s > 1} c_s x^s,$$

$$\frac{\gamma^2}{\delta} \in \mathbb{R}_+, \quad \tau = \pm 1, \quad C \neq 0; \qquad (17)$$

$$\mathcal{H}_4: y = 1 + \left(c_r x^{ir} - \frac{\gamma}{r^2} + \frac{\gamma^2 - 2\delta r^2}{4c_r r^4}x^{-ir}\right)x + \sum_{\mathrm{Re}\, s > 1} c_s x^s,$$

$$r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad c_r \in \mathbb{C},$$

r и c_r — произвольные постоянные. Семейства $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1^\tau$, $\mathcal{H}_2$ *и* $\mathcal{H}_3$ *— однопараметрические, а семейство* $\mathcal{H}_4$ *двухпараметрическое* (*по c_r и r*).

В случае $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ имеются (*однопараметрическое*) *семейство сложных разложений* $\mathcal{H}_3$ (16) *и* (*двухпараметрическое*) *семейство полуэкзотических разложений* $\mathcal{H}_4$ (17) (*в эти формулы надо подставить* $\delta = 0$).

В случае $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$ имеются два (*однопараметрических*) *семейства сложных разложений*

$$\mathcal{H}_j: y = 1 + (-1)^j\sqrt{-2\delta}(\ln x + C)x + \sum_{p=2}^{\infty} \varphi_p x^p,$$

$$j = 5, 6,$$

где C — произвольная комплексная постоянная, φ_p — ряды по $\ln x$ *с однозначно определенными комплексными коэффициентами и* (*двухпараметрическое*) *семейство полуэкзотических разложений* $\mathcal{H}_4$ (17) (*в формулу* (17) *надо подставить* $\delta = 0$).

Итак, ребру $G_4^{(1)}$ (рис. 2) соответствуют восемь семейств разложений $\mathcal{H}_1$ – $\mathcal{H}_6$, $\mathcal{H}_1^\tau$. Семейства $\mathcal{H}_1$ – $\mathcal{H}_3$ аналогичны семействам, найденным для нижнего ребра многоугольника третьего уравнения Пенлеве [5, 6].

3. РАЗЛОЖЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РЕБРУ $G_3^{(1)}$ И ЕГО ВЕРШИНАМ

Рассмотрим ребро $G_4^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$-x^2zz'' - x^2z^2z'' + \frac{3}{2}x^2z(z')^2 + x^2(z')^2 - xzz' - xz^2z' +$$
$$+ \alpha z^3(z+1)^2 + \beta z^3 = 0. \qquad (18)$$

Л е м м а 1. *После замены* $(y, a, c) = (-z, -\alpha, \beta)$ *и деления на $2z$ уравнение* (2.3.1) *из* [4], *которое имеет вид*

$$2x^2y(y')^2 - 3x^2y^2(y')^2 - 2xy^2y' + 2xy^3y' - 2x^2y^2y'' +$$
$$+ 2x^2y^3y'' - 2ay^4 + 2cy^4 + 4ay^5 - 2ay^6 = 0, \qquad (19)$$

перейдет в уравнение (18).

Таким образом, мы можем получить первый член и узнать характер разложений, соответствующих ребру $G_3^{(1)}$, вершине $G_4^{(0)} = (0, 2)$, а также вершине $G_3^{(0)} = (0, 3)$ в случае $\alpha = 0$. Поскольку нормальные конусы этих вершин для многоугольников пятого и шестого уравнений Пенлеве совпадают, а также совпадают базисы решеток носителей уравнений, то из леммы 1 этой работы и теорем 2.2.1, 2.3.1, 3.2.1 и 3.4.1 из [4] следует

Т е о р е м а 2. *При $x \to 0$ существуют следующие 22 семейства локальных разложений решений исходного уравнения* (3):

$\mathcal{A}_0$ — *степенное, двухпараметрическое, существует при всех значениях параметров* α, β, γ, δ, *имеет вид*

$$y = 1 + c_r x^r + \ldots,$$

где $0 < \mathrm{Re}\, r < 1$, *если* $|\gamma| + |\delta| \neq 0$ *и* $0 < \mathrm{Re}\, r$, *если* $\gamma = \delta = 0$;

$\mathcal{B}_0^\tau$, $\tau = \pm 1$ — *экзотические, двухпараметрические, при* $\alpha \neq 0$;

$\mathcal{B}_1$ — *степенное, при* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathrm{Re}(\sqrt{2\beta} - \sqrt{-2\alpha}) \notin \mathbb{Z}$;

$\mathcal{B}_2$ — *степенное, при* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathrm{Re}(\sqrt{2\beta} + \sqrt{-2\alpha}) \notin \mathbb{Z}$ *или* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$;

$\mathcal{B}_1$ — *степенно-логарифмическое, однопараметрическое, при* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathrm{Re}(\sqrt{2\beta} - \sqrt{-2\alpha}) \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

$\mathcal{B}_2$ — *степенно-логарифмическое, однопараметрическое, при* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathrm{Re}(\sqrt{2\beta} + \sqrt{-2\alpha}) \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *или* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$;

$\mathcal{B}_j^\tau$, $\tau = \pm 1$, $j = 1, 2$, — *экзотические, однопараметрические, при* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\mathrm{Re}(\sqrt{2\beta} + (-1)^j\sqrt{-2\alpha}) = 0$;

$\mathcal{B}_3$ – *сложное, однопараметрическое, существует при* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$;

$\mathcal{B}_4$, $\mathcal{B}_5$ – *сложные, однопараметрические, при* $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha + \beta \neq 0$;

$\mathcal{B}_6$ – *степенное, однопараметрическое, при* $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{-2\alpha} \neq 0$;

$\mathcal{B}_6^\tau$, $\tau = \pm 1$ – *экзотические, однопараметрические, при* $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\operatorname{Re}\sqrt{-2\alpha} = 0$;

$\mathcal{B}_7^\tau$, $\tau = \pm 1$, – *экзотические, двухпараметрические, при* $\alpha = 0$;

$\mathcal{B}_8$, $\mathcal{B}_9$ – *степенные, однопараметрические, при* $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$;

$\mathcal{B}_{10}$ – *степенное, однопараметрическое, при* $\alpha = \beta = 0$;

$\mathcal{A}_1$ (*семейство, обозначенное через* $\mathcal{C}_0^\infty$ *в работе* [4]) – *степенное, однопараметрическое, при* $\alpha = 0$;

$\mathcal{A}_2$ – *степенное, однопараметрическое, при* $\beta = 0$, *получается симметрией* (4) *из семейства* $\mathcal{A}_1$.

Замечание 1. В [4] доказательства существования всех семейств, указанных в теореме 2, кроме семейства $\mathcal{B}_{10}$, используют только свойства укороченного уравнения (19), которое эквивалентно уравнению (18). Поэтому существование этих семейств у пятого уравнения Пенлеве следует из леммы 1. Только доказательство существования семейства $\mathcal{B}_{10}$ для шестого уравнения Пенлеве в [4] использует дифференциальные мономы, которые не входят в укороченное уравнение (19). Поэтому существование семейства $\mathcal{B}_{10}$ пятого уравнения Пенлеве не следует из леммы 1. Но доказательство существования семейства $\mathcal{B}_{10}$ для пятого уравнения Пенлеве дословно повторяет аналогичное доказательство из [4].

Кроме того, при $\alpha = 0$ и при $\beta = 0$ имеются исключительные решения уравнения (7): $y = \infty$ и $y = 0$ соответственно.

Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве при $x \to \infty$ изучены в [7]. Подробные выкладки и доказательства по этому сообщению см. в [8]. Ранее известные разложения решений пятого уравнения Пенлеве изложены в книге [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11–01–00023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.
2. *Брюно А.Д.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 6. С. 730–733.
3. *Брюно А.Д.* // ДАН. 2007. Т. 416. № 6. С. 583–587.
4. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* // Тр. ММО. 2010. Т. 71. С. 6–118.
5. *Брюно А.Д., Гриднев А.В.* Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препр. № 51. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2003.
6. *Брюно А.Д., Гриднев А.В.* Нестепенные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препр. № 10. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010.
7. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препр. № 39. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010.
8. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препр. № 72. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010.
9. *Gromak V.I., Laine I., Shimotoura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plane. B.; N.Y.: Walter de Gruyter, 2002. 303 p.