Алгебра и анализ
Том 20 (2008), №2

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРЫ (МОДИФИЦИРОВАННОГО) УРАВНЕНИЯ ОТРАЖЕНИЙ $GL(m|n)$ ТИПА

© Д. И. ГУРЕВИЧ, П. Н. ПЯТОВ, П. А. САПОНОВ

Пусть $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ есть решение квантового уравнения Янга–Бакстера, удовлетворяющее условию Гекке. Тогда ряд Гильберта–Пуанкаре, отвечающий R-внешней алгебре пространства V, является в общем случае отношением двух полиномов степени m и n. Мы будем называть R симметрией Гекке $GL(m|n)$ типа.

При дополнительном условии кособратимости симметрии R мы строим жесткую квазитензорную категорию $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$, порожденную пространством V и дуальным к нему пространством V^*, и вычисляем некоторые числовые характеристики объектов этой категории. Кроме того, в алгебре модифицированного уравнения отражений, связанного с симметрией R, мы вводим структуру твистованной биалгебры и строим представление алгебры уравнения отражений в категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$.

Для частного случая симметрии R, связанной с квантовой группой $U_q(sl(m))$, мы предъявляем Пуассонову структуру, возникающую в квазиклассическом пределе алгебры модифицированного уравнения отражений, и вычисляем соответствующий член спаривания, определяемого категорным (квантовым) следом.

§1. Введение

Алгебра уравнения отражений является составной частью теории интегрируемых систем с границей. Она получила свое название от уравнения, описывающего факторизованное рассеяние частиц на полупрямой (см. работу [C], в которой впервые появилось уравнение отражений, зависящее от спектрального параметра).

Ключевые слова: алгебра (модифицированного) уравнения отражений, твист, симметрия Гекке, ряд Гильберта–Пуанкаре, би-ранг, категория Шура–Вейля, (квантовый) след, (квантовая) размерность, твистованная биалгебра.

Работа Д. Гуревича частично поддержана грантом ANR-05-BLAN-0029-01, работа П. Пятова и П. Сапонова частично финансировалась за счет гранта РФФИ 05-01-01086.

Согласно опеределению (см. [KS]), алгеброй уравнения отражений называется ассоциативная алгебра с единицей над полем[1] $\mathbb{K}$, порожденная элементами l_i^j, $1 \le i, j \le N$, которые подчиняются следующим квадратичным перестановочным соотношениям

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 = L_1R_{12}L_1R_{12}.$$

Здесь $L_1 = L \otimes I$, где $L = \|l_i^j\|$ является матрицей, составленной из генераторов алгебры уравнения отражений. Линейный оператор $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ представляет собой обратимое решение квантового уравнения Янга-Бакстера (твист)

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}\,, \tag{1.1}$$

где V есть конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = N$. Индексы оператора R нумеруют пространство (или пространства), в которых данный оператор нетривиально действует. Например, R_{12} и R_{23} в вышеприведенном равестве обозначают такие операторы в тензорной степени $V^{\otimes 3}$: $R_{12} = R \otimes I$, $R_{23} = I \otimes R$.

В настоящее время известны различные модификации алгебры уравнения отражений (см. [KS]), имеющие приложения в математической физике и некоммутативной геометрии. Алгебра уравнения отражений, связанная с квантовой группой $U_q(sl(m))$, возникает, например, при построении q-аналога дифференциального исчисления на группах $GL(m)$ и $SL(m)$ (см. [FP]). В этой конструкции она трактуется как алгебра конечных сдвигов, порожденных q-аналогами экспоненцированных левоинвариантных векторных полей на соответствующей группе.

В примере, связанном с квантовой группой $U_q(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли некоторой классической группы Ли G, надлежащий фактор алгебры уравнения отражений играет роль деформации (квантования) координатного кольца $\mathbb{K}[G]$. Соответствующая скобка Пуассона была введена М. Семеновым-Тянь-Шанским.[2]

[1] В основном мы будем работать с полем комплексных чисел $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, но некоторые результаты справедливы и в случае вещественного поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

[2] Заметим, что в алгебре функций любой классической группы Ли G существует другая скобка Пуассона, открытая Е. Скляниным. Квантование алгебры функций с этой скобкой дает фактор-алгебру так называемой алгебры RTT (см. [FRT]). Эти два квантовых аналога пространства $\mathbb{K}[G]$ связаны друг с другом преобразованием („transmutation procedure"), введенным Ш. Маджидом (см. монографию [M] и содержащиеся там ссылки). В работе [IOP] был предложен единый подход к описанию подобных квантовых алгебр, основанный на понятии пары совместимых R-матриц (см. также [GPS1, GPS2], где этот подход распространен на случай супер-алгебр).

В настоящей статье мы будем работать с решениями уравнения Янга–Бакстера (1.1), относящимися к *Геккевскому типу*, т.е. удовлетворяющими дополнительному условию

$$(R - q\,I)(R + q^{-1}\,I) = 0\,, \tag{1.2}$$

где ненулевой числовой параметр $q \in \mathbb{K}$ предполагается фиксированным в *общем положении*. По определению это означает, что значение q не принадлежит счетному множеству *нетривиальных* корней из единицы, т.е. $q^k \neq 1$, $k = 2, 3, \ldots$, но значение $q = 1$ не запрещено. Как следствие этого выбора q-аналоги всех натуральных чисел отличны от нуля

$$k_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

В дальнейшем любой твист R, удовлетворяющий условию (1.2), будет называться *симметрией Гекке*.

Особый интерес для нас будут представлять семейства симметрий Гекке R_q, аналитически зависящих от параметра q в некоторой окрестности единицы числового поля $1 \in \mathbb{K}$, и таких, что при $q = 1$ соответствующая симметрия $R = R_1$ является инволютивным оператором $R^2 = I$.

Хорошо известный пример такого семейства дается R-матрицей Дринфельда–Джимбо, возникающей из квантовой группы $U_q(sl(m))$

$$R_q = \sum_{i,j=1}^{m} q^{\delta_{ij}}\, h_i^j \otimes h_j^i + \sum_{i<j}^{m} (q - q^{-1})\, h_i^i \otimes h_j^j \tag{1.3}$$

где элементы h_i^j образуют естественный базис пространства эндоморфизмов $\mathrm{End}(V)$

$$h_i^j(x_k) = \delta_k^j\, x_i\,,$$

соответствующий данному базису $\{x_k\}$ пространства V. Заметим, что при $q = 1$ приведенный выше твист R_q переходит в обычную перестановку P.

Симметрию Гекке (1.3) и все связанные с ней объекты мы будем называть *стандартными*. Существует большое число симметрий Гекке, не только отличающихся от стандартной, но даже не являющихся деформациями перестановки, т.е. $R_1 \neq P$ (см. [G3]).

Рассмотрим алгебру уравнения отражений, отвечающую стандартной $U_q(sl(m))$ симметрии Гекке (1.3). У этой алгебры имеются некоторые очень важные свойства, отличающие ее от алгебр, связанных с другими квантовыми группами $U_q(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} \neq sl(m)$.

Прежде всего, рассматриваемая алгебра представляет собой q-деформацию коммутативной алгебры $\mathrm{Sym}\,(gl(m)) = \mathbb{K}[gl(m)^*]$. Другими словами, мы имеем деформационную алгебру, не налагая никаких дополнительных условий. Во-вторых, выполняя линейный сдвиг на единицу (пропорциональный новому параметру $\hbar$) некоторых генераторов алгебры уравнения отражений, мы приходим к квадратично-линейным соотношениям для сдвинутого набора генераторов. Поэтому в таком базисе алгебра уравнения отражений может трактоваться как „двойная деформация" исходной коммутативной алгебры $\mathbb{K}[gl(m)^*]$, параметризуемая q и $\hbar$. Эту форму мы будем называть алгеброй модифицированного уравнения отражений и обозначать $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$. Полагая параметр сдвига $\hbar = 0$, мы возвращаемся к алгебре немодифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$.

Фиксация параметра q в единице переводит алгебру $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ в универсальную обертывающую алгебру $U(gl(m)_\hbar)$, где обозначение $\mathfrak{g}_\hbar$ отражает замену скобки Ли $[\,,\,]$ алгебры $\mathfrak{g}$ на скобку $\hbar[\,,\,]$. Исходная коммутативная алгебра $\mathbb{K}[gl(m)^*]$ получается при двойной специализации параметров алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ в точках $\hbar = 0$ и $q = 1$.

Алгебра $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ (как и $\mathcal{L}(R_q)$) может быть превращена в модуль над $U_q(sl(m))$. При этом алгебраическая структура $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ оказывается $U_q(sl(m))$-эквивариантной (ковариантной). Это означает, что действие квантовой группы перестановочно с умножением в алгебре уравнения отражений

$$M(x\cdot y) = M_{(1)}(x)\cdot M_{(2)}(y)\,, \quad \forall\, M \in U_q(sl(m))\,, \quad \forall\, x,y \in \mathcal{L}(R_q,\hbar),$$

где мы воспользовались обозначениями Свидлера для коумножения в квантовой группе: $\Delta(M) = M_{(1)} \otimes M_{(2)}$.

В квазиклассическом пределе упомянутая выше двойная деформация алгебры $\mathbb{K}[gl(m)^*]$ порождает пучок скобок Пуассона следующего вида:

$$\{\,,\}_{PL,r} = a\,\{\,,\}_{PL} + b\,\{\,,\}_r\,, \quad a,b \in \mathbb{K}, \tag{1.4}$$

где $\{\,,\}_{PL}$ является линейной скобкой Пуассона–Ли, определяемой алгеброй $gl(m)$, а $\{\,,\}_r$ представляет собой естественное расширение скобки Семенова-Тянь-Шанского на линейное пространство $gl(m)^*$.

Пуассоновы структуры (1.4) детально рассматриваются в §7 настоящей работы. Там же кратко обсуждается их роль в определении „квантовых орбит" $\mathcal{O} \subset gl(m)^*$. Общий метод построения подобных квантовых орбит мы иллюстрируем на примере двумерной сферы. В отличие от других определений квантовых однородных пространств, в нашем подходе квантовые орбиты задаются как некоторые факторы алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ и по своим свойствам во многом аналогичны так называемой „fuzzy“ сфере:

$$\mathcal{S}L^c(\hbar) = U(su(2)_\hbar)/\langle C - c\rangle,$$

где C есть квадратичный элемент Казимира обертывающей алгебры $U(su(2)_\hbar)$. Например, как хорошо известно из теории представлений, существует дискретный набор значений $c_k \in \mathbb{K}$ параметра c такой, что любая из алгебр $\mathcal{S}L^{c_k}(\hbar)$ имеет конечномерное представление в линейном пространстве V_k, а отображение $\mathcal{S}L^{c_k}(\hbar) \to \mathrm{End}(V_k)$ является $su(2)$-морфизмом. Аналогичное свойство имеется и у упомянутых выше фактор-алгебр алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ с тем отличием, что соответствующие пространства V_k являются объектами *квазитензорной* категории. В квазитензорных категориях объекты характеризуются их квантовой размерностью, которая определяется через категорный (квантовый) след. Необходимость деформации обычного следа является одной из основных особенностей предлагаемого подхода к описанию квантовых однородных пространств. В заключительной части §7 описывается квазиклассический член некоторого спаривания, определяемого квантовым следом в случае стандартной симметрии Гекке.

В общих чертах в данной работе мы рассматриваем три основные проблемы. Первая из них заключается в классификации всех (кособратимых) симметрий Гекке $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$. Ключевой объект в решении этой проблемы — ряд Гильберта–Пуанкаре $P_-(t)$, отвечающий так называемой „R-внешней алгебре“ пространства V (точное определение приведено в §3). Хотя исчерпывающая классификация всех возможных форм этого ряда пока не построена, тем не менее известно, что ряд Гильберта–Пуанкаре $P_-(t)$ любой симметрии Гекке представляет собой рациональную функцию[3] [H, D]. Упорядоченную пару целых чисел $(m|n)$, где m (соответственно n) есть степень полинома $N(t)$ в числителе $P_-(t)$ (соответственно полинома $D(t)$ в знаменателе $P_-(t)$), мы будем называть *бирангом* симметрии R (или соответствующего пространства V). Би-ранг, в частности, входит в наше обозначение для квазитензорной категории Шура–Вейля $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$, порожденной пространством V.

[3]Если ряд $P_-(t)$ является полиномом, мы будем называть симметрию R *четной*. Этот полином может отличаться от классического полинома $(1+t)^n$, $n = \dim V$, отвечающего случаю, когда R совпадает с обычной перестановкой. Например, в работе [G3] классифицированы все кособратимые симметрии Гекке с рядом $P_-(t) = 1 + nt + t^2$. Кроме того, в этой работе предложен метод „склеивания“ таких симметрий, который дает возможность строить кособратимые симметрии Гекке с другими нестандартными рядами Гильберта–Пуанкаре.

Построение категории Шура–Вейля $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ является второй проблемой, рассматриваемой в нашей статье. Объектами этой категории служат прямые суммы векторных пространств $V_\lambda \otimes V_\mu^*$. Здесь V есть исходное (базисное) векторное пространство, связанное с кособратимой симметрией Гекке R, V^* — пространство дуальное к V, символы λ и μ обозначают произвольные разбиения (диаграммы Юнга) натуральных чисел. Отображение $V \to V_\lambda$ представляет собой функтор Шура, отвечающий симметрии Гекке R (его классическая версия обсуждается в работе [FH]). Отображение $V^* \to V_\mu^*$ определяется аналогично. Отметим, что моноидальная квазитензорная жесткая категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ (см. определение в [CP]) не является абелевой.

Мы вычисляем некоторые числовые характеристики объектов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$, в частности, их размерности (как классические, так и квантовые). Классические размерности существенно зависят от конкретной формы симметрии Гекке и являются функциями от корней полиномов $N(t)$ и $D(t)$, определенных выше. Квантовые же размерности зависят только от значения би-ранга $(m|n)$. В некотором смысле, категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ похожа на тензорную категорию конечномерных $U(gl(m|n))$-модулей.

Третья проблема, решение которой предлагается в нашей работе, заключается в построении теории представлений алгебры модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ в категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Поскольку для $q \neq 1$ алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ и $\mathcal{L}(R_q)$ изоморфны (фактически, мы имеем одну и ту же алгебру, записанную в двух различных наборах базисных генераторов), мы автоматически получаем теорию представлений алгебры уравнения отражений[4] $\mathcal{L}(R_q)$.

Отметим, что некоторые типы представлений алгебры уравнения отражений уже изучены, главным образом для случая четной симметрии Гекке (би-ранг $(m|0)$) [K, Mu1, GS2, S]. В отличие от процитированных работ мы будем рассматривать алгебру модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$, ассоциированную с кособратимой симметрией Гекке общего вида (т.е. имеющей би-ранг $(m|n)$), и определим действие алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ на объектах категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ таким образом, что соответствующие представления будут эквивариантными (см. §6).

В частности, мы разберем пример ,,присоединенного" представления, т.е. представления ρ_{ad} алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ в линейной оболочке ее генераторов. В случае, когда симметрия Гекке совпадает с супер-перестановкой в

[4] В точке $q = 1$ изоморфизм $\mathcal{L}(R_q,\hbar) \cong \mathcal{L}(R_q)$ разрушается, поэтому мы предпочитаем рассматривать алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ и $\mathcal{L}(R_q)$ отдельно и использовать для них различные наименования.

Z_2-градуированном линейном пространстве V

$$R:\ V^{\otimes 2}\to V^{\otimes 2}\,,\quad R(x\otimes y)=(-1)^{\bar{x}\,\bar{y}}y\otimes x\,,$$

где x и y есть произвольные однородные элементы пространства V и символ $\bar{z}$ обозначает четность (градуировку) однородного элемента z, алгебра модифицированного уравнения отражений совпадает с универсальной обертывающей алгеброй $U(gl(m|n))$. При этом наше представление ρ_{ad} тождественно обычному присоединенному представлению. Этот факт является одной из причин, по которой мы считаем алгебру $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ подходящим аналогом обертывающей алгебры. Более того, в случае инволютивной симметрии Гекке, соответствующая алгебра модифицированного уравнения отражений превращается в обертывающую алгебру обобщенной алгебры Ли $\mathrm{End}(V)$ (см. §5). Подобные обобщенные алгебры были введены в работе [G1], хорошо известным примером обобщенной алгебры Ли является супер-алгебра Ли.

Другим свойством, указывающим на сходство алгебры модифицированного уравнения отражений и обертывающей алгебры обобщенной алгебры Ли, является структура твистованной биалгебры. Данная структура определяется коумножением Δ и коединицей ε. Вводя матрицу L, матричными элементами которой служат генераторы алгебры модифицированного уравнения отражений (см. §6), действие коумножения на генераторах можно описать следующим правилом:

$$\Delta(L)=L\otimes 1+1\otimes L-(q-q^{-1})L\otimes L\,.$$

При $q=1$ приведенное выше коумножение совпадает с коумножением на генераторах универсальной обертывающей алгебры (обобщенной) алгебры Ли. Заметим, что хотя мы и не определяем отображение антипода в алгебре $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$, категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ ее представлений оказывается замкнутой.

В дополнение к структуре $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$-модуля на объектах категории Шура–Вейля, отвечающей стандартной симметрии Гекке (1.3), можно определить действие квантовой группы $U_q(sl(m))$. Кроме того, q-аналоги супер-групп (см. [KT]) также могут быть представлены в соответствующей категории Шура–Вейля.[5] Однако для кософбратимой симметрии Гекке общего вида алгебра квантовогруппового типа отсутствует,[6] тогда как алгебра (модифицированного) уравнения отражений может быть введена для любой симметрии Гекке.

[5]В работе [Z] предложен другой путь построения представлений q-деформированных алгебр $U(gl(m|n))$, основанный на треугольном разложении.

[6]Попытка явного построения такой алгебры для некоторых четных неквазиклассических симметрий Гекке была предпринята в работе [AG].

Алгебра модифицированного уравнения отражений обладает еще одним преимуществом по сравнению с квантовой группой и ее супер-аналогами. Она более удобна для явного построения проективных модулей над квантовыми орбитами, возникающими рамках метода, предложенного в работах [GS1, GS3]. Мы планируем исследовать эти вопросы в случае общей (не обязательно четной) симметрии Гекке в последующих публикациях.

В заключение отметим различие между решениями уравнения Янга–Бакстера Геккевского типа и решениями типа Бирмана–Венцля–Мураками (к этому типу относятся, в частности, решения, возникающие при квантовании классических групп серий B_n, C_n и D_n). Хотя в последнем случае также не представляет труда определить „твистованную скобку Ли" в пространстве $\mathrm{End}(V)$ (см., например, [DGG]) и ввести соответствующую „универсальную обертывающую алгебру", такая „обертывающая алгебра" не будет, однако, деформацией своего классического аналога и поэтому, с нашей точки зрения, не представляет большого интереса.

Статья организована следующим образом.

В §2 мы воспроизводим формулы R-техники, на которых базируется наше изложение, в частности, вычисление некоторых интересных числовых характеристик изучаемых объектов (часть вспомогательного материала и наиболее громоздкие вычисления вынесены в приложение). §3 посвящен классификации кособратимых симметрий Гекке. В §4 мы строим категорию Шура–Вейля $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$, порождаемую пространством V. Основной объект нашего исследования — алгебра модифицированного уравнения отражений — вводится в §5, в котором также исследуются деформационные свойства этой алгебры. В §6 мы определяем в алгебре модифицированного уравнения отражений структуру твистованной биалгебры, что позволяет нам задать эквивариантное действие алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ на всех объектах категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Там же представлена наша точка зрения на проблему определения твистованных (квантовых) алгебр Ли. §7 содержит анализ некоторых квазиклассических структур.

Благодарности. Авторам приятно выразить свою благодарность сотрудникам и гостям математического Института им. Макса Планка в Бонне, где была написана эта работа, за гостеприимство и творческую атмосферу.

§2. Элементы R-техники

Под термином „R-техника“ мы подразумеваем вычислительные методы, базирующиеся на самых общих свойствах решений квантового уравнения Янга–Бакстера (1.1) (в частности, симметрий Гекке), вне зависимости от их конкретной матричной реализации. В основном мы будем интересоваться так называемыми *кособратимыми* решениями, поскольку в этом случае имеется возможность вычислить многие интересные числовые характеристики симметрий Гекке и связанных с ними объектов.

Твист R (см. (1.1)) называется *кособратимым*, если существует эндоморфизм $\Psi : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$, такой, что

$$\mathrm{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{23} = P_{13} = \mathrm{Tr}_{(2)} \Psi_{12} R_{23}\,, \tag{2.1}$$

где символ $\mathrm{Tr}_{(2)}$ означает вычисление следа по матричным индексам, отвечающим второму сомножителю тензорного произведения $V^{\otimes 3}$. В дальнейшем матрица P будет обозначать обычную перестановку $P(x \otimes y) = y \otimes x$.

Зафиксировав базисы $\{x_i\}$ и $\{x_i \otimes x_j\}$ в пространствах V и $V^{\otimes 2}$ соответственно, мы можем отождествить R (соответственно Ψ) с матрицей $\|R_{ij}^{kl}\|$ (соответственно $\|\Psi_{ij}^{kl}\|$):

$$R(x_i \otimes x_j) = x_k \otimes x_l\, R_{ij}^{kl}\,, \tag{2.2}$$

где верхние индексы относятся к строкам матриц, нижние — к столбцам, и всюду в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В терминах матриц соотношение (2.1) записывается в форме

$$R_{jb}^{ia}\, \Psi_{ak}^{bl} = \delta_k^i \delta_j^l = \Psi_{jb}^{ia}\, R_{ak}^{bl}\,.$$

Определим с помощью Ψ два эндоморфизма B и C пространства V

$$B(x_i) = x_j B_i^j\,, \quad C(x_i) = x_j C_i^j\,,$$

по правилу

$$B_i^j := \Psi_{ki}^{kj}\,, \quad C_i^j := \Psi_{ik}^{jk}\,, \tag{2.3}$$

т.е.

$$B := \mathrm{Tr}_{(1)} \Psi\,, \quad C := \mathrm{Tr}_{(2)} \Psi\,.$$

Если оператор B (или C) обратим, то соответствующий твист R будем называть *строго* кособратимым. Как было показано в [O], твист R строго кособратим тогда и только тогда, когда твист R^{-1} является кособратимым и, кроме того, обратимость B влечет обратимость C и наоборот.

Хорошо известный пример строго кософбратимого твиста дается супер-перестановкой на супер-пространстве $V = V_0 \oplus V_1$, где V_0 и V_1 есть соответственно четная и нечетная компоненты пространства V. В этом примере операторы B и C носят название операторов *четности* и их действие на произвольный вектор $z \in V$ описывается формулами

$$B(z) = C(z) = z_0 - z_1, \quad z = z_0 + z_1 \, .$$

Здесь символ $z_0(z_1)$ обозначает четную (нечетную) компоненту вектора z.

Пусть R является кософбратимым твистом. Перечислим некоторые полезные свойства соответствующих эндоморфизмов Ψ, B и C.

(1) $$\mathrm{Tr}\, B = \mathrm{Tr}\, C,$$

$$\mathrm{Tr}_{(2)}\, B_2\, R_{21} = \mathrm{Tr}_{(2)}\, C_2\, R_{12} = I_1 \, , \tag{2.4}$$

где I представляет собой тождественный автоморфизм пространства V. Эти соотношения непосредственно следуют из определений (2.1) и (2.3).

(2) Эндоморфизмы B и C коммутируют и их произведение есть скалярный оператор

$$B\, C = C\, B = \nu\, I \, , \tag{2.5}$$

где числовой множитель ν отличен от нуля в том и только том случае, когда твист R строго кософбратим (в частности, когда R является кософбратимой симметрией Гекке).

(3) Матричные элементы B и C реализуют одномерное представление так называемой RTT алгебры, ассоциированной с R [FRT]

$$R_{12}B_1B_2 = B_1B_2R_{12}, \qquad R_{12}C_1C_2 = C_1C_2R_{12} \, . \tag{2.6}$$

Прямым следствием вышеприведенных соотношений являются следующие формулы для следов

$$\mathrm{Tr}_{(12)}(B_1B_2R_{12}X_{12}R_{12}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{(12)}(B_1B_2R_{12}^{-1}X_{12}R_{12}) = \mathrm{Tr}_{(12)}(B_1B_2X_{12}),$$

$$\mathrm{Tr}_{(12)}(C_1C_2R_{12}X_{12}R_{12}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{(12)}(C_1C_2R_{12}^{-1}X_{12}R_{12}) = \mathrm{Tr}_{(12)}(C_1C_2X_{12}) \, ,$$

где $X \in \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ есть произвольный эндоморфизм и $\mathrm{Tr}_{(12)}(\dots) = \mathrm{Tr}_{(1)}(\mathrm{Tr}_{(2)}(\dots))$.

(4) Важную роль в дальнейшем изложении будут играть соотношения (доказательство см. в [I, O])

$$\begin{aligned} B_1\Psi_{12} &= R_{21}^{-1}B_2, \qquad \Psi_{12}B_1 = B_2R_{21}^{-1}, \\ C_2\Psi_{12} &= R_{21}^{-1}C_1, \qquad \Psi_{12}C_2 = C_1\, R_{21}^{-1} \, , \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $R_{21} = PR_{12}P$. В случае $\nu \neq 0$, только одна из приведенных выше строк независима в силу условия (2.5).

Пользуясь (2.7) и определением эндоморфизма Ψ, мы получаем следующие важные соотношения:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{(1)}(B_1R_{12}X_2R_{12}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{(1)}(B_1R_{12}^{-1}X_2R_{12}) = \mathrm{Tr}(BX)\, I_2, \\ \mathrm{Tr}_{(2)}(C_2R_{12}X_1R_{12}^{-1}) = \mathrm{Tr}_{(2)}(C_2R_{12}^{-1}X_1R_{12}) = \mathrm{Tr}(CX)\, I_1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $X \in \mathrm{End}(V)$ есть произвольный эндоморфизм пространства V.

На этом мы завершаем сводку технических формул, которые будут использоваться в тексте статьи.

§3. Общая форма симметрии Гекке

В этом параграфе мы обращаемся к проблеме классификации (кособратимых) симметрий Гекке. Основой нашего подхода будут служить теория алгебр Гекке серии A_{k-1} и их R-матричных представлений. Хороший обзор этих вопросов, как и многочисленные ссылки на оригинальные работы, можно найти в [OP1]. Для удобства читателя, мы привели в приложении некоторые основные факты упомянутой теории, необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Зафиксируем некоторую симметрию Гекке $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ и рассмотрим R-симметрическую $\Lambda_+(V)$ и R-кососимметрическую $\Lambda_-(V)$ алгебры пространства V, которые определяются как следующие фактор-алгебры свободной тензорной алгебры $T(V)$:

$$\Lambda_\pm(V) := T(V)/\langle(\mathrm{Im}(q^{\pm 1}\, I_{12} \mp R_{12})\rangle, \qquad I_{12} = I \otimes I\,. \tag{3.1}$$

Символ $\langle J\rangle$ будет в дальнейшем обозначать двусторонний идеал в $T(V)$, порожденный подмножеством $J \subset T(V)$.

Составим далее ряд Гильберта–Пуанкаре алгебр $\Lambda_\pm(V)$:

$$P_\pm(t) := \sum_{k\geq 0} t^k \,\dim\, \Lambda^k_\pm(V)\,, \tag{3.2}$$

где $\Lambda^k_\pm(V) \subset \Lambda_\pm(V)$ есть однородные компоненты степени k.

Приведенное ниже предложение играет решающую роль в классификации возможных форм симметрий Гекке.

Предложение 1. *Пусть R есть произвольная симметрия Гекке, удовлетворяющая уравнениям* (1.1) *и* (1.2) *при некотором общем значении параметра q (см. определение после формулы* (1.2)*). Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Ряды Гильберта–Пуанкаре $P_\pm(t)$ связаны соотношением*
$$P_+(t)\,P_-(-t)=1.$$
2. *Ряд Гильберта–Пуанкаре $P_-(t)$ (и следовательно $P_+(t)$) представляет собой рациональную функцию вида*
$$P_-(t)=\frac{N(t)}{D(t)}=\frac{1+a_1\,t+\ldots+a_m\,t^m}{1-b_1\,t+\ldots+(-1)^n\,b_n\,t^n}=\frac{\prod_{i=1}^m(1+x_it)}{\prod_{j=1}^n(1-y_jt)}\,, \tag{3.3}$$
где коэффициенты a_i и b_i есть натуральные числа, полиномы $N(t)$ и $D(t)$ взаимно просты и все вещественные числа x_i и y_i являются положительными.
3. *Если, кроме того, симметрия Гекке R кособратима, то полиномы $N(t)$ и $D(-t)$ являются возвратными.*[7]

Первое утверждение из приведенного в предложении 1 списка было доказано в работе [G2], второе и третье соответственно в работах [H, Da] и [DH].

Определение 2. Пусть $R:V^{\otimes 2}\to V^{\otimes 2}$ есть кособратимая симметрия Гекке, и пусть натуральные числа m и n представляют собой, соответственно, степени многочленов $N(t)$ и $D(t)$ в числителе и знаменателе рациональной функции $P_-(t)$. Упорядоченную пару натуральных чисел $(m|n)$ будем называть *би-рангом* симметрии R. Если $n=0$ (соответственно $m=0$), симметрия Гекке будет называться *четной* (соответственно *нечетной*). Если обе компоненты би-ранга отличны от нуля, мы будем говорить, что симметрия R относится к общему типу.

Замечание 3. В свете определения 2 любая кособратимая симметрия Гекке является обобщением супер-перестановки, для которой ряд Гильберта–Пуанкаре, как известно, имеет вид $P_-(t)=(1+t)^m(1-t)^{-n}$, где $m=\dim V_0$ и $n=\dim V_1$ — размерности четной и нечетной компонент суперпространства. Такая трактовка симметрий Гекке мотивирована также и сходством соответствующих категорий Шура–Вейля (см. ниже).

Обратимся теперь к некоторым важным следствиям предложения 1. Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Как известно, с помощью симметрии R можно построить представления ρ_R алгебр Гекке $H_k(q)$ серии A_{k-1} (для $k\ge 2$) в однородных компонентах $V^{\otimes p}\subset T(V)$ для всех $p\ge k$:
$$\rho_R:\ H_k(q)\to \mathrm{End}(V^{\otimes p}),\quad p\ge k\,.$$

[7]Напомним, что полином $p(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_nt^n$ с вещественными коэффициентами c_i называется *возвратным*, если $p(t)=t^np(t^{-1})$ или, эквивалентно, $c_i=c_{n-i}$, $0\le i\le n$.

В явном виде эти представления приведены в приложении (см. формулу (A.3)).

В представлении ρ_R примитивные идемпотенты алгебры Гекке $e_a^\lambda \in H_k(q)$, $\lambda \vdash k$, превращаются в проекционные операторы

$$E_a^\lambda(R) = \rho_R(e_a^\lambda) \in \mathrm{End}(V^{\otimes p}), \quad p \geq k\,, \tag{3.4}$$

индекс a перечисляет все стандартные таблицы Юнга (λ, a), которые могут быть построены по данному разбиению λ натурального числа k. Общее число стандартных таблиц, соответствующих разбиению λ, будем обозначать символом d_λ.

Всякое пространство $V^{\otimes p}$, $p \geq 2$, может быть разложено в прямую сумму собственных подпространств приведенных выше проекторов

$$V^{\otimes p} = \bigoplus_{\mu \vdash p} \bigoplus_{a=1}^{d_\mu} V_{(\mu,a)}, \qquad V_{(\mu,a)} = \mathrm{Im}(E_a^\mu)\,. \tag{3.5}$$

В силу соотношения (A.2), проекторы E_a^μ, отличающиеся только значением индекса a, связаны обратимым преобразованием и, следовательно, все подпространства $V_{(\mu,a)}$ с фиксированным разбиением μ и различными значениями a изоморфны друг другу.

При значениях параметра q из общего положения алгебра Гекке $H_k(q)$ изоморфна групповой алгебре $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_k]$ [We]. Опираясь на этот факт, мы можем доказать следующий результат [GLS1, H]:

$$\begin{gathered} V_{(\lambda,a)} \otimes V_{(\mu,b)} = \bigoplus_{\nu} \bigoplus_{d_{ab} \in I_{ab}} V_{(\nu,d_{ab})} \cong \bigoplus_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu\, V_{(\nu,d_0)}, \\ \lambda \vdash p,\ \mu \vdash k\,, \nu \vdash (p+k), \end{gathered} \tag{3.6}$$

где неотрицательные целые числа $c_{\lambda\mu}^\nu$ представляют собой коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона (см. [Mac]), индекс d_{ab} таблиц Юнга принимает значения из некоторого подмножества $I_{ab} \subset \{1, 2, \ldots, d_\nu\}$, которое зависит от значений исходных индексов a и b. Число d_0 в последнем равенстве относится к индексу *любой* фиксированной таблицы Юнга из множества (ν, d), $1 \leq d \leq d_\nu$. Смысл этого равенства состоит в следующем. Хотя слагаемые $V_{(\nu,d_{ab})}$ прямой суммы зависят от конкретных значений индексов a и b перемножаемых пространств, *общее* число этих слагаемых (количество элементов множества I_{ab}) от a и b не зависит, полностью определяется разбиениями λ, μ и ν и равно значению коэффициента Литтлвуда–Ричардсона $c_{\lambda\mu}^\nu$. Следовательно, благодаря упомянутому выше изоморфизму $V_{(\nu,d_{ab})} \cong V_{(\nu,d_0)}$, мы можем заменить сумму подпространств по индексу d_{ab} прямой суммой соответствующего числа $c_{\lambda\mu}^\nu$ копий пространства $V_{(\nu,d_0)}$ (см. [GLS1]).

Примером подпространств $V_{(\lambda,a)}$ служат однородные компоненты $\Lambda_+^k(V)$ и $\Lambda_-^k(V)$ алгебр $\Lambda_\pm(V)$ (3.1). Они являются образами проекторов $E^{(k)}$ и $E^{(1^k)}$, отвечающих однострочным и одностолбцовым разбиениям (k) и (1^k) соответственно. Этот важный факт позволяет вычислить размерности над основным полем $\mathbb{K}$ всех пространств $V_{(\lambda,a)}$, при условии, что ряд Гильберта–Пуанкаре $P_-(t)$ известен. Поскольку все пространства $V_{(\lambda,a)}$, отвечающие одному разбиению λ изоморфны, мы будем обозначать их $\mathbb{K}$-размерности символом $\dim V_\lambda$.

Чтобы продвинуться дальше, нам будет необходимо приведенное ниже следствие предложения 1.

Следствие 4. *Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$, и ряд Гильберта-Пуанкаре соответствующей алгебры $\Lambda_-(V)$ дается выражением* (3.3). *Тогда размерности подпространств $V_{(k)}$ и $V_{(1^k)}$, определяемых разбиениями (k) и (1^k) для всех $k \in \mathbb{N}$, задаются формулами*

$$\dim V_{(k)} = s_{(k)}(x|y) := \sum_{i=0}^{k} h_i(x)e_{k-i}(y), \tag{3.7}$$

$$\dim V_{(1^k)} = s_{(1^k)}(x|y) := \sum_{i=0}^{k} e_i(x)h_{k-i}(y)\,, \tag{3.8}$$

где h_i и e_i являются соответственно полной симметрической и элементарной симметрической функциями своих аргументов.

Доказательство. Мы докажем только первую из приведенных выше формул, поскольку доказательство второй формулы проводится совершенно аналогично.

Поскольку, как уже отмечалось выше, $V_{(k)} = \Lambda_+^k(V)$, то размерность пространства $V_{(k)}$ может быть найдена путем k-кратного дифференцирования ряда $P_+(t)$ в точке $t = 0$

$$\dim V_{(k)} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}P_+(t)_{|t=0}.$$

Пользуясь связью $P_+(t)P_-(-t) = 1$ (см. Предложение 1) и соотношением (3.3), представим ряд $P_+(t)$ в виде

$$P_+(t) = \prod_{i=1}^{n}(1+y_it)\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(1-x_jt)} = \mathcal{E}(y|t)\mathcal{H}(x|t),$$

где $\mathcal{E}(\cdot)$ и $\mathcal{H}(\cdot)$ обозначают производящие функции для элементарных и полных симметрических функций конечного числа соответствующих аргументов [Mac]:

$$e_k(y) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} y_{i_1}\dots y_{i_k} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{E}(y|t)_{|t=0}$$

$$h_k(x) = \sum_{1\le j_1\le\dots\le j_k\le m} x_{j_1}\dots x_{j_k} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{H}(x|t)_{|t=0}\,.$$

Вычисляя k-ю производную от $P_+(t)$ в точке $t=0$ с учетом этих соотношений, мы придем к равенству (3.7). □

Отметим, что полиномы $s_{(k)}(x|y)$ и $s_{(1^k)}(x|y)$, определяемые равенствами (3.7) и (3.8), принадлежат классу так называемых супер-симметрических полиномов от наборов аргументов $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$. По определению [St], полином $p(u|v)$ от двух наборов аргументов называется *супер-симметрическим*, если он симметрический относительно перестановок аргументов внутри наборов $\{u_i\}$ и $\{v_j\}$ и, кроме того, если спецификация $u_1=v_1=t$ приводит к результату, не зависящему от t. Полиномы $s_{(k)}(x|y)$ и $s_{(1^k)}(x|y)$, очевидно, удовлетворяют этому определению, если положить, например, $u=x$, $v=-y$ (прямое следствие так называемых соотношений Вронского).

Кроме того, набор полиномов $s_{(k)}(x|y)$ (соответственно $s_{(1^k)}(x|y)$) для всех $k\in\mathbb{N}$, является супер-симметрическим аналогом набора полных симметрических (соответственно элементарных симметрических) функций конечного числа переменных. В частности, набор таких полиномов генерирует все кольцо супер-симметрических полиномов, зависящих от переменных $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$. Это кольцо обладает $\mathbb{Z}$-базисом, образованным супер-симметрическими функциями Шура $s_\lambda(x|y)$, которые выражаются в терминах генераторов $s_{(k)}(x|y)$ (или $s_{(1^k)}(x|y)$) посредством детерминантных тождеств Якоби-Труди [Mac].

Супер-симметрические функции Шура определяют значения размерностей $\dim V_\lambda$. Для формулировки соответствующего результата, нам необходимо еще одно определение.

Определение 5 (см. [BR]). Зафиксировав произвольные целые числа $m\ge 0$ и $n\ge 0$, рассмотрим разбиения $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$, удовлетворяющие ограничению $\lambda_{m+1}\le n$. Множество всех таких разбиений будем обозначать символом $\mathsf{H}(m,n)$ и любое разбиение $\lambda\in\mathsf{H}(m,n)$ из этого множества будем называть *крюком* типа $\mathsf{H}(m,n)$.

Предложение 6 (см. [H]). *Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Тогда размерности* $\dim V_\lambda$ *подпространств, входящих в разложение* (3.5)*, определяются следующими правилами:*

1. *Для любого разбиения* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathsf{H}(m,n)$ *размерность* $\dim V_\lambda \neq 0$ *и выражается формулой*
$$\dim V_\lambda = s_\lambda(x|y)\,. \tag{3.9}$$
Здесь
$$s_\lambda(x|y) = \det \| s_{(\lambda_i - i + j)}(x|y) \|_{1 \le i,j \le k}\,,$$
где при $k \geq 0$ *супер-симметрическая функция* $s_{(k)}(x|y)$ *определяется выражением* (3.7)*, а при* $k < 0$ $s_{(k)} := 0$.
2. *Для произвольного разбиения* λ *имеем*
$$\dim V_\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \notin \mathsf{H}(m,n)\,.$$

Доказательство. Принимая во внимание, что
$$\dim(U \otimes W) = \dim U \dim W, \qquad \dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$$
и вычисляя размерности пространств в обеих частях равенства (3.6), находим
$$\dim V_\lambda \dim V_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \dim V_\nu\,.$$
После этого доказываемый результат (3.9) непосредственно получается простым индуктивным рассуждением на основе Следствия 4 (подробности можно найти, например, в работе [GPS2]).

Второе утверждение, сформулированное в условии предложения 6, вытекает из свойств супер-симметрических функций Шура $s_\lambda(x|y)$, установленных в [BR] (см. также работу [H]). □

В завершение раздела представим еще одну важную числовую характеристику симметрии Гекке, которая может быть выражена через ее би-ранг.

Предложение 7. *Пусть кособратимая симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Тогда*
$$Tr\, B = \mathrm{Tr}\, C = q^{n-m}(m-n)_q\,. \tag{3.10}$$

Предложение доказывается непосредственными достаточно громоздкими вычислениями, поэтому доказательство вынесено в приложение.

Следствие 8. *Для кособратимой симметрии Гекке, имеющей би-ранг $(m|n)$, числовой множитель ν в формуле* (2.5) *равен* $q^{2(n-m)}$*, то есть*
$$BC = CB = q^{2(n-m)} I\,.$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что если R есть кособратимая симметрия Гекке, то это же справедливо и в отношении оператора $R_{21} = PR_{12}P$. Поэтому

$$R_{21}^{-1} = R_{21} - (q - q^{-1})\, I_{21}\,.$$

Вычисляя $\mathrm{Tr}_{(2)}$ от обеих частей равенства $B_1\Psi_{12} = R_{21}^{-1}B_2$ (см. (2.7)), получаем

$$\begin{aligned} B_1C_1 \;&=\; \mathrm{Tr}_{(2)}\,(B_1\Psi_{12}) = \mathrm{Tr}_{(2)}(R_{21}^{-1}B_2) \\ &=\; \mathrm{Tr}_{(2)}((R_{21} - (q - q^{-1})\, I_{21})B_2) = I_1 - (q - q^{-1})\, I_1 \mathrm{Tr}(B) = q^{2(n-m)}\, I_1. \end{aligned}$$

□

§4. Квазитензорная категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$

Наша ближайшая цель заключается в построении квазитензорной категории векторных пространств, которую мы будем называть *категорией Шура–Вейля* и обозначать символом $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. В символьном обозначении этой категории отражен тот факт, что она порождается векторным пространством V, связанным с кособратимой симметрией Гекке $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$, имеющей би-ранг $(m|n)$. Объекты этой категории наделяются структурой модуля над алгеброй уравнения отражений, которая будет детально рассмотрена в следующих разделах настоящей статьи.

При построении категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ мы будем следовать пути, изложенному в работе [GLS1], где аналогичная категория была построена для четной симметрии Гекке би-ранга $(m|0)$. Отличительной особенностью четного случая является тот факт, что пространство V^*, дуальное к пространству V, можно отождествить с объектом $V_{(1^{m-1})}$ категории $\mathrm{SW}(V_{(m|0)})$ (определение пространств V_λ дано в (3.5)). Это свойство гарантирует жесткость категории Шура–Вейля в четном случае.[8]

Для общего значения би-ранга $(m|n)$ данное свойство не выполняется, и мы вынуждены расширить категорию, добавляя дуальные ко всем ее объектам и определяя соответствующие левые и правые спаривания. Эта задача требует, в свою очередь, расширения категорных твистов на дуальные объекты и обеспечения инвариантности спариваний. Настоящий параграф посвящен решению этих проблем.

Итак, пусть кособратимая симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Зафиксировав в пространстве V некоторый базис $\{x_i\}_{1\le i\le N}$, где $N =$

[8]Напомним, что (квази)тензорная категория векторных пространств называется *жесткой*, если вместе с любыми ее объектом U в классе объектов содержится и дуальный объект U^* такой, что отображения $U \otimes U^* \to \mathbb{K}$ и $U^* \otimes U \to \mathbb{K}$ принадлежат классу морфизмов категории.

$\dim V$, представим симметрию R соответствующей матрицей (2.2). Кроме того, введем дуальное векторное пространство V^* и зафиксируем в нем базис $\{x^i\}_{1\le i\le N}$, дуальный к базису $\{x_i\}$ по отношению к некоторой невырожденной билинейной форме

$$\langle\,,\rangle_r :\ V\otimes V^*\to\mathbb{K}\,,\qquad \langle x_i,x^j\rangle_r=\delta_i^j\,. \tag{4.1}$$

Индекс r (от английского термина „right“) относится к порядку следования аргументов в билинейной форме $\langle\,,\,\rangle_r$: вектора дуального пространства V^* стоят справа от векторов пространства V.

По определению, дуальным пространством к тензорному произведению $U\otimes W$ будем считать пространство $W^*\otimes U^*$:

$$\langle U\otimes W, W^*\otimes U^*\rangle_r := \langle W,W^*\rangle_r\langle U,U^*\rangle_r\,.$$

Вследствие такого выбора, нумерация компонент тензорной степени $V^{*\otimes k}$ обратна нумерации компонент тензорной степени $V^{\otimes k}$:

$$V^{*\otimes k}:=V_k^*\otimes\dots V_2^*\otimes V_1^*\,,\qquad V^{\otimes k}:=V_1\otimes V_2\otimes\dots\otimes V_k\,.$$

Данную особенность всегда следует иметь ввиду при работе с операторами, помеченными номерами тензорных компонент, в которых они действуют (как в формуле (1.1) и других аналогичных выражениях).

Расширим теперь твист (2.2) на пространство $V^*\otimes V^*$. Ниже будет показано, что требование согласованности этого расширения и инвариантности спаривания (4.1) приводит к единственному выбору

$$R(x^i\otimes x^j)=x^r\otimes x^s\,R_{sr}^{ji}\,. \tag{4.2}$$

Таким образом, аналогично конструкциям раздела 3 мы можем задать представление алгебр Гекке $H_k(q)$ в тензорных степенях $V^{*\otimes k}$ для всех $k\in\mathbb{K}$, затем построить проекторы E_a^λ и ввести подпространства $V^*_{(\lambda,a)}\subset V^{*\otimes k}$ как образы действия этих проекторов на соответствующие тензорные степени пространства V^* (см. формулы (3.4)–(3.6)). Принимая во внимание сделанное выше замечание о нумерации компонент тензорных произведений, можно показать, что любой стандартной таблице Юнга (λ,a) соответствует единственная таблица Юнга (λ,a') такая, что пространства $V_{(\lambda,a)}$ и $V^*_{(\lambda,a')}$ дуальны относительно билинейной формы (4.1).

По определению класс объектов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ состоит из всех прямых сумм пространств вида $V_\lambda\otimes V_\mu^*$ и $V_\mu^*\otimes V_\lambda$, где λ и μ являются произвольными разбиениями неотрицательных целых чисел. Нулевое разбиение соответствует базисному пространству $V_0:=V$ или дуальному к нему $V_0^*:=V^*$. Числовое поле $\mathbb{K}$, над которым определены пространства

V и V^*, также включается в класс объектов и играет роль единичного объекта нашей категории

$$\mathbb{K}\otimes V = V = V\otimes\mathbb{K}.$$

Обратимся к определению класса морфизмов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Прежде всего, для любой пары объектов U и W мы должны задать твист $R_{U,W}$, реализующий изоморфизм $U\otimes W\cong W\otimes U$. Твисты вида R_{V_λ,V_μ} и $R_{V^*_\lambda,V^*_\mu}$ полностью определяются базовыми твистами $R_{V,V}$ и R_{V^*,V^*}, действие которых задано формулами (2.2) и (4.2). Поэтому нам осталось найти самосогласованные определения R_{V,V^*} и $R_{V^*,V}$, поскольку после этого твисты R_{V_λ,V^*_μ} и $R_{V^*_\lambda,V_\mu}$ могут быть построены на их основе посредством стандартных методов аналогично твистам R_{V_λ,V_μ} и $R_{V^*_\lambda,V^*_\mu}$ (см., например, [GLS1]).

Условие самосогласованности определения R_{V,V^*} и $R_{V^*,V}$ состоит в следующем. После определения всех четырех базисных твистов, мы фактически получим линейный оператор на пространстве $(V\oplus V^*)^{\otimes 2}$. Наши определения твистов будут согласованы, если этот оператор будет удовлетворять квантовому уравнению Янга–Бакстера на пространстве $(V\oplus V^*)^{\otimes 3}$. Эта задача решается в приведенном ниже предложении 9. Отметим, что идея такого построения принадлежит В. Любашенко (см. работу [LS] и содержащиеся в ней ссылки).

Предложение 9. *Пусть оператор Ψ является кособратным к кособратимому твисту R (см. определение (2.1)). Определим расширение R до линейного оператора*

$$R:(V\oplus V^*)^{\otimes 2}\to (V\oplus V^*)^{\otimes 2}$$

(сохранив для расширенного оператора то же самое обозначение) в соответствии с правилами

$$\begin{aligned}
&V\otimes V^*\to V^*\otimes V &&: \ R(x_i\otimes x^j) = x^k\otimes x_l\,(R^{-1})^{lj}_{ki}\,,\\
&V^*\otimes V\to V\otimes V^* &&: \ R(x^j\otimes x_i) = x_k\otimes x^l\,\Psi^{kj}_{li}\,,\\
&V^*\otimes V^*\to V^*\otimes V^* &&: \ R(x^i\otimes x^j) = x^k\otimes x^l\,R^{ji}_{lk}\,,\\
&V\otimes V\to V\otimes V &&: \ R(x_i\otimes x_j) = x_k\otimes x_l\,R^{kl}_{ij}\,.
\end{aligned}\tag{4.3}$$

Тогда расширенный оператор R будет твистом, то есть, будет решением уравнения Янга–Бакстера (1.1) *в пространстве* $(V\oplus V^*)^{\otimes 3}$.

Доказательство. Поскольку R есть линейный оператор, то достаточно доказать справедливость сформулированного Предложения на базисных векторах пространства $(V\oplus V^*)^{\otimes 3}$. Это пространство, в свою очередь, разлагается в прямую сумму восьми подпространств от $V\otimes V\otimes V$ до $V^*\otimes V^*\otimes V^*$ и проверка справедливости Предложения на базисных векторах каждого из этих подпространств сводится к несложным вычислениям на основе формул (4.3). □

Положим теперь по определению, что линейная комбинация, произведение, прямая сумма и тензорное произведение конечного числа категорных морфизмов также образуют морфизм нашей категории.

Далее, следуя [T], мы дополнительно потребуем, чтобы морфизмы обладали свойством естественности (функториальности). Это означает, что для любых двух морфизмов $f: U\to U'$ и $g: W\to W'$ должно выполняться следующее перестановочное правило

$$(g\otimes f)\circ R_{U,W} = R_{U',W'}\circ (f\otimes g)\,.$$

Отсюда вытекает необходимое условие того, что некоторое отображение $f: U\to U'$ является категорным морфизмом:

$$(\mathrm{id}_W\otimes f)\circ R_{U,W} = R_{U',W}\circ(f\otimes \mathrm{id_W}),\qquad (f\otimes \mathrm{id}_W)\circ R_{W,U} = R_{W,U'}\circ(\mathrm{id}_W\otimes f)\,. \tag{4.4}$$

Если отображение f удовлетворяет приведенному выше условию, мы будем называть его *R-инвариантным* отображением. Таким образом, любой морфизм категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ должен быть R-инвариантным отображением.

Предложение 10. *Пусть твист R удовлетворяет соотношениям* (4.3)*. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Спаривание* (4.1) *является R-инвариантным.*
2. *Линейное отображение $\pi_r:\mathbb{K}\to V^*\otimes V$, порожденное соответствием*

$$1 \stackrel{\pi_r}{\mapsto} \sum_{i=1}^{N} x^i\otimes x_i\,, \tag{4.5}$$

также R-инвариантно.

Доказательство. При доказательстве утверждения 1 можно ограничиться рассмотрением простейшего случая формулы (4.4), полагая в ней $W=$

V или $W = V^*$. Эта возможность вытекает из структуры объектов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Другими словами, мы должны проверить коммутативность следующей диаграммы отображений

$$\begin{array}{ccc} (V\otimes V^*)\otimes V^{\#} & \stackrel{(4.3)}{\longleftrightarrow} & V^{\#}\otimes (V\otimes V^*) \\ \langle\, ,\rangle_r \otimes \mathrm{id} \ \downarrow & & \downarrow \ \mathrm{id}\otimes \langle\, ,\rangle_r \\ \mathbb{K}\otimes V^{\#} & = & V^{\#}\otimes \mathbb{K}\,, \end{array} \tag{4.6}$$

где символ $V^{\#}$ обозначает либо пространство V, либо V^*. Коммутативность приведенной диаграммы прямо следует из формул (4.3), определений (4.1) и (2.1), а также определения обратной матрицы R^{-1}.

Далее, те же рассуждения позволяют свести доказательство утверждения 2 из условия данного Предложения к проверке коммутативности приведенной ниже диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (V^*\otimes V)\otimes V^{\#} & \stackrel{(4.3)}{\longleftrightarrow} & V^{\#}\otimes (V^*\otimes V) \\ \pi_r \otimes \mathrm{id} \ \uparrow & & \uparrow \ \mathrm{id}\otimes \pi_r \\ \mathbb{K}\otimes V^{\#} & = & V^{\#}\otimes \mathbb{K}\,, \end{array}$$

что выполняется аналогично предыдущему случаю. □

Замечание 11. Заметим, что R-инвариантность отображений (4.1) и (4.5) служит мотивировкой для расширения (4.3) исходного твиста R. Можно показать, что такое расширение единственно.

В дальнейшем наряду с правой билинейной формой (4.1) нам потребуется также и *левая* невырожденная билинейная форма

$$\langle\, ,\rangle_l :\ V^*\otimes V \to \mathbb{K}\,,$$

причем левое спаривание тоже должно быть R-инвариантным. Это условие не позволяет нам просто положить $\langle x^i, x_j\rangle_l = \delta^i_j$, поскольку такое спаривание не будет R-инвариантным (немедленное следствие соотношений (4.3)).

Выберем форму $\langle\, ,\rangle_l$ таким образом, чтобы обеспечить коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} V^*\otimes V & \stackrel{(4.3)}{\longrightarrow} & V\otimes V^* \\ \langle\, ,\rangle_l \ \downarrow & & \downarrow \ \langle\, ,\rangle_r \\ \mathbb{K} & = & \mathbb{K}\,. \end{array} \tag{4.7}$$

Несложное вычисление на основе (4.7) приводит к явному виду левой формы

$$\langle x^i, x_j\rangle_l = B^i_{\ j}\,, \tag{4.8}$$

где матрица $\|B^i_{\ j}\|$ определена в (2.3). Сделанный выбор гарантирует R-инвариантность левого спаривания $\langle\,,\rangle_l$. Коммутативность соответствующей диаграммы (сходной с диаграммой (4.6)) легко проверяется с помощью соотношений (4.3) и (2.7).

Замечание 12. Отметим, что обратная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V^*\otimes V & \stackrel{(4.3)}{\longleftarrow} & V\otimes V^* \\ \langle\,,\rangle_l\downarrow & & \downarrow\langle\,,\rangle_r \\ \mathbb{K} & = & \mathbb{K}\,. \end{array} \tag{4.9}$$

не является коммутативной с определением (4.8). В тензорной категории всегда можно определить левое спаривание таким образом, что обе диаграммы (4.7) и (4.9) будут коммутативны, тогда как в квазитензорном случае (к которому относится категория $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$) это невозможно. Данный факт является следствием неинволютивности твиста R: $R^2\neq I$.

В принципе, определяя левое спаривание, мы могли бы потребовать коммутативности приведенной выше диаграммы, а не диаграммы (4.7). При таком выборе в правой части формулы (4.8) появился бы дополнительный числовой множитель $q^{2(m-n)}$. Однако оба варианта являются эквивалентными и выбор между ними фактически дело вкуса.

Теперь мы можем найти в пространстве V^* другой базис $\{{}^i\!x\}_{1\le i\le N}$, который будет дуален базису $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ пространства V относительно левой формы

$${}^i\!x := q^{2(m-n)}\,C^i_{\ j}\,x^j, \quad \Rightarrow \quad \langle {}^i\!x, x_j\rangle_l = \delta^i_j\,. \tag{4.10}$$

Нормировочный множитель в определении базисного вектора ${}^i\!x$ выбран в согласии со следствием 8.

Итак, мы построили правую и левую R-инвариантные билинейные формы и нашли два базисных набора векторов $\{x^i\}$ и $\{{}^i\!x\}$ пространства V^*, которые дуальны базису $\{x_i\}$ пространства V по отношению к правой и левой формам соответственно (см. (4.1) и (4.10)). По этой причине мы будем называть вектора $\{x^i\}$ и $\{{}^i\!x\}$) соответственно *правым* и*левым* базисами пространства V^*.

Пользуясь формулами (2.7), перепишем соотношения (4.3) в терминах левого базиса.

Следствие 13. *В терминах левого базиса* $\{{}^i x\}_{1\le i\le N}$ *пространства* V^* *расширение твиста* R*, определяемое соотношениями* (4.3)*, принимает следующий вид*

$$
\begin{aligned}
R(x_i\otimes {}^j x) &= {}^k x\otimes x_l\,\Psi^{jl}_{ik}\,,\\
R({}^j x\otimes x_i) &= x_k\otimes {}^l x\,(R^{-1})^{jk}_{il}\,,\\
R({}^i x\otimes {}^j x) &= {}^k x\otimes {}^l x\,R^{ji}_{lk}\,,\\
R(x_i\otimes x_j) &= x_k\otimes x_l\,R^{kl}_{ij}\,.
\end{aligned}
\tag{4.3$'$}
$$

Кроме того, линейное отображение $\pi_l:\mathbb{K}\to V\otimes V^*$*, порожденное соответствием*

$$
1\overset{\pi_l}{\mapsto}\sum_{i=1}^{N}x_i\otimes {}^i x\,,
\tag{4.11}
$$

является R*-инвариантным.*

Доказательство. Докажем только первую формулу из списка (4.3$'$), поскольку остальные доказываются совершенно аналогично.

Пользуясь определением левого базиса (4.10) и первой формулой из списка (4.3), получаем (напомним, что по повторяющимся матричным индексам проводится суммирование)

$$
R(x_i\otimes {}^j x) = x^u\otimes x_l\,q^{2(m-n)}\,C^j_{\ s}(R^{-1})^{ls}_{ui} = {}^k x\otimes x_l\,q^{2(m-n)}C^j_{\ s}(R^{-1})^{ls}_{ui}B^u_{\ k}\,,
$$

где в последнем равенстве мы вернулись от правого базиса к левому с помощью формулы, обратной к (4.10):

$$
x^u = B^u_{\ k}\,{}^k x\,.
$$

Далее, формулы из второй строки соотношений (2.7) и Следствие 8 (нормировочный множитель) приводят к равенству

$$
q^{2(m-n)}C_1R^{-1}_{21}B_2 = \Psi_{12}\,,
$$

которое позволяет сделать следующую замену в приведенной выше цепочке тождественных преобразований:

$$
q^{2(m-n)}C^j_{\ s}(R^{-1})^{ls}_{ui}B^u_{\ k} = \Psi^{jl}_{ik}\,.
$$

Итак, имеем окончательно

$$
R(x_i\otimes {}^j x) = {}^k x\otimes x_l\,\Psi^{jl}_{ik}\,,
$$

что совпадает с формулой в первой строке списка (4.3$'$).

Доказательство R-инвариантности отображения π_l проводится непосредственными вычислениями на основе соотношений (4.3) или (4.3$'$) таким же образом, как и при доказательстве R-инвариантности отображения (4.5). $\square$

Теперь мы готовы определить класс морфизмов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Вместе с тождественными отображениями объектов, класс морфизмов содержит отображения (4.1), (4.5), (4.8), (4.11) и (4.3) (или эквивалентную их форму (4.3$'$)). Кроме того, как уже говорилось выше, любая линейная комбинация, произведение (последовательное применение), тензорное произведение и прямая сумма конечного числа категорных морфизмов тоже образует категорный морфизм.

Замечание 14. Для конкретных твистов R множество всех R-инвариантных отображений шире, чем приведенное выше множество категорных морфизмов. Например, для супер-пространства $V = V_0 \oplus V_1$ проекции $V \to V_0$ и $V \to V_1$ являются R-инвариантными отображениями.

В дальнейшем большое значение для нас будут иметь объекты вида $V^* \otimes V$ и $V \otimes V^*$, которые, как известно, изоморфны пространству $\mathrm{End}(V)$ всех эндоморфизмов пространства V. Фиксация базиса x_i в V, дает стандартный базис $h_i^j = x_i \otimes {}^j x$ в пространстве $V \otimes V^*$. Определяя обычным образом действие элемента $v \otimes v^* \in V \otimes V^*$ на вектор $u \in V$

$$(v \otimes v^*)(u) := v\langle v^*, u\rangle_l \,,$$

мы получим действие базисных элементов h_i^j в виде

$$h_i^j(x_k) = \delta_k^j\, x_i \,.$$

Отсюда легко следует таблица умножения элементов h_i^j, рассматриваемых как эндоморфизмы пространства V:

$$h_i^j \circ h_k^s = \delta_k^j\, h_i^s \,.$$

Выбрав в V^* правый базис $\{x^i\}$, мы получим другой базис $l_i^j = x_i \otimes x^j$ пространства $V \otimes V^*$, характеризуемый свойствами (см. (4.8))

$$l_i^i(x_k) = B^j{}_k\, x_i, \quad l_i^j \circ l_k^s = B^j{}_k\, l_i^s \,. \tag{4.12}$$

Учитывая (4.10), находим связь двух базисных наборов

$$h_i^j = q^{2(m-n)}\, C^j{}_k l_i^k \,. \tag{4.13}$$

Введем в рассмотрение линейное отображение $\mathrm{Tr}_R : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{K}$, заданное посредством категорного морфизма (4.1)

$$\mathrm{Tr}_R(l_j^i) = \langle x_j, x^i\rangle_r = \delta_j^i \,. \tag{4.14}$$

Это отображение будем называть *R-следом.* В силу соотношения (4.13), R-след произвольного оператора $\mathsf{F} \in \mathrm{End}(V)$ вычисляется по правилу

$$\mathrm{Tr}_R(\mathsf{F}) = q^{2(m-n)}\, Tr(F \cdot C)\,, \tag{4.15}$$

где F есть матрица оператора F в базисе $\{x_i\}$.

В заключение раздела вычислим так называемые R-размерности объектов V_λ нашей категории. По определению, R-размерность объекта $V_\lambda \subset V^{\otimes k}$, $\lambda \vdash k$, дается формулой

$$\dim_R V_\lambda := \mathrm{Tr}_R(\mathrm{id}_{V_\lambda}) = q^{2k(m-n)} Tr_{(1\dots k)}(C_1 \dots C_k E_a^\lambda)\,. \tag{4.16}$$

Опираясь на формулу (A.2), можно показать, что данное определение не зависит от значения индекса a. Кроме того, R-размерность, как и классическая размерность, является аддитивно-мультипликативным функционалом на классе объектов категории

$$\dim_R(U \otimes W) = \dim_R U \dim_R W\,, \qquad \dim_R(U \oplus W) = \dim_R U + \dim_R W\,.$$

Определим R-аналоги $Q_\pm(t)$ рядов Гильберта-Пуанкаре $P_\pm(t)$ (3.2) по правилу

$$Q_\pm(t) = \sum_{k\ge 0} t^k\, \dim_R \Lambda^k_\pm(V)\,.$$

Справедливо следующее Предложение.

Предложение 15. *Пусть кособратимая симметрия Гекке имеет биранг $(m|n)$. Тогда соответствующие ей ряды $Q_\pm$ обладают следующими свойствами:*

(1) *Если $m-n=0$, то $\dim_R V_\lambda = 0$ для всех $\lambda \neq 0$ и, следовательно, $Q_+(t) = Q_-(t) = 1$.*

(2) *Если $m-n>0$, то*

$$\dim_R V_\lambda = \dim_R V_\lambda{}^* = s_\lambda(q^{m-n-1}, q^{m-n-3}, ..., q^{1-m+n}),$$

и, следовательно,

$$Q_-(t) = \sum_{k=0}^{m-n} \binom{m-n}{k}_q t^k\,, \qquad \binom{p}{k}_q := \frac{p_q(p-1)_q \dots (p-k+1)_q}{k_q(k-1)_q \dots 2_q 1_q}\,.$$

(3) *Если $m-n<0$, то*

$$\dim_R V_\lambda = \dim_R V_\lambda{}^* = s_{\lambda^*}(q^{n-m-1}, q^{n-m-3}, ..., q^{1-n+m})\,,$$

где разбиение λ^* сопряжено к λ, и, следовательно,

$$Q_+(t) = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k}_q t^k\,.$$

Доказательство. Предложение доказывается прямыми вычислениями на основе определения (4.16). Вычисления полностью аналогичны случаю четной симметрии Гекке (см., например, [GLS1]). $\square$

Подчеркнем, что ряды $Q_\pm(t)$ зависят только от би-ранга данной симметрии Гекке R, тогда как соответствующие ряды Гильберта–Пуанкаре $P_\pm(t)$ существенно зависят от конкретной формы этой симметрии.

§5. Алгебра модифицированного уравнения отражений: определение и деформационные свойства

Если R представляет собой инволютивную ($R^2 = I$) кособратимую симметрию, то в пространстве $\mathrm{End}(V)$ можно ввести структуру *обобщенной алгебры Ли* [G1, G3]. Соответствующая обертывающая алгебра $U_R(\mathrm{End}(V))$ определяется как фактор-алгебра

$$U_R(\mathrm{End}(V)) = T(\mathrm{End}(V))/\langle \mathcal{J}_R\rangle\,, \tag{5.1}$$

где $\langle \mathcal{J}_R\rangle$ является двусторонним идеалом свободной тензорной алгебры $T(\mathrm{End}(V))$, порожденным подмножеством $\mathcal{J}_R \subset T(\mathrm{End}(V))$ следующего вида

$$\mathcal{J}_R = \{X\otimes Y - R_{\mathrm{End}}(X\otimes Y) - X\circ Y + \circ R_{\mathrm{End}}(X\otimes Y)\mid \forall X, Y\in \mathrm{End}(V)\}\,. \tag{5.2}$$

Здесь символ $\circ$ обозначает операцию умножения в ассоциативной алгебре $\mathrm{End}(V)$ всех линейных операторов на пространстве V. Линейный оператор $R_{\mathrm{End}} : \mathrm{End}(V)^{\otimes 2} \to \mathrm{End}(V)^{\otimes 2}$ является расширением твиста R на пространство $\mathrm{End}(V)^{\otimes 2}$. Явный вид этого оператора может быть получен с использованием соотношений (4.3).

С этой целью мы фиксируем базис $l_j^i = x_j\otimes x^i$ в пространстве $\mathrm{End}(V)$ и применяем формулы (4.3) для перестановки двух произвольных базисных элементов

$$R_{\mathrm{End}}(l_j^i\otimes l_s^k) = l_{b_1}^{a_1}\otimes l_{b_2}^{a_2}\,(R^{-1})_{a_1c_2}^{b_2c_1}\,R_{jr_1}^{b_1c_2}\,R_{a_2c_1}^{kr_2}\,\Psi_{r_2s}^{r_1i}\,. \tag{5.3}$$

Чтобы придать этой формуле более прозрачный вид, введем матричные обозначения, которые будем систематически применять в дальнейшем. Определим $N\times N$ матрицу L (напомним, что $N = \dim V$), матричными элементами которой служат базисные вектора l_i^j

$$L_i^{\,j} = l_i^j\,, \tag{5.4}$$

где первый (нижний) индекс матрицы L нумерует ее *строки*, а второй (верхний) индекс — столбцы. Кроме того, обозначим $\bar R$ матрицу, транспонированную к матрице твиста

$$\bar R_{i_1i_2}^{\,j_1j_2} = R_{i_1i_2}^{j_1j_2}\,,$$

а также введем обозначения для специальных "копий" матрицы L

$$L_{\bar 1} = L \otimes I, \quad L_{\bar 2} = \bar R_{12} L_{\bar 1} \bar R_{12}^{-1}. \tag{5.5}$$

После умножения обеих частей равенства (5.3) на R и R^{-1} и учета определения (2.1) матрицы Ψ, формула (5.3) представляется в следующем компактном виде

$$R_{\mathrm{End}}(L_{\bar 1} \otimes L_{\bar 2}) = L_{\bar 2} \otimes L_{\bar 1}\,, \tag{5.6}$$

где, как обычно, подразумевается суммирование по соответствующим матричным индексам.

Заметим, однако, что прямое обобщение соотношений (5.1)–(5.2) с определением (5.6) от инволютивной симметрии на случай произвольной симметрии Гекке приводит к алгебре с неудовлетворительными деформационными свойствами и бедной теорией представлений. Тем не менее, для любой кособратимой симметрии Гекке R существует другой путь обобщения обертывающей алгебры $U_R(\mathrm{End}(V))$ (5.1), который приводит к результату с хорошими деформационными свойствами (Предложение 20) и совпадает с обертывающей алгеброй (5.1), если R — инволютивная симметрия.

Определение 16. Ассоциативную алгебру с единичным элементом $e_{\mathcal L}$ и генераторами l_i^j, $1 \le i,j \le N$, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$R_{ij}^{kl}\, l_k^m\, R_{ml}^{pq}\, l_p^r - l_i^a\, R_{aj}^{bc}\, l_b^d\, R_{dc}^{rq} - \hbar(R_{ij}^{aq}\, l_a^r - l_i^b\, R_{bj}^{rq}) = 0\,, \tag{5.7}$$

будем называть алгеброй уравнения отражений (см. [KS]), если $\hbar = 0$, и алгеброй модифицированного уравнения отражений, если $\hbar \neq 0$. Для алгебры уравнения отражений примем обозначение $\mathcal{L}(R_q)$, для модифицированного варианта — $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$.

Матричные обозначения, введенные выше, позволяют представить определяющие соотношения (5.7) в следующем виде

$$\bar R_{12} L_1 \bar R_{12} L_1 - L_1 \bar R_{12} L_1 \bar R_{12} - \hbar(\bar R_{12}\, L_1 - L_1\, \bar R_{12}) = 0\,. \tag{5.8}$$

Замечание 17. Отметим, что совершив линейное преобразование набора генераторов $l_i^j \mapsto m_i^j$ (при $q \neq \pm 1$) вида

$$M = I e_{\mathcal L} - \omega \hbar^{-1} L, \qquad \omega = q - q^{-1}\,, \quad M = \|m_i^j\|\,,$$

мы получим следующую форму перестановочных соотношений (5.8):

$$\bar R_{12} M_1 \bar R_{12} M_1 - M_1 \bar R_{12} M_1 \bar R_{12} = 0\,. \tag{5.9}$$

Это означает, что алгебры $\mathcal{L}(R_q,\hbar)$ и $\mathcal{L}(R_q)$ изоморфны для всех значений параметра $q \neq \pm 1$. Базис генераторов с перестановочными соотношениями (5.8) более удобен при трактовке алгебры модифицированного уравнения отражений как аналога универсальной обертывающей алгебры $U(gl(m|n))$.

Докажем теперь, что перестановочные соотношения (5.8) согласованы со структурой категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ в следующем смысле. Алгебра модифицированного уравнения отражений является фактором тензорной алгебры $T(V\otimes V^*)$ по двустороннему идеалу, порожденному соотношениями (5.8) или, что эквивалентно, (5.9). Перестановочные соотношения будут согласованы со структурой категории, если соответствующий двусторонний идеал будет инвариантен по отношению к действию твистов категории. В этом случае мы будем говорить, что перестановочные соотношения алгебры модифицированного уравнения отражений являются *R-инвариантными.*

Предложение 18. *Перестановочные соотношения* (5.8) *R-инвариантны.*

Доказательство. Для доказательства предложения достаточно показать, что соотношения (5.8), порождающие идеал, сохраняются при их коммутации с пространствами V и V^* под действием твистов категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Это легко проверить непосредственными вычислениями на основе формул (4.3) и соответствия $l_i^j = x_i\otimes x^j$. В целях упрощения выкладок удобнее работать с базисом генераторов m_i^j (5.9).

Например, фиксируя произвольный базисный вектор $x_i\in V$ и применяя соотношения (4.3), получаем следующее равенство:

$$\mathsf{R}(x_{i_1}\otimes m_{i_2}^{j_2}) = \bar{R}_{i_1 i_2}^{a_1 a_2} m_{a_1}^{b_1}(\bar{R}^{-1})_{b_1 a_2}^{c_1 j_2}\otimes x_{c_1} \quad \text{или} \quad \mathsf{R}(x_1\otimes M_2) = \bar{R}_{12}M_1\bar{R}_{12}^{-1}\otimes x_1\,,$$

где символ R будет обозначать твист общего вида, форма которого определяется контекстом конкретной формулы. Например, в рассматриваемом случае $\mathsf{R} = R_{V,V\otimes V^*}$.

Теперь, применяя дважды приведенное выше равенство, мы сразу получаем желаемый результат:

$$x_1\otimes(\bar{R}_{23}M_2\bar{R}_{23}M_2 - M_2\bar{R}_{23}M_2\bar{R}_{23}) \overset{\mathsf{R}}{\to} \bar{R}_{12}\bar{R}_{23}(\bar{R}_{12}M_1\bar{R}_{12}M_1 - M_1\bar{R}_{12}M_1\bar{R}_{12})\bar{R}_{23}^{-1}\bar{R}_{12}^{-1}\otimes x_1\,.$$

Коммутативность с пространством V^* проверяется аналогично. □

Предложение 19. *Пусть R является инволютивной кособратимой симметрией. Тогда перестановочные соотношения между генераторами $\{l_i^j\}$ алгебры $U_R(\mathrm{End}(V))$* (5.1) *эквивалентны соотношениям* (5.8) *при*

$\hbar = 1$. *Следовательно, согласно Определению* 16, *алгебра* (5.1) *совпадает с алгеброй* $\mathcal{L}_q(R, 1)$ *модифицированного уравнения отражений.*

Доказательство. В инволютивном случае имеем по определению $R = R^{-1}$. Следовательно, матрица $L_{\overline{2}}$ (см. (5.5)) может быть записана как $L_{\overline{2}} = \bar{R}_{12}L_1\bar{R}_{12}$. Это позволяет переписать действие оператора R_{End}, заданное соотношением (5.6), в новой форме:

$$R_{\mathrm{End}}(L_1 \otimes \bar{R}_{12}L_1\bar{R}_{12}) = \bar{R}_{12}L_1\bar{R}_{12} \otimes L_1 \,.$$

Теперь, полагая в определении (5.2) $X = L_1$, $Y = \bar{R}_{12}L_1\bar{R}_{12}$ и принимая во внимание таблицу умножения генераторов l_i^j (4.12), получаем

$$X \circ Y = L_1 R_{12}\,, \qquad \circ R_{\mathrm{End}}(X \otimes Y) = R_{12}L_1 \,.$$

Вместе с выписанной выше новой формой записи для действия оператора R_{End} эти выражения приводят множество $\mathcal{J}_R$ (5.2) к виду (5.8) с $\hbar = 1$. $\square$

Основное деформационное свойство алгебры модифицированного уравнения отражений сформулировано в следующем предложении.

Предложение 20. *Пусть R есть кособратимая инволютивная симметрия Гекке $R^2 = I$, а $U \subset \mathbb{K}$ — некоторая окрестность единицы в поле $\mathbb{K}$: $1 \in U$. Рассмотрим семейство кособратимых симметрий Гекке R_q, аналитически зависящих от $q \in U$ и удовлетворяющих граничному условию $R_1 = R$. Обозначим однородную компоненту k-го порядка алгебры $\mathcal{L}(R_q)$ символом $\mathcal{L}^{(k)}(R_q)$. Тогда, при условии, что q находится в общем положении, выполнены следующие утверждения.*

1. $\dim \mathcal{L}^{(k)}(R_q) = \dim \mathcal{L}^{(k)}(R), \qquad \forall\, k \geq 0\,.$
2. $\mathrm{Gr}\,\mathcal{L}(R_q, \hbar) \cong \mathcal{L}(R_q)\,,$

   где $\mathrm{Gr}\,\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ есть градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$.

Доказательство. Проверка утверждения 1 основана на следующем наблюдении. Ниже будет построен проекционный оператор $\mathcal{S}^{(3)} : (\mathrm{Span}(l_i^j))^{\otimes 3} \to \mathcal{L}^{(3)}(R_q)$. Явная форма этого проектора позволяет заключить, что его ранг не зависит от значений параметра $q \in U$ (в общем положении). Следовательно,

$$\dim \mathcal{L}^{(3)}(R_q) = \dim \mathcal{L}^{(3)}(R)\,. \tag{5.10}$$

В случае инволютивной симметрии R алгебра $\mathcal{L}(R)$ является симметрической алгеброй линейного пространства $\mathrm{Span}(l_i^j)$, на которой действует твист R_{End}. Эта алгебра является Кошулевой[9]. Кошулево свойство алгебры $\mathcal{L}(R)$ непосредственно вытекает из точности некоторого комплекса Кошуля второго рода, построенного для этой алгебры в работе [G3].

Теперь достаточно применить результаты [PP], обобщающие работу [Dr], из которых следует, что Кошулево свойство алгебры $\mathcal{L}(R)$ вместе с равенством (5.10) в однородных компонентах третьей степени влечет выполнение аналогичных равенств во всех старших однородных компонентах, что и составляет утверждение 1 нашего предложения. Более того, можно показать, что для общих значений параметра $q \in U$ алгебра $\mathcal{L}(R_q)$ также является Кошулевой.

Для доказательства утверждения 2 рассмотрим отображение $[\,,\,]$, сопоставляющее левой части выражения (5.7) его правую часть. Как показано в работе [G4], такое отображение удовлетворяет соотношению Якоби в форме, предложенной в [PP]. Следовательно, обобщая теорему о базисе Пуанкаре–Биркгофа–Витта из [PP] (см. также работу [BG]), мы придем к утверждению 2. □

Замечание 21. Отметим, что семейство кособратимых симметрий Гекке с нестандартными рядами Гильберта-Пуанкаре, построенное по методам работы [G3], аналитически зависит от параметра q в некоторой окрестности 1.

Приступим теперь к конструированию проектора $\mathcal{S}^{(3)}$, упомянутого в доказательстве Предложения 20. Представим перестановочные соотношения алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ ((5.8) при $\hbar = 0$) в эквивалентной форме

$$\bar{R}_{12}L_{\bar{1}}L_{\bar{2}} - L_{\bar{1}}L_{\bar{2}}\bar{R}_{12} = 0\,. \tag{5.11}$$

Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathfrak{L}$ с единицей, свободно порожденную над полем $\mathbb{K}$ генераторами l_i^j

$$\mathfrak{L} = \mathbb{K}\langle l_i^j\rangle \quad 1 \le i,j \le N\,.$$

Алгебра уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ является фактором алгебры $\mathfrak{L}$ по двустороннему идеалу $\langle\mathcal{I}_-\rangle$, порожденному левой частью соотношений (5.11)

$$\mathcal{L}(R_q) = \mathfrak{L}/\langle\mathcal{I}_-\rangle, \qquad \mathcal{I}_- = L_{\bar{1}}L_{\bar{2}} - \bar{R}_{12}L_{\bar{1}}L_{\bar{2}}\bar{R}_{12}^{-1}\,. \tag{5.12}$$

Как (бесконечномерное) векторное пространство алгебра $\mathfrak{L}$ может быть разложена в прямую сумму однородных компонент

$$\mathfrak{L} = \bigoplus_{k\ge 0}\mathfrak{L}_k, \quad \mathfrak{L}_0 \cong \mathbb{K}\,,$$

[9]Определение этого понятия можно найти, например, в [PP].

где каждая компонента $\mathfrak{L}_k$ есть линейная оболочка всех мономов k-го порядка по генераторам l_i^j.

Введем удобный базис в однородных компонентах

$$\mathfrak{L}_k = \mathrm{Span}[L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}\dots L_{\overline{k}}]\,. \tag{5.13}$$

Приведенная выше формула означает, что подпространство $\mathcal{L}_k$ есть линейная оболочка матричных элементов стоящей в правой части матрицы. Матрицы $L_{\overline{m}}$ определяются рекуррентным правилом:

$$L_{\bar{1}} = L\otimes I, \qquad L_{\overline{k+1}} = \bar{R}_k L_{\overline{k}}\bar{R}_k^{-1}, \quad k\ge 1\,, \tag{5.14}$$

где мы ввели сокращенное обозначение $R_k := R_{k\,k+1}$, которое будет постоянно использоваться ниже.

Замечание 22. Следствием определений (5.11), (5.14) и уравнения Янга-Бакстера для R являются следующие равенства

$$\bar{R}_k L_{\overline{k}}L_{\overline{k+1}} = L_{\overline{k}}L_{\overline{k+1}}\bar{R}_k\,, \qquad \forall\, k\ge 1\,. \tag{5.15}$$

Соотношения вида (5.15) типичны для так называемых квантовых матричных алгебр, частным случаем которых является алгебра уравнения отражений. Подробное освещение этого вопроса представлено в [IOP].

Для алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ имеется аналогичное разложение в прямую сумму векторных пространств

$$\mathcal{L}(R_q) = \bigoplus_{k\ge 0}\mathcal{L}_k, \quad \mathcal{L}_0\cong\mathbb{K}, \quad \mathcal{L}_k\subset\mathfrak{L}_k\,.$$

Приведем явную конструкцию для компонент $\mathcal{L}_k$. Другими словами, найдем набор проекционных операторов $\mathcal{S}_k:\mathfrak{L}_k\to\mathfrak{L}_k$ со следующим свойством

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_k = \mathcal{L}_k\subset\mathfrak{L}_k\,.$$

Мы построим такие проекторы для однородных компонент второй и третьей степени $\mathcal{L}_k$, $k=2,3$.

Введем в рассмотрение линейный оператор $Q:\mathfrak{L}_2\to\mathfrak{L}_2$, действующий по следующему правилу:

$$Q(L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}) := \bar{R}_1 L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}\bar{R}_1^{-1} \tag{5.16}$$

или, в сокращенном виде, $Q=\bar{R}_1\circ\bar{R}_1^{-1}$. Поскольку симметрия $\bar{R}$ удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера, это же справедливо и в отношении оператора Q

$$Q_1Q_2Q_1 = Q_2Q_1Q_2\,, \tag{5.17}$$

где $Q_1 = Q\otimes\mathrm{id}$ и $Q_2=\mathrm{id}\otimes Q$ есть очевидные расширения оператора Q на линейное пространство $\mathfrak{L}_3$.

Далее, пользуясь уравнением (1.2) для симметрии Гекке R, находим минимальный полином линейного оператора Q

$$(Q + q^2\,\mathbf{I})(Q + q^{-2}\,\mathbf{I})(Q - \mathbf{I}) = 0, \quad \mathbf{I} := I \circ I\,. \tag{5.18}$$

Соотношение (5.18) показывает, что оператор Q полупростой и имеет три собственных значения на пространстве $\mathfrak{L}_2$. Применяя очевидные обозначения, мы получаем следующее разложение векторного пространства $\mathfrak{L}_2$ в прямую сумму собственных подпространств оператора Q:

$$\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}^{(-q^2)} \oplus \mathfrak{L}^{(1)} \oplus \mathfrak{L}^{(-q^{-2})}\,.$$

Условие Гекке (1.2) позволяет построить явные выражения для соответствующих проекторов

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(-q^2)} &= P_+(R) \circ P_-(R) \\ \mathcal{P}^{(-q^{-2})} &= P_-(R) \circ P_+(R) \\ \mathcal{P}^{(1)} &= P_+(R) \circ P_+(R) + P_-(R) \circ P_-(R)\,, \end{aligned} \tag{5.19}$$

где

$$P_\pm(R) = \frac{q^{\mp 1} I \pm \bar{R}}{2_q}\,.$$

Действительно, несложное вычисление показывает, что

$$Q\mathcal{P}^{(a)} = \mathcal{P}^{(a)}Q = a\,\mathcal{P}^{(a)}, \quad a = -q^{\pm 2},\, 1\,,$$

и операторы $\mathcal{P}^{(a)}$ образуют полный набор ортонормированных проекторов на пространстве $\mathfrak{L}_2$:

$$\mathcal{P}^{(a)}\mathcal{P}^{(b)} = \delta^{ab}\,\mathcal{P}^{(a)}, \qquad \mathcal{P}^{(-q^2)} + \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(-q^{-2})} = \mathbf{I}\,.$$

Заметим, что соотношение (5.11) означает, что

$$(Q - \mathbf{I})(L_{\overline{1}} L_{\overline{2}}) = 0.$$

Таким образом, однородная компонента второго порядка $\mathcal{L}_2$ алгебры уравнения отражений совпадает (как векторное пространство) с собственным подпространством $\mathfrak{L}^{(1)} \subset \mathfrak{L}_2$ оператора Q, отвечающим собственному значению 1.

Рассмотрим пару ортонормированных проекторов на $\mathfrak{L}_2$

$$\mathcal{S} := \mathcal{P}^{(1)}, \quad \mathcal{A} := \mathcal{P}^{(-q^2)} + \mathcal{P}^{(-q^{-2})}, \quad \mathcal{S}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{S} = 0, \quad \mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathbf{I}.$$

Эти операторы можно выразить через степени оператора Q

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2_q^2}\left((q^2+q^{-2})\,\mathbf{I} + Q + Q^{-1}\right), \tag{5.20}$$
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2_q^2}\left(2\,\mathbf{I} - Q - Q^{-1}\right),$$

где обратный оператор Q^{-1} находится из соотношения (5.18)

$$Q^{-1} = Q^2 + (q^2-1+q^{-2})Q - (q^2-1+q^{-2})\mathbf{I}\,.$$

Можно показать, что имеет место следующее равенство векторных подпространств в $\mathfrak{L}_2$

$$\mathrm{Span}(\mathcal{I}_-) = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}\,,$$

где множество $\mathcal{I}_-$ определено в (5.12).

Приведенные выше соображения служат доказательством следующего Предложения.

Предложение 23. *Однородная компонента второго порядка $\mathcal{L}_2$ алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ совпадает (как векторное пространство) с образом проектора $\mathcal{S}$*

$$\mathcal{L}_2 = \mathrm{Im}\,\mathcal{S} = \mathfrak{L}_2/\mathrm{Im}\,\mathcal{A}. \tag{5.21}$$

Обратимся теперь к проблеме нахождения проектора на однородную компоненту $\mathcal{L}_3 \subset \mathfrak{L}_3$ третьего порядка алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$.

Расширим действие проекторов $\mathcal{S}$ и $\mathcal{A}$ на подпространство $\mathfrak{L}_3$. Проектору $\mathcal{S}$ сопоставим два оператора $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ по правилу (см. определение (5.19))

$$\mathcal{S}_1 := \mathcal{P}^{(1)}(R_1), \qquad \mathcal{S}_2 := \mathcal{P}^{(1)}(R_2)\,,$$

что означает следующее действие этих операторов на подпространстве $\mathfrak{L}_3$

$$\mathcal{S}_1(xyz) := (\mathcal{S}(xy))z, \qquad \mathcal{S}_2(xyz) := x(\mathcal{S}(yz)), \qquad \forall\, xyz \in \mathfrak{L}_3\,.$$

Формулы для расширения $\mathcal{A}$ аналогичны.

На данном этапе проявляются все преимущества использования специального базиса (5.13). Действительно, *квадратичная* однородная компонента $\mathcal{L}_2$ может быть вложена в подпространство $\mathfrak{L}_3$ различными путями, но два приведенных ниже способа наиболее важны для дальнейшего рассмотрения:

$$\mathcal{L}_2\cdot\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_3 \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_1\cdot\mathcal{L}_2 \subset \mathfrak{L}_3\,.$$

Как следует из (5.11), (5.15) и Предложения 23, эти вложения могут быть отождествлены с образами операторов $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$:

$$\mathcal{L}_2 \cdot \mathfrak{L}_1 = \mathcal{S}_1(\mathfrak{L}_3)\,, \qquad \mathfrak{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \mathcal{S}_2(\mathfrak{L}_3)\,.$$

Следующая лемма играет ключевую роль во всей конструкции.

Лемма 24. *Проекционный оператор $\mathcal{S}$ удовлетворяет следующему соотношению пятого порядка на подпространстве $\mathfrak{L}_3$:*

$$\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1 - a\,\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1 + b\,\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 - a\,\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 + b\,\mathcal{S}_2\,, \tag{5.22}$$

где

$$a = (q^4 + q^2 + 4 + q^{-2} + q^{-4})/2_q^4 \quad b = 4_q^2/2_q^8\,. \tag{5.23}$$

Доказательство. Лемма доказывается непосредственными вычислениями. Вычисления значительно упрощаются, если для оператора $\mathcal{S}$ пользоваться выражением (5.20) вместо исходного определения (5.19). □

Зададим линейный оператор $\mathcal{S}^{(3)} : \mathfrak{L}_3 \to \mathfrak{L}_3$ следующим выражением

$$\mathcal{S}^{(3)} = \frac{2_q^6}{4 \cdot 3_q^2}\,\left(\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1 - a\,\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1 + b\,\mathcal{S}_1\right)\,, \tag{5.24}$$

где коэффициенты a и b определены в (5.23). В силу (5.22) существует эквивалентная форма записи оператора $\mathcal{S}^{(3)}$:

$$\mathcal{S}^{(3)} = \frac{2_q^6}{4 \cdot 3_q^2}\,\left(\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 - a\,\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2 + b\,\mathcal{S}_2\right)\,. \tag{5.25}$$

Как оказывается, оператор $\mathcal{S}^{(3)}$ и есть искомый нами проектор на однородную компоненту третьего порядка $\mathcal{L}_3 \subset \mathfrak{L}_3$ алгебры уравнения отражений.

Предложение 25. *Однородная компонента третьего порядка $\mathcal{L}_3$ алгебры уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q)$ является образом проекционного оператора $\mathcal{S}^{(3)}$ при его действии на пространство $\mathfrak{L}_3$*

$$\mathcal{L}_3 = \operatorname{Im}\mathcal{S}^{(3)}\,.$$

Доказательство. То, что оператор $\mathcal{S}^{(3)}$ является проектором, то есть $(\mathcal{S}^{(3)})^2 = \mathcal{S}^{(3)}$, проверяется прямыми вычислениями.

Рассмотрим теперь проекцию соотношения (5.12) на однородную компоненту третьего порядка:

$$\mathcal{L}_3 = \mathfrak{L}_3/\langle \mathcal{I}_- \rangle_3, \qquad \langle \mathcal{I}_- \rangle_3 = \mathfrak{L}_1 \cdot \operatorname{Im}\mathcal{A}_2 \cup \operatorname{Im}\mathcal{A}_1 \cdot \mathfrak{L}_1\,. \tag{5.26}$$

Из равенств (5.24) и (5.25) видно, что $\langle \mathcal{I}_- \rangle_3 \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{S}^{(3)}$ и, следовательно, $\operatorname{Im}\mathcal{S}^{(3)} \subseteq \mathcal{L}_3$.

С другой стороны, в силу условия полноты $\mathcal{S}+\mathcal{A}=\mathbf{I}$, выражение (5.26) для подпространства $\mathcal{L}_3$ можно записать в виде

$$\mathcal{L}_3=\mathfrak{L}_1\cdot\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_2\cap\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_1\cdot\mathfrak{L}_1\,.$$

Сравнивая эту форму записи подпространства $\mathcal{L}_3$ со структурой оператора $\mathcal{S}^{(3)}$, приведенной в (5.24) и (5.25), мы заключаем, что $\mathrm{Im}\,\mathcal{S}^{(3)}\supseteq\mathcal{L}_3$. Это соотношение вместе с обратным включением, полученным ранее, влечет равенство $\mathcal{L}_3=\mathrm{Im}\,\mathcal{S}^{(3)}$. □

§6. Структура твистованной биалгебры и теория представлений

В данном параграфе мы строим конечномерные представления алгебры модифицированного уравнения отражений (5.8) в категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. На протяжении всего параграфа мы полагаем $\hbar=1$ в перестановочных соотношениях (5.8).

Обратим внимание читателя, что класс всех конечномерных представлений рассматриваемой алгебры шире: например, он включает большое число одномерных представлений. В частном случае квантовогрупповой $U_q(sl(m))$ R-матрицы классификация всех одномерных представлений получена в [Mu1]. Кроме того, в этом частном случае конечномерные представления можно строить на основе представлений $U_q(sl(m))$, так как алгебра уравнения отражений вкладывается (как алгебра) в квантовую группу.

Развиваемая ниже теория представлений не зависит от конкретного выбора R-матрицы и применима в общей ситуации, когда квантовая группа не существует. Одной из важных особенностей предлагаемой теории является ее эквивариантность. По определению, представление ρ_U алгебры модифицированного уравнения отражений в линейном пространстве U называется *эквивариантным*, если отображение

$$\mathrm{End}(V)\to\mathrm{End}(U):\quad l_i^j\mapsto\rho_U(l_i^j)$$

является морфизмом категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$.

Свойство эквивариантности представления имеет важное следствие, которое будет использовано в дальнейшем. А именно, если дан модуль W с эквивариантным представлением $\rho_W:\mathcal{L}(R_q,1)\to\mathrm{End}(W)$, тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U\otimes(A\otimes W) & \stackrel{\mathsf{R}}{\longleftrightarrow} & (A\otimes W)\otimes U\\ \downarrow\mathrm{id}\otimes\rho_W & & \rho_W\otimes\mathrm{id}\downarrow\\ U\otimes W & \stackrel{\mathsf{R}}{\longleftrightarrow} & W\otimes U\end{array}\tag{6.1}$$

коммутативна для любого объекта U категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$ и любого подпространства $A \subset \mathcal{L}(R_q, 1)$. Свойство эквивариантности позволяет определять представление алгебры модифицированного уравнения отражений в тензорном произведении ее модулей.

Для частного случая четной симметрии Гекке би-ранга $(m|0)$ эквивариантная теория представлений ассоциированной с этой симметрией алгебры модифицированного уравнения отражений оказывается аналогичной теории представлений универсальной обертывающей алгебры $U(sl(m))$. В начале раздела 4 упоминалась одна особенность четного случая: в соответствующей категории Шура-Вейля $\mathrm{SW}(V_{(m|0)})$ дуальное пространство V^* отождествляется с объектом $V_{(1^{m-1})}$. Поэтому для построения замкнутой теории представлений достаточно, фактически, определить модульную структуру на исходном пространстве V и всех его тензорных степенях $V^{\otimes k}$. Любая тензорная степень $V^{\otimes k}$ есть вполне приводимый модуль над алгеброй модифицированного уравнения отражений и в силу этого свойства разлагается в прямую сумму (3.5) инвариантных подпространств V_λ; подробное изложение этих вопросов содержится в работах [GS2, S].

Однако в общем случае симметрии Гекке би-ранга $(m|n)$ найденных в [GS2, S] конструкций недостаточно. В общем случае представления алгебры модифицированного уравнения отражений в пространствах $V^{*\otimes k}$ необходимо строить независимо от представлений в $V^{\otimes k}$. Центральной проблемой всей теории становится определение модульной структуры в тензорном произведении модулей вида $V_\lambda \otimes V^*_\mu$.

В настоящем разделе мы приводим регулярную процедуру построения представлений алгебры модифицированного уравнения отражений, которая не зависит от значения би-ранга симметрии Гекке. В четном случае (би-ранг $(m|0)$) воспроизводятся ранее полученные результаты работ [GS2, S]. Указанная процедура базируется на структуре твистованной биалгебры, которая существует в алгебре модифицированного уравнения отражений.

Основной составляющей структуры твистованной биалгебры является коумножение Δ, осуществляющее гомоморфизм алгебры модифицированного уравнения отражений в некоторую ассоциативную твистованную алгебру $\mathbf{L}(R_q)$, к определению которой мы сейчас перейдем.

- Как векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ алгебра $\mathbf{L}(R_q)$ изоморфна тензорному произведению двух копий алгебры модифицированного уравнения отражений

$$\mathbf{L}(R_q) = \mathcal{L}(R_q, 1) \otimes \mathcal{L}(R_q, 1)\,.$$

- Произведение в алгебре $\star : \mathbf{L}(R_q)^{\otimes 2} \to \mathbf{L}(R_q)$ определяется правилом:

$$(a_1 \otimes b_1) \star (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2' \otimes b_1' b_2 \,, \qquad a_i \otimes b_i \in \mathbf{L}(R_q)\,, \tag{6.2}$$

где $a_1 a_2'$ и $b_1 b_2'$ представляют собой обычные произведения элементов алгебры модифицированного уравнения отражений, а a_1' и b_1' есть результат действия твиста R_{End} (см. (5.6)) на вектор $b_1 \otimes a_2$

$$a_2' \otimes b_1' := R_{\mathrm{End}}(b_1 \otimes a_2)\,. \tag{6.3}$$

Следует убедиться в ассоциативности произведения (6.2). Для этой цели нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма 26. *Для матричных копий матрицы L, определенных в* (5.14), *выполняются следующие соотношения*

$$R_{\mathrm{End}}(L_{\overline{k}} \otimes L_{\overline{p}}) = L_{\overline{p}} \otimes L_{\overline{k}} \,, \qquad k < p, \quad \forall\, k, p \in \mathbb{N}\,. \tag{6.4}$$

Доказательство. Доказательство проводится прямыми вычислениями на основе соотношения (5.6), предварительно переписанного в виде

$$R_{\mathrm{End}}(L_1 \bar{R}_{12} \otimes L_1) = \bar{R}_{12} L_1 \bar{R}_{12}^{-1} \otimes L_1 \bar{R}_{12}\,,$$

а также уравнения Янга-Бакстера (1.1), которое позволяет переставлять цепочки R-матриц, входящий в определение матричных копий $L_{\overline{k}}$ и $L_{\overline{p}}$. $\square$

Пользуясь леммой 26, легко проверить ассоциативность произведения (6.2) на объектах

$$X^i_{r,s} := L_{\overline{i}} \dots L_{\overline{i+r-1}} \otimes L_{\overline{i+r}} \dots L_{\overline{i+r+s-1}}\,,$$

матричные элементы которых представляют собой однородные полиномы по генераторам алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$. Отметим, что в однородных компонентах алгебры модифицированного уравнения отражений мы пользуемся базисом, аналогичным базису (5.13).

Поскольку для любой тройки объектов $X^{i_1}_{r_1,s_1}$, $X^{i_2}_{r_2,s_2}$ и $X^{i_3}_{r_3,s_3}$ всегда можно выбирать i_1, i_2 и i_3 таким образом, что

$$i_3 \ge i_2 + r_2 + s_2 \ge i_1 + r_1 + s_1\,,$$

то условие ассоциативности

$$(X^{i_1}_{r_1,s_1} \star X^{i_2}_{r_2,s_2}) \star X^{i_3}_{r_3,s_3} = X^{i_1}_{r_1,s_1} \star (X^{i_2}_{r_2,s_2} \star X^{i_3}_{r_3,s_3})$$

немедленно следует из леммы 26. Так как любой элемент алгебры $\mathbf{L}(R_q)$ представляется в виде линейной комбинации матричных элементов некоторых объектов $X^{(i)}_{r,s}$, мы приходим к заключению, что правило (6.2) определяет ассоциативное произведение в алгебре $\mathbf{L}(R_q)$.

Отметим, что алгебра модифицированного уравнения отражений изоморфна любой из двух подалгебр $\mathbf{L}(R_q)$, получаемых следующими вложениями

$$a \mapsto e_{\mathcal{L}} \otimes a \quad \text{или} \quad a \mapsto a \otimes e_{\mathcal{L}}\,,$$

где $e_{\mathcal{L}}$ есть единичный элемент алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$. Это сразу следует из того факта, что единица $e_{\mathcal{L}}$ тривиально коммутирует с любым элементом $a \in \mathcal{L}(R_q, 1)$ под действием твиста R_{End}. Поэтому

$$(e_{\mathcal{L}} \otimes a_1) \star (e_{\mathcal{L}} \otimes a_2) = (e_{\mathcal{L}} \otimes a_1 a_2) \quad \text{и} \quad (a_1 \otimes e_{\mathcal{L}}) \star (a_2 \otimes e_{\mathcal{L}}) = (a_1 a_2 \otimes e_{\mathcal{L}})\,.$$

Определим линейное отображение $\Delta : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathbf{L}(R_q)$ следующим правилом:

$$\begin{aligned} &\Delta(e_{\mathcal{L}}) := e_{\mathcal{L}} \otimes e_{\mathcal{L}} \\ &\Delta(l_i^j) := l_i^j \otimes e_{\mathcal{L}} + e_{\mathcal{L}} \otimes l_i^j - (q - q^{-1}) \textstyle\sum_k l_i^k \otimes l_k^j \\ &\Delta(ab) := \Delta(a) \star \Delta(b) \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{L}(R_q, 1)\,. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Введем также линейное отображение $\varepsilon : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} &\varepsilon(e_{\mathcal{L}}) := 1 \\ &\varepsilon(l_i^j) := 0 \\ &\varepsilon(ab) := \varepsilon(a)\varepsilon(b) \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{L}(R_q, 1)\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Справедливо следующее Предложение.

Предложение 27. *Отображения Δ и ε, заданные в* (6.5) *и* (6.6), *являются соответственно коумножением и коединицей твистованной биалгебраической структуры в алгебре модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q, 1)$.*

Доказательство. Прежде всего, проверим, что отображение Δ задает гомоморфизм алгебр $\mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathbf{L}(R_q)$. Вычисления выглядят проще в базисе сдвинутых генераторов m_i^j, определенных в замечании 17. В терминах этих генераторов отображение Δ принимает вид

$$\Delta(m_i^j) = \sum_s m_i^s \otimes m_s^j\,, \tag{6.7}$$

или, переходя к матричной форме записи,

$$\Delta(M_{\overline{k}}) = M_{\overline{k}} \otimes M_{\overline{k}} \qquad \forall\, k \geq 1\,.$$

Принимая во внимание определения (6.2) и (5.6), находим

$$\Delta(M_{\overline{1}} M_{\overline{2}}) = \Delta(M_{\overline{1}}) \star \Delta(M_{\overline{2}}) = M_{\overline{1}} M_{\overline{2}} \otimes M_{\overline{1}} M_{\overline{2}}\,.$$

Сравнивая это с (5.9), получаем окончательно

$$R_{12}\Delta(M_{\overline{1}}M_{\overline{2}}) = \Delta(M_{\overline{1}}M_{\overline{2}})R_{12}\,,$$

то есть, отображение Δ является гомоморфизмом алгебр. Отметим, что твистованное коумножение (6.7) было предложено в [M].

Требуемая взаимосвязь ε и Δ

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\,\Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon\otimes\mathrm{id})\,\Delta$$

проверяется элементарно. □

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие представления алгебры $\mathbf{L}(R_q)$ можно построить, основываясь на представлениях алгебры модифицированного уравнения отражений. Выбрав два эквивариантных модуля над алгеброй модифицированного уравнения отражений U и W с представлениями $\rho_U:\mathcal{L}(R_q,1)\to\mathrm{End}(U)$ и $\rho_W:\mathcal{L}(R_q,1)\to\mathrm{End}(W)$, построим отображение $\rho_{U\otimes W}:\mathbf{L}(R_q)\to\mathrm{End}(U\otimes W)$ по следующему правилу:

$$\rho_{U\otimes W}(a\otimes b)\triangleright(u\otimes w) = (\rho_U(a)\triangleright u')\otimes(\rho_W(b')\triangleright w)\,,\qquad a\otimes b\in\mathbf{L}(R_q)\,,\quad(6.8)$$

где символ $\triangleright$ обозначает действие оператора, а элемент(ы) b' и вектор(а) u' получаются действием соответствующего твиста (зависящего от b и u) категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$

$$u'\otimes b' := \mathsf{R}(b\otimes u)\,.$$

В силу Предложения 18 определение (6.8) самосогласовано, так как отображение $b\mapsto\rho_W(b')$ также является представлением алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$.

Предложение 28. *Действие* (6.8) *определяет представление алгебры* $\mathbf{L}(R_q)$.

Доказательство. Рассмотрим два произвольных элемента алгебры $\mathbf{L}(R_q)$

$$X_i = (a_i\otimes b_i)\in\mathbf{L}(R_q),\quad i=1,2\,.$$

Нам нужно показать, что для любого вектора $u\otimes w\in U\otimes W$ выполнено соотношение

$$\rho_{U\otimes W}(X_1\star X_2)\triangleright(u\otimes w) = \rho_{U\otimes W}(X_1)\triangleright(\rho_{U\otimes W}(X_2)\triangleright(u\otimes w))\,.\qquad(6.9)$$

В левой и правой части формулы (6.9) стоят, фактически, два отображения, сопоставляющих элементу

$$(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)\otimes(u\otimes w)$$

некоторый вектор пространства $U\otimes W$. Мы докажем, что применение этих (априори разных) отображений к указанному элементу действительно приводит к одинаковому результату.

Введем сокращенные обозначения

$$\mathsf{R}(b_1\otimes a_2)=a_2'\otimes b_1'\,,\quad \mathsf{R}(b_2\otimes u)=u'\otimes b_2'\,,\quad \mathsf{R}(b_1'\otimes u')=u''\otimes b_1''\,.$$

Определения (6.2) и (6.8) дают возможность представить левую часть формулы (6.9) в виде композиции следующих морфизмов:

$$\begin{aligned}(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)\otimes(u\otimes w)&\mapsto(a_1\otimes a_2')\otimes(b_1'\otimes b_2)\otimes(u\otimes w)\\ &\mapsto(a_1a_2'\otimes b_1'b_2)\otimes(u\otimes w)\mapsto(a_1a_2'\otimes u'')\otimes(b_1''b_2'\otimes w)\\ &\mapsto(\rho_U(a_1a_2')\triangleright u'')\otimes(\rho_W(b_1''b_2')\triangleright w)\,.\end{aligned}$$

Учтем теперь условие эквивариантности (6.1) представлений ρ_U и ρ_W. Это условие означает, что под действием категорных твистов вектор $\rho_U(a)\triangleright u$ переставляется с *любым* объектом таким же образом, как и элемент $a\otimes u$. Следовательно, правая часть формулы (6.9) может быть, в свою очередь, представлена в виде такой композиции морфизмов

$$\begin{aligned}(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)\otimes(u\otimes w)&\mapsto(a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes u')\otimes(b_2'\otimes w)\\ &\mapsto(a_1\otimes b_1)\otimes(\rho_U(a_2)\triangleright u'\otimes\rho_W(b_2')\triangleright w)\\ &\mapsto(a_1\otimes\rho_U(a_2')\triangleright u'')\otimes(b_1''\otimes\rho_W(b_2')\triangleright w)\\ &\mapsto(\rho_U(a_1)\triangleright\rho_U(a_2')\triangleright u'')\otimes(\rho_W(b_1'')\triangleright\rho_W(b_2')\triangleright w)\\ &\mapsto(\rho_U(a_1a_2')\triangleright u'')\otimes(\rho_W(b_1''b_2')\triangleright w)\,.\end{aligned}$$

Таким образом, отображения в левой и правой частях формулы (6.9) одному исходному элементу сопоставляют одинаковый вектор в пространстве $U\otimes W$. Это означает идентичность этих отображений и завершает доказательство предложения. □

Следствие 29. *Пусть U и W являются двумя модулями над алгеброй $\mathcal{L}(R_q,1)$ с эквивариантными представлениями ρ_U и ρ_W. Тогда эквивариантное представление $\mathcal{L}(R_q,1)\to\mathrm{End}(U\otimes W)$ задается правилом*

$$a\mapsto\rho_{U\otimes W}(\Delta(a))\,,\quad\forall\,a\in\mathcal{L}(R_q,1)\,,\tag{6.10}$$

где коумножение Δ и отображение $\rho_{U\otimes W}$ определены формулами (6.5) *и* (6.8) *соответственно.*

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из предложений 27 и 28. □

Как было отмечено в начале этого параграфа, эквивариантные представления алгебры модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q,1)$ в пространствах V_λ, $\lambda\vdash k\in\mathbb{N}$, были построены в [GS2, S]. Тем же методом строятся представления в пространствах V_λ^*. После этого формула (6.10) позволяет распространить модульную структуру над алгеброй модифицированного уравнения отражений на все объекты категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$.

Для удобства читателя приведем краткое описание результатов работ [GS2, S] и докажем эквивариантность представления в пространстве V^*. В отличие от четного случая, для симметрии Гекке общего би-ранга эквивариантность представлений в дуальных пространствах V_λ^* должна доказываться независимо от представлений в пространствах V_λ.

Базисное левое представление алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$ в пространстве V задается в терминах матричных элементов оператора B

$$\rho_1(l_i^j) \triangleright x_k = B^j_{\ k} x_i. \tag{6.11}$$

В работе [S] было показано, что отображение $\rho_2 : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ вида

$$\rho_2(l_i^j) \triangleright (x_{k_1} \otimes x_{k_2}) = (\rho_1(l_i^j) \triangleright x_{k_1}) \otimes x_{k_2} + \Big(R^{-1} \circ (\rho_1(l_i^j) \otimes I) \circ R^{-1}\Big) \triangleright (x_{k_1} \otimes x_{k_2})$$

дает представление алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$. Расширения базисного представления до старших представлений $\rho_p : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}(V^{\otimes p})$, $p \geq 3$, определяется аналогичными формулами (см. [S]). Несложно показать, что эти расширения совпадают с универсальным рецептом (6.10).

Выписанные выше представления являются вполне приводимыми: пространство $V^{\otimes p}$ разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств V_λ, нумеруемых разбиениями $\lambda \vdash p$. Ограничение представления ρ_p на подпространство V_λ достигается действием ортонормированных проекторов E_a^λ (см. формулы (3.4) и (3.5))

$$\rho_{\lambda,a} = E_a^\lambda \circ \rho_p \circ E_a^\lambda\,, \tag{6.12}$$

причем модули, отвечающие различным значениям индекса a, эквивалентны.

Базисное представление $\rho_1^* : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}(V^*)$ дается правилом:

$$\rho_1^*(l_i^j) \triangleright x^k = -x^r\, \bar{R}_{ri}^{\ kj}\,. \tag{6.13}$$

Для доказательства его эквивариантности установим справедливость следующей леммы.

Лемма 30. *Пусть R является кособратимой симметрией Гекке. Тогда отображение*

$$V \otimes V^* \to V^* \otimes V \ : \quad x_i \otimes x^j \mapsto x^k \otimes x_l R^{lj}_{ki} \tag{6.14}$$

есть морфизм в соответствующей категории Шура-Вейля.

Доказательство. Для любой симметрии Гекке $R = R^{-1} + (q - q^{-1})I$ в силу (1.2). Подставляя это равенство в (6.14)

$$x_i \otimes x^j \mapsto x^k \otimes x_l \,(R^{-1})^{lj}_{ki} + (q - q^{-1})\,\delta^j_i \,x^k \otimes x_k\,,$$

мы обнаружим, что исследуемое отображение (6.14) есть линейная комбинация категорного морфизма из списка (4.3) и отображения вида

$$x_i \otimes x^j \mapsto \delta^j_i \,x^k \otimes x_k\,.$$

Это отображение, в свою очередь, представляется в виде композиции морфизмов категории Шура-Вейля

$$x_i \otimes x^j \overset{\langle\,,\rangle_r}{\mapsto} \delta^j_i \,1 \overset{\pi_r}{\mapsto} \delta^j_i \,x^k \otimes x_k\,,$$

где мы последовательно применили категорные морфизмы (4.1) и (4.5).

Итак, отображение (6.14) представлено в виде линейной комбинации морфизмов категории Шура–Вейля, следовательно, оно также является категорным морфизмом согласно определению класса морфизмов. □

Предложение 31. *Представление* (6.13) *алгебры* $\mathcal{L}(R_q, 1)$ *в пространстве* V^* *является эквивариантным.*

Доказательство. Для проверки эквивариантности представления ρ_1^* мы должны убедиться, что отображение $\rho_1^* : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}(V^*)$ есть морфизм категории Шура–Вейля.

Отождествляя генератор l_i^j с элементом $x_i \otimes x^j$, мы можем трактовать любое эквивариантное левое действие генератора l_i^j на базисный вектор $x^k \in V^*$ как отображение

$$V \otimes V^* \otimes V^* \to V^*.$$

Построим пример такого действия в виде следующей композиции морфизмов

$$V \otimes V^* \otimes V^* \overset{(6.14)\otimes I}{\longrightarrow} V^* \otimes V \otimes V^* \overset{I\otimes\langle\,,\rangle_r}{\longrightarrow} V^* \otimes \mathbb{K} \cong V^*\,,$$

или, в терминах базисных векторов,

$$l_i^j \triangleright x^k = R^{kj}_{ri}\, x^r = x^r \bar{R}^{kj}_{ri}\,.$$

Легко видеть, что базисное левое представление (6.13) отличается от построенного морфизма только знаком. □

Рассмотрим подробно важный пример „присоединенного“ представления алгебры модифицированного уравнения отражений, заданного в линейной оболочке генераторов l_i^j этой алгебры. Поскольку

$$\mathrm{Span}(l_i^j) \cong V \otimes V^*\,,$$

то рассматриваемое представление строится по общей формуле (6.10), которая в данном случае принимает вид

$$l_i^j \mapsto \rho_{V\otimes V^*}(\Delta(l_i^j))\,,$$

где в качестве $\rho_V(l_i^j)$ и $\rho_{V^*}(l_i^j)$ следует взять базисные представления (6.11) и (6.13) соответственно. Опуская промежуточные выкладки, представим окончательный ответ в компактной матричной форме

$$\rho_{V\otimes V^*}(L_{\overline{1}}) \triangleright L_{\overline{2}} = L_1R_{12} - R_{12}L_1. \tag{6.15}$$

Коумножение Δ (6.5) позволяет расширить это представление с линейной оболочки генераторов алгебры модифицированного уравнения отражений на любую ее однородную компоненту.

Заметим, что результат действия (6.15) совпадает с L-линейной частью определяющих перестановочных соотношений (5.8) алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$, если их переписать в эквивалентной форме

$$L_{\overline{1}}L_{\overline{2}} - R_{12}^{-1}L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}R_{12} = L_1R_{12} - R_{12}L_1\,.$$

В этом смысле действие (6.15) аналогично присоединенному действию алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на ее универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$, которое тоже задается линейной по генераторам частью скобки Ли и распространяется с алгебры Ли на старшие однородные компоненты алгебры $U(\mathfrak{g})$ с помощью хорошо известного стандартного коумножения.

В завершение параграфа рассмотрим вопрос об „sl-редукции", т.е. о переходе от алгебры $\mathcal{L}(R_q,1)$ к ее фактор-алгебре $\mathcal{S}L(R_q)$

$$\mathcal{S}L(R_q) := \mathcal{L}(R_q,1)/\langle\ell\rangle\,, \qquad \ell := \mathrm{Tr}_R L := Tr(CL)\,. \tag{6.16}$$

Элемент ℓ централен в алгебре модифицированного уравнения отражений, что может быть легко проверено вычислением R-следа во втором пространстве матричного соотношения (5.8). Вычисление проводится на основе формул (2.8).

Для явного описания фактор-алгебры $\mathcal{S}L(R_q)$ перейдем к новому набору генераторов $\{f_i^j,\ell\}$, связанному с прежним набором следующим линейным преобразованием:

$$l_i^j = f_i^j + (Tr(C))^{-1}\delta_i^j\,\ell \quad \text{или} \quad L = F + (Tr(C))^{-1}I\,\ell\,, \tag{6.17}$$

где $F = \|f_i^j\|$. Очевидно, что $\mathrm{Tr}_R F = 0$. Обратим внимание, что в силу (3.10) приведенный выше сдвиг возможен только если $m \neq n$.

В терминах новых генераторов перестановочные соотношения алгебры $\mathcal{L}(R_q, 1)$ записываются в виде

$$\begin{cases} \bar{R}_{12}F_1\bar{R}_{12}F_1 - F_1\bar{R}_{12}F_1\bar{R}_{12} = (e_{\mathcal{L}} - \dfrac{\omega}{Tr(C)}\,\ell)(\bar{R}_{12}F_1 - F_1\bar{R}_{12}) \\ \ell F = F\,\ell\,, \qquad \mathrm{Tr}_R F = 0\,, \end{cases}$$

где $\omega := q - q^{-1}$. Теперь легко получить явное описание фактора (6.16) в терминах генераторов и соотношений на них. Матрица $F = \|f_i^j\|$, составленная из генераторов алгебры $\mathcal{S}L(R_q)$, удовлетворяет тем же перестановочным соотношениям (5.8), что и матрица L:

$$\bar{R}_{12}F_1\bar{R}_{12}F_1 - F_1\bar{R}_{12}F_1\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}F_1 - F_1\bar{R}_{12}\,, \qquad \mathrm{Tr}_R F = 0\,, \tag{6.18}$$

но ее матричные элементы f_i^j линейно зависимы в силу соотношения $\mathrm{Tr}_R F = Tr(CF) = 0$.

Нетрудно также переписать представление (6.15) в терминах генераторов f_i^j и ℓ. Учитывая связь (6.17), находим после небольших преобразований:

$$\begin{aligned} &\rho_{V\otimes V^*}(\ell) \triangleright \ell = 0, \qquad \rho_{V\otimes V^*}(F_1) \triangleright \ell = 0\,, \\ &\rho_{V\otimes V^*}(\ell) \triangleright F_1 = -\omega\, Tr(C)\, F_1 \\ &\rho_{V\otimes V^*}(F_{\overline{1}}) \triangleright F_{\overline{2}} = F_1\bar{R}_{12} - \bar{R}_{12}F_1 + \omega\bar{R}_{12}F_1\bar{R}_{12}^{-1}\,. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Отметим, что соотношение (6.19) определяет "присоединенное" представление фактор-алгебры $\mathcal{S}L(R_q)$, но, в отличие от представления самой алгебры модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q, 1)$, представление ее фактора $\mathcal{S}L(R_q)$ не дается линейной частью квадратично-линейных перестановочных соотношений (6.18).

В общем случае, если в представлении $\rho : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}(U)$ элемент ℓ кратен единичному оператору (например, в неприводимом представлении)

$$\rho(\ell) = \chi\, I_U\,, \qquad \chi \in \mathbb{K}\,,$$

то можно построить соответствующее представление $\tilde{\rho} : \mathcal{S}L(R_q) \to \mathrm{End}(U)$ по правилу [S]

$$\tilde{\rho}(f_i^j) = \frac{1}{\xi}\left(\rho(l_i^j) - (Tr(C))^{-1}\rho(\ell)\,\delta_i^j\right)\,, \qquad \xi = 1 - (q - q^{-1})(Tr(C))^{-1}\chi\,. \tag{6.20}$$

Алгебра уравнения отражений (5.9) допускает серию автоморфизмов $M \mapsto zM$ с ненулевым множителем $z \in \mathbb{K}$. На уровне представлений алгебры модифицированного уравнения отражений эти автоморфизмы принимают вид (напомним, что $\hbar = 1$)

$$\rho_U(l_i^j) \mapsto \rho_U^z(l_i^j) = z\rho_U(l_i^j) + \delta_i^j(1-z)(q-q^{-1})^{-1}\, I_U\,.$$

Пользуясь (6.20), можно показать, что представление $\tilde{\rho}_U$ алгебры $\mathcal{S}L(R_q)$, построенное на основе ρ_U^z, не зависит от z. Другими словами, весь класс представлений ρ_U^z, связанных приведенными выше автоморфизмами, переходит в одно представление фактор-алгебры $\mathcal{S}L(R_q)$.

Замечание 32. В свете вышеизложенных фактов мы хотели бы обсудить проблему содержательного определения твистованной (в других терминах квантовой или обобщенной) алгебры Ли. Впервые такой объект был введен в рассмотрение в работе [G1] как набор данных $(\mathfrak{g}, \sigma, [\,,\,])$, где $\mathfrak{g}$ есть некоторое линейное пространство, отображение $\sigma : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g}^{\otimes 2}$ является инволютивной симметрией, а оператор $[\,,\,] : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g}$ ("твистованная скобка Ли") удовлетворяет свойствам

(1) $[\,,\,]\sigma = -[\,,\,]$
(2) $\sigma[\,,\,]_{23} = [\,,\,]_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$
(3) $[\,,\,][\,,\,]_{23}(I + \sigma_{12}\sigma_{23} + \sigma_{23}\sigma_{12}) = 0.$

Третье соотношение из приведенного выше списка свойств (обобщенное тождество Якоби) можно представить в следующей форме

$$[\,,\,][\,,\,]_{12} = [\,,\,][\,,\,]_{23}(I - \sigma_{12})\,. \tag{6.21}$$

Типичный пример такой конструкции дается выбором

$$\mathfrak{g} = \mathrm{End}(V)\,, \quad \sigma = R_{\mathrm{End}}\,, \quad [\,,\,] = \circ(I - \sigma)$$

в обозначениях раздела 5. Другой пример получается ограничением приведенных выше операторов на подпространство бесследовых элементов алгебры $\mathrm{End}(V)$. Универсальная обертывающая алгебра обеих твистованных алгебр Ли определяется соотношением (5.1).

Заметим теперь, что соотношение (6.21) принимает форму (6.15), если положить

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Span}(l_i^j)\,, \quad \sigma(L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}) = R_{12}^{-1}L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}R_{12}\,, \quad [L_{\overline{1}}, L_{\overline{2}}] = L_{\overline{1}}R_{12} - R_{12}L_{\overline{1}}\,. \tag{6.22}$$

Таким образом, если мы попробуем определить твистованную алгебру Ли с такими $\mathfrak{g}$, σ и $[\,,\,]$, то третья аксиома приведенного выше списка (в виде (6.21)) будет выполнена. Но условия из пунктов 1 и 2 нарушатся и, следовательно, их необходимо модифицировать. Например, требование из пункта 1 можно обобщить следующим образом:

$$[\,,\,]\,\mathcal{S} = 0\,,$$

где оператор $\mathcal{S}$ (q-симметризатор) определен в (5.20). Проверка справедливости этого свойства для набора данных (6.22) проводится прямыми вычислениями и оставляется читателю.

Что же касается пункта 2, то фигурирующее в нем отображение σ должно быть заменено отображением R_{End}. Это следует из того, что скобка $[\,,\,]$ в (6.22) представляет собой морфизм категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$. Однако, после всех этих модификаций, ограничение на бесследовую часть пространства $\mathfrak{g}$ приводит к нарушению соотношения (6.21).

Итак, попытка определения твистованной алгебры Ли в пространстве $\mathrm{End}(V)$, где пространство V связано с кособратимой симметрией Гекке, с использованием трех аксиом, приведенных выше, внутренне противоречива. Тем не менее, во многих работах (см., например, [Wo, GM]) твистованные (квантовые) алгебры Ли, связанные с *неинволютивными* твистами, вводятся на основании именно этих аксиом или их незначительных модификаций. Принимая в расчет наши замечания (см. введение) о ,,твистованных алгебрах Ли", связанных с твистами Бирмана–Венцля–Мураками, мы приходим к заключению, что не существует ,,твистованных алгебр Ли", которые удовлетворяли бы приведенной выше системе аксиом и, с другой стороны, их обертывающие алгебры обладали бы хорошими деформационными свойствами.

§7. Квантование с деформированным следом

В данном параграфе рассматриваются квазиклассические структуры, возникающие из алгебры модифицированного уравнения отражений $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ (5.8), связанной со стандартной $U_q(sl(m))$ симметрией Гекке (1.3). В этом случае алгебра $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ может трактоваться как двухпараметрическая деформация коммутативной алгебры $\mathbb{K}[gl(m)^*]$. Мы выясняем место соответствующих Пуассоновых структур в определении квантовых однородных пространств. В завершение параграфа изучается инфинитезимальная составляющая деформированного R-следа.

Пользуясь явным видом симметрии Гекке R, мы можем найти пучок скобок Пуассона, представляющий собой квазиклассический аналог двухпараметрической алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$. Полагая с этой целью $q = 1$ в выражении (1.3), мы перейдем от алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ к алгебре $U(gl(m)_\hbar)$. Следовательно, скобка Пуассона, отвечающая деформации по параметру $\hbar$ есть линейная скобка Пуассона–Ли на пространстве функций на $gl(m)^*$.

Чтобы найти вторую скобку Пуассона, генерирующую пучок, положим $\hbar = 0$ в соотношении (5.8), переходя тем самым к алгебре немодифицированного уравнения отражений. Вводя матрицу $\mathcal{R} = RP$

$$\mathcal{R} = \sum_{i,j}^{m} q^{\delta_{ij}} h_i^i \otimes h_j^j + (q - q^{-1}) \sum_{i<j}^{m} h_i^j \otimes h_j^i\,,$$

перепишем перестановочные соотношения алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ в следующей форме (напомним, что черта над символом матрицы означает транспонирование):

$$\bar{\mathcal{R}}_{12}\, L_1\, \bar{\mathcal{R}}_{21}\, L_2 - L_2\, \bar{\mathcal{R}}_{12}\, L_1\, \bar{\mathcal{R}}_{21} = 0\,. \tag{7.1}$$

Положив $q = e^{\nu}$ для некоторого $\nu \in \mathbb{K}$ и заметив, что $\mathcal{R} = I$ при $q = 1$, мы получим разложение матрицы $\mathcal{R}$ в ряд по параметру ν: $\mathcal{R} = 1 + \nu\,\mathsf{r} + O(\nu^2)$, где

$$\mathsf{r} = \sum_{i=1}^{m} h_i^i \otimes h_i^i + 2 \sum_{i<j}^{m} h_i^j \otimes h_j^i\,, \tag{7.2}$$

есть классическая $sl(m)$ r-матрица

$$[\mathsf{r}_{12}, \mathsf{r}_{13}] + [\mathsf{r}_{12}, \mathsf{r}_{23}] + [\mathsf{r}_{13}, \mathsf{r}_{23}] = 0\,.$$

Выделив в (7.1) линейную по ν часть, мы получим вторую скобку Пуассона в пространстве $\mathbb{K}[gl(m)^*]$:

$$\{L_1, L_2\}_r = L_2 L_1 \bar{\mathsf{r}}_{21} - \bar{\mathsf{r}}_{12} L_1 L_2 + L_2 \bar{\mathsf{r}}_{12} L_1 - L_1 \bar{\mathsf{r}}_{21} L_2. \tag{7.3}$$

Пока эта формула определена лишь на матричных элементах l_i^j матрицы L, которые образуют базис линейных функций на пространстве $gl(m)^*$. Расширение скобки (7.3) на произвольные полиномы от генераторов l_i^j производится с помощью векторных полей на $gl(m)^*$. Для получения указанного расширения определим матрицы

$$\mathsf{r}_{\pm} = \frac{1}{2}\,(\mathsf{r}_{12} \pm \mathsf{r}_{21})\,.$$

Из формулы (7.2) следует, что вновь введенные матрицы $\mathsf{r}_{\pm}$ являются образами матриц

$$r_- = \sum_{i<j}^{m} (e_i^j \otimes e_j^i - e_j^i \otimes e_i^j) := \sum_{i<j}^{m} e_i^j \wedge e_j^i\,, \qquad r_+ = \sum_{i,j}^{m} e_i^j \otimes e_j^i\,, \qquad r_{\pm} \in gl(m)^{\otimes 2} \tag{7.4}$$

относительно фундаментального векторного представления $e_i^j \mapsto h_i^j$, где элементы e_i^j образуют стандартный базис алгебры Ли $gl(m)$

$$[e_i^j, e_k^r] = \delta_k^j\, e_i^r - \delta_i^r\, e_k^j\,.$$

Рассмотрим теперь действие алгебры $gl(m)$ на пространстве $\mathbb{K}[gl(m)^*]$ посредством левых, правых и присоединенных инвариантных векторных полей

$$e_i^j \triangleright l_k^s := \delta_k^j \, l_i^s \,, \qquad l_k^s \triangleleft e_i^j := \delta_i^s \, l_k^j \,, \qquad \operatorname{ad} e_i^j (l_k^s) = e_i^j \triangleright l_k^s - l_k^s \triangleleft e_i^j \,, \tag{7.5}$$

которое расширяется на произвольный полином от генераторов l_i^j с помощью правила Лейбница. Тогда, принимая во внимание определения матриц $r_\pm$, мы можем переписать (7.3) в общем виде

$$\{f,g\}_r = \circ \, r_+^{\mathrm{l,r}}(f \otimes g) - \circ \, r_+^{\mathrm{r,l}}(f \otimes g) - \circ \, r_-^{\mathrm{ad,ad}}(f \otimes g), \qquad \forall \, f,g \in \mathbb{K}[gl(m)^*]. \tag{7.6}$$

Здесь $\circ : \mathbb{K}[gl(m)^*]^{\otimes 2} \to \mathbb{K}[gl(m)^*]$ символизирует коммутативное поточечное умножение функций на $gl(m)^*$, а верхние индексы матриц $r_\pm$ указывают на следующие типы действия

$$r_-^{\mathrm{ad,ad}}(f \otimes g) := \sum_{i<j}^m \operatorname{ad} e_i^j(f) \wedge \operatorname{ad} e_j^i(g), \quad r_+^{\mathrm{l,r}}(f \otimes g) := \sum_{i,j} (e_i^j \triangleright f) \otimes (g \triangleleft e_j^i) \,. \tag{7.7}$$

Заметим, что скобки

$$\{f,\, g\}_- = \circ \, r_-^{\mathrm{ad,ad}}(f \otimes g) \quad \text{и} \quad \{f,g\}_+ = \circ \, r_+^{\mathrm{l,r}}(f \otimes g) - \circ \, r_+^{\mathrm{r,l}}(f \otimes g)$$

по отдельности не являются Пуассоновыми, поскольку для них не удовлетворяется тождество Якоби.

Скобочная операция $\{\,\}_+$ является $gl(m)$-ковариантной, то есть

$$\operatorname{ad} X(\{f,g\}_+) = \{\operatorname{ad} X(f), g\}_+ + \{f, \operatorname{ad} X(g)\}_+, \qquad \forall f,g \in \mathbb{K}[gl(m)^*], \quad X \in gl(m) \,.\blacksquare$$

Скобка (7.6) ограничивается на любую $GL(m)$-орбиту $\mathcal{O} \subset gl(m)^*$, так как для любой функции $f \in I_{\mathcal{O}}$, где $I_{\mathcal{O}}$ есть идеал функций, зануляющихся на орбите, и произвольной функции $g \in \mathbb{K}[gl(m)^*]$ выполняется свойство

$$\{f,g\}_r \in I_{\mathcal{O}} \,.$$

Справедливость этого включения очевидна для компоненты $\{\,\}_-$, поскольку эта операция определяется через присоединенные векторные поля. Доказательство для компоненты $\{\,\}_+$ приведено в [D]. В частности, скобка (7.6) может быть ограничена на многообразие $c_1 := \sum l_i^i = c$, где $c \in \mathbb{K}$ есть некоторая константа. Полагая $c = 0$, мы получим скобку Пуассона на алгебре функций $\mathbb{K}[sl(m)^*]$.

Замечание 33. Будучи ограниченной на алгебру $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$, где $\mathfrak{g} = sl(m)$, скобка $\{\,\}_+$ допускает следующую интерпретацию [G4, D]. Рассмотрим пространство $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$ как присоединенный $\mathfrak{g}$-модуль. Оно разлагается в прямую сумму подмодулей

$$\mathfrak{g}^{\otimes 2} = \mathfrak{g}_s \oplus \mathfrak{g}_a\,,$$

где $\mathfrak{g}_s(\mathfrak{g}_a)$ является симметрическим (кососимметрическим) подпространством в $\mathfrak{g}^{\otimes 2}$. Для $m > 2$ существуют подпространства $\mathfrak{g}_+ \subset \mathfrak{g}_s$ и $\mathfrak{g}_- \subset \mathfrak{g}_a$, которые изоморфны самому $\mathfrak{g}$ как присоединенные $\mathfrak{g}$-модули. Следовательно, существует единственный (с точностью до множителя) нетривиальный $\mathfrak{g}$-ковариантный морфизм $\beta : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g}^{\otimes 2}$, отображающий $\mathfrak{g}_-$ в $\mathfrak{g}_+$.

Так как пространство линейных функций на $\mathfrak{g}^*$, наделенное скобкой Пуассона-Ли, изоморфно как алгебра Ли алгебре $\mathfrak{g}$, морфизм β определяется на всей алгебре $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ (посредством правила Лейбница) и приводит к скобке, совпадающей (с точностью до множителя) со скобкой $\{\,\}_+$. Заметим, что для $m = 2$ компонента $\mathfrak{g}_+$ зануляется и поэтому зануляется и скобка $\{\,\}_+$.

Предложение 34. *Скобка* (7.6) *совместна со скобкой Пуассона-Ли (их скобка Схоутена равна нулю) и, следовательно, соотношение* (1.4) *определяет пучок скобок Пуассона.*

Хотя, в принципе, это утверждение непосредственно следует из того факта, что семейство алгебр $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ есть двухпараметрическая деформация коммутативной алгебры $\mathbb{K}[gl(m)^*]$, его можно проверить и прямыми расчетами [D].

Рассмотрим случай $m = 2$ более подробно. Как уже упоминалось выше, в этом случае компонента $\{\,\}_+$ скобки Пуассона $\{\,\}_r$ зануляется и мы имеем $\{\,\}_r = \{\,\}_-$. Обозначим символами $\{H, E, F\}$ генераторы Картана-Шевалье алгебры Ли $sl(2)$. Тогда $r_- = E \wedge F$ (см. (7.4)) и скобка Пуассона (7.6) принимает вид:

$$\{a, b\}_r = -\mathrm{ad}\, E(a)\,\mathrm{ad}\, F(b) + \mathrm{ad}\, F(a)\,\mathrm{ad}\, E(b)\,.$$

Выберем в алгебре $\mathbb{K}[sl(2)^*]$ генераторы $\{e, f, h\}$, которые соответствуют генераторам Картана-Шевалье при изоморфизме алгебры Ли $sl(2)$ и алгебры Ли линейных функций на пространстве $sl(2)^*$. Несложное вычисление на основе (7.5) дает

$$\{h, e\}_r = -2eh\,, \quad \{h, f\}_r = 2fh\,, \quad \{e, f\}_r = -h^2\,.$$

Видно, что эти скобки отличаются от скобок Пуассона-Ли только множителем $-h$ и, следовательно, любой лист скобки $\{\,\}_r$ содержится в некотором листе скобки Пуассона-Ли. Кроме того, элемент $c_2 = h^2/2 + 2ef$ централен относительно обеих скобок, поэтому рассматриваемый пучок скобок Пуассона ограничивается на фактор-алгебру $\mathbb{K}[sl(2)^*]/\langle c_2 - c\rangle$ при любом значении $c \in \mathbb{K}$.

Положим $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ и рассмотрим генераторы алгебры $su(2)$

$$x=\frac{1}{2}(e-f), \quad y=\frac{i}{2}(e+f), \quad z=\frac{i}{2}h.$$

В этих генераторах мы получаем пучок скобок Пуассона вида

$$\{x,y\}_{PL}=z, \qquad \{y,z\}_{PL}=x, \qquad \{z,x\}_{PL}=y,$$
$$\{x,y\}_r=z^2, \qquad \{y,z\}_r=xz, \qquad \{z,x\}_r=yz.$$

Здесь мы перенормировали скобку $\{\,\}_r$, поскольку эта процедура не влияет на пучок. Квадратичный центральный элемент записывается в виде $c_2=x^2+y^2+z^2$.

Частный случай скобки из рассматриваемого пучка (а именно, $\{\,\}_{PL}-\{\,\}_r$) появлялся в статье [Sh] (см. Приложение к этой работе, написанное J.-H.Lu и A. Вайнштейном) при изучении квазиклассического аналога квантовой сферы. В [Sh] функции на квантовой сфере были реализованы как элементы некоторой операторной алгебры. Этот подход основан на результатах статьи [P], где квантовая сфера трактовалась как C^*-алгебра и ее были классифицированы ее неприводимые представления (как C^*-алгебры). В конечном итоге, квантовая сфера в [Sh] была описана в терминах функционального анализа.

Мы предлагаем другой метод построения квантовой сферы (или квантового гиперболоида, что одно и то же над полем комплексных чисел $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Прежде всего, мы квантуем скобку Кириллова-Костанта-Сурье[10] (сокращенно ККС) на сфере и реализуем квантовую алгебру в виде следующего фактора

$$U(su(2)_\hbar)/\langle x^2+y^2+z^2-c\rangle, \quad c\in\mathbb{K}, \quad c\neq 0. \tag{7.8}$$

Далее мы интересуемся конечномерными представлениями данной фактор-алгебры. Как известно, существует набор отрицательных значений $c^{(k)}=-\hbar^2k(k+2)/4$, $k\in\mathbb{N}$, таких что фактор-алгебра (7.8) обладает конечномерным представлением, если $c=c^{(k)}$ для некоторого $k\in\mathbb{N}$.

Возвращаясь к генераторам алгебры $sl(2)$, мы получаем однопараметрическое семейство алгебр

$$\mathcal{SL}^c(\hbar)=U(sl(2)_\hbar)/\langle\frac{1}{2}H^2+EF+FE-c\rangle.$$

На любой алгебре $\mathcal{SL}^c(\hbar)$ из этого семейства (как и на алгебре $\mathcal{SL}^c=\mathbb{K}[sl(2)^*]/\langle\frac{h^2}{2}+ef+fe-c\rangle$) может быть определено действие алгебры Ли

[10]Напомним, что так называется ограничение скобки Пуассона-Ли на орбиту коприсоединенного действия группы Ли, расположенную в пространстве дуальном к ее алгебре Ли.

$sl(2)$. Относительно этого действия алгебры $\mathcal{S}L^c$ и $\mathcal{S}L^c(\hbar)$ раскладываются в прямую сумму $sl(2)$-модулей, с кратностью слагаемых, не превышающей единицы:

$$\mathcal{S}L^c \cong \bigoplus_{k\geq 0} V_k$$

(аналогичное разложение имеет место для $\mathcal{S}L^c(\hbar)$).

Пусть $\alpha : \mathcal{S}L^c \to \mathcal{S}L^c(\hbar)$ есть $sl(2)$-инвариантное отображение, сопоставляющее элементу старшего веса $e^{\otimes k} \in \mathcal{S}L^c$ элемент $E^{\otimes k} \in \mathcal{S}L^c(\hbar)$. Это условие однозначно определяет отображение α. Теперь в коммутативной алгебре $\mathcal{S}L^c$ можно ввести новое некоммутативное умножение $\star$, приходящее из алгебры $\mathcal{S}L^c(\hbar)$

$$f \star_\hbar g = \alpha^{-1}(\alpha(f) \circ \alpha(g)), \qquad f, g \in \mathcal{S}L^c\,, \tag{7.9}$$

где $\circ$ символизирует операцию произведения в алгебре $\mathcal{S}L^c(\hbar)$. Таким образом, мы проквантовали скобку ККС на гиперболоиде $c_2 = c$ в духе деформационной схемы квантования — через введение нового произведения в исходном пространстве коммутативных функций. Заметим, что в соответствии с [R], наше алгебраическое квантование не расширяется на пространство функций $C^\infty[S^2]$.

Деформируем теперь алгебру $\mathbb{K}[sl(2)^*]$ "вдоль" параметров q и $\hbar$ одновременно. Мы получим алгебру $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ модифицированного уравнения отражений (5.8) с R-матрицей (1.3), где следует положить $m = 2$. Выделяя R-бесследовые элементы из набора четырех генераторов алгебры $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$, придем к ассоциативной алгебре с единицей, порожденной тремя линейно независимыми элементами $\{\hat{H}, \hat{E}, \hat{F}\}$, удовлетворяющими перестановочным соотношениям вида

$$\begin{aligned}
&q^2 \hat{H}\hat{E} - \hat{E}\hat{H} = 2_q \hbar\, \hat{E}\,,\\
&\hat{H}\hat{F} - q^2 \hat{F}\hat{H} = -2_q \hbar\, \hat{F}\,,\\
&q(\hat{E}\hat{F} - \hat{F}\hat{E}) = \hat{H}\Big(\hbar - \frac{(q^2-1)}{2_q}\,\hat{H}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Будем обозначать эту алгебру символом $\mathcal{S}L(q, \hbar)$. Ее центральный элемент $C_q = \frac{\hat{H}^2}{2_q} + q^{-1}\hat{E}\hat{F} + q\hat{F}\hat{E}$ будем называть *твистованным элементом Казимира*. Положим

$$\mathcal{S}L^c(q, \hbar) = \mathcal{S}L(q, \hbar)/\langle C_q - c\rangle\,.$$

Данную фактор-алгебру будем называть *квантовым гиперболоидом* или, рассматривая его над полем $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, — квантовой сферой. Эта алгебра представляет собой двухпараметрическую деформацию исходной коммутативной алгебры $\mathcal{S}L^c$. Для значений параметра q из общего положения оказывается возможным определить отображение $\alpha_q : \mathcal{S}L^c \to \mathcal{S}L^c(q,\hbar)$, аналогичное отображению α (за исключением свойства эквивариантности) и представить новое произведение в алгебре $\mathcal{S}L^c$ аналогично соотношению (7.9).

Как и в случае алгебры (7.8), существует ряд значений параметра $c = c_k$, таких, что соответствующая фактор-алгебра $\mathcal{S}L^{c_k}(q,\hbar)$ обладает конечномерным эквивариантным представлением, описанным в разделе 6. При $q \to 1$ оно переходит в представление алгебры $\mathcal{S}L^{c_k}(\hbar)$. В отличие от рассматриваемого подхода, теория представлений квантовой сферы, предложенная в работе [P], не имеет ничего общего с теорией конечномерных представлений алгебры Ли $sl(2)$ (или $su(2)$).

В общем случае, квантуя скобку ККС на полупростой орбите, мы представляем квантовую алгебру в виде некоторого фактора обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}_\hbar)$, где $\mathfrak{g} = gl(m)$ или $sl(m)$. Заметим, что если полупростая орбита не является орбитой общего положения, то задача нахождения определяющих соотношений соответствующей квантовой орбиты содержит некоторые тонкости (см. подробности в [DM]). И, наконец, мы дополнительно деформируем эту фактор-алгебру в "q-направлении" и приходим к фактор-алгебре алгебры $\mathcal{L}(q,\hbar)$.

На орбите общего положения в пространстве $\mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g}$ есть некоторая полупростая алгебра Ли, существует семейство неэквивалентных скобок Пуассона, приводящих после квантования к $U_q(\mathfrak{g})$-ковариантным алгебрам. Одна из них — редуцированная скобка Склянина. Она часто описывается в терминах разложения Брюа [LW]. Классификация всех таких скобок и их деформационного квантования приведена в [DGS] и [D]. Редуцированная скобка Склянина может быть также проквантована в терминах так называемого расширения Хопфа–Галуа [DGH].

Однако, после ограничения на полупростую орбиту, из всего упомянутого выше семейства скобок только скобка вида (7.6) совместима со скобкой ККС, и квантование порожденного ими пучка скобок Пуассона может быть описано на языке алгебраической геометрии, то есть, в терминах некоторых генераторов и полиномиальных соотношений на них.

Заметим, что на сфере (гиперболоиде) редуцированная скобка Склянина совпадает с одной из скобок пучка $\{\,,\}_{KKS,r}$ (это справедливо и для любой симметрической орбиты). Поэтому, скобка Склянина может быть проквантована в различных подходах. Однако для $m > 2$ и для орбит старшей размерности понятие „квантовой орбиты“ должно быть уточнено. Оно существенно зависит от типа скобки Пуассона на алгебре функций, подлежащей квантованию.

Что же касается других классических полупростых алгебр $\mathfrak{g}$, относящихся к сериям B, C или D, двухпараметрической деформации алгебры $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ не существует [D]. Хотя мы и можем в этой ситуации определить квадратично-линейную алгебру, аналогичную алгебре $\mathcal{L}(R_q, \hbar)$ (подробности см. в [DGG]), но ни эта алгебра, ни ассоциированная с ней квадратичная алгебра не будут деформацией соответствующих классических объектов.

В завершение раздела рассмотрим квазиклассический предел квантового следа с точки зрения, предложенной в [G2]. В процитированной работе рассматривались пучки скобок Пуассона, аналогичные обсуждавшимся выше, но порожденные треугольными классическими r-матрицами, которые приводят к инволютивным твистам. Алгебра, полученная в [G2] "двойным квантованием" пучка скобок Пуассона трактовалась как обертывающая алгебра обобщенной алгебры Ли и ее конечномерные представления образовывали тензорную (а не квазитензорную) категорию.

Как известно, на любом симплектическом многообразии существует мера Лиувилля (или инвариантная, симплектическая мера) $d\mu$, обладающая определяющим свойством

$$\int \{f, g\} d\mu = 0\,.$$

В рамках деформационного квантования эта мера порождает в квантовой алгебре операцию взятия следа с обычными свойствами [GR]. Именно к этой ситуации относится случай скобки ККС на полупростой орбите. Для несимплектической скобки Пуассона обычно стараются описать ее симплектические листы и квантовать их отдельно, то есть, построить свою операторную алгебру для каждого симплектического листа.

В предлагаемом подходе мы не занимаемся квантованием симплектических листов скобки $\{\,,\}_r$ (или любой другой скобки из пучка $\{\,,\}_{KKS,r}$), вместо этого мы квантуем весь пучок скобок Пуассона как целое. Другими словами, мы одновременно q-деформируем все алгебры, возникающие в процессе "$\hbar$-квантования" и получаем операторные алгебры с деформированным следом.

Рассмотрим пучок скобок Пуассона $\{\,,\}_{KKS,r}$ на полупростой орбите $\mathcal{O} \subset su(m)^*$. Скобка $\{\,,\}_r$ не является симплектической, поэтому рассматриваемый пучок не обладает мерой Лиувилля на всей орбите (похожий случай рассмотрен в [G2]). Однако независимо от классической матрицы r, справедливо следующее предложение.

Предложение 35. *Пусть* $\{\,,\}_{KKS,r}$ *есть пучок скобок Пуассона на полупростой орбите* $\mathcal{O}\subset\mathfrak{g}^*$, *где* $\mathfrak{g}=su(m)$ *или ее комплексификация, а* $d\mu$ *— мера Лиувилля, отвечающая скобке* $\{\,,\}_{KKS}$. *Тогда величина*

$$\langle a,b\rangle=\int_{\mathcal{O}}\{a,b\}_r\,d\mu \tag{7.10}$$

является коциклом по отношению к скобке $\{\,,\}_{KKS}$, *т.е.*

$$\langle a,\{b,c\}_{KKS}\rangle+\langle b,\{c,a\}_{KKS}\rangle+\langle c,\{a,b\}_{KKS}\rangle=0\,.$$

Данное утверждение следует из того факта, что скобки $\{\,,\}_{KKS}$ и $\{\,,\}_r$ являются совместными. Коцикл (7.10) интерпретируется как инфинитезимальный член деформации спаривания $a\otimes b\mapsto\int_{\mathcal{O}}ab\,d\mu$ [G2].

Сходным образом мы интерпретируем инфинитезимальный член спаривания $A\otimes B\mapsto\mathrm{Tr}(A\circ B)$. С этой целью воспользуемся соотношением

$$\mathrm{Tr}_R\circ(\mathcal{R}_{12}L_1\mathcal{R}_{21}L_2-L_2\mathcal{R}_{12}L_1\mathcal{R}_{21})=0$$

где матричные элементы матриц L_1 и L_2 принадлежат алгебре $\mathrm{End}(V)$, символ $\circ$ обозначает, как обычно, ассоциативное произведение (4.12) в этой алгебре, а операция Tr_R применяется к каждому матричному элементу. Справедливость приведенного выше соотношения следует из равенства $\mathrm{Tr}_R\,l_i^j=\delta_i^j$.

Разлагая R-матрицы и R-след в ряд по параметру ν (напомним, что $q=e^\nu$):

$$\mathcal{R}=I+\nu\,\mathsf{r}+O(\nu^2)\,,\quad \mathrm{Tr}_R=\mathrm{Tr}+\nu\,b+O(\nu^2)\,,$$

где матрица r приведена в (7.2), мы получаем явную форму операции $b\circ$ на кососимметрическом пространстве $\wedge^2(\mathrm{End}(V))$

$$b\circ(L_1\otimes L_2-L_2\otimes L_1)=-\mathrm{Tr}\circ(\mathsf{r}_{12}L_1L_2+L_1\mathsf{r}_{21}L_2-L_2\mathsf{r}_{12}L_1-L_2L_1\mathsf{r}_{21})\,.$$

Определив таким образом операцию $b\circ$ на базисных элементах, нетрудно найти общее выражение (по поводу обозначений см. (7.4)–(7.7))

$$b\circ(A\otimes B-B\otimes A)=\mathrm{Tr}\circ(-r_-^{\mathrm{ad,ad}}(A\otimes B)-r_+^{\mathrm{r,l}}(A\otimes B)+r_+^{\mathrm{l,r}}(A\otimes B)),\quad A,B\in\mathrm{End}(V)\,. \tag{7.11}$$

Итак, мы построили кососимметрический линейный член деформации спаривания

$$A\otimes B\mapsto\mathrm{Tr}(A\circ B)\,.$$

Предложение 36. *Выражение* $\langle A,B\rangle=-b\circ(A\otimes B-B\otimes A)$ *определяет коцикл на алгебре Ли* $gl(m)$, *то есть,*

$$\langle A,[B,C]\rangle+\langle B,[C,A]\rangle+\langle C,[A,B]\rangle=0\,.$$

Данный коцикл редуцируется на алгебру Ли $sl(m)$.

Нетрудно записать коцикл $\langle A, B\rangle$ в явном виде. Действительно, можно показать, что второй и третий члены в правой части формулы (7.11) не дают вклада в этот коцикл и, пользуясь циклическим свойством обычного следа, получаем

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\,([A,B]\circ \sum_{\alpha>0}[X_\alpha, X_{-\alpha}]) = \mathrm{Tr}\,([A,B]\circ \sum_{\alpha>0} H_\alpha)\,,$$

где суммирование ведется по множеству всех положительных корней алгебры Ли.

Приложение

В данном параграфе собраны некоторые определения и факты из теории алгебр Гекке серии A_{k-1}, которые используются в основном тексте статьи. Подробное изложение этой теории содержится в обзоре [OP1]. На протяжении всего параграфа мы будем пользоваться определениями и обозначениями этой работы. В конце приложения приводится доказательство предложения 7, сформулированного в разделе 2.

По определению, алгеброй Гекке серии A_{k-1} называется ассоциативная алгебра с единицей $H_k(q)$ над полем $\mathbb{K}$, порожденная элементами σ_i, $1 \le i \le k-1$, которые удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} &\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && 1 \le i \le k-2\\ &\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i && |i-j| \ge 2\\ &\sigma_i^2 = 1_H - (q-q^{-1})\,\sigma_i && 1 \le i \le k-1\,. \end{aligned}$$

Здесь 1_H обозначает единицу алгебры, $q \in \mathbb{K}$ — ненулевой элемент основного поля. Далее мы будем полагать поле $\mathbb{K}$ полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ или полем рациональных функций $\mathbb{C}(q)$ от формальной переменной q.

При общих значениях q алгебра Гекке $H_p(q)$ полупроста и изоморфна групповой алгебре $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_k]$ симметрической группы k-го порядка [We]. Следовательно, как регулярный двусторонний $H_k(q)$-модуль алгебра Гекке $H_k(q)$ может быть представлена в виде прямой суммы простых идеалов (теорема Веддерберна–Артина)

$$H_k(q) = \bigoplus_{\lambda\vdash k} M^\lambda\,,$$

нумеруемых разбиениями λ натурального числа k. Относительно левого (правого) действия алгебры Гекке двусторонние подмодули M^λ являются приводимыми и допускают дальнейшее разложение в прямую сумму соответствующих эквивалентных односторонних (левых или правых) подмодулей

$$M^\lambda = \bigoplus_{a=1}^{d_\lambda} M_{l(r)}^{(\lambda,a)} \,,$$

где d_λ обозначает число стандартных таблиц Юнга (λ, a), соответствующих данному разбиению λ [Mac]. Индекс a нумерует стандартные таблицы в рамках некоторого упорядочения, введенного на множестве таблиц.

В каждом идеале M^λ можно выбрать линейный базис из "матричных единиц" e^λ_{ab} с таблицей умножения

$$e^\lambda_{ab}\, e^\mu_{cd} = \delta^{\lambda\mu}\delta_{bc}\, e^\mu_{ad}\,.$$

Подмножество e^λ_{ab}, $1 \le b \le d_\lambda$, (с фиксированным значением первого индекса) образует базис правого модуля $M_r^{(\lambda,a)}$, тогда как фиксация второго индекса дает базисный набор в левом модуле $M_l^{(\lambda,b)}$.

Диагональные элементы e^λ_{aa}, которые будут кратко обозначаться e^λ_a, составляют множество примитивных идемпотентов алгебры Гекке $H_k(q)$. Идемпотенты e^λ_a являются некоторыми полиномами от элементов Юциса-Мерфи $\mathcal{J}_p$, $1 \le p \le k$, (подробности см. в [OP1]), которые определяются итеративным правилом

$$\mathcal{J}_1 = 1_H, \quad \mathcal{J}_{p+1} = \sigma_p\, \mathcal{J}_p\, \sigma_p\,.$$

Множество всех элементов Юциса-Мерфи образует базис максимальной коммутативной подалгебры алгебры Гекке $H_k(q)$. Важное свойство этих элементов выражается следующим соотношением

$$\mathcal{J}_p\, e^\lambda_a = e^\lambda_a\, \mathcal{J}_p = j_p(\lambda,a) e^\lambda_a, \quad j_p(\lambda,a) = q^{2(c_p - r_p)} \in \mathbb{K}\,. \qquad \text{(A.1)}$$

Здесь натуральные числа c_p и r_p представляют собой номера колонки и ряда таблицы Юнга (λ, a), на пересечении которых находится клетка с числом p. Ниже приведен пример одной из таблиц Юнга, отвечающих разбиению $\lambda = (3, 2, 1)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 5 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} j_1 = 1 & j_4 = q^4 \\ j_2 = q^{-2} & j_5 = q^{-4} \\ j_3 = q^2 & j_6 = 1 \end{array}$$

Любые два идемпотента e^λ_a и e^λ_b, соответствующие различным таблицам (λ, a) и (λ, b) одного и того же разбиения $\lambda \vdash k$ могут быть преобразованы друг в друга посредством двустороннего действия обратимых элементов алгебры Гекке $H_k(q)$ [OP1]

$$e_a^\lambda = x_{ab}^\lambda\, e_b^\lambda\, y_{ab}^\lambda\,, \qquad x_{ab}^\lambda,\, y_{ab}^\lambda \in H_k(q)\,. \tag{A.2}$$

Рассмотрим симметрию Гекке $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ и определим с ее помощью специальное представление ρ_R алгебры Гекке $H_k(q)$ в тензорном произведении $V^{\otimes p}$, $p \geq k$, следующим правилом (напомним, что $R_i := R_{ii+1}$):

$$\begin{aligned}
&\rho_R(1_H) = \mathrm{id}_V^{\otimes p},\\
&\rho_R(\sigma_i) = \mathrm{id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes R_i \otimes \mathrm{id}_V^{\otimes(p-i-1)}, \quad 1 \leq i \leq k-1,\\
&\rho_R(xy) = \rho_R(x)\rho_R(y), \quad \forall\, x, y \in H_k(q)\,.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

То, что такое отображение задает представление, немедленно следует из (1.1) и (1.2).

Пусть би-ранг симметрии R имеет значение $(m|n)$ и, следовательно, соответствующий ряд Гильберта-Пуанкаре $P_-(t)$ дается формулой (3.3). Рассмотрим разбиения

$$\begin{aligned}
&\lambda_{m,n} := ((n+1)^{m+1}) \qquad \lambda_{m,n} \vdash (m+1)(n+1)\\
&\lambda^-_{m,n} := ((n+1)^m, n) \qquad \lambda^-_{m,n} \vdash mn + m + n\,.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Графически разбиение $\lambda_{m,n}$ представляется прямоугольной диаграммой с $m{+}1$ строками, длиной $n{+}1$ клеток каждая, а диаграмма $\lambda^-_{m,n}$ получается из нее удалением одной клетки в правом нижнем углу прямоугольника. Заметим, что $\lambda^-_{m,n} \in \mathsf{H}(m,n)$, в то время как разбиение $\lambda_{m,n}$ является минимальным возможным, не принадлежащим крюку $\mathsf{H}(m,n)$ (см. определение 5).

Ниже перечислены свойства представлений ρ_R, которые являются прямым следствием Предложения 6.

i) Образы идемпотентов $E_a^\lambda = \rho_R(e_a^\lambda) \neq 0$, $e_a^\lambda \in H_k(q)$, для всех $2 \leq k < (m+1)(n+1)$;

ii) Представление ρ_R алгебры $H_{(m+1)(n+1)}(q)$ обладает ядром, порожденным идемпотентами $e_a^{\lambda_{m,n}}$

$$\rho_R(e_a^{\lambda_{m,n}}) = 0, \quad 1 \leq a \leq d_{\lambda_{m,n}}\,,$$

при этом $\rho_R(e_a^\mu) \neq 0$ для всех $\mu \vdash (m+1)(n+1)$, $\mu \neq \lambda_{m,n}$;

iii) Для любого целого числа $p \geq (m+1)(n+1)$ и любого разбиения $\nu \vdash p$ справедливо свойство

$$\rho_R(e_a^\nu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{m,n} \subset \nu\,,$$

где включение $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) \subset \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ означает, что $\mu_i \leq \nu_i\ \forall\, i$.

Доказательство предложения 7. Обозначим $p := (m+1)(n+1)$ для более компактной записи последующих формул. Выделим в алгебре Гекке $H_p(q)$ подалгебру $H_{p-1}(q) \subset H_p(q)$, порожденную генераторами $\sigma_i \in H_p(q)$, $1 \le i \le p-2$. Зафиксируем некоторую стандартную таблицу Юнга $(\lambda_{m,n}, a)$ (см. определение (A.4), данное выше) и рассмотрим идемпотенты $e_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}} \in H_{p-1}(q)$ и $e_a^{\lambda_{m,n}} \in H_p(q)$. Обозначение $(\lambda^-_{m,n}, a^-)$ подчеркивает специальный выбор соответствующей таблицы Юнга: она является собственным подмножеством таблицы $(\lambda_{m,n}, a)$. Другими словами, целые числа от 1 до $p-1$ занимают в таблице $(\lambda^-_{m,n}, a^-)$ те же позиции, что и в таблице $(\lambda_{m,n}, a)$. Таблица $(\lambda^-_{m,n}, a^-)$ всегда сущетсвует для любой таблицы $(\lambda_{m,n}, a)$, так как в силу свойства стандартности таблиц Юнга, единственная возможная позиция для числа p — нижний правый угол прямоугольной таблицы $(\lambda_{m,n}, a)$.

Применим отображение $\rho_R : H_p(q) \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ к следующему соотношению (см. [OP1])

$$e_a^{\lambda_{m,n}} = e_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}} \, \frac{(\mathcal{J}_p - q^{2(n+1)} 1_H)}{(q^{2(n-m)} - q^{2(n+1)})} \, \frac{(\mathcal{J}_p - q^{-2(m+1)} 1_H)}{(q^{2(n-m)} - q^{-2(m+1)})} \, .$$

Вводя обозначение $\rho_R(\mathcal{J}_k) := J_k$ и учитывая пункт ii) приведенного выше списка свойств представления ρ_R, получаем тождество

$$0 = E_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}} \, \frac{(J_p - q^{2(n+1)} I)}{(q^{2(n-m)} - q^{2(n+1)})} \, \frac{(J_p - q^{-2(m+1)} I)}{(q^{2(n-m)} - q^{-2(m+1)})} \, ,$$

где $E_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}} \neq 0$ вследствие i), а символ I обозначает тождественный оператор на пространстве $V^{\otimes p}$.

Вычислим след tr полученного выше тождества в последней (p-ой) компоненте тензорного произведения $V^{\otimes p}$, где операция tr с точностью до множителя совпадает с категорным R-следом (4.15)

$$\mathsf{tr}(X) := Tr\,(C \cdot X) \, .$$

Ясно, что $\mathsf{tr}(I) = Tr\, C$ и есть та величина, которая нас интересует.

Поскольку матрица $E_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}}$ есть полином от элементов J_k с индексами $k < p$, она может быть вынесена из-под знака операции tr в p-ом пространстве и мы приходим к равенству:

$$0 = E_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}} \, \mathsf{tr}_{(p)} \Big(J_p^2 - (q^{2(n+1)} + q^{-2(m+1)}) J_p + q^{2(n-m)} I \Big) \, . \qquad \text{(A.5)}$$

Рассмотрим последовательно следы всех слагаемых в этом выражении. Вводя вспомогательное обозначение для комбинации $\omega := q - q^{-1}$, находим

$$\mathsf{tr}_{(p)}(J_p) = \mathsf{tr}_{(p)} \Big(R_{p-1} J_{p-1} (R_{p-1}^{-1} + \omega I) \Big) = \omega J_{p-1} + I_{p-1} \, \mathsf{tr}_{(p-1)}(J_{p-1}) \, .$$

В процессе преобразований мы воспользовались итеративным определением элемента Юциса-Мерфи, условием Гекке для R и свойствами (2.4) и (2.8) операции tr, перечисленными в разделе 2. Так как след в формуле (A.5) умножается на идемпотент, мы можем заменить элемент Юциса-Мерфи J_{p-1} на соответствующее "собственное значение" j_{p-1}, определенное в (A.1):

$$E_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}}\,\mathsf{tr}_{(p)}(J_p) = E_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}}\,\left(\omega j_{p-1} + \mathsf{tr}_{(p-1)}(J_{p-1})\right)\,. \tag{A.6}$$

Для упрощения формул мы будем опускать символ идемпотента и выполнять все выкладки, имея в виду возможность замены вне операции следа каждого элемента Юциса-Мерфи J_k на соответствующее число j_k.

Итак, вычисление следа $\mathsf{tr}_{(p)}(J_p)$ завершается по индукции на основе соотношения (A.6)

$$\mathsf{tr}_{(p)}(J_p) = \omega\sum_{k=1}^{p-1} j_k + \mathsf{tr}(I)\,,$$

где учтено, что по определению $J_1 = I$.

Преобразуем теперь слагаемое, содержащее вторую степень элемента J_p:

$$\begin{aligned}
\mathsf{tr}_{(p)}(J_p^2) &= \mathsf{tr}_{(p)}\left(R_{p-1}J_{p-1}R_{p-1}(R_{p-1}^{-1}+\omega I)J_{p-1}R_{p-1}\right)\\
&= \mathsf{tr}_{(p)}\left(R_{p-1}J_{p-1}^2(R_{p-1}^{-1}+\omega I)\right) + \omega\, J_{p-1}\mathsf{tr}_{(p)}\left(J_p(R_{p-1}^{-1}+\omega I)\right)\\
&= 2\omega\, J_{p-1}^2 + \omega^2\, J_{p-1}\mathsf{tr}_{(p)}(J_p) + \mathsf{tr}_{(p-1)}(J_{p-1}^2)\\
&= 2\omega\, j_{p-1}^2 + \omega^2\, j_{p-1}\mathsf{tr}_{(p)}(J_p) + \mathsf{tr}_{(p-1)}(J_{p-1}^2)\,.
\end{aligned}$$

Подставляя только что найденное значение следа $\mathsf{tr}_{(p)}(J_p)$, мы получаем базу для нового индуктивного вычисления

$$\mathsf{tr}_{(p)}(J_p^2) = 2\omega\, j_{p-1}^2 + \omega^2 j_{p-1}\,\mathsf{tr}(I) + \omega^3 j_{p-1}\sum_{k=1}^{p-1} j_k + \mathsf{tr}_{(p-1)}(J_{p-1}^2)\,.$$

Несложные выкладки дают следующий ответ

$$\mathsf{tr}_{(p)}(J_p^2) = 2\omega\sum_{k=1}^{p-1} j_k^2 + \omega^3\sum_{k=1}^{p-1} j_k\sum_{s=1}^{k} j_s + \left(1+\omega^2\sum_{k=1}^{p-1} j_k\right)\mathsf{tr}(I)\,.$$

Подставляя все вычисленные компоненты в тождество (A.5) и принимая во внимание, что $E_{a^-}^{\lambda^-_{m,n}} \neq 0$, мы приходим к линейному уравнению на величину $\mathsf{tr}(I)$

$$\alpha\,\mathsf{tr}(I) + \beta = 0\,,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + q^{2(n-m)} - q^{2(n+1)} - q^{-2(m+1)} + \omega^2 \sum_{k=1}^{p-1} j_k \\ \beta &= \omega\Big(2 + \frac{\omega^2}{2}\Big) \sum_{k=1}^{p-1} j_k^2 + \frac{\omega^3}{2} \Big(\sum_{k=1}^{p-1} j_k\Big)^2 - \omega\Big(q^{2(n+1)} + q^{-2(m+1)}\Big) \sum_{k=1}^{p-1} j_k \,. \end{aligned}$$

Здесь для представления коэффициента β в приведенной выше форме мы воспользовались тождеством

$$\sum_{k=1}^{p-1} j_k \sum_{s=1}^{k} j_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} j_k^2 + \frac{1}{2} \Big(\sum_{k=1}^{p-1} j_k\Big)^2 .$$

Учитывая определение чисел j_k и форму диаграммы $\lambda^-_{m,n} = ((n+1)^m, n)$, мы можем явно вычислить сумму собственных значений j_k

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} j_k = \sum_{k=1}^{p-1} q^{2(c_k - r_k)} &= (1 + q^2 + \cdots + q^{2n})(1 + q^{-2} + \cdots + q^{-2m}) - q^{2(n-m)} \\ &= q^{n-m} (n+1)_q (m+1)_q - q^{2(n-m)} \,, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{p-1} j_k^2 = \sum_{k=1}^{p-1} (q^2)^{2(c_k - r_k)} = q^{2(n-m)} (n+1)_{q^2} (m+1)_{q^2} - q^{4(n-m)} \,.$$

После этого коэффициент α легко упрощается до следующего вида

$$\alpha = -\omega^2\, q^{2(n-m)} \,.$$

Преобразование β требует более длинных, хотя вполне очевидных вычислений. При их выполнении оказывается полезным тождество

$$k_{q^2} = \frac{q^{2k} - q^{-2k}}{q^2 - q^{-2}} = \frac{(q^k - q^{-k})}{(q - q^{-1})} \frac{(q^k + q^{-k})}{(q + q^{-1})} = k_q \, \frac{q^k + q^{-k}}{2_q} \,.$$

Опуская рутинные выкладки, приведем только окончательный ответ:

$$\beta = \omega^2\, q^{3(n-m)} (m-n)_q \,.$$

Итак, имеем окончательно:

$$\mathsf{tr}(I) = Tr\, C = -\frac{\beta}{\alpha} = q^{n-m} (m-n)_q \,.$$

Утверждение доказано. □

Список литературы

[AG] Akueson P., Gurevich D., *Dual quasitriangular structures related to the Temperley–Lieb algebra*, Lie Groups and Lie Algebras, Math. Appl., vol. 433, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 1–16.

[BR] Berele A., Regev A., *Hook Young diagrams with applications to combinatorics and to representations of Lie superalgebras*, Adv. Math. **64** (1987), 118–175.

[BG] Braverman A., Gaitsgory D., *The Poincaré–Brkhoff–Witt theorem for quadratic algebras of Koszul type*, J. Algebra **181** (1996), 315–328.

[CP] Chari V., Pressley A., *A guide to quantum groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[C] Чередник И., *Факторизующиеся частицы на полупрямой и системы корней*, Теор. и мат. физ. **61** (1984), №1, 35–44; Пер. на англ. яз., Theoret. and Math. Phys. **61** (1984), 977–983.

[DGH] Dabrowski L., Grosse H., Hajac P., *Strong connections and Chern–Connes pairing in the Hopf–Galois theory*, Comm. Math. Phys. **220** (2001), 301–331.

[Da] Davydov A. A., *Totally positive sequences and* R*-matrix quadratic algebras*, J. Math. Sci. **100** (2001), 1871–1876.

[DGG] Delius G. W., Gardner C., Gould M. D., *The structure of quantum Lie algebras for the classical series* $\mathrm{B_l}$*,* $\mathrm{C_l}$ *and* $\mathrm{D_l}$, J. Phys. A **31** (1998), 1995–2019.

[D] Donin J., *Double quantization on coadjoint representations of semisimple Lie groups and their orbits*, ArXiv: QA/9909160.

[DGS] Donin J., Gurevich D., Shnider S., *Double quantization on some orbits in the coadjoint representations of simple Lie groups*, Comm. Math. Phys. **204** (1999), 39–60.

[DM] Donin J., Mudrov A., *Explicit equivariant quantization on coadjoint orbits of* $\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$, Lett. Math. Phys. **62** (2002), 17–32.

[Dr] Дринфельд В. Г., *О квадратичных коммутационных соотношениях в квазиклассическом случае*, Математическая физика и функциональный анализ, Наук. думка, Киев, 1986, с. 25–34; Пер. на англ. яз., Selecta Math. Soviet. **11** (1992), no. 4, 317–326.

[DH] Dung N. P, Hai P. H., *On the Poincaré series of quadratic algebras associated to Hecke symmetries*, Int. Math. Res. Not. **2003**, no. 40, 2193–2203.

[FP] Faddeev L., Pyatov P., *The differential calculus on quantum linear groups*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 35–47.

[FH] Fulton W., Harris J., *Representation theory. A first course*, Grad. Texts in Math., vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.

[FRT] Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., *Квантование групп Ли и алгебр Ли*, Алгебра и анализ **1** (1989), №1, 178–206; Пер. на англ. яз., Leningrad Math. J. **1** (1990), no. 1, 193–225.

[GM] Gomez X., Majid S., *Braided Lie algebras and bicovariant differential calculi over coquasitriangular Hopf algebras*, J. Algebra **261** (2003), 334–388.

[G1] Гуревич Д., *Оператор обобщенного сдвига на группах Ли*, Изв. АН АрмССР. Мат. **18** (1983), №4, 305–317; Пер. на англ. яз., Soviet J. Contemp. Math. Anal. **18** (1983), no. 4, 57–70.

[G2] Gourevitch D., *Équation de Yang–Baxter et quantification des cocycles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990), 845–848.

[G3] Гуревич Д. И., *Алгебраические аспекты квантового уравнения Янга–Бакстера*, Алгебра и анализ **2** (1990), №4, 119–148; Пер. на англ. яз., Leningrad Math. J. **2** (1991), no. 4, 801–828.

[G4] Gurevich D., *Braided modules and reflection equations*, Quantum Groups and Quantum Spaces (Warsaw, 1995), Banach Center Publ., vol. 40, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1997, pp. 99–110.

[GLS1] Gurevich D., Leclercq R., Saponov P., *Traces in braided categories*, J. Geom. Phys. **44** (2002), 251–278.

[GLS2] Gurevich D., Leclercq R., Saponov P., *q-index on braided noncommutative spheres*, J. Geom. Phys. **53** (2005), 392–420.

[GPS1] Гуревич Д. И., Пятов П. Н., Сапонов П. А., *Теорема Кэли–Гамильтона для квантовых матричных алгебр* $\mathrm{GL}(\mathrm{m}\setminus\mathrm{n})$ *типа*, Алгебра и анализ **17** (2005), №1, 160–182; Пер. на англ. яз., St. Petersburg Math. J. **17** (2006), no. 1, 119–135.

[GPS2] Гуревич Д., Пятов П., Сапонов П., *Квантовые матричные алгебры* $\mathrm{GL}(\mathrm{m}\setminus\mathrm{n})$ *типа: структура характеристической подалгебры и ее спектральная параметризация*, Теор. и мат. физ. **147** (2006), №1, 14–46.

[GS1] Gurevich D., Saponov P., *Quantum line bundles via Cayley–Hamilton identity*, J. Phys. A **34** (2001), 4553–4569.

[GS2] Гуревич Д. И., Сапонов П. А., *О неодномерных представлениях алгебры уравнения отражений*, Теор. и мат. физ. **139** (2004), №1, 45–61; Пер. на англ. яз., Theoret. and Math. Phys. **139** (2004), no. 1, 486–499.

[GS3] Gurevich D., Saponov P., *Geometry of non-commutative orbits related to Hecke symmetries*, Proc. Internat. Conf. on Quantum Groups at Technion, Contemp. Math. (to appear).

[GR] Gutt S., Rawnsley J., *Traces for star products on symplectic manifolds*, J. Geom. Phys. **42** (2002), 12–18.

[H] Phung Ho Hai, *Poincaré series of quantum spaces associated to Hecke operators*, Acta Math. Vietnam **24** (1999), 235–246.

[I] Исаев А. П., *Квантовые группы и уравнения Янга–Бакстера*, Физ. элементар. частиц и атом. ядра (Физика ЭЧАЯ) **26** (1995), 1204–1263; Пер. на англ. яз., Phys. Particles Nuclei **26** (1995), 501–526.

[IOP] Isaev A., Ogievetsky O., Pyatov P., *On quantum matrix algebras satisfying the Cayley–Hamilton–Newton identities*, J. Phys. A **32** (1999), L115–L121.

[IP] Isaev A., Pyatov P., *Covariant differential complexes on quantum linear groups*, J. Phys. A **28** (1995), 2227–2246.

[KT] Khoroshkin S., Tolstoy V., *Universal* R*-matrix for quantized (super-) algebras*, Comm. Math. Phys. **141** (1991), 599–617.

[K] Kulish P. P., *Representations of* q*-Minkowski space algebra*, Алгебра и анализ **6** (1994), №2, 195–205; Пер. на англ. яз., St. Petersburg Math. J. **6** (1995), no. 2, 367–374.

[KS] Kulish P., Sklyanin E., *Algebraic structure related to the reflection equations*, J. Phys. A **25** (1992), 5963–5975.

[LW] Lu J.-H., Weinstein A., *Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions*, J. Differential Geom. **31** (1990), 501–526.

[LS] Lyubashenko V., Sudbery A., *Quantum supergroups of* $\mathrm{GL}(\mathrm{m} \setminus \mathrm{n})$ *type: differential forms, Koszul complexes, and Berezinians*, Duke Math. J. **90** (1997), 1–62.

[Mac] Macdonald I. G., *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Math. Monogr. Oxford Sci. Publ., Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995.

[M] Majid S., *Foundations of quantum group theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[Mu1] Mudrov A., *Characters of* $\mathrm{U_q(gl(n))}$*-reflection equation algebra*, Lett. Math. Phys. **60** (2002), 283–291.

[Mu2] Mudrov A., *On quantization of Semenov-Tian-Shansky Poisson bracket on simple algebraic groups*, ArXiv: QA/0412360.

[O] Ogievetsky O., *Uses of quantum spaces*, Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics (Bariloche, 2000), Contemp. Math., vol. 294, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 161–232.

[OP1] Ogievetsky O., Pyatov P., *Lecture on Hecke algebras*, Symmetries and Integrable Systems (Dubna, Russia, June 8–11, 1999), JINR, Dubna, D2,5-2000,218, pp. 39–88 (English); Preprint CPT-2000/P.4076 and MPI 01–40.

[OP2] Ogievetsky O., Pyatov P., *Orthogonal and symplectic quantum matrix algebras and Cayley–Hamilton theorem for them*, ArXiv: QA/0511618.

[P] Podles P., *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), 193–202.

[PP] Polishchuk A., Positselski L., *Quadratic algebras*, Univ. Lecture Ser., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[R] Rieffel M., *Deformation quantization of Heisenberg manifolds*, Comm. Math. Phys. **122** (1989), 531–562.

[S] Saponov P., *The Weyl approach to the representation theory of reflection equation algebra*, J. Phys. A **37** (2004), 5021–5046.

[STS] Semenov-Tian-Shansky M., *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), 1237–1260.

[Sh] Sheu A., *Quantization of the Poisson* SU(2) *and its Poisson homogeneous space — the* 2*-sphere*, Comm. Math. Phys. **135** (1991), 217–232.

[St] Stembridge J. R., *A characterization of supersymmetric polynomials*, J. Algebra **95** (1985), 439–444.

[T] Turaev V., *Quantum invariants of knots and* 3*-manifolds*, de Gruyter Stud. Math., vol. 18, W. de Gruyter and Co., Berlin, 1994.

[We] Wenzl H., *Hecke algebras of type* $\mathrm{A_n}$ *and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), 349–383.

[Wo] Woronowicz S., *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Comm. Math. Phys. **122** (1989), 125–170.

[Z] Zhang R. B., *Structure and representations of the quantum general linear supergroup*, Comm. Math. Phys. **195** (1998), 525–547.

Поступило 13 июля 2007 г.

USTV, Université de Valenciennes
59304 Valenciennes
France
E-mail: gurevich@univ-valenciennes.fr

Лаборатория теоретической физики
им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ
141980, Дубна
Россия
E-mail: pyatov@thsun1.jinr.ru

Отдел теоретической физики ИФВЭ
142284, Протвино
Россия
E-mail: Pavel.Saponov@ihep.ru