

ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРИБОРЫ

№ 10
2013
ISSN: 2072-9952

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ЖУРНАЛ

СОДЕРЖАНИЕ

ЭКОЛОГИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

Емельяничков В.И., Елисеенко Ю.Ю.

Развитие мониторинга промышленных выбросов стационарных источников загрязнения атмосферы 3

Василенко Ю.Г., Корилов А.М., Орнацкая Г.Н.

Концентратомеры КН-2м и КН-3 – приборы экологического контроля нефтепродуктов, жиров и неионогенных поверхностно-активных веществ в объектах окружающей среды 9

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ

Зайцев В.В., Бучнев А.А., Ивлиев М.В., Парамонова Т.И.

К вопросу о разработке критериев радиационной опасности 14

Тихомиров А.А., Шихов В.Н., Зотин А.Г., Золотарева Е.Ю.

Обнаружение признаков деструктивного воздействия на высшие растения при помощи ИР-камеры 18

ЗАГРЯЗНЕНИЕ, КОНТРОЛЬ, АНАЛИЗ И ОХРАНА ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Бувевич А.Г., Баглаева Е.М., Сергеев А.П., Иванов Ю.К.,

Субботина И.Е., Павлюк А.В.

Рентгенофлуоресцентная спектроскопия и «мокрая» химия в геоэкологическом почвенном скрининге качества урбанизированной территории 30

Сухоносенко Д.С.

Учет показателей канцерогенного риска здоровью населения при определении приемлемого уровня загрязнения атмосферного воздуха и питьевой воды 37

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Куркин А.А., Куркина О.Е., Рувинская Е.А., Степанянц Ю.А.

Внутренние волны на границе раздела двухслойной жидкости. Специальные случаи 42

Константинова Е.Д., Маслакова Т.А., Жовнер И.В., Вараксин А.Н.

Анализ тенденций изменения факторов риска и состояния здоровья детей дошкольного возраста в Екатеринбурге в 2001–2011 гг. 50

ГЕОЭКОЛОГИЯ

Галченко Ю.П., Сабянин Г.В.

Экологическая оценка воздействия подземных геотехнологий на атмосферу Земли 56

ГИДРОБИОЛОГИЯ

Воробьева О.В.

Нарушения в потомстве рачков *Daphnia magna*, облученных диодным источником 61

**Учредитель и издатель:
ООО Издательство «Научтехлитиздат»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-1132
Подписной индекс ОАО «Роспечать» 79218
Подписной индекс «Пресса России» 27866

**Главный редактор д-р техн. наук, проф.
Т.Г. САМХАРАДЗЕ**

Редакция:
Сердюк В.С., Боброва Е.А.,
Краснова Л.М., Паляева Ю.С.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Аксенов Ю.П., д-р техн. наук
Гавардашвили Г.В., д-р техн. наук, проф.
Галченко Ю.П., д-р техн. наук
Голубятников И.В., д-р техн. наук, проф.
Гузаиров М.И., д-р техн. наук, проф.
Галиев А.Л., д-р техн. наук, проф.
Гуляев Ю.В., акад. РАН
Ицхак Д., д-р философии, проф., Израиль
Карась В.И., д-р физ.-мат. наук, Украина
Лаверов Н.П., акад. РАН
Лошак Ж., д-р физики, президент Фонда Луи де Бройля, член Парижской АН, Франция
Матвеев В.А., д-р техн. наук, проф., заслуженный деятель науки и техники РФ
Михайлов Ю.Б., д-р техн. наук, проф.
Мовсун-заде Э.М., д-р хим. наук, Азербайджан
Натишвили О.Г., д-р техн. наук, акад. Национальной АН Грузии
Проходская В.Ю., канд. биол. наук.
Проходский Ю.М., д-р техн. наук
Романов А.А., д-р техн. наук
Рыбин В.М., д-р техн. наук, проф., заслуженный деятель науки и техники РФ
Самхарадзе Т.Г., д-р техн. наук, проф.
Тагасов В.И., д-р техн. наук, проф.
Трубешкой К.Н., акад. РАН
Федик И.И., чл.-корр. РАН
Филенко О.Ф., д-р биол. наук.
Харгитгай И., д-р философии, член Национальной АН Венгрии
Чебышов С.Б., д-р техн. наук, проф.
Щербаков Н.С., д-р техн. наук, проф., заслуженный деятель науки РФ

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются.

Публикация статей бесплатная. Правом внеочередной публикации пользуются аспиранты и докторанты.

Материалы, опубликованные в настоящем журнале, не могут быть полностью или частично воспроизведены, тиражированы и распространены без письменного разрешения редакции.

При перепечатке отдельных частей статей ссылка обязательна.

Подписано в печать 26.09.13.

Формат 60×88 1/8. Бумага кн.-журн. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 14,3. Усл. кр.-отг. 32,1. Уч.-изд. л. 19,2. Зак. 441. Тираж 2 700 экз.

☐ Адрес редакции:
107258, Москва, Алымов пер., д. 17, стр. 2.

☎ Тел.: 8 (499) 168-04-95,
факс: 8 (499) 168-23-58. Бухгалтерия: 8 (499) 168-24-28.

✉ E-mail: esip_99@mail.ru
<http://www.tgizd.ru>

Оригинал-макет и электронная версия подготовлены
ООО Издательство «Научтехлитиздат»
Отпечатано в ООО Издательство «Научтехлитиздат».
107258, Москва, Алымов пер., д. 17, стр. 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

А.А. Куркин

доктор физ.-мат. наук, профессор

E-mail: aakurkin@gmail.com

(Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева)

О.Е. Куркина

канд. физ.-мат. наук, доцент

(Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева)

(Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики)

Е.А. Рувинская

канд. физ.-мат. наук

(Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева)

Ю.А. Степаняц

доцент

(Университет Южного Квинсланда)

Тувумба, Австралия

доктор физ.-мат. наук, профессор

(Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева)

г. Нижний Новгород, Российская Федерация

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Экологическая безопасность водоемов требует детального знания возможных последствий экологических катастроф, возникающих при авариях судов, прорывов трубопроводов, случайных сбросов загрязняющих веществ в реки, озера и водохранилища. С этой целью необходим расчет волновых полей, генерируемых на поверхности и внутри водоема, покрытого слоем загрязняющего вещества (разливы мазута, нефти, керосина, машинного масла и т.п. жидких фракций). В работе изучаются внутренние волны, возникающие на границе раздела слоев загрязняющей жидкости и воды. Выводится модельное уравнение (обобщенное уравнение Картевега-де Вриза) для описания таких волн в длинноволновом приближении, содержащее члены высшего порядка малости по нелинейности и дисперсии. Проанализирована структура этих членов в зависимости от параметров стратификации (разности плотностей слоев, различном соотношении толщин слоев, величины поверхностного натяжения). Показано, что при определенном соотношении между этими параметрами ряд коэффициентов основного уравнения обращается в ноль, при этом уравнение существенно упрощается, хотя по-прежнему остается нелинейным и дисперсионным. Структура решений данного уравнения еще не известна, однако уже сейчас можно сказать, что здесь можно ожидать весьма интересные структуры в виде солитонов с осциллирующими асимптотиками.

Ключевые слова: внутренние волны; двухслойная жидкость; обобщенное уравнение Картевега-де Вриза; стратификация; дисперсия; нелинейность.

A.A. Kurkin

Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor

E-mail: aakurkin@gmail.com

(Nizhny Novgorod State Technical University n.a. Alekseev)

O.E. Kurkina

Cand. of Phys.-Math. Sciences, Assistant Professor

(Nizhny Novgorod State Technical University n.a. Alekseev)

(Higher School of Economics National Research University

Nizhny Novgorod)

E.A. Rouvinskaya

Cand. of Phys.-Math. Sciences

(Nizhny Novgorod State Technical University n.a. Alekseev)

Yu.A. Stepanyants

Assistant Professor

(University of Southern Queensland)

Toowoomba, Australia

Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor

(Nizhny Novgorod State Technical University n.a. Alekseev)

Nizhny Novgorod, Russian Federation

INTERNAL WAVES ON THE BOUNDARY OF TWO-LAYER FLUIDS. SPECIAL CASES

Environmental safety of reservoirs requires detailed knowledge of the possible consequences of environmental disasters that occur in accidents ships breakthroughs pipelines, accidental discharges of pollutants into rivers, lakes and reservoirs. For this purpose necessary to calculate the wave fields generated at the surface and inside of the reservoir covered with a layer of pollutant (oil spills, oil, kerosene, lubricating oil and etc. liquid fractions). In this paper the internal waves generated at the interface between the layers of polluting liquids and water are studied. The model equation (generalized Korteweg-de Vries equation) for a description of such waves in the long-wave approximation, containing terms of higher order in the nonlinearity and dispersion is deduced. Structure of these members depending on the stratification parameters (density difference layers, different ratios of layer thicknesses of the surface tension) is analyzed. It is shown that at a certain ratio between mxece parametrs several coefficients of the equation vanishes, and the equation is simplified, though still nonlinear and dispersive. The structure of solutions of this equation is not yet known, but we can already say that one can expect a very interesting structure in the form of solitons with oscillating asymptotic behavior. Keywords: internal waves; two-layer fluid; generalized Korteweg-de Vries equation; stratification; dispersion; nonlinearity.

Введение

Несмотря на принимаемые меры по обеспечению безопасности движения речных судов и нефтеналивных танкеров, а также по охране трубопроводов, время от времени все же происходят катастрофы, приводящие к человеческим жертвам и загрязнениям бассейнов рек, озер и водохранилищ. Недавнее крушение теплохода «Булгария» 10 июля 2011 г. на Куйбышевском водохранилище показало, что подобного рода катастрофы могут происходить и в наши дни на достаточно оживленных трассах даже в дневное время суток. В результате этой аварии погибло 122 человека и произошел разлив части дизельного топлива. В условиях штормовой погоды на поверхности водохранилища образуется либо слой, либо пленка загрязняющего вещества, обладающая определенными упругими свойствами. При этом на границе раздела слоев (например, дизельное топливо–вода) могут существовать внутренние волны.

Одной из задач экологического мониторинга водоемов является прогноз скорости перемешивания загрязняющих веществ с водой, для чего необходимо знать коэффициенты диффузионного переноса. Эти коэффициенты в свою очередь зависят от интенсивности волновых процессов, происходящих в среде. Далее мы выводим модельное уравнение для

описания внутренних волн в двухслойной жидкости и анализируем его свойства.

Вывод обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза для двухслойной жидкости

Рассмотрим распространение внутренней волны на границе раздела слоев в двухслойной жидкости (рис. 1), ограниченной ровным плоским дном и поверхностью, на которую наложено условие твердой крышки. Это условие позволяет отфильтровать поверхностные волны и выделить интересующие нас внутренние волны в «чистом виде». Толщину нижнего слоя обозначим через h_1 , а верхнего – через h_2 . Плотность жидкости в нижнем слое считаем равной ρ_1 , а в верхнем – $\rho_2 \leq \rho_1$. Обозначим отклонение границы раздела слоев от горизонтального положения через $\eta(x, t)$, потенциалы возмущенных скоростей нижней и верхней жидкостей – через Φ_1 и Φ_2 . Для каждого слоя справедливы уравнения Лапласа для потенциалов

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0 \text{ при } 0 < z < h_1 + \eta, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0 \text{ при } h_1 + \eta < z < h_1 + h_2 \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{dz} \Big|_{z=0} &= 0, \quad \frac{d\Phi_1}{dz} \Big|_{z=h_1+h_2} = 0, & (3) \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} &= 0, \\ \rho_2 \left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2 + g\eta \right] - & \\ -\rho_1 \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 + g\eta \right] &= \sigma \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} z = h_1 + \eta(x, t). \quad (4)$$

Здесь $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – вектор-градиент в вертикальной плоскости; σ – коэффициент поверхностного натяжения на поверхности раздела двух жидкостей $z = h_1 + \eta$.

Для перехода к асимптотической процедуре вывода основного уравнения необходимо определить малые параметры системы, исходя из геометрии задачи и масштаба исследуемых явлений. В работе рассматриваются длинные волны, т.е. горизонтальный масштаб процессов L значительно превосходит вертикальный, в то же время характерная амплитуда A распространяющихся возмущений предполагается малой по сравнению с полной глубиной жидкости $H = h_1 + h_2$. Тогда малые параметры нелинейности и дисперсии, исходя из условия задачи, вводятся следующим образом:

$$\varepsilon = A/H, \quad \mu = H^2/L^2.$$

В предположении стандартного масштабирования малых параметров ($\varepsilon \sim \mu$) исходные уравнения (1), (2) и (4) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + \varepsilon \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} = 0 \text{ при } 0 < z < h_1 + \eta, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2} + \varepsilon \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} = 0 \text{ при } h_1 + \eta < z < h_1 + h_2, \quad (6)$$

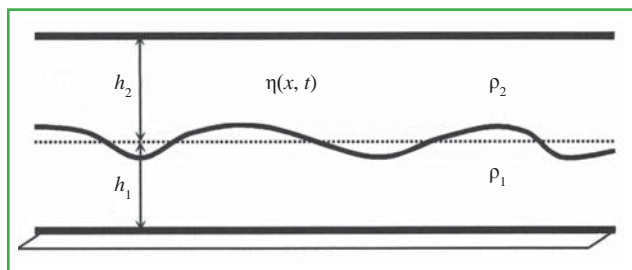


Рис. 1. Схематическое изображение двухслойной жидкости

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} &= 0, \\ \rho_2 \left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \right)^2 + g\eta \right] - & \\ -\rho_1 \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \right)^2 + g\eta \right] &= \sigma \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} (7)$$

Граничные условия (4) и (7) заданы на границе раздела слоев $z = h_1 + \eta(x, t)$, которая является неизвестной функцией и подлежит определению. В предположении малости амплитуд распространяющихся возмущений эти граничные условия могут быть сведены к более простому виду путем разложения всех неизвестных функций, в них входящих, в ряды Тейлора по малым отклонениям от горизонтально-го уровня

$$f(x, z = h_1 + \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \eta^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x, z = h_1, t). \quad (8)$$

Следующий этап асимптотической процедуры – разложение неизвестных функций в ряды по малому параметру

$$\eta = \varepsilon(\eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \dots), \quad (9)$$

$$\Phi_{1,2} = \sqrt{\varepsilon}(\Phi_{1(1,2)} + \varepsilon\Phi_{2(1,2)} + \varepsilon^2\Phi_{3(1,2)} + \dots). \quad (10)$$

Далее осуществляем переход к «медленному» времени и «медленной» координате. Обозначим через c фазовую скорость длинных линейных волн (которую еще предстоит определить) и введем медленные переменные

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t. \quad (11)$$

Тогда соответствующие производные будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\varepsilon^{1/2}c \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Подставляя ряды (8)...(10) в систему уравнений (3), (5)...(7) и, используя переменные (11), решаем рекурсивно полученные уравнения в каждом порядке по параметру ε . В первом порядке $O(\varepsilon)$ находим квадрат фазовой скорости линейных волн c^2

$$\frac{c^2}{gH} = \frac{r(1-r)s}{1-rs},$$

где $s=(\rho_1-\rho_2)/\rho_1$ – относительная величина скачка плотности между слоями; $r=h_1/(h_1+h_2)=h_1/H$ – относительная толщина нижнего слоя. Как следует из определения этих параметров, они всегда меньше единицы.

Разложение во втором порядке, $O(\varepsilon^2)$, приводит к уравнению для η_1

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \alpha \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \eta_1}{\partial \xi^3} = 0, \quad (12)$$

где коэффициенты α и β определяются равенствами

$$\alpha \frac{H}{c} = \frac{3}{2} \frac{1-2r+r^2s}{r(1-r)(1-rs)},$$

$$\frac{\beta}{cH^2} = \frac{r(1-r)}{6} \frac{1+rs-s-3S_0}{1-rs},$$

$$S_0 = \frac{\sigma}{\rho_1 c^2 H}.$$

В третьем порядке, $O(\varepsilon^3)$, находим уравнение для η_2

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial(\eta_1 \eta_2)}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \eta_2}{\partial \xi^3} + \alpha_1 \eta_1^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \gamma_1 \eta_1 \frac{\partial^3 \eta_1}{\partial \xi^3} + \gamma_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} + \beta_1 \frac{\partial^5 \eta_1}{\partial \xi^5} = 0, \quad (13)$$

где

$$\alpha_1 \frac{H^2}{c} = -\frac{3}{8} \frac{1+4r(1-r)-4rs(2+r^2)+r^2s(10+r^2s)}{r^2(1-r)^2(1-rs)^2},$$

$$\frac{\gamma_1}{ch_1} = -\frac{1}{12} \frac{r\{-62+85s-23rs[1+s(1-r)]\}}{(1-rs)^2} -$$

$$-\frac{1}{12} \frac{-7(1-s)+3S_0(1-2r+r^2s)}{(1-rs)^2},$$

$$\frac{\gamma_2}{ch_1} = \frac{1}{24} \frac{r\{-62+85s-23rs[1+s(1-r)]\}}{(1-rs)^2} +$$

$$+\frac{1}{24} \frac{31(1-s)+15S_0(1-2r+r^2s)}{(1-rs)^2},$$

$$\frac{\beta_1}{ch_1^4} = \frac{r(1-r)}{360(1-rs)^2} \{r(1-r)[19s^2(1-56r+58r^2)+3] -$$

$$-2rs(11-30r+19r^2)+4(1-s) -$$

$$-30S_0r(1-r)[1-s(1-r)] - 45S_0^2r(1-r)\}.$$

Комбинируя уравнения (12) и (13) и возвращаясь к исходным переменным, получаем обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ) для поверхности раздела слоев $\eta(x, t)$ с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \alpha_1 \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \gamma_1 \eta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \gamma_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^5 \eta}{\partial x^5} = 0, \quad (14)$$

Далее представлен анализ зависимости коэффициентов этого уравнения от параметров и рассмотрены различные частные случаи, когда некоторые из коэффициентов обращаются в ноль.

Анализ коэффициентов уравнения (14) и различные частные случаи

Прежде всего, построим графики зависимостей коэффициентов α и β в уравнении (14) от параметров. Именно эти коэффициенты в главном порядке теории возмущений определяют основное уравнение теории внутренних волн – уравнение КдВ – когда всеми остальными членами высшего порядка малости обычно пренебрегается [1...3]. Как видно из

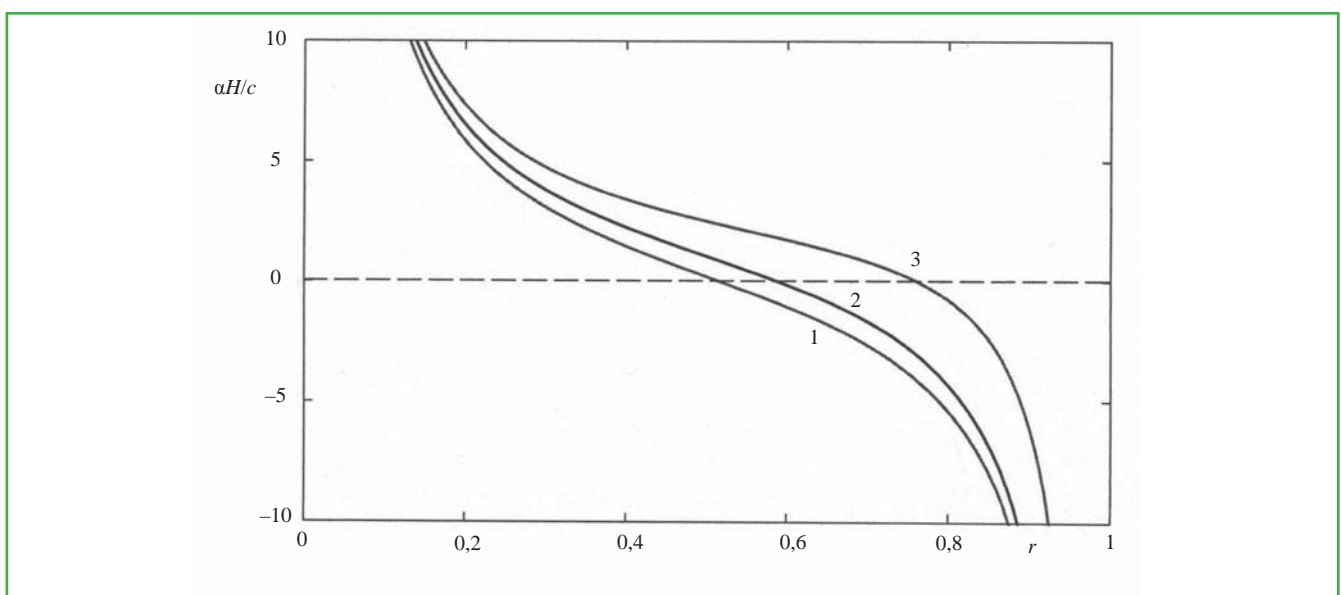


Рис. 2. Коэффициент при квадратичной нелинейности в уравнении КдВ второго порядка в зависимости от относительной толщины нижнего слоя r при различных значениях величины скачка плотности между слоями s : кривая 1 – $s=0,1$; кривая 2 – $s=0,5$; кривая 3 – $s=0,9$.

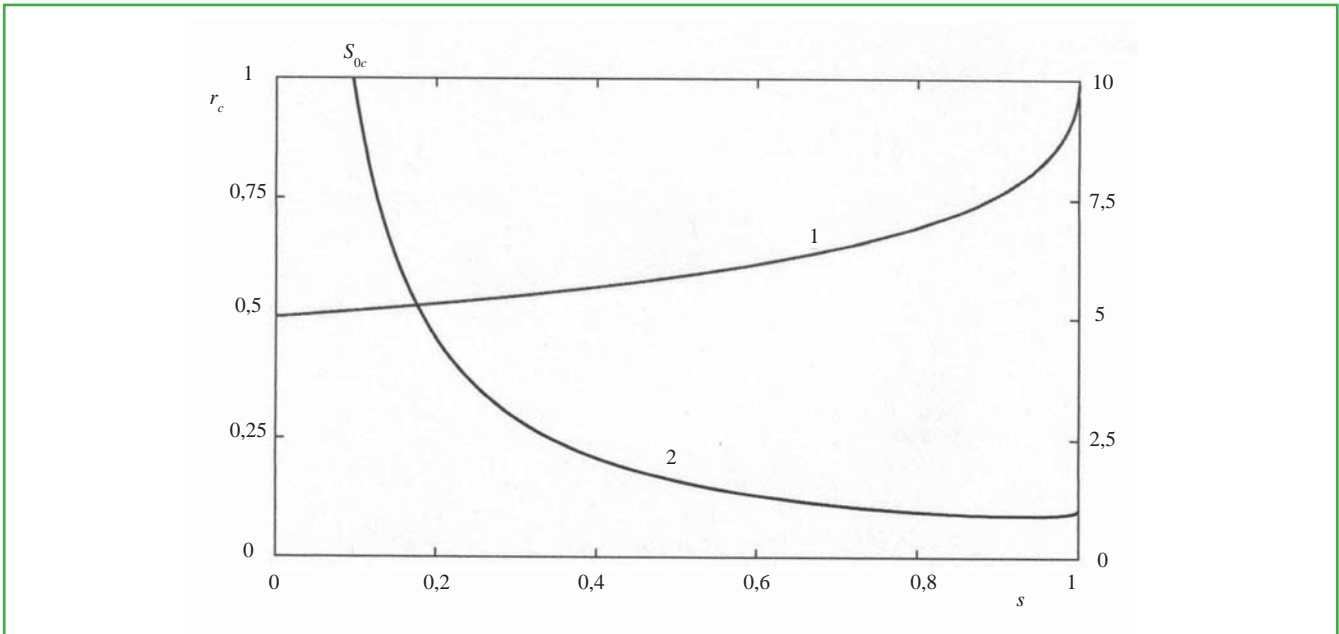


Рис. 3. Зависимости критического значения толщины нижнего слоя жидкости (кривая 1) и критического значения параметра S_0 (кривая 2) от величины скачка плотности между слоями s

рисунка 2, нелинейный коэффициент α может менять знак при определенном соотношении глубин слоев, при этом критическое значение толщины нижнего слоя, при котором коэффициент α обращается в нуль, зависит от величины скачка плотности между слоями s

$$r_c(s) = \frac{1}{s}(1 - \sqrt{1-s}). \quad (15)$$

Эта зависимость изображена на рисунке 3 кривой 1. При малых значениях r (под кривой 1) коэффициент α положителен, тогда как при $r \rightarrow 1$ он становится отрицательным. Это отражается на полярности нелинейных уединенных волн, распространяющихся по границе раздела слоев [2, 3]. Особый случай, когда коэффициент α обращается в нуль, подробно изучался в работах [4...7].

Дисперсионный коэффициент β тоже может обратиться в нуль при определенном значении коэффициента S_0 , характеризующего поверхностное натяжение между слоями жидкости

$$S_{0c}(s, r) = \frac{1 + (r-1)s}{3}.$$

Полагая в этой формуле $r = r_c$, из уравнения (15), когда нелинейный коэффициент обращается в нуль, получаем, что в этом случае при зависимости

$$S_{0c}(s) = \frac{2-s-\sqrt{1-s}}{3}$$

оба коэффициента обращаются в нуль одновременно. Зависимость S_{0c} от s изображена на рисунке 3 линией 2. При малых значениях S_{0c} (под кривой 2) коэффициент β положителен, а при больших значениях этого параметра коэффициент β становится

отрицательным. Это также отражается на полярности нелинейных уединенных волн.

Уравнение КдВ с не равными нулю коэффициентами α и β изучено достаточно подробно [1]. Хорошо исследованы также отдельные случаи, когда либо коэффициент α , либо коэффициент β обращается в нуль по отдельности [4...11]. Однако случай одновременного обращения в нуль этих коэффициентов до сих пор не рассматривался. Далее этот случай будет рассмотрен подробно.

Итак, в случае, когда параметры уравнения (14) таковы, что $\alpha = \beta = 0$, остальные коэффициенты принимают вид

$$\frac{c^2}{gH} = \frac{2(1-\sqrt{1-s})-s}{s},$$

$$\frac{\alpha_1 h_1^2}{c} = 3s^2 \frac{2(1-\sqrt{1-s})-s}{4(1-s)(2-s) - (8-8s+s^2)\sqrt{1-s}}$$

$$\frac{\gamma_1}{cH} = -\frac{2(1-\sqrt{1-s})-s}{6s}, \quad \frac{\gamma_2}{cH} = \frac{2(1-\sqrt{1-s})-s}{3s},$$

$$\frac{\beta_1}{cH^4} = \frac{1}{360s^6} [2\sqrt{1-s}P_5(s) + P_6(s)],$$

где обозначено

$$P_5(s) = 568s^5 - 9\,915s^4 + 27\,051s^3 - 18\,488s^2 - 1\,350s + 1\,620,$$

$$P_6(s) = 19s^6 - 6\,618s^5 + 42\,214s^4 - 72\,725s^3 + 36\,031s^2 + 4\,320s - 3\,240.$$

Зависимость нормированной скорости волн c/\sqrt{gH} от параметра s является плавной и

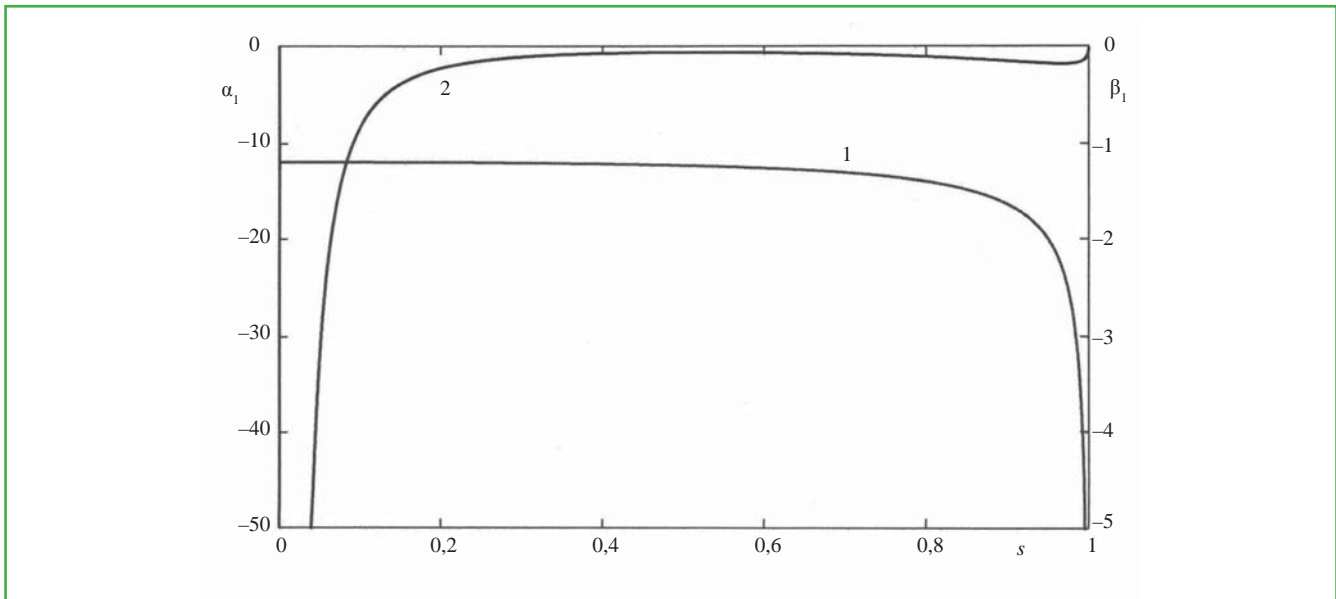


Рис. 4. Зависимости нелинейного α_1 (кривая 1) и дисперсионного β_1 (кривая 2) коэффициентов уравнения (14) от величины скачка плотности между слоями s для случая, когда $\alpha=\beta=0$

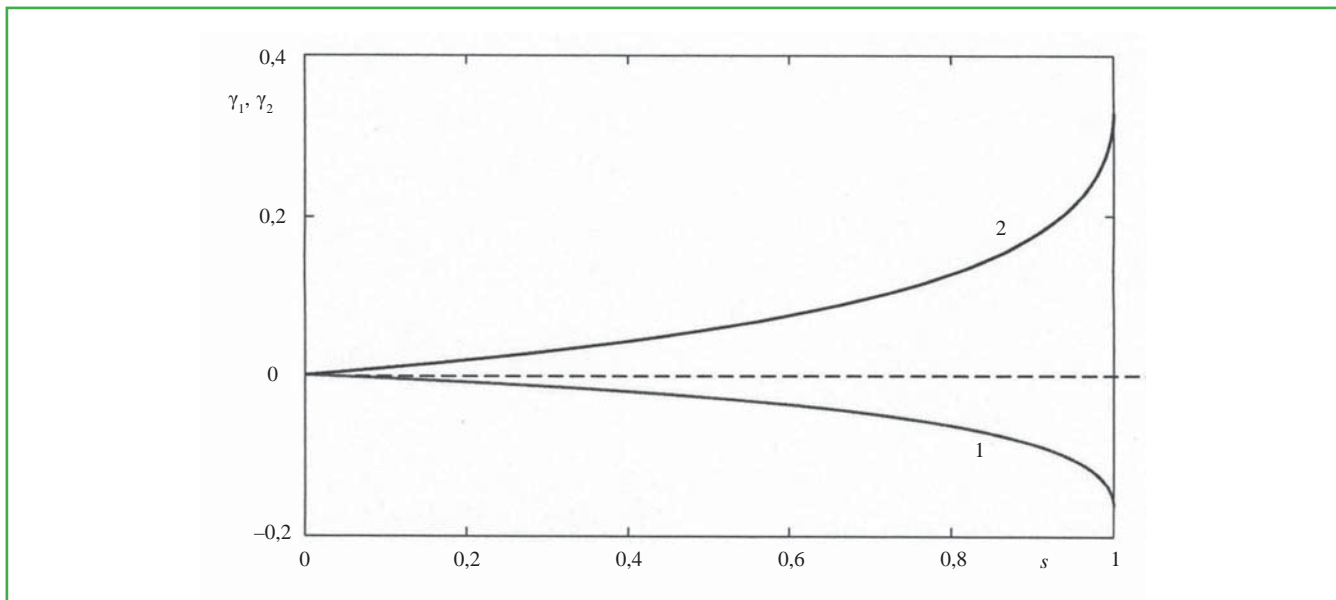


Рис. 5. Зависимости нелинейно-дисперсионных коэффициентов уравнения (14) γ_1 (кривая 1) и γ_2 (кривая 2) от величины скачка плотности между слоями s для случая, когда $\alpha=\beta=0$

монотонной, изменяясь в пределах от 0 до 1 при изменении s в тех же пределах. Зависимости остальных коэффициентов от параметра s показаны на рисунках 4, 5.

При таком выборе параметров задачи уравнение (14) упрощается и принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha_1 \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \gamma_1 \eta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \gamma_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^5 \eta}{\partial x^5} = 0, \quad (16)$$

при этом все коэффициенты в уравнении зависят только от параметра s – относительной величины скачка плотности между слоями.

В частности, при малой разности плотностей слоев, например при $s = 10^{-2}$, получаем ($\rho_2 \approx \rho_1 = \rho$)

$$c = \frac{\sqrt{gH}}{20}, \quad \alpha_1 = -\frac{12c}{H^2}, \quad \beta_1 = -1,28 \cdot 10^6 c H^4, \\ \gamma_1 = -\frac{10^{-2}}{24} c H, \quad \gamma_2 = \frac{10^{-2}}{12} c H. \quad (17)$$

Возьмем для оценки $H = 1$ м, и положим $g = 9,8$ м/с² тогда из формул (17) получаем

$$c \approx 0,16 \text{ м/с}, \quad \alpha_1 \approx -1,88 \text{ м}^{-1} \times \text{с}^{-1}, \quad \beta_1 \approx -2 \times 10^4 \text{ м}^5/\text{с}, \\ \gamma_1 \approx -6,52 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \gamma_2 \approx 1,4 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

При столь малых коэффициентах γ_1 и γ_2 соответствующими членами в уравнении (16) можно пренебречь и свести его к еще более простому

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha_1 \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial^5 \eta}{\partial x^5} = 0. \quad (18)$$

Для волн бесконечно малой амплитуды отсюда следует дисперсионное соотношение, связывающее частоту и волновое число монохроматической волны

$$\omega = ck + \beta k^5.$$

Структура нелинейных волн и, в частности, уединенных волн (солитонов) в рамках уравнений (17) и (18) до сих пор не рассматривалась. Этому интересному вопросу будет посвящена отдельная публикация.

Заключение

Итак, в работе показано, что при наличии двухслойной стратификации в жидкости на границе раздела слоев могут существовать внутренние волны. Для описания структуры и динамики таких волн выведено обобщенное уравнение КдВ, содержащее члены высшего порядка малости по нелинейности и дисперсии. Проанализирована структура этих членов в зависимости от параметров стратификации (разности плотностей слоев, различном соотношении толщин слоев, величины поверхностного натяжения). Показано, что при определенном соотношении между этими параметрами ряд коэффициентов основного уравнения обращается в ноль, при этом уравнение существенно упрощается, хотя по-прежнему остается нелинейным и дисперсионным. Структура решений данного уравнения еще не известна; этому будет посвящена отдельная работа. Однако уже сейчас можно сказать, что по опыту исследования аналогичных волновых задач здесь можно ожидать весьма интересные структуры в виде солитонов с осциллирующими асимптотиками, аналогичными наблюдавшимся в работах [8...12].

Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (№ 14.В37.21.0881), а также проекта Научного фонда НИУ ВШЭ № 12-01-0103.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи*. М.: Мир, 1987, 480 с.
2. Ostrovsky L.A., Stepanyants Yu.A. Do internal solitons exist in the ocean? *Rev. Geophys.* 1989. Vol. 27. № 3. Pp. 293...310.

3. Ostrovsky L.A., Stepanyants Y.A. Internal solitons in laboratory experiments: Comparison with theoretical models. *Chaos*. 2005. Vol. 15. P. 037111-1-28.
4. Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Гримшоу Р. Трансформация солитона в точке нулевой нелинейности // *Письма в ЖЭТФ*. 1997. Т. 65. № 1. С. 113...117.
5. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Solitary wave transformation due to a change in polarity. *Studies in Applied Mathematics*. 1998. Vol. 101. Pp. 357...388.
6. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Solitary wave transformation in a medium with sign-variable quadratic nonlinearity and cubic nonlinearity. *Physica D*. 1999. Vol. 132. Pp. 40...62.
7. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Kurkin A. Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves. *J. Phys. Oceanography*. 2004. Vol. 34. № 12. Pp. 2774...2791.
8. Горшков К.А., Островский Л.А., Папко В.В. Взаимодействие и связанные состояния солитонов как классических частиц // *ЖЭТФ*. 1976. Т. 71. Вып. 2. С. 585...593.
9. Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A., Papko V.V., Pikovsky A.S. On the existence of stationary multisolitons. *Phys. Lett. A*. 1979. Vol. 74. № 3, 4. Pp. 177...179.
10. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media. *J. Phys. Soc. Japan*. 1972. Vol. 33. Pp. 260...264.
11. Kawahara T., Takaoka M. Chaotic motions in oscillatory soliton lattice. *J. Phys. Soc. Japan*. 1988. Vol. 57. № 11. Pp. 3714...3732.
12. Apel J., Ostrovsky L.A., Stepanyants Y.A., Lynch J.F. Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound. *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. Vol. 121. № 2. Pp. 695...722.

REFERENCES

1. Ablovic M., Sigur H. *Solitony i metod obratnoj zadachi* [Solitons and method of inverse problem]. M.: Mir. [Moscow: Publishing house «World»]. 1987. 480 p.
2. Ostrovsky L.A., Stepanyants Yu.A. Do internal solitons exist in the ocean? *Rev. Geophys.* 1989. Vol. 27. № 3. Pp. 293...310.
3. Ostrovsky L.A., Stepanyants Y.A. Internal solitons in laboratory experiments: Comparison with theoretical models. *Chaos*. 2005. Vol. 15. P. 037111-1-28.
4. Talipova T.G., Pelinovskij E.N., Grimshou R. Transformacija solitona v tochke nulevoj nelinejnosti [The transformation of the soliton in the point of zero nonlinearity]. *Pis'ma v ZhJeTF* [JETP Letters]. 1997. Vol. 65. № 1. pp. 113...117.

5. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Solitary wave transformation due to a change in polarity. *Studies in Applied Mathematics*. 1998. Vol. 101. Pp. 357...388.
6. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Solitary wave transformation in a medium with sign-variable quadratic nonlinearity and cubic nonlinearity. *Physica D*. 1999. Vol. 132. Pp. 40...62.
7. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Kurkin A. Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves. *J. Phys. Oceanography*. 2004. Vol. 34. № 12. Pp. 2774...2791.
8. Gorshkov K.A., Ostrovskij L.A., Papko V.V. Vzaimodejstvie i svjazannye sostojaniya solitonov kak klassicheskikh chastic [Interaction and bound states of solitons as classical particles]. *ZhETF [Journal of Experimental and Theoretical Physics]*. 1976. V. 71. Issue. 2. pp. 585... 593.
9. Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A., Papko V.V., Pikovskiy A.S. On the existence of stationary multisolitons. *Phys. Lett. A*. 1979. Vol. 74. № 3, 4. Pp. 177...179.
10. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media. *J. Phys. Soc. Japan*. 1972. Vol. 33. Pp. 260...264.
11. Kawahara T., Takaoka M. Chaotic motions in oscillatory soliton lattice. *J. Phys. Soc. Japan*. 1988. Vol. 57. № 11. Pp. 3714...3732.
12. Apel J., Ostrovsky L.A., Stepanyants Y.A., Lynch J.F. Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound. *J. Acoust. Soc. Am*. 2007. Vol. 121. № 2. Pp. 695...722.

Информация об авторах

Куркин Андрей Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор

E-mail: aakurkin@gmail.com

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Куркина Оксана Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Рувинская Екатерина Александровна, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Степанянц Юрий Александрович, доцент

Университет Южного Квинсланда

4350, Австралия, Тувумба, ул. Васт

доктор физ.-мат. наук, профессор

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

603950, ГСП-41, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, ул. Минина, д. 24

Information about the authors

Kurkin Andrey Aleksandrovich, Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor

E-mail: aakurkin@gmail.com

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. Alekseev

Kurkina Oksana Evgenjevna, Cand. of Phys.-Math. Sciences, Assistant Professor

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. Alekseev

Higher School of Economics National Research University Nizhny Novgorod

Rouvinskaya Yekaterina Aleksandrovna, Cand. of Phys.-Math. Sciences

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. Alekseev

Stepanyants Yuriy Aleksandrovich, Assistant Professor

University of Southern Queensland

4350, QLD, Australia, Toowoomba, Wast St.

Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. Alekseev

603950, GSP-41, Nizhny Novgorod, Russian Federation, Minin st., 24