Д. С. Малышев, Классификация сложности задачи о рёберной раскраске для некоторого семейства классов графов, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 2, 44–50

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/dm1367

Дискретная математика

том 28 выпуск 2 * 2016

УДК 519.174 DOI 10.4213/dm1367

Классификация сложности задачи о рёберной раскраске для некоторого семейства классов графов

© 2016 г. Д. С. Малышев*

Класс графов называется монотонным, если он замкнут относительно удалений вершин и рёбер. Любой такой класс может быть задан запрещёнными подграфами. Хроматическим индексом графа называется наименьшее количество цветов, необходимое для такого раскрашивания его рёбер, что любые два соседних ребра имеют разные цвета. В статье получена полная классификация сложности задачи о хроматическом индексе для всех монотонных классов, определяемых запрещёнными подграфами, каждый из которых имеет не более 6 рёбер или не более 7 вершин.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 16-31-60008-мол_а_дк, гранта Президента РФ МК-4819.2016.1, лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

Ключевые слова: вычислительная сложность, задача о хроматическом индексе, эффективный алгоритм

1. Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т.е. непомеченные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Граф H называется *порождённым подграфом* графа G, если H получается из G удалением некоторого множества его вершин (возможно, пустого). Удаление вершины подразумевает удаление всех инцидентных ей рёбер. Граф H называется *подграфом* графа G, если H получается из G удалением некоторых (возможно, никаких) его вершин и рёбер.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Любой наследственный класс (и только наследственный класс) графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$. В этом случае принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$. *Монотонный* класс графов — наследственный класс, замкнутый ещё и относительно удаления рёбер. Любой монотонный

*Места работы: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых подграфов $\mathcal{S}$, при этом пишем $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_s(\mathcal{S})$.

Раскраской вершин графа G называется любое такое отображение $c:\ V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$, что $c(u) \neq c(v)$ для любых соседних вершин u и v. *Раскраской рёбер графа* G называется любое такое отображение $c:\ E(G) \longrightarrow \mathbb{N}$, что $c(e_1) \neq c(e_2)$ для любых соседних рёбер e_1 и e_2. Минимальные количества цветов в раскрасках вершин и рёбер графа G называются *хроматическими числом* и *индексом* G и обозначаются через $\chi(G)$ и $\chi'(G)$ соответственно. *Задача о вершинной k-раскраске* или просто *задача* k-ВР (соответственно, *задача о рёберной k-раскраске* или *задача* k-РР) состоит для заданного графа G в распознавании наличия раскраски вершин (соответственно, рёбер) G в k цветов. *Задачи о хроматическом числе* и *индексе* (кратко, *задачи* ХЧ и ХИ) для заданного графа G состоят в вычислении параметров $\chi(G)$ и $\chi'(G)$ соответственно. Для рассматриваемой NP-полной задачи на графах Π класс с полиномиально разрешимой задачей Π будем называть Π-*простым*, а класс с NP-полной задачей Π будем называть Π-*сложным*.

Задачи ХЧ и ХИ связаны посредством понятия рёберного графа. Граф H называется *рёберным графом графа* G и обозначается $H = L(G)$, если $V(H) = E(G)$ и две вершины H являются соседними тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра в G являются соседними. Не любой граф является рёберным, например, таковым не является граф $K_{1,3}$ — дерево с 4 вершинами, одна из которых имеет степень 3. Иными словами, любой рёберный граф принадлежит $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$. Очевидно, что $\chi(L(G)) = \chi'(G)$ для любого графа G. Если граф H является связным и рёберным, отличным от треугольника, то существует и единствен граф G, для которого $H = L(G)$, причём граф G может быть вычислен по графу H за линейное время [12]. Отсюда следует, что для любого монотонного класса $\mathcal{X}$ задача ХИ в классе $\mathcal{X}$ полиномиально эквивалентна задаче ХЧ в классе $L(\mathcal{X})$. Имеет место известная теорема В.Г. Визинга [1], в которой утверждается, что для любого графа G выполнено неравенство $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G)+1$, где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин графа G.

Для задач 3-ВР и 4-ВР известны характеризации вычислительной сложности в семействах $\{\mathrm{Free}(\{G\}) :\ |V(G)| \leqslant 6\}$ и $\{\mathrm{Free}(\{G\}) :\ |V(G)| \leqslant 5\}$ соответственно [4,6]. Известны полные сложностные дихотомии для задач 3-ВР и 3-РР в семействах $\{\mathrm{Free}(\{G_1, G_2\}) :\ \max(|V(G_1)|, |V(G_2)|) \leqslant 5\}$ и $\{\mathrm{Free}(\mathcal{S})$: каждый граф из $\mathcal{S}$ содержит не более 6 вершин и $\mathcal{S}$ содержит не более 2 графов с 6 вершинами$\}$ [2,10]. В настоящей работе рассматривается семейство монотонных классов, задаваемых запрещением подграфов, каждый из которых имеет не более 6 рёбер или не более 7 вершин. Показано, что такой класс является ХИ-простым, если один из запрещённых подграфов является субкубическим лесом, иначе он является ХИ-сложным. Граф называется *субкубическим*, если степени всех его вершин не более 3.

В работе приняты следующие обозначения: $\deg(x)$ — степень вершины x; $N(x)$ — окрестность вершины x; $G\backslash\{x\}$ — результат удаления вершины x из графа G; G_1+G_2 — дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин; K_n и O_n — полный и пустой графы с n вершинами соответственно; мост B_k — граф, получаемый соединением двух центральных вершин двух простых путей с тремя вершинами каждый простым путём длины k; B_1^+ — граф, получаемый подразбиением ребра графа B_1, инцидентного вершинам степеней 2 и 3; *butterfly* — граф, получаемый отождествлением двух вершин двух треугольников, каждая из которых принадлежит своему треугольнику.

2. Вспомогательные результаты

2.1. Простейшие графы и их значение Связный граф G назовём *простым*, если любая вершина графа G имеет не менее двух соседей степени $\Delta(G)$. Значение этого понятия состоит в том, что для любого класса $\mathcal{X}$ задача ХИ полиномиально сводится к той же задаче для части $\mathcal{X}$, состоящей из всех простых графов из $\mathcal{X}$. Это очевидным образом следует из того факта [13], что граф G, содержащий вершину x, не более одного соседа которой имеет степень $\Delta(G)$, имеет раскраску рёбер в $\Delta(G)$ цветов тогда и только тогда, когда таковым является граф $G \setminus \{x\}$.

Лемма 1. *Если монотонный класс $\mathcal{X}$ не содержит хотя бы один из трёх графов B_1+K_2, B_1^+, B_2, то задача* 3-РР *полиномиально разрешима в классе $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Мы покажем сначала, что задача 3-РР в классе $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}_s(\{B_1\})$. Пусть G — произвольный простой граф из $\mathcal{X}$, содержащий B_1 в качестве подграфа. Пусть $V(B_1) = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ и $E(B_1) = \{x_1x_2, x_2x_3, y_1y_2, y_2y_3, x_2y_2\}$. Можно считать, что $\Delta(G) \leqslant 3$, иначе G не является рёберно 3-раскрашиваемым. Если $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}_s(\{B_1^+\})$, то $|V(G)| \leqslant 6$ ввиду связности G и выполнения неравенства $\Delta(G) \leqslant 3$. По тем же причинам имеет место неравенство $|V(G)| \leqslant 14$, если $G \in \mathrm{Free}_s(\{B_1+K_2\})$ (никакая вершина G не может находиться на расстоянии 3 и более от центрального ребра x_2y_2 подграфа B_1). Под *расстоянием* между вершиной $v \in V(G)$ и ребром x_2y_2 понимается минимум среди расстояний между v и x_2 и между v и y_2.

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}_s(\{B_2\})$ и существует вершина G, отстоящая от x_2y_2 на расстояние 4. Тогда существуют такие вершины a, b, c, порождающие в G простой путь с 3 вершинами, что расстояния между x_2y_2 и вершинами a, b, c равны 2,3,4 соответственно. Не уменьшая общности, можно считать, что вершины x_1 и a являются смежными. Понятно, что вершины x_1 и x_3 не являются смежными, иначе рёбра $ax_1, x_1x_3, x_1x_2, x_2y_2, y_1y_2, y_2y_3$ образуют B_2. Аналогично, вершина a не смежна ни с одной из вершин y_1 и y_3. Так как G является простым, то хотя бы одна из вершин x_1 и a имеет степень 3.

Пусть $\deg(x_1) = 3$. Сосед x вершины x_1, отличный от a и x_2, обязан совпадать с y_1 или с y_3, иначе рёбра $ax_1, xx_1, x_1x_2, x_2y_2, y_1y_2, y_2y_3$ образуют B_2. Будем считать, что $x = y_1$. Понятно, что $\deg(b) = 2$, иначе существует вершина из $N(b) \setminus \{a, c\}$, не принадлежащая $V(B_1)$, и G содержит подграф B_2. Так как G является простым, то $\deg(a) = 3$. Понятно, что вершины a и x_3 являются соседними, иначе G содержит подграф B_2. Степень вершины c не более 2, иначе 3 ребра, инцидентные c, рёбра ab, ax_1, ax_3 образуют B_2. Получаем противоречие с простотой G, так как $\deg(b) = \deg(c) = 2$.

Пусть теперь $\deg(x_1) = 2$. Тогда $\deg(a) = 3$ и вершина a обязана быть соседом x_3. В силу той же простоты G существуют вершины $b' \in N(b) \setminus \{a, c\}$ и $x' \in N(x_3) \setminus \{a, x_2\}$. Напомним, что $x' \neq x_1$. Понятно, что $x' \in \{y_1, y_3\}$, иначе рёбра $x'x_3, ax_3, x_3x_2, x_2y_2, y_3y_2, y_2y_1$ образуют подграф B_2. Но тогда рёбра $x'x_3, x_2x_3, ax_3, ab, bc, bb'$ образуют подграф B_2 графа G. Получаем противоречие.

Сводимость, сформулированная в начале первого абзаца, действительно имеет место. По рассуждениям предыдущих разделов каждый простой граф из $\mathcal{X} \setminus \mathrm{Free}_s(\{B_1\})$ имеет не более $2 + 4 \cdot (1 + 2 + 4) = 30$ вершин, так как любая вершина такого графа находится на расстоянии не более 3 от центрального ребра подграфа B_1. Поэтому таких графов конечное множество.

Понятно, что задача 3-РР в классе $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}_s(\{B_1\})$ полиномиально эквивалентна задаче 3-ВР в классе $L(\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}_s(\{B_1\}))$. Очевидно, что $L(\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}_s(\{B_1\})) \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{1,3}, butterfly\})$. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, butterfly\})$ [11]. Поэтому класс $\mathcal{X}$ является 3-РР-простым.

Простой граф G назовём *простейшим*, если $\Delta(G) \geqslant 4$. Из теоремы Визинга и предыдущей леммы следует, что для любого класса графов $\mathcal{X}$ задача ХИ полиномиально сводится к той же задаче для части $\mathcal{X}$, состоящей из всевозможных простейших графов из $\mathcal{X}$.

Лемма 2. *Любой простейший граф из* $\mathrm{Free}_s(\{B_1^+\}) \cup \mathrm{Free}_s(\{B_1 + K_2\}) \cup \mathrm{Free}_s(\{B_2\})$ *содержит не более* 62 *вершин.*

Доказательство. Пусть G — простейший граф из $\mathrm{Free}_s(\{B_1^+\}) \cup \mathrm{Free}_s(\{B_1 + K_2\}) \cup \mathrm{Free}_s(\{B_2\})$. Поскольку G является простым, он содержит две смежные вершины x и y, каждая из которых имеет степень $\Delta(G)$.

Пусть $\Delta(G) \geqslant 7$. Пусть z — произвольный элемент множества $N(x) \setminus \{y\}$ степени $\Delta(G)$. Такая вершина z обязательно существует, так как G является простейшим. Если $G \in \mathrm{Free}_s(\{B_1^+\}) \cup \mathrm{Free}_s(\{B_1 + K_2\})$, то вершина z не может иметь соседа вне множества $N(x) \cup N(y)$. Если такая вершина z' существует, то рёбра $z'z, xz, xz_1, xz_2, xy, yz_3, yz_4$, где z_1 и z_2 — произвольные вершины из $N(x) \setminus \{y, z\}$, а z_3 и z_4 — произвольные вершины из $N(y) \setminus \{x, z, z_1, z_2\}$, образуют подграф G' графа G. Ясно, что $B_1 + K_2$ и B_1^+ являются подграфами графа G'. Если $G \in \mathrm{Free}_s(\{B_2\})$, то вершина z не может иметь двух соседей z^*, z^{**} вне множества $N(x) \cup N(y)$, иначе рёбра $zz^*, zz^{**}, zx, xy, yy^*, yy^{**}$ образуют B_2, где y^* и y^{**} — произвольные вершины из $N(y) \setminus \{x, z\}$. Так как $\deg(z) = \Delta(G) \geqslant 7$, то множество $(N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}$ содержит не менее пяти соседей вершины z. Пусть a_1 и a_2 — произвольные соседи вершины z из этого множества. Рёбра $za_1, xz_1, xz_2, xy, yz_3, yz_4$, где z_1 и z_2 — произвольные вершины из $N(x) \setminus \{y, z, a_1\}$, а z_3 и z_4 — произвольные вершины из $N(y) \setminus \{x, z, a_1, z_1, z_2\}$, образуют подграф $B_1 + K_2$ графа G. Рёбра $za_1, za_2, xz, xy, yz', yz''$, где z' и z'' — произвольные вершины из $N(y) \setminus \{x, z, a_1, a_2\}$, образуют подграф B_2 графа G. Рёбра $za_1, xz, xz^*, xy, yz^{**}, yz^{***}$, где z^* — произвольная вершина из $N(x) \setminus \{y, z, a_1\}$, а z^{**} и z^{***} — произвольные вершины из $N(y) \setminus \{x, z, a_1, z^*\}$, образуют подграф B_1^+ графа G. Получаем противоречие, поэтому $4 \leqslant \Delta(G) \leqslant 6$.

Пусть $4 \leqslant \Delta(G) \leqslant 6$. Нетрудно видеть, что $|(N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}| \geqslant 3$ и если $|(N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}| \geqslant 4$, то G содержит подграф B_1. Если $|(N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}| = 3$, то каждая вершина из $(N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}$ смежна с x и y одновременно. Если $|V(G)| \geqslant 6$ и $|(N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}| = 3$, то некоторая вершина G не принадлежит $N(x) \cup N(y)$ и является одним из соседей трёх вершин из $(N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}$. Поэтому G тоже содержит подграф B_1. Если $G \in \mathrm{Free}_s(\{B_1 + K_2\}) \cup \mathrm{Free}_s(\{B_1^+\})$, то ни одна вершина G не находится на расстоянии 3 и более от центрального ребра B_1. Поэтому G содержит не более $2 \cdot (1 + 5 + 5^2) = 62$ вершин. Предположим, что $G \in \mathrm{Free}_s(\{B_2\})$. Предположим также, что существует вершина, находящаяся от ребра xy на расстоянии 3. Тогда существуют вершины a, b, c, порождающие в G такой простой 3-путь, что расстояния между xy и вершинами a, b, c равны 1,2,3 соответственно. Будем считать, что вершины x и a являются соседними. Нетрудно видеть, что вершина b — единственный сосед a вне множества $N(x) \cup N(y)$, иначе три ребра, инцидентных вершине a, одно из которых — ax, ребро xy и два некоторых ребра, инцидентных y, образуют подграф B_2. Очевидно, что $\deg(b) = 2$, иначе для любой вершины $z \in N(b) \setminus \{a, c\}$ рёбра bc, bz, ba, xa, xy, xd образуют подграф B_2, где d — произвольный сосед x, отличный от a, y, z. Так как G является простым, то $\deg(c) \geqslant 3$ и $\deg(a) \geqslant 3$. Поэтому есть сосед e вершины a, отличный от b и x. Ясно, что $e \in N(x) \cup N(y)$. Очевидно, что любые три ребра, инцидентные c, одним из которых является cb, и рёбра ab, ax, ae образуют подграф B_2. Таким образом, любая вершина G отстоит от xy на расстояние не более 2. Следовательно, количество вершин G не превосходит $2 \cdot (1 + 5 + 5^2) = 62$.

2.2. Кликовая ширина графов и её значение Кликовая ширина — важный параметр графа. Это обусловлено тем обстоятельством, что для любой константы C многие задачи на графах полиномиально разрешимы в классе всех графов, у которых кликовая ширина не превосходит C [5]. Мы не будем приводить здесь определение кликовой ширины графа, его можно найти в [5]. Пусть $\mathcal{T}$ — класс всех лесов, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями. Следующее утверждение даёт достаточное условие равномерной ограниченности кликовой ширины [3].

Лемма 3. *Для любого монотонного класса $\mathcal{X}$, не включающего класс $\mathcal{T}$, существует такая константа $C(\mathcal{X})$, что кликовая ширина любого графа из $\mathcal{X}$ не превосходит $C(\mathcal{X})$.*

Применительно к задаче ХИ, если монотонный класс не включает $\mathcal{T}$, то он является простым.

Лемма 4. *Если $\mathcal{X}$ — монотонный класс и $\mathcal{T} \nsubseteq \mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ является* ХИ*-простым.*

Доказательство. Задача ХИ в классе $\mathcal{X}$ полиномиально эквивалентна задаче ХЧ в классе $L(\mathcal{X})$. По предыдущей лемме кликовая ширина графов в классе $\mathcal{X}$ равномерно ограничена. Поэтому кликовая ширина графов в классе $L(\mathcal{X})$ тоже равномерно ограничена [7]. Задача ХЧ полиномиально разрешима в любом классе графов с равномерно ограниченной кликовой шириной [8]. Поэтому задача ХИ полиномиально разрешима в классе $\mathcal{X}$.

3. Основной результат

Лемма 5. *Если H — граф из $\mathrm{Free}_s(\{G + K_1\})$, то $H \in \mathrm{Free}_s(\{G\})$ или $|V(H)| = |V(G)|$.*

Доказательство. Если граф H не содержит подграфа G, то $H \in \mathrm{Free}_s(\{G\})$. Если граф H содержит подграф G, то H не может содержать вершины, не принадлежащие этому подграфу, так как $H \in \mathrm{Free}_s(\{G + K_1\})$. Значит, в этом случае $|V(H)| = |V(G)|$.

Следующее утверждение является основным результатом этой работы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{S}$ *— произвольное множество графов, каждый из которых имеет не более* 6 *рёбер или не более* 7 *вершин. Тогда класс* $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_s(\mathcal{S})$ *является* ХИ-*простым, если* $\mathcal{S}$ *содержит субкубический лес. Иначе* $\mathcal{X}$ *является* ХИ-*сложным.*

Доказательство. Множество всевозможных субкубических графов, не содержащих циклов длины до k включительно, обозначим через $\mathcal{Y}_{3,k}$. Если $\mathcal{S}$ не содержит субкубических лесов, то для некоторого p справедливо включение $\mathcal{Y}_{3,p} \subseteq \mathcal{X}$. Известно, что для любого k класс $\mathcal{Y}_{3,k}$ является ХИ-сложным [9]. Поэтому таковым является и класс $\mathcal{X}$.

Любой субкубический лес с не более чем 6 рёбрами или с не более чем 7 вершинами либо принадлежит $\mathcal{T}$, либо имеет один из 4 следующих типов: $B_1 + O_s, B_1 + K_2 + O_s, B_1^+ + O_s, B_2 + O_s$ для некоторого s. Отсюда и из лемм 2,4,5 следует, что класс $\mathcal{X}$ является ХИ-простым.

Список литературы

1. Визинг, В. Г., “Об оценке хроматического класса p-графа”, *Дискретный анализ*, **3** (1964), 25–30.
2. Малышев, Д. С., “The complexity of the edge 3-colorability problem for graphs without two induced fragments each on at most six vertices”, *Сиб. электр. матем. изв.*, **11** (2014), 811–822.
3. Boliac, R., Lozin, V. V., “On the clique-width of graphs in hereditary classes”, *Lect. Notes Comput. Sci.*, **2518** (2002), 44–54.
4. Broersma, H. J., Golovach, P. A., Paulusma, D., Song, J., “Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest”, *Theor. comput. sci.*, **414**:1 (2012), 9–19.
5. Courcelle, B., Makowsky, J., Rotics, U., “Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width”, *Theory of Comput. Syst.*, **33**:2 (2000), 125–150.
6. Golovach, P. A., Paulusma, D., Song, J., “4-coloring H-free graphs when H is small”, *Discrete Appl. Math.*, **161**:1–2 (2013), 140–150.
7. Gurski, F., Wanke, E., “Line graphs of bounded clique-width”, *Discrete Mathematics*, **307**:22 (2007), 2734–2754.
8. Kobler, D., Rotics, D., “Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width”, *Discrete Appl. Math.*, **126**:2–3 (2003), 197–223.
9. Lozin, V. V., Kaminski, M., “Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles”, *Contrib. to Discr. Math.*, **2(1)** (2007).
10. Malyshev, D. S., “The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs”, *Discrete Math.*, **338**:11 (2015), 1860–1865.
11. Randerath, B., Schiermeyer, I., Tewes, M., “Three-colourability and forbidden subgraphs. II: polynomial algorithms”, *Discrete Math.*, **251**:1–3 (2002), 137–153.

12. Roussopoulos, N., “A max$\{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph G”, *Inf. Process. Lett.*, **2**:4 (1973), 108–112.
13. Schrijver A., *Combinatorial optimization — polyhedra and efficiency*, Springer, Berlin, 2003, 1882 с.

Статья поступила 11.01.2016.