МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ - УЧЕБНО-НАУЧНО-
ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС»

З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева

МАТЕМАТИКА

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

Рекомендовано ФГБОУ ВПО «Госуниверситет - УНПК»
для использования в учебном процессе
в качестве учебного пособия
для слушателей подготовительных курсов

Орел 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Книга продолжает серию учебных пособий авторов «Математика абитуриенту» и посвящена современным нестандартным методам решения сложных неравенств, основанным на концепции равносильности математических высказываний.

Существенным отличием данной работы от имеющихся подобных изданий является то, что в ней представлено системное изложение методов и алгоритмов, позволяющих с помощью условий равносильности сводить решение целых классов сложных неравенств к решению простых рациональных неравенств классическим методом интервалов.

Значительное место в системе представленных алгоритмов отводится методу замены множителей (МЗМ) как одному из наиболее эффективных и доступных методов, который применим к широкому классу задач и позволяет достаточно просто рационализировать многие иррациональные неравенства, неравенства с модулем, показательные и логарифмические неравенства с постоянным и переменным основанием, а также сложные комбинированные неравенства и их системы.

Применение этого метода позволяет во многих случаях значительно уменьшить трудоемкость задачи, избежать длинных выкладок и ненужных ошибок.

Для каждого из указанных типов неравенств приведены методические указания и алгоритмы (схемы), а также подробные и обоснованные решения задач разных типов и разного уровня сложности, иллюстрирующие оригинальность и эффективность приведенных методов, позволяющих решать задачи компактно, быстро и просто. В конце каждого раздела приведено большое количество заданий для самостоятельного решения с ответами. Уровень сложности и структура представленных задач соответствуют заданиям ЕГЭ серии С последних лет.

Один из разделов пособия посвящен нестандартным методам, опирающимся на такие свойства функций, как области определения и области значений, неотрицательность, монотонность и ограниченность, экстремумы функций, метод «мини-максов» и другие. Эти методы во многих случаях являются эффективными и существенно упрощают решение задач.

Следует заметить, что термин «нестандартные методы» применительно к данной работе является в некотором смысле условным в силу того, что эти методы пока не нашли отражения в школьных учебниках и школьной практике.

Как показывает многолетний опыт преподавательской деятельности авторов, для учащихся имеет существенное значение систематизация и удобное структурирование учебного материала в виде обоснованных схем и алгоритмов, позволяющих единообразно решать целые классы задач. В этом случае даже ученики среднего уровня вполне успешно осваивают эти методы, переводя их для себя в разряд стандартных. Эту проблему в силу своих скромных возможностей авторы и пытались решать в данной работе.

Представленная в данном пособии методика многократно апробирована авторами на подготовительных курсах в г. Орле и г. Санкт-Петербурге, а также на лекциях по повышению профессионального уровня учителей математики г. Орла.

Пособие адресовано, прежде всего, выпускникам средней школы, слушателям подготовительных курсов для подготовки к ЕГЭ. Вместе с тем, может быть полезным учителям математики в качестве дополнения к школьному учебнику для работы в классах с углубленным изучением математики и при проведении факультативных занятий.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$D(f)$ – область определения функции $f(x)$;

$E\ (f)$ – область значений функции $f(x)$;

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности;

$\Rightarrow$ – знак следствия;

$\in$ – знак принадлежности;

$\cup$ – знак объединения множеств;

$\cap$ – знак пересечения множеств;

$\varnothing$ – пустое множество;

$\vee$ – знак сравнения $(>,\ \geq,\ <,\ \leq, =)$;

$\wedge$ – знак, обратный знаку $\vee$;

$\forall$ – для всех, для каждого, любой, всякий, каждый;

$\{$ – знак системы;

$[$ – знак совокупности;

N – множество натуральных чисел;

ООН – область определения неравенства;

$\{a;b;c\}$ – множество, состоящее из элементов a, b, c.

1. МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЯ (МЗМ)

Решение неравенств повышенной сложности, содержащих модули, иррациональные, логарифмические, показательные функции или их комбинацию, стандартными школьными методами часто оказывается весьма сложным и громоздким, что вызывает у школьников определенные трудности.

Одним из эффективных и доступных методов решения таких неравенств и их систем является метод замены множителя (МЗМ) [1, 2, 8, 9], базирующийся на концепции равносильности математических высказываний и реализуемый в виде логических схем (алгоритмов) рационализации и алгебраизации, то есть замены иррациональных и трансендентных неравенств на равносильные им рациональные алгебраические неравенства. Решение последних легко осуществляется методом интервалов для рациональных функций.

Важно отметить, что метод замены множителя реализуется только при приведении исходного неравенства к каноническому виду:

$$\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_k(x)}\vee 0, \qquad (1)$$

где множители $f_i(x)$ *и* $g_j(x)$ $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,k)$ представляют собой рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические функции, функции с модулями и другие; знак сравнения $\vee$ обозначает один из знаков $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $=$.

Решение неравенства (1) зависит только от знаков входящих в него сомножителей.

Суть метода замены множителей (МЗМ) состоит в том, чтобы с помощью равносильных преобразований заменить каждый множитель *в области его существования* на более простой множитель, в конечном счете, рациональный и имеющий те же интервалы знакопостоянства (на множитель равного знака).

1.1. Понятие равносильности неравенств

Два неравенства $f_1(x) \vee g_1(x)$ *и* $f_2(x) \vee g_2(x)$ называются *равносильными* на множестве M, если множества их решений совпадают.

Замена одного неравенства другим, равносильным данному на M, называется *равносильным преобразованием* на M.

Рассмотрим *некоторые утверждения о равносильности* неравенств.

1. $f(x) \vee g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f^{2n+1}(x) \vee g^{2n+1}(x), \\ n \in N. \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x) \vee g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f^{2n}(x) \vee g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ n \in N. \end{cases}$

Основное правило: *возводить* неравенство *в четную степень* можно только при тех значениях неизвестной, при которых *обе части* неравенства *неотрицательны*.

3. $f(x) + \varphi(x) \vee g(x) + \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \vee g(x), \\ x \in D(\varphi). \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x) \cdot \varphi(x) \vee g(x) \cdot \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \vee g(x), \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) - g(x) \vee 0, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} f(x) \cdot \varphi(x) \vee g(x) \cdot \varphi(x), \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \wedge g(x), \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases}$

Вывод: При условии неизменности знака решаемого неравенства множители, принимающие положительные значения, можно просто исключить, а множители, принимающие отрицательные значения – заменить на (–1).

Следует заметить, что основная часть методов замены множителя для различных классов неравенств обусловлена *принципом монотонности функций*, входящих в неравенства.

1.2. Принцип монотонности для неравенств

Пусть функция $y = f(t)$ определена и строго монотонна на промежутке *M*.

1. Если функция $y = f(t)$ *возрастает* на промежутке *M*, то

$$f\big(t_1(x)\big) - f\big(t_2(x)\big) \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1(x) - t_2(x) \vee 0, \\ t_1(x) \in M, \\ t_2(x) \in M. \end{cases} .$$

2. Если функция $y = f(t)$ *убывает* на промежутке *M*, то

$$f\big(t_1(x)\big) - f\big(t_2(x)\big) \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\big(t_1(x) - t_2(x)\big) \vee 0, \\ t_1(x) \in M, \\ t_2(x) \in M. \end{cases}$$

1.3. Теорема о корне

1. Если в уравнении $f(x) = C = const$ функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на множестве *M*, то уравнение имеет на *M не более одного корня*.

2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $y = f(x)$ непрерывна и строго *возрастает*, а функция $y = g(x)$ непрерывна и строго *убывает* на множестве *M*, то уравнение имеет на *M не более одного корня*.

2. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛИ

2.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $|f(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f^2(x) \vee 0.$

2. $|f(x)| \vee |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \vee g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \vee 0 \Leftrightarrow$
$\big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \vee 0.$

Вывод: $|f(x)| - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \vee 0.$

3. $\big(|f(x)| - |g(x)|\big) \cdot \varphi(x) \vee 0 \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \cdot \varphi(x) \vee 0.$

4. $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \le 0. \end{cases}$

5. $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0, \\ |f(x)| - g(x) > 0 \end{cases} \forall x \in D(f) \cap D(g).$$

2.2. Примеры с решениями

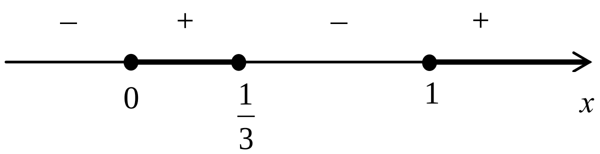
Пример 1. Решите неравенство $\left|x^2 - 7x + 2\right| \le \left|x^2 + 5x - 2\right|.$

Решение. $\left|x^2 - 7x + 2\right| - \left|x^2 + 5x - 2\right| \le 0.$ (1)

Применим ***метод замены множителя*** (МЗМ).

$(1) \Leftrightarrow \left(x^2 - 7x + 2 - x^2 - 5x + 2\right)\left(x^2 - 7x + 2 + x^2 + 5x - 2\right) \le 0 \Leftrightarrow$

$(-12x + 4)\left(2x^2 - 2x\right) \le 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(x - 1)x \ge 0$



$x \in \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty).$

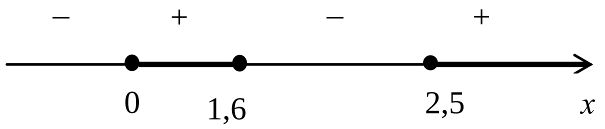
Ответ: $\left[0; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty).$

Пример 2. Решите неравенство $\left|\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \le 1.$

Решение. $\dfrac{|x^2-5x+4|}{|x^2-4|}-1\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x^2-5x+4|-|x^2-4|\le 0, \\ x^2-4\ne 0. \end{cases}$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} (x^2-5x+4-x^2+4)(x^2-5x+4+x^2-4)\le 0, \\ x\ne -2,\ \ x\ne 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (5x-8)(2x-5)x\ge 0, \\ x\ne -2,\ \ x\ne 2. \end{cases}$$



$x\in[0;\,1{,}6]\cup[2{,}5;+\infty)$.

Ответ: $[0;\,1{,}6]\cup[2{,}5;+\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $|x^2-5x-14|+20\ge 5|x+2|+4|x-7|$.

Решение. Приведем исходное неравенство к каноническому виду.

$$|(x-7)(x+2)|+20-5|x+2|-4|x-7|\ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

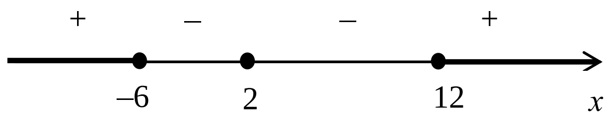
$$(|x-7||x+2|-5|x+2|)-(4|x-7|-20)\ge 0 \ \Leftrightarrow\ |x+2|(|x-7|-5)-4(|x-7|-5)\ge 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(|x-7|-5)\,(|x+2|-4)\ge 0 \qquad (1)$$

Применим МЗМ.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad (x-7-5)(x-7+5)(x+2-4)(x+2+4)\ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-12)(x-2)^2(x+6)\ge 0$$



$x\in(-\infty;\,-6]\cup\{2\}\cup[12;\,+\infty)$.

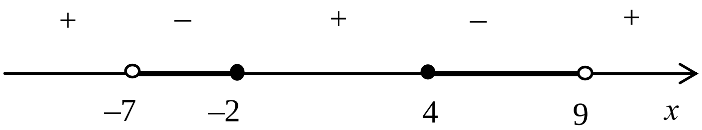
Ответ: $(-\infty;\,-6]\cup\{2\}\cup[12;\,+\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{5|3-x|}{8-|x-1|}-|x-3|\ge 0$.

Решение. $\dfrac{5|3-x|}{8-|x-1|}-|x-3|\ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x-3|\left(\dfrac{5}{8-|x-1|}-1\right)\ge 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{|x-3|\left(5-8+|x-1|\right)}{8-|x-1|} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{|x-1|-3}{|x-1|-8} \leq 0, \\ x=3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-1-3)(x-1+3)}{(x-1-8)(x-1+8)} \leq 0, \\ x=3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-9)(x+7)} \leq 0, \\ x=3. \end{array}\right.$$



$x \in (-7;\,-2] \cup \{3\} \cup [4;\,9)$.

$x=3$

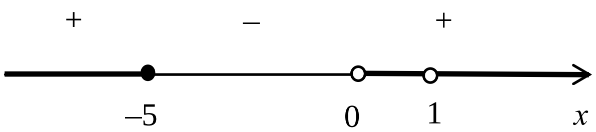
Ответ: $(-7;\,-2] \cup \{3\} \cup [4;\,9)$.

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{|2x+1|-|x-4|}{|3x-1|-|x+1|} \geq 0$.

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{|2x+1|-|x-4|}{|3x-1|-|x+1|} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x+1-x+4)(2x+1+x-4)}{(3x-1-x-1)(3x-1+x+1)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x+5}{x} \geq 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$$



$x \in (-\infty;\,-5] \cup (0;\,1) \cup (1;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-5] \cup (0;\,1) \cup (1;\,+\infty)$.

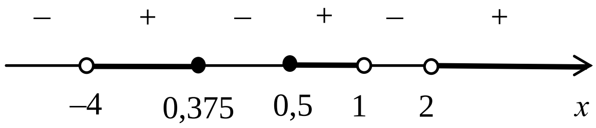
Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{|5x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-3|-|x^2+7x-13|} \leq 0$.

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{|5x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x-3|-|x^2+7x-13|} \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(5x-2-3x+1)(5x-2+3x-1)}{(x^2-3x-3-x^2-7x+13)(x^2-3x-3+x^2+7x-13)}\le 0 \iff$$

$$\frac{(2x-1)(8x-3)}{(-10x+10)(2x^2+4x-16)}\le 0 \iff \frac{(2x-1)(8x-3)}{(x-1)(x+4)(x-2)}\ge 0$$



$x\in(-4;\ 0{,}375]\cup[0{,}5;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$.

Ответ: $(-4;\ 0{,}375]\cup[0{,}5;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$.

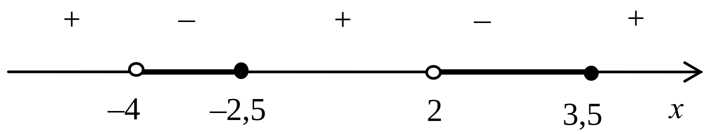
Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{\big||2x-1|-1\big|-5}{\big||x^2+2x|-4\big|-4}\le 0$.

Решение. Применим МЗМ.

$$\frac{\big||2x-1|-1\big|-5}{\big||x^2+2x|-4\big|-4}\le 0 \iff \frac{(|2x-1|-1-5)(|2x-1|-1+5)}{(|x^2+2x|-4-4)(|x^2+2x|-4+4)}\le 0 \iff$$

$$\frac{(|2x-1|-6)(|2x-1|+4)}{(|x^2+2x|-8)\,|x^2+2x|}\le 0 \iff \begin{cases}\dfrac{|2x-1|-6}{|x^2+2x|-8}\le 0,\\ x^2+2x\ne 0\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}\dfrac{(2x-1-6)(2x-1+6)}{(x^2+2x-8)(x^2+2x+8)}\le 0,\\ x\ne -2;\ x\ne 0\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{(2x-7)(2x+5)}{(x+4)(x-2)}\le 0,\\ x\ne -2;\ x\ne 0\end{cases}$$



$x\in(-4;-2{,}5]\cup(2;\ 3{,}5]$.

Ответ: $x\in(-4;-2{,}5]\cup(2;\ 3{,}5]$.

Пример 8. Решите неравенство $\big|5x^2-6|x|-8\big|\le 3\big|x^2-4|x|+4\big|$.

Решение. $\big|5x^2-6|x|-8\big|-\big|3x^2-12|x|+12\big|\le 0 \iff$

$$(5x^2-6|x|-8-3x^2+12|x|-12)\,(5x^2-6|x|-8+3x^2-12|x|+12)\le 0 \iff$$

$$\left(2|x|^2+6|x|-20\right)\left(8|x|^2-18|x|+4\right)\le 0 \;\Leftrightarrow\; \left(|x|^2+3|x|-10\right)\left(4|x|^2-9|x|+2\right)\le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(|x|+5\right)\left(|x|-2\right)\left(4|x|-1\right)\left(|x|-2\right)\le 0 \;\Leftrightarrow\; \left(|x|-2\right)^2\left(4|x|-1\right)\le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}|x|=2,\\ 4|x|-1\le 0\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=2,\\ (4x-1)(4x+1)\le 0\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; x\in\{-2\}\cup[-0{,}25;\,0{,}25]\cup\{2\}.$$

Ответ: $\{-2\}\cup[-0{,}25;\,0{,}25]\cup\{2\}$.

Пример 9. Решите неравенство $\dfrac{\left|\left|2x^2-x\right|-3\right|-2x^2-x-5}{\left|x-1-x^2\right|-\left|x^2-3x+4\right|}\ge 0$.

Решение. $$\frac{\left|\left|2x^2-x\right|-3\right|-\left(2x^2+x+5\right)}{\left|x-1-x^2\right|-\left|x^2-3x+4\right|}\ge 0 \qquad (1)$$

Так как $\left(2x^2+x+5\right)>0 \quad \forall x\in R \;(a=2>0,\ D<0)$, то применим к неравенству (1) МЗМ.

$$(1) \;\Leftrightarrow\; \frac{\left(\left|2x^2-x\right|-3-\left(2x^2+x+5\right)\right)\left(\left|2x^2-x\right|-3+\left(2x^2+x+5\right)\right)}{\left(x-1-x^2-x^2+3x-4\right)\left(x-1-x^2+x^2-3x+4\right)}\ge 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\left|2x^2-x\right|-\left(2x^2+x+8\right)\right)\left(\left|2x^2-x\right|+\left(2x^2+x+2\right)\right)}{\left(2x^2-4x+5\right)\left(2x-3\right)}\ge 0 \qquad (2)$$

Так как $\left(2x^2+x+8\right)>0,\ \left(2x^2+x+2\right)>0,\ \left(2x^2-4x+5\right)>0 \quad \forall x\in R$, то

$$(2) \;\Leftrightarrow\; \frac{\left|2x^2-x\right|-\left(2x^2+x+8\right)}{2x-3}\ge 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(2x^2-x-2x^2-x-8\right)\left(2x^2-x+2x^2+x+8\right)}{2x-3}\ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-(x+4)\left(4x^2+8\right)}{2x-3}\ge 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{x+4}{2x-3}\le 0 \;\Leftrightarrow\; x\in[-4;\,1{,}5).$$

Ответ: $[-4;\,1{,}5)$.

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{(x+3)^2+|x+3|-20}{\left(|x-8|-6\right)\left(\left|2-x^2\right|-7\right)}\le 0$.

Решение.

1) $$\frac{(x+3)^2+|x+3|-20}{(|x-8|-6)(|2-x^2|-7)}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f(x)}{(|x-8|-6)(|2-x^2|-7)}\le 0, \qquad (1)$$

где $f(x)=(x+3)^2+|x+3|-20$.

2) Заменим функцию *f(x)* на функцию равного знака.

Пусть $|x+3|=t,\ t\ge 0$, тогда $(x+3)^2=|x+3|^2=t^2$.

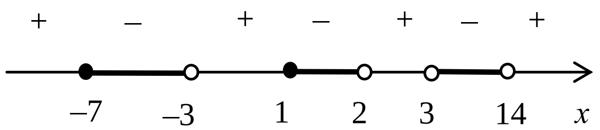
$$f(x)\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} t^2+t-20\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (t+5)(t-4)\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t-4\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad |x+3|-4\vee 0.$$

3) $$(1) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|x+3|-4}{(|x-8|-6)(|x^2-2|-7)}\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+3-4)(x+3+4)}{(x-8-6)(x-8+6)(x^2-2-7)(x^2-2+7)}\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x+7)}{(x-14)(x-2)(x^2-9)(x^2+5)}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x-1)(x+7)}{(x-14)(x-2)(x-3)(x+3)}\le 0$$



$x\in[-7;-3)\cup[1;2)\cup(3;14)$.

Ответ: $[-7;-3)\cup[1;2)\cup(3;14)$.

Пример 11. Решите неравенство $$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2\le\frac{|x^2+6x|}{(x^2-5x+4)^2}.$$

Решение.

1) Преобразуем левую часть неравенства.

$$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2=\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{4-x}\right)^2=\left(\frac{4-x-1+x}{(1-x)(4-x)}\right)^2=\frac{9}{(1-x)^2(4-x)^2}.$$

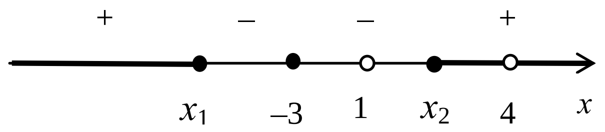
2) Тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{\left|x^2+6x\right|}{(x-1)^2(x-4)^2}-\frac{9}{(x-1)^2(x-4)^2}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left|x^2+6x\right|-9\ge 0,\\ x\ne 1;\;\; x\ne 4\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(x^2+6x-9\right)\left(x^2+6x+9\right)\ge 0,\\ x\ne 1;\;\; x\ne 4\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(x-x_1)(x-x_2)(x+3)^2\ge 0,\\ x\ne 1;\;\; x\ne 4,\end{cases}$$

где x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена $\left(x^2+6x-9\right)$:

$x_1=-3-3\sqrt{2};\;\; x_2=-3+3\sqrt{2}$.



$x\in(-\infty;\, x_1]\cup\{-3\}\cup[x_2;4)\cup(4;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\,-3-3\sqrt{2}\right]\cup\{-3\}\cup\left[-3+3\sqrt{2};4\right)\cup(4;+\infty)$.

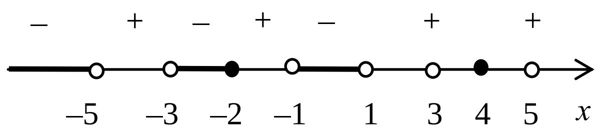
Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{\left(\left|x^2-8x+16\right|-|x-4|\right)\left(|x+6|-|x-2|\right)}{\left(\left|x^2-1\right|-8\right)\left(x^2-6|x|+5\right)}\le 0$.

Решение. Применим к исходному неравенству МЗМ.

$$\frac{\left(x^2-8x+16-x+4\right)\left(x^2-8x+16+x-4\right)(x+6-x+2)(x+6+x-2)}{\left(x^2-1-8\right)\left(x^2-1+8\right)\left(|x|-1\right)\left(|x|-5\right)}\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x^2-9x+20\right)\left(x^2-7x+12\right)(2x+4)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2+7\right)(x-1)(x+1)(x-5)(x+5)}\le 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-5)(x-4)(x-4)(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)(x-5)(x+5)}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{(x-4)^2(x+2)}{(x+3)(x-1)(x+1)(x+5)}\le 0,\\ x\ne 3;\;\; x\ne 5\end{cases}$$



$x\in(-\infty;\,-5)\cup(-3;\,-2]\cup(-1;\,1)\cup\{4\}$.

Ответ: $(-\infty;\,-5)\cup(-3;\,-2]\cup(-1;\,1)\cup\{4\}$.

Пример 13. Решите неравенство $\dfrac{|x-7|-|x+5|}{|x-3|-|x+1|}<\dfrac{|x-3|+|x+1|}{|x+5|}$.

Решение. Умножим обе части неравенства на функцию

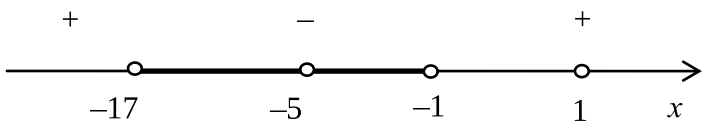
$g(x)=\dfrac{|x-7|+|x+5|}{|x-3|+|x+1|}$, $g(x)>0\ \forall x\in R$.

$$\frac{(x-7)^2-(x+5)^2}{(x-3)^2-(x+1)^2}<\frac{|x-7|+|x+5|}{|x+5|}\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-7-x-5)(x-7+x+5)}{(x-3-x-1)(x-3+x+1)}<\frac{|x-7|+|x+5|}{|x+5|}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{-12(2x-2)}{-4(2x-2)}<\frac{|x-7|+|x+5|}{|x+5|}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x-2\neq 0,\\ x+5\neq 0,\\ 3|x+5|<|x-7|+|x+5|\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq -5,\\ 2|x+5|-|x-7|<0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq -5,\\ (2x+10-x+7)(2x+10+x-7)<0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq -5,\\ (x+17)(x+1)<0\end{cases}$$



$x\in(-17;\,-5)\cup(-5;\,-1)$.

Ответ: $(-17;\,-5)\cup(-5;\,-1)$.

Пример 14. Решите неравенство

$$\frac{(x^2-5x+9)^2-4|x^2-5x+9|\cdot|x-6|+3(x-6)^2}{2x^2+7x-15}\leq 0.$$

Решение.

I. Пусть $g(x)=2x^2+7x-15=(2x-3)(x+5)$,

$f(x)=(x^2-5x+9)^2-4|x^2-5x+9|\cdot|x-6|+3(x-6)^2$.

Тогда исходное неравенство примет вид $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0$ (1)

II. Заменим функцию *f(x)* на функцию равного знака.

Пусть $t=\left|x^2-5x+9\right|,\ t\ge 0,\ t^2=\left|x^2-5x+9\right|^2=\left(x^2-5x+9\right)^2,$

$z=\left|x-6\right|,\ z\ge 0,\ z^2=\left|x-6\right|^2=(x-6)^2.$

$$f(x)\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} t^2-4tz+3z^2\vee 0,\\ t\ge 0,\ z\ge 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (t-z)(t-3z)\vee 0,\\ t\ge 0,\ z\ge 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(\left|x^2-5x+9\right|-\left|x-6\right|\right)\left(\left|x^2-5x+9\right|-3\left|x-6\right|\right)\vee 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2-5x+9-x+6\right)\left(x^2-5x+9+x-6\right)\left(x^2-5x+9-3x+18\right)\times$$
$$\times\left(x^2-5x+9+3x-18\right)\vee 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2-6x+15\right)\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2-8x+27\right)\left(x^2-2x-9\right)\vee 0. \qquad (2)$$

1) $x^2-6x+15>0\ \ \forall x\in R\ \ (a=1>0,\ D<0);$

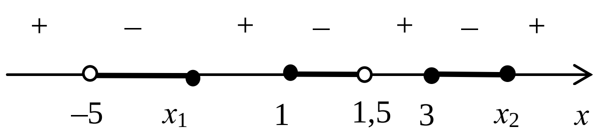
2) $x^2-8x+27>0\ \ \forall x\in R\ \ (a=1>0,\ D<0);$

3) $x^2-4x+3=(x-3)(x-1);$

4) $x^2-2x-9=(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_1=1-\sqrt{10},\ x_2=1+\sqrt{10}$;

5) Тогда $f(x)\vee 0 \ \Leftrightarrow\ (x-3)(x-1)(x-x_1)(x-x_2)\vee 0.$

III. $(1)\ \Leftrightarrow\ \dfrac{(x-3)(x-1)(x-x_1)(x-x_2)}{(2x-3)(x+5)}\le 0.$



$x\in(-5;\ x_1]\cup[1;\ 1{,}5)\cup[3;\ x_2].$

Ответ: $\left(-5;\ 1-\sqrt{10}\right]\cup\left[1;\ 1{,}5\right)\cup\left[3;\ 1+\sqrt{10}\right].$

2.3. Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $\left|x^2-16x+36\right| \le \left|36-x^2\right|$.

2. $\left|x^2-6x-2\right| \ge \left|x^2+7x+11\right|$.

3. $\left|4x^3-x+7\right| \le \left|2x^3+5x+3\right|$.

4. $\left|x^2+10x+16\right| \ge \left|x^2-16\right|$.

5. $\left|x^3-x^2+x-5\right| \le \left|x^3-5x^2+x-1\right|$.

6. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \le 1$.

7. $\left|\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| < 3$.

8. $\left|\dfrac{x^2-5x-2}{x^2+5x+24}\right| \ge 2$.

9. $\left|\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}\right| \le 2$.

10. $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}\right| \ge 1$.

11. $\left|x^2-4x+3\right|+2 < 2|x-1|+|x-3|$.

12. $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2| \le 0$.

13. $\dfrac{1}{|x+1|-1} \ge \dfrac{2}{|x+1|-2}$.

14. $\dfrac{|2x-1|-|x+1|}{|2x+3|-|x-3|} \le 0$.

15. $\dfrac{|x-1|-|2x+1|}{|x-2|-|2x+2|} \ge 0$.

16. $\dfrac{|3x-2|-|2x-3|}{\left|x^2+x-8\right|-\left|x^2-x\right|} \le 0$.

17. $\dfrac{|x-4|-2-x^2}{|2+x|-|x-6|} > 0$.

18. $\dfrac{\left|x^2-4x+3\right|-\left|x^2+x-3\right|}{|7x-3|-|3x-2|} \le 0$.

19. $\dfrac{|4x-3|-|3x-4|}{\left|x^2-x-18\right|-\left|x^2+x\right|} \le 0$.

20. $\dfrac{\left|\left|x^2-3x\right|-5\right|-5}{\left|\left|4x-1\right|-3\right|-1} \ge 0$.

21. $\dfrac{\left|\left|x^2+x\right|-3\right|-3}{\left|\left|3x+4\right|-2\right|-1} \ge 0$.

22. $\dfrac{\left|\left|x^2-x\right|-1\right|-1}{\left|\left|4x+3\right|-2\right|-1} \ge 0$.

23. $\left|x^2-5|x|+4\right| \le \left|2x^2-3|x|+1\right|$.

24. $\dfrac{\left|2x^2-5x\right|-x^2}{\left|3x^2-5x\right|-x^2} \le 0$.

25. $\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|-x^2-2x-1}{\left|3x^2+x-2\right|-x^2-2x-1} \le 0$.

26. $\dfrac{(x-2)^2-3|x-2|-10}{\left(|x-4|-5\right)\left(\left|3-x^2\right|-6\right)} \ge 0$.

27. $\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \le \dfrac{\left|x^2-10x\right|}{\left(x^2+7x+6\right)^2}$.

28. $\dfrac{\left(\left|x^2-4\right|-5\right)\left(|x+5|-8\right)}{\left(|x-3|-|x-1|\right)|x|} \ge 0$.

29. $\dfrac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|} < \dfrac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

30. $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|} < \dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

31. $\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2-2\left|x^3+x^2+x\right|-3x^2}{10x^2-17x-6} \ge 0$.

Ответы:

1. $[0;\ 4{,}5]\cup[8;\ +\infty)$. **2.** $(-\infty;\ -1]$. **3.** $[-2;\ -1]\cup\{1\}$.

4. $[-5;\ -3{,}2]\cup[0;\ +\infty)$. **5.** $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ 3]$. **6.** $[0;\ +\infty)$.

7. $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ +\infty)$. **8.** $[-10;\ -5]$. **9.** $[2;\ 6]$.

10. $(-\infty;\ -1]\cup[2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$. **11.** $(0;\ 1)\cup(2;\ 5)$.

12. $(-\infty;\ -4)\cup\{0\}\cup\{2\}\cup(4;\ +\infty)$. **13.** $(-3;\ -2)\cup\{-1\}\cup(0;\ 1)$.

14. $(-6;\ 0)\cup(0;\ 2]$. **15.** $(-\infty;\ -4)\cup[-2;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

16. $(-\infty;\ -2)\cup[-1;\ 1]\cup(2;\ 4)$. **17.** $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ 2)$.

18. $[0;\ 0{,}25)\cup(0{,}5;\ 1{,}2)\cup[1{,}5;\ +\infty)$. **19.** $(-9;\ -3)\cup[-1;\ 1]\cup(3;\ +\infty)$.

20. $(-\infty;\ -2]\cup(-0{,}75;\ -0{,}25)\cup\{0\}\cup(0{,}75;\ 1{,}25)\cup\{3\}\cup[5;\ +\infty)$.

21. $(-\infty;\ -3]\cup\left(-\dfrac{7}{3};\ -\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(-1;\ -\dfrac{1}{3}\right)\cup\{0\}\cup[2;\ +\infty)$.

22. $(-\infty;\ -1{,}5)\cup(-0{,}5;0)\cup\{1\}\cup[2;\ +\infty)$. **23.** $\left(-\infty;\ -\dfrac{5}{3}\right]\cup\{-1\}\cup\{1\}\cup\left[\dfrac{5}{3};\ +\infty\right)$.

24. $\left(1{,}25;\ \dfrac{5}{3}\right]\cup(2{,}5;\ 5]$. **25.** $\left(0{,}25;\ \dfrac{2}{3}\right]\cup(1{,}5;\ 4]$.

26. $(-\infty;\ -3)\cup(-3;-1)\cup(3;\ 7]\cup(9;\ +\infty)$.

27. $(-\infty;\ -6)\cup\left(-6;\ 5-5\sqrt{2}\right]\cup\{5\}\cup\left[5+5\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

28. $(-\infty;\ -13]\cup[-3;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup\{3\}$. **29.** $(-13;\ -4)\cup(-4;\ -1)$.

30. $(3;\ 4)\cup(4;\ 7)$.

31. $\left(-\infty;\ -2-\sqrt{3}\right]\cup\left(-0{,}3;\ -2+\sqrt{3}\right]\cup\{1\}\cup(2;\ +\infty)$.

3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $\sqrt[2n]{f(x)} - \sqrt[2n]{g(x)} \vee 0$, $n \in N$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) \vee 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

2. $\sqrt[2n+1]{f(x)} - \sqrt[2n+1]{g(x)} \vee 0$, $n \in N$ $\Leftrightarrow f(x) - g(x) \vee 0.$

3. $\sqrt[2n]{f(x)} - g(x) \geq 0$, $n \in N$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) - g^{2n}(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ \sqrt[2n]{f(x)} - g(x) > 0 \, \forall x \in D(f) \cap D(g). \end{cases}$$

4. $\sqrt[2n]{f(x)} - g(x) \leq 0$, $n \in N$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) - g^{2n}(x) \leq 0. \end{cases}$

5. $\sqrt[2n+1]{f(x)} - g(x) \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - g^{2n+1}(x) \vee 0.$

6. $\sqrt[2n]{f(x)} - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g^{2n}(x) \vee 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

7. $\sqrt[2n+1]{f(x)} - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - |g(x)|^{2n+1} \vee 0.$

3.2. Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{7-x} < \dfrac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}$.

Решение.

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0, \\ 7 - x \geq 0, \\ x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \geq 0, \\ \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7} - \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (1;7], \\ x^3 - 6x^2 + 14x - 7 \ge 0, \\ x^3 - 6x^2 + 14x - 7 - (7-x)(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;7], \\ x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (1;7], \\ x(x^2 - 5x + 6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1;7], \\ (x-3)(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1;\ 2) \cup (3;\ 7].$$

Ответ: $(1;\ 2) \cup (3;\ 7]$.

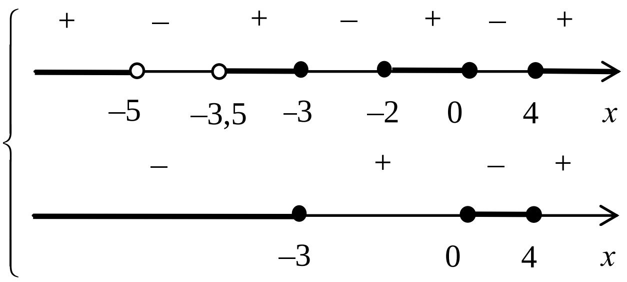
Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{12x + x^2 - x^3}}{2x+7} \ge \dfrac{\sqrt{12x + x^2 - x^3}}{x+5}$ (1)

Решение. $(1) \Leftrightarrow \sqrt{12x + x^2 - x^3} \cdot \left(\dfrac{1}{x+5} - \dfrac{1}{2x+7} \right) \le 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{12x + x^2 - x^3} \cdot \left(\frac{x+2}{(2x+7)(x+5)} \right) \le 0.$$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \dfrac{(12x + x^2 - x^3)(x+2)}{(2x+7)(x+5)} \le 0, \\ 12x + x^2 - x^3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-4)(x+3)(x+2)}{(2x+7)(x+5)} \ge 0, \\ x(x-4)(x+3) \le 0 \end{cases}$$



$x \in (-\infty;\ -5) \cup (-3{,}5;\ -3] \cup \{0;\ 4\}$.

Ответ: $(-\infty;\ -5) \cup (-3{,}5;\ -3] \cup \{0;\ 4\}$.

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \ge 2$ (1)

Решение.

I. $(1) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-x} + 4x - 3 - 2x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-x} + 2x - 3}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} \ge 0,$ (2)

где $f(x) = \sqrt{2-x} + 2x - 3$.

II. Применим МЗМ. Заменим функцию $f(x)$ на функцию равного знака.

Пусть $t=\sqrt{2-x},\ t\ge 0,\ t^2=2-x,\ x=2-t^2,\ 2x-3=1-2t^2$.

$$f(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t+1-2t^2\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} -\left(2t^2-t-1\right)\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} -(2t+1)(t-1)\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -(t-1)\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} -\left(\sqrt{2-x}-1\right)\vee 0, \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} -(2-x-1)\vee 0, \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} x-1\vee 0, \\ x\le 2. \end{cases}$$

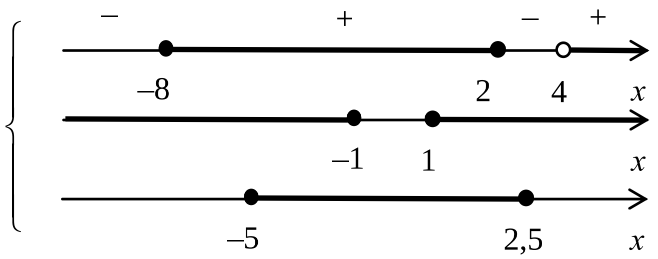
III. $(2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}\ge 0, \\ x\le 2 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty;\,0)\cup[1;\,2].$

Ответ: $(-\infty;\,0)\cup[1;\,2]$.

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3(5-2x)}}{\sqrt{x+5}-3}\ge 0$ (1)

Решение. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{15-6x}}{\sqrt{x+5}-3}\ge 0 \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x^2-1\right)-(15-6x)}{x+5-9}\ge 0, \\ x^2-1\ge 0, \\ 5-2x\ge 0, \\ x+5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x^2+6x-16}{x-4}\ge 0, \\ (x-1)(x+1)\ge 0, \\ x\le 2{,}5, \\ x\ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{(x+8)(x-2)}{x-4}\ge 0, \\ (x-1)(x+1)\ge 0, \\ x\in[-5;\,2{,}5] \end{cases} \Leftrightarrow$$



$x\in[-5;\,-1]\cup[1;\,2].$

Ответ: $[-5;\,-1]\cup[1;\,2]$.

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1+x}{x+2}\ge x$ (1)

Решение. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\sqrt{1-x^3}-1+x-x^2-2x}{x+2}\ge 0 \;\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}-(x^2+x+1)}{x+2} \ge 0 \qquad (2)$$

1) Пусть $g(x)=x^2+x+1$. Так как $a=1>0,\ D<0,$ то $g(x)>0\ \forall x \in R$.

2) Разделим (2) на $\sqrt{g(x)}>0$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+x+1}}{x+2} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(1-x)-(x^2+x+1)}{x+2} \ge 0, \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x+2} \le 0, \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x+2)}{x+2} \le 0, \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0, \\ x \ne -2, \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0, \\ x \ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 0]$.

Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 0]$.

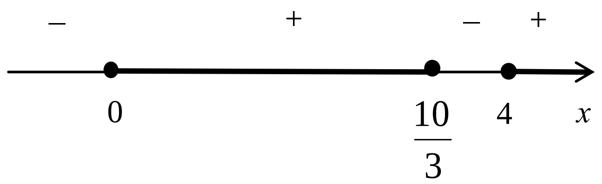
Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{3x^3-22x^2+40x}}{x-4} \ge 3x-10$ (1)

Решение. $$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x(3x^2-22x+40)}-(3x-10)(x-4)}{x-4} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x(3x-10)(x-4)}-(3x-10)(x-4)}{x-4} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{x-4} \ge 0, \qquad (2)$$

где $f(x)=x(3x-10)(x-4)$; $g(x)=(3x-10)(x-4)$.

1) $D(\sqrt{f})$: $x(3x-10)(x-4) \ge 0 \Leftrightarrow$

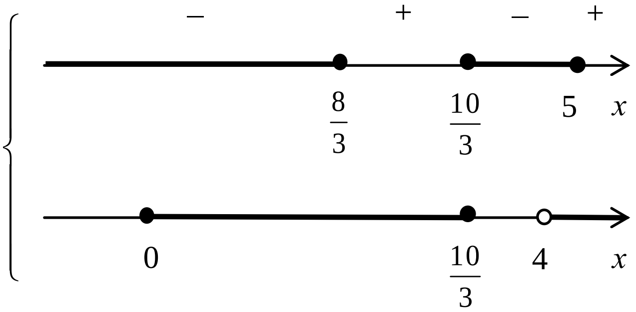


$x \in \left[0;\ \dfrac{10}{3}\right] \cup [4;\ +\infty) = M$.

2) При $x \in M \quad g(x) \ge 0 \Rightarrow$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-g^2(x)}{x-4} \ge 0, \\ x \in M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(3x-10)(x-4)\,(x-(3x-10)(x-4))}{x-4} \ge 0, \\ x \in M \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(3x-10)(3x^2-23x+40)\le 0,\\ x\in M,\ x\ne 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3x-10)(3x-8)(x-5)\le 0,\\ x\in M,\ x\ne 4\end{cases}$$



$$x\in\left[0;\frac{8}{3}\right]\cup\left\{\frac{10}{3}\right\}\cup(4;5].$$

Ответ: $\left[0;\frac{8}{3}\right]\cup\left\{\frac{10}{3}\right\}\cup(4;5]$.

Пример 7. Решите неравенство

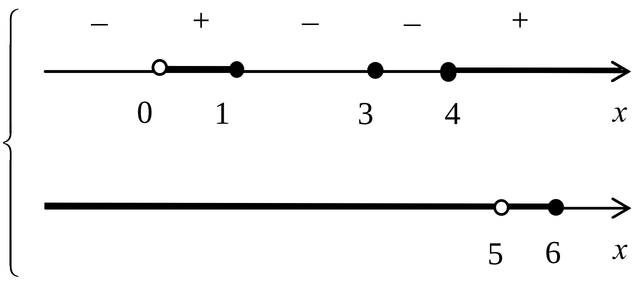
$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\ge 5\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2 \qquad (1)$$

Решение.

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{\sqrt{(x-4)^2}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\cdot\left(x+\frac{4}{x}-5\right)\ge 0\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{|x-4|-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2\cdot\frac{x^2-5x+4}{x}\ge 0.$$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases}\dfrac{(x-4-1)^2(x-4+1)^2(x-4)(x-1)}{(6-x-1)^2\cdot x}\ge 0,\\ 6-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-3)^2(x-4)(x-1)}{x}\ge 0,\\ x\le 6,\ x\ne 5.\end{cases}$$



$$x\in(0;1]\cup\{3\}\cup[4;5)\cup(5;6].$$

Ответ: $(0;1]\cup\{3\}\cup[4;5)\cup(5;6]$.

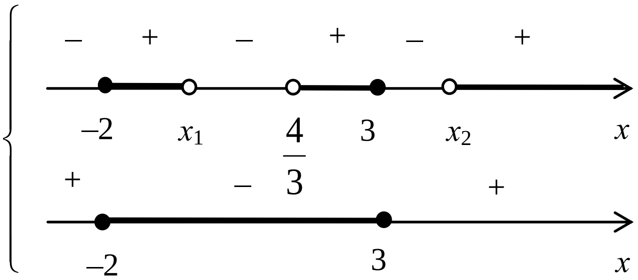
Пример 8. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x^2-7x+6|-|x^2-x-2|}\ge 0$ (1)

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{-x^2+x+6}{\left(x^2-7x+6-x^2+x+2\right)\left(x^2-7x+6+x^2-x-2\right)} \geq 0, \\ -x^2+x+6 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{(-6x+8)\left(2x^2-8x+4\right)} \leq 0, \\ x^2-x-6 \leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+2)}{(3x-4)(x-x_1)(x-x_2)} \geq 0, \\ (x-3)(x+2) \leq 0 \end{cases}$$

где $x_1 = 2-\sqrt{2}$ и $x_2 = 2+\sqrt{2}$ корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2-4x+2$.



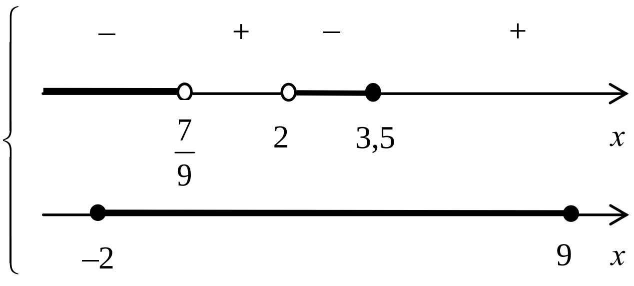
$$x \in [-2;\ x_1) \cup \left(\frac{4}{3};\ 3\right].$$

Ответ: $\left[-2;\ 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(\dfrac{4}{3};\ 3\right]$.

Пример 9. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{9-x}-|3x-4|}{\sqrt{x+2}-|3x-4|} \leq 1$ (1)

Решение. $(1) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{9-x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-|3x-4|} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(9-x)-(x+2)}{(x+2)-(3x-4)^2} \leq 0, \\ 9-x \geq 0,\ \ x+2 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{7-2x}{-9x^2+25x-14} \leq 0, \\ x \leq 9,\ x \geq -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2x-7}{9x^2-25x+14} \leq 0, \\ x \in [-2;\ 9] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2x-7}{(9x-7)(x-2)} \leq 0, \\ x \in [-2;\ 9] \end{cases}$$



$$x \in \left[-2; \frac{7}{9}\right) \cup (2;\ 3{,}5].$$

Ответ: $\left[-2; \dfrac{7}{9}\right) \cup (2;\ 3{,}5]$.

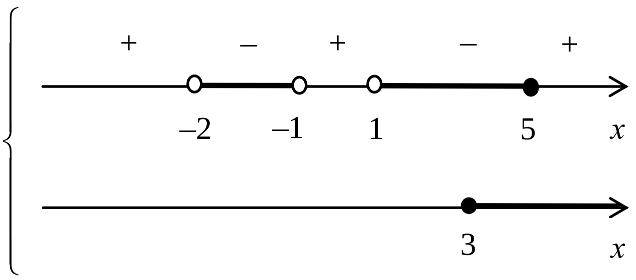
Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{2x-4}}{\left|2x^2-x-4\right|-\left|x^2-2x-2\right|}\le 0$ (1)

Решение. Применим МЗМ.

$$(1)\iff\begin{cases}\dfrac{\left(x^2-5x+6\right)-(2x-4)}{\left(2x^2-x-4-x^2+2x+2\right)\left(2x^2-x-4+x^2-2x-2\right)}\le 0,\\ x^2-5x+6\ge 0,\ 2x-4\ge 0\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+10}{\left(x^2+x-2\right)\left(3x^2-3x-6\right)}\le 0,\\ (x-3)(x-2)\ge 0,\ x\ge 2\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x-1)(x-2)(x+1)}\le 0,\\ x\in\{2\}\cup[3;+\infty)\end{cases}\iff$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-5}{(x+2)(x-1)(x+1)}\le 0,\\ x\in[3;+\infty)\end{cases}$$



$x\in[3;5]$.

Ответ: $[3;5]$.

Пример 11. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{-x^2+6x-5}-x+1}{\left|x^2-8x+15\right|-\left|15-x^2\right|}\ge 0$ (1)

Решение.

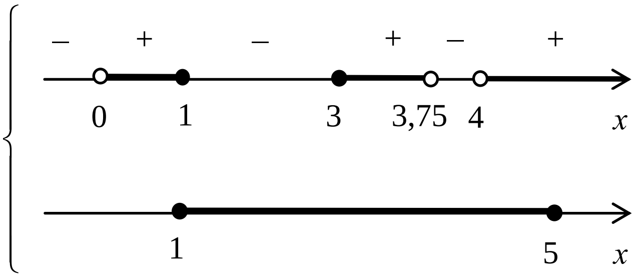
1) $(1)\iff\dfrac{\sqrt{-x^2+6x-5}-(x-1)}{\left|x^2-8x+15\right|-\left|x^2-15\right|}\ge 0.$ (2)

2) Пусть $f(x)=-x^2+6x-5=-(x-5)(x-1)$.

$D\left(\sqrt{f}\right)$: $f(x)\ge 0\iff (x-5)(x-1)\le 0\iff x\in[1;5]\Rightarrow (x-1)\ge 0$.

3) $(2)\iff\begin{cases}\dfrac{\left(-x^2+6x-5\right)-(x-1)^2}{\left(x^2-8x+15-x^2+15\right)\left(x^2-8x+15+x^2-15\right)}\ge 0\\ x\in[1;5]\end{cases}\iff$

$$\begin{cases} \dfrac{-2x^2+8x-6}{(-8x+30)(2x^2-8x)} \ge 0, \\ x \in [1;\ 5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{(4x-15)(x-4)x} \ge 0, \\ x \in [1;\ 5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x-1)}{(4x-15)(x-4)x} \ge 0, \\ x \in [1;\ 5] \end{cases}$$



$x \in \{1\} \cup [3;\ 3{,}75) \cup (4;\ 5]$.

Ответ: $\{1\} \cup [3;\ 3{,}75) \cup (4;\ 5]$.

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+1+\sqrt{4x-7}}-\sqrt{x+1+\sqrt{2x-7}}}{\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}} \le 0$ (1)

Решение. Пусть $f(x) = x+1+\sqrt{4x-7},\ x \ge 1{,}75;\quad g(x) = x+1+\sqrt{2x-7},\ x \ge 3{,}5;$

$h(x) = x+3-4\sqrt{x-1} = x-1-4\sqrt{x-1}+4 = \left(\sqrt{x-1}-2\right)^2,\ x \ge 1;$

$\varphi(x) = x+8-6\sqrt{x-1} = x-1-6\sqrt{x-1}+9 = \left(\sqrt{x-1}-3\right)^2,\ x \ge 1.$

При $x \ge 3{,}5$ $f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ h(x) \ge 0,\ \varphi(x) \ge 0.$ Тогда

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left(x+1+\sqrt{4x-7}\right)-\left(x+1+\sqrt{2x-7}\right)}{\left(x+3-4\sqrt{x-1}\right)-\left(x+8-6\sqrt{x-1}\right)} \le 0, \\ x \ge 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x-7}-\sqrt{2x-7}}{2\sqrt{x-1}-5} \le 0, \\ x \ge 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(4x-7)-(2x-7)}{4(x-1)-25} \le 0, \\ x \ge 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{4x-29} \le 0, \\ x \ge 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in [3{,}5;\ 7{,}25).$$

Ответ: $[3{,}5;\ 7{,}25)$.

Пример 13. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-6}-3}{|x-1|-4} \ge 1$ (1)

Решение.

I. $(1) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-6}-3}{|x-1|-4} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-6}-(|x-1|-1)}{|x-1|-4} \ge 0$ (2)

Пусть $f(x)=x^2-6$. $D(\sqrt{f})$: $x^2-6\ge 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x\le -\sqrt{6}, \\ x\ge \sqrt{6} \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; x\in M.$

При $x\in M$ $\;(|x-1|-1)>0.$

II. Применим к неравенству (2) МЗМ.

$$(2)\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\dfrac{(x^2-6)-(|x-1|-1)^2}{(x-1-4)(x-1+4)}\ge 0,\\ x\in M\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\dfrac{x^2-6-(x^2-2x+1-2|x-1|+1)}{(x-5)(x+3)}\ge 0,\\ x\in M\end{cases}\;\Leftrightarrow$$

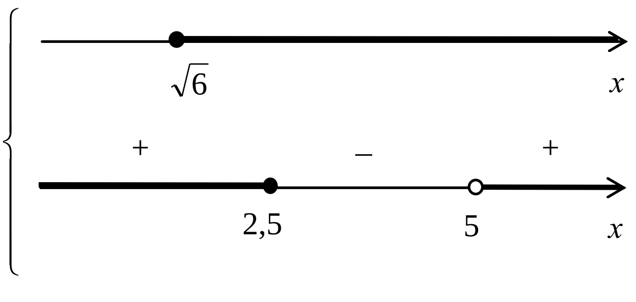
$$\begin{cases}\dfrac{2|x-1|+2x-8}{(x-5)(x+3)}\ge 0,\\ x\in M\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\dfrac{|x-1|-(4-x)}{(x-5)(x+3)}\ge 0,\\ x\in M\end{cases}$$

1) При $x\le -\sqrt{6}$, $(x-1)<0 \;\Rightarrow\; |x-1|=1-x.$

$$\begin{cases}x\le -\sqrt{6},\\ \dfrac{1-x-4+x}{(x-5)(x+3)}\ge 0\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}x\le -\sqrt{6},\\ (x-5)(x+3)<0\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}x\le -\sqrt{6},\\ x+3>0\end{cases}\;\Leftrightarrow\; x\in(-3;\,-\sqrt{6}].$$

2) При $x\ge \sqrt{6}$, $(x-1)>0 \;\Rightarrow\; |x-1|=x-1.$

$$\begin{cases}x\ge \sqrt{6},\\ \dfrac{x-1-4+x}{(x-5)(x+3)}\ge 0\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}x\ge \sqrt{6},\\ \dfrac{2x-5}{x-5}\ge 0\end{cases}$$



$x\in[\sqrt{6};\,2{,}5]\cup(5;\,+\infty).$

3) Объединим полученные решения

$1)\cup 2) \;\Leftrightarrow\; x\in(-3;\,-\sqrt{6}]\cup[\sqrt{6};\,2{,}5]\cup(5;\,+\infty).$

Ответ: $(-3;\,-\sqrt{6}]\cup[\sqrt{6};\,2{,}5]\cup(5;\,+\infty).$

Пример 14. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{3x^2-4x+10}-\sqrt{2x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{x^2-15x-18}+\sqrt[3]{4x^2-11x-6}}\ge 0$ (1)

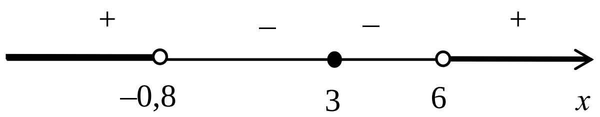
Решение. $(1) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3x^2-4x+10}-\sqrt{2x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{x^2-15x-18}-\sqrt[3]{-4x^2+11x+6}} \ge 0$.

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \dfrac{(3x^2-4x+10)-(2x^2+2x+1)}{(x^2-15x-18)-(-4x^2+11x+6)} \ge 0, \\ 3x^2-4x+10 \ge 0,\ 2x^2+2x+1 \ge 0. \end{cases}$$

Так как $3x^2-4x+10>0$ и $2x^2+2x+1>0\ \forall x \in R\ (a>0,\ D<0)$, то система неравенств примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+9}{5x^2-26x-24} \ge 0, \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)^2}{(5x+4)(x-6)} \ge 0.$$



$x \in (-\infty; -0{,}8) \cup \{3\} \cup (6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}8) \cup \{3\} \cup (6; +\infty)$.

Пример 15. Решите неравенство $\dfrac{x^3-27+9x(3-x)}{|3-2x|} \le \sqrt{2x-3}$ (1)

Решение.

I. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-9x^2+27x-27 \le |2x-3|\sqrt{2x-3}, \\ x \ne 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (x-3)^3-\left(\sqrt{2x-3}\right)^3 \le 0, \\ x \ne 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)-\sqrt{2x-3} \le 0, \\ x \ne 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le 0, & (2) \\ x \ne 1{,}5, & (3) \end{cases}$$

где $f(x)=x-3-\sqrt{2x-3},\ x \ge 1{,}5$.

II. Заменим функцию *f(x)* на функцию равного знака.

1) $t=\sqrt{2x-3},\ t \ge 0,\ t^2=2x-3,\ x=\dfrac{t^2+3}{2},\ x-3=\dfrac{t^2-3}{2}$.

2) $f(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{t^2-3}{2}-t\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} t^2-2t-3\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} (t-3)(t+1)\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} t-3\vee 0, \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} \sqrt{2x-3}-3\vee 0, \\ \sqrt{2x-3}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} 2x-3-9\vee 0, \\ x\ge 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} x-6\vee 0, \\ x\ge 1{,}5. \end{cases}$

III. $\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} x-6\le 0, \\ x>1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow\; x\in(1{,}5;\ 6].$

Ответ: $(1{,}5;\ 6]$.

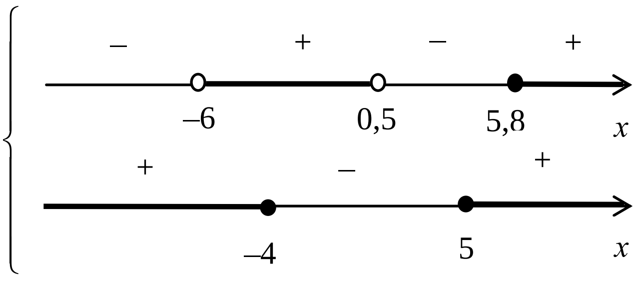
Пример 16. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-x-20}-|x-3|}{\sqrt[3]{x^3-4x^2+23x-14}-x+2}\ge 0$ (1)

Решение. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{\sqrt{x^2-x-20}-\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x^3-4x^2+23x-14}-\sqrt[3]{(x-2)^3}}\ge 0$.

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-x-20)-(x^2-6x+9)}{(x^3-4x^2+23x-14)-(x^3-6x^2+12x-8)}\ge 0, \\ x^2-x-20\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{5x-29}{2x^2+11x-6}\ge 0, \\ (x-5)(x+4)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{5x-29}{(2x-1)(x+6)}\ge 0, \\ (x-5)(x+4)\ge 0 \end{cases}$$



$x\in(-6;\ -4]\cup[5{,}8;\ +\infty)$.

Ответ: $(-6;\ -4]\cup[5{,}8;\ +\infty)$.

Пример 17. Решите неравенство $3\sqrt{x+2}\le 6-|x-2|$ (1)

Решение. Пусть $t=\sqrt{x+2}$, $t\ge 0$, $t^2=x+2$, $x-2=t^2-4$.

$$(1)\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}3t\le 6-\left|t^2-4\right|,\\ t\ge 0\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\left|t^2-4\right|\le 6-3t,\\ t\ge 0\end{cases}$$

Так как $\left|t^2-4\right|\ge 0,$ то $6-3t\ge 0$.

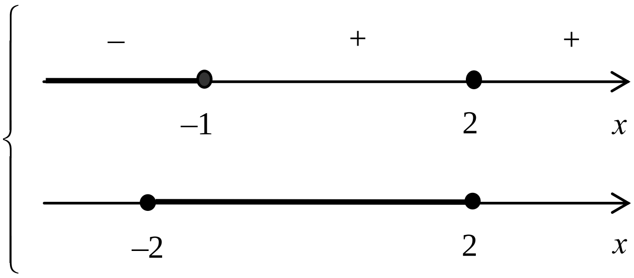
$$\begin{cases}\left|t^2-4\right|-(6-3t)\le 0,\\ t\ge 0,\;6-3t\ge 0\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\left(t^2-4\right)^2-(6-3t)^2\le 0,\\ t\in[0;\,2]\end{cases}\;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(t^2-4-6+3t\right)\left(t^2-4+6-3t\right)\le 0,\\ t\in[0;\,2]\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\left(t^2+3t-10\right)\left(t^2-3t+2\right)\le 0,\\ t\in[0;\,2]\end{cases}\;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(t+5)(t-2)(t-2)(t-1)\le 0,\\ t\in[0;\,2]\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}(t-2)^2(t-1)\le 0,\\ t\in[0;\,2]\end{cases}\;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x+2}-2\right)^2\left(\sqrt{x+2}-1\right)\le 0,\\ \sqrt{x+2}\ge 0,\;\sqrt{x+2}\le 2\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}(x+2-4)^2(x+2-1)\le 0,\\ x+2\ge 0,\;x+2\le 4\end{cases}\;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-2)^2(x+1)\le 0,\\ x\in[-2;\,2]\end{cases}$$



$x\in[-2;\,-1]\cup\{2\}$.

Ответ: $[-2;\,-1]\cup\{2\}$.

Пример 18. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x}+|x+6|-5}{3\sqrt{x+5}-|x-2|-3}\ge 0$ (1)

Решение.

I. 1) Так как $D\left(\sqrt{\varphi}\right)\!:\;\varphi\ge 0$, то $\begin{cases}1-x\ge 0,\\ x+5\ge 0\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}x\le 1,\\ x\ge -5\end{cases}\;\Leftrightarrow\;x\in[-5;\,1]$.

2) При $x\in[-5;\,1]$ $(x+6)>0,$ $(x-2)<0\;\Rightarrow\;|x+6|=x+6,$ $|x-2|=2-x$.

3) $(1) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}+x+1}{3\sqrt{x+5}+x-5} \ge 0, \\ x \in [-5;\, 1] \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-(-x-1)}{3\sqrt{x+5}-(5-x)} \ge 0, & (2) \\ x \in [-5;\, 1]. & (3) \end{cases}$

4) Функция $(-x-1) \ge 0$ при $x \in [-5;\, -1]$ и $(-x-1) < 0$ при $x \in (-1;\, 1]$; функция $(5-x) > 0$ при $x \in [-5;\, 1]$.

II. Решим систему неравенств (2), (3) двумя способами, используя МЗМ.

1 способ. Рассмотрим два случая.

1) $\begin{cases} x \in [-5;\, -1], \\ \dfrac{(1-x)-(-x-1)^2}{9(x+5)-(5-x)^2} \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in [-5;\, -1], \\ \dfrac{x^2+3x}{x^2-19x-20} \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in [-5;\, -1], \\ \dfrac{x(x+3)}{(x-20)(x+1)} \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in [-5;\, -1], \\ x+3 \le 0, \\ x \ne -1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x \in [-5;\, -3].$

2) $\begin{cases} x \in (-1;\, 1], \\ 3\sqrt{x+5}-(5-x) > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in (-1;\, 1], \\ 9(x+5)-(5-x)^2 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in (-1;\, 1], \\ x^2-19x-20 < 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in (-1;\, 1], \\ (x-20)(x+1) < 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in (-1;\, 1], \\ x+1 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x \in (-1;\, 1].$

3) Объединим полученные решения $1) \cup 2) \;\Leftrightarrow\; x \in [-5;\, -3] \cup (-1;\, 1]$.

Ответ: $[-5;\, -3] \cup (-1;\, 1]$.

2 способ. 1) Рассмотрим функцию

$f(x) = \sqrt{1-x} - (-x-1) = \sqrt{1-x} + x + 1, \qquad D(f): x \le 1.$

Заменим функцию *f(x)* на функцию равного знака.

а) Пусть $t = \sqrt{1-x}$, $t \ge 0$, $t^2 = 1-x$, $x = 1-t^2$, $x+1 = 2-t^2$;

б) $f(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t+2-t^2 \vee 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -(t^2-t-2) \vee 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (t+1)(2-t) \vee 0, \\ t \ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2-t \vee 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{1-x} \vee 0, \\ \sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-(1-x) \vee 0, \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \vee 0, \\ x \leq 1. \end{cases}$$

2) Рассмотрим функцию $g(x)=3\sqrt{x+5}-(5-x)=3\sqrt{x+5}+x-5,$

$D(g)$: $x \geq -5$.

Заменим функцию g*(x)* на функцию равного знака.

а) Функция $y=g(x)$ возрастает на промежутке $[-5; +\infty)$, как сумма двух возрастающих функций. Так как $g(-1)=0$, то по теореме о корне $x=-1$ единственный корень уравнения $g(x)=0$.

б) $\begin{cases} g(x) \vee 0, \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)-g(-1) \vee 0, \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-(-1) \vee 0, \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \vee 0, \\ x \geq -5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \\ x \in [-5; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+3}{x+1} \geq 0, \\ x \in [-5; 1] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-5; -3] \cup (-1; 1].$

Ответ: $[-5; -3] \cup (-1; 1]$.

Пример 19. Решите неравенство $\dfrac{x^2-3x-22-\sqrt{2x^2-6x-20}}{|x-4|-\sqrt{x-2}} \geq 0$ (1)

Решение.

I. Пусть $f(x)=x^2-3x-22-\sqrt{2x^2-6x-20}$. Заменим функцию *f*(*x*) на функцию равного знака.

1) Пусть $t=\sqrt{2x^2-6x-20}$, $t \geq 0$, $t^2=2x^2-6x-20$, $x^2-3x=\dfrac{t^2+20}{2}$,

$x^2-3x-22=\dfrac{t^2-24}{2}$.

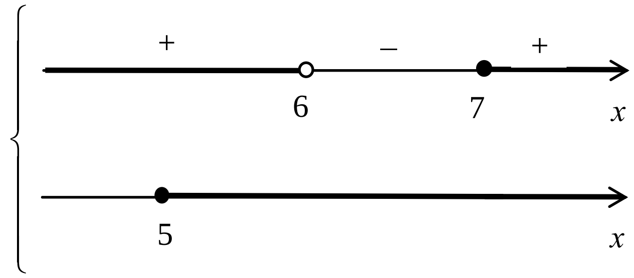
2) $f(x) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-24}{2}-t \vee 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2t-24 \vee 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(t-6)(t+4)\vee 0,\\ t\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t-6\vee 0,\\ t\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2-6x-20}-6\vee 0,\\ \sqrt{2x^2-6x-20}\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-6x-20}-6\vee 0,\\ (x-5)(x+2)\ge 0.\end{cases}$$

II. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2-6x-20}-6}{|x-4|-\sqrt{x-2}}\ge 0,\\ (x-5)(x+2)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(2x^2-6x-20)-36}{(x-4)^2-(x-2)}\ge 0,\\ (x-5)(x+2)\ge 0,\ x\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-28}{x^2-9x+18}\ge 0,\\ x\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-7)(x+4)}{(x-6)(x-3)}\ge 0,\\ x\ge 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-7}{x-6}\ge 0,\\ x\ge 5.\end{cases}$$



$x\in[5;\,6)\cup[7;\,+\infty)$.

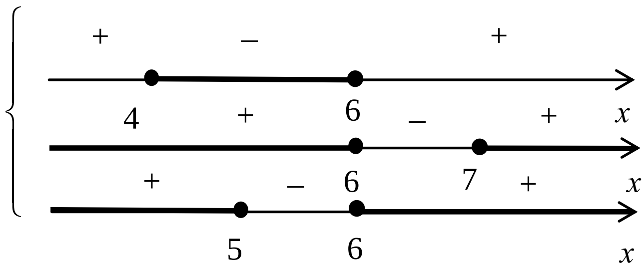
Ответ: $[5;\,6)\cup[7;\,+\infty)$.

Пример 20. Решите неравенство

$$\sqrt{10x-x^2-24}\ge\sqrt{x^2-13x+42}-\sqrt{x^2-11x+30} \qquad (1)$$

Решение.

I. *ООН*: $\begin{cases}10x-x^2-24\ge 0,\\ x^2-13x+42\ge 0,\\ x^2-11x+30\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-6)(x-4)\le 0,\\ (x-7)(x-6)\ge 0,\\ (x-6)(x-5)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$



$x\in[4;\,5]\cup\{6\}$.

II. $(1) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \sqrt{(6-x)(x-4)}-\sqrt{(7-x)(6-x)}+\sqrt{(6-x)(5-x)}\ge 0, & (2) \\ x\in[4;\,5]\cup\{6\} & (3) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x=6, \\ \sqrt{0}-\sqrt{0}+\sqrt{0}\ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x=6.$

2) $x\in[4;\,5] \;\Rightarrow\; \sqrt{6-x}>0$, сократим (2) на $\sqrt{6-x}$.

$$\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}-\sqrt{7-x}\ge 0, \\ x\in[4;\,5] \end{cases}$$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}\right)^2-\left(\sqrt{7-x}\right)^2\ge 0, \\ x\in[4;\,5] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-4+2\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{5-x}+5-x-7+x\ge 0, \\ x\in[4;\,5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{5-x}-(6-x)\ge 0, \\ x\in[4;\,5] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4(x-4)(5-x)-(6-x)^2\ge 0, \\ x\in[4;\,5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2+36x-80-36+12x-x^2\ge 0, \\ x\in[4;\,5] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x^2-48x+116\le 0, \\ x\in[4;\,5] \end{cases} \Leftrightarrow\varnothing, \text{ так как } 5x^2-48x+116>0\;\forall x\in R\,(a=5>0,\ D<0).$$

Ответ: $\{6\}$.

Пример 21. Решите неравенство

$$\frac{\left(\sqrt{9+6x^2}-3-x^2\right)\cdot\left(\left|x^2-5\right|-\left|x^2-3\right|\right)}{\left(x^{77}-1\right)\cdot\left(\sqrt{4-x}-x-8\right)\cdot\left(x^2+3x-10\right)}\le 0 \qquad (1)$$

Решение. Применим МЗМ.

I. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{f_3(x)\cdot f_4(x)\cdot f_5(x)}\le 0, \qquad (2)$

где $f_1(x)=\sqrt{9+6x^2}-3-x^2=\sqrt{9+6x^2}-\left(x^2+3\right)$, $f_2(x)=\left|x^2-5\right|-\left|x^2-3\right|$,

$f_3(x)=x^{77}-1$, $f_4(x)=\sqrt{4-x}-x-8=\sqrt{4-x}-(x+8)$, $x\le 4$, $f_5(x)=x^2+3x-10$.

II. Заменим функции $f_i(x)$, $i=1,\dots,5$ на функции равного знака.

1) $f_1(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{9+6x^2}\right)^2-\left(x^2+3\right)^2\vee 0 \;\Leftrightarrow\; 9+6x^2-x^4-6x^2-9\vee 0 \;\Leftrightarrow$
$-x^4\vee 0$.

2) $f_2(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\left|x^2-5\right|\right)^2-\left(\left|x^2-3\right|\right)^2\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x^2-5\right)^2-\left(x^2-3\right)^2\vee 0 \;\Leftrightarrow$
$\left(x^2-5-x^2+3\right)\left(x^2-5+x^2-3\right)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; -2\left(2x^2-8\right)\vee 0 \;\Leftrightarrow$
$-\left(x^2-4\right)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; -(x-2)(x+2)\vee 0$.

3) $f_3(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; x-1\vee 0$.

4) $f_4(x)\vee 0$.

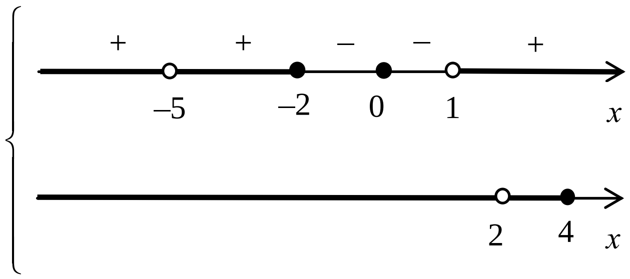
а) $t=\sqrt{4-x},\ t\geq 0,\ t^2=4-x,\ x=4-t^2,\ x+8=12-t^2$.

б) $f_4(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t^2+t-12\vee 0, \\ t\geq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (t+4)(t-3)\vee 0, \\ t\geq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t-3\vee 0, \\ t\geq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases} \sqrt{4-x}-3\vee 0, \\ \sqrt{4-x}\geq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 4-x-9\vee 0, \\ x\leq 4 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -(x+5)\vee 0, \\ x\leq 4. \end{cases}$

5) $f_5(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(x+5)\vee 0$.

III. $(2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\left(-x^4\right)\left(-(x-2)(x+2)\right)}{(x-1)\left(-(x+5)\right)(x-2)(x+5)}\leq 0, \\ x\leq 4 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{x^4\,(x+2)}{(x-1)(x+5)^2}\geq 0, \\ x\leq 4,\ x\neq 2 \end{cases}$



$x\in(-\infty;-5)\cup(-5;-2]\cup\{0\}\cup(1;\,2)\cup(2;\,4]$.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(-5;-2]\cup\{0\}\cup(1;\,2)\cup(2;\,4]$.

3.3. Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $\sqrt{5-x}<\dfrac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

2. $\dfrac{\sqrt{2x^2-3x-5}}{\sqrt{x-2}}<\sqrt{x+1}$.

3. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\ge\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

4. $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\le\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

5. $\dfrac{\sqrt{2x+3}+x-6}{x-5}\ge 3$.

6. $\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{2(5x+1)}}{\sqrt{x+3}-2}\le 0$.

7. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1}\le 0$.

8. $\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6}\le 0$.

9. $\dfrac{\sqrt{64x^3-1}-1}{4x+1}\le 4x$.

10. $\dfrac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6}\ge 2x-10$.

11. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}>1$.

12. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-24}-3x+26}{x-10}<-1$.

13. $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}+2x-6}{x-3}>3$.

14. $\dfrac{\sqrt{x^2+7x-8}-3x-6}{x+2}<-2$.

15. $\left(x+\dfrac{3}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\ge 4\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$.

16. $\left(x+\dfrac{7}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}-1}{\sqrt{10-x}-1}\right)^2\ge 8\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}-1}{\sqrt{10-x}-1}\right)^2$.

17. $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|}\le 0$.

18. $\dfrac{\sqrt{-x^2-6x-5}}{|x^2+x-2|-|x^2+7x+6|}\ge 0$.

19. $\dfrac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{|x^2+2x-3|-|x^2+6x+5|}\le 0$.

20. $\dfrac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|}\le 1$.

21. $\dfrac{|x+5|-\sqrt{2x+18}}{|x-4|-\sqrt{12-3x}}\ge 0$.

22. $\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{x+3}\right)\cdot\left(|x-4|-x^2-2\right)<0$.

23. $\dfrac{\sqrt{3x^2-5x+3}-\sqrt{x^2+x+1}}{|2x^2-x-1|-|12x^2+7x+1|}\ge 0$.

24. $\dfrac{|x-1|^5-|x-1|}{\sqrt{2x^2+3x-5}-2}\le 0$.

25. $\left|\sqrt{2x^2+3x+5}+7x-3\right|-\left|\sqrt{2x^2+3x+5}-7x+4\right|<0$.

26. $\left|\sqrt{x^2+x+1}-2x-1\right|-\left|\sqrt{x^2+x+1}+2x+2\right|>0$.

27. $\dfrac{\sqrt{35+2x-x^2}-x-5}{\left|3x^2+4x-9\right|-\left|x^2+6x+3\right|}\le 0$. **28.** $\dfrac{\sqrt{x-1+\sqrt{3x-5}}-\sqrt{x-1+\sqrt{2x-5}}}{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}}\le 0$.

29. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}}-\sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}\le 0$. **30.** $\dfrac{\sqrt{x^2-3}-3}{|x+2|-5}\ge 1$.

31. $\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+3x+3}}{\sqrt[3]{3x^2+10x+5}+\sqrt[3]{3x^2+7x}}\ge 0$. **32.** $\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt[3]{3x^2+x-4}}\ge 0$.

33. $\dfrac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|}\le\sqrt{4x-3}$. **34.** $\dfrac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\le 0$.

35. $\dfrac{|x|-\sqrt{24-2x-x^2}}{\sqrt[3]{x^3-x^2-6x+3}-x+1}\le 0$. **36.** $3\sqrt{x+4}\le 5-2|x+2|$.

37. $\sqrt{x-3}\le 3-|x-6|$. **38.** $\sqrt{2x+6}>|x+1|-2$.

39. $\dfrac{2\sqrt{x+2}-|x-5|-1}{2\sqrt{4-x}-|x+3|-1}\le 0$. **40.** $\dfrac{\sqrt{3-x}-|x+4|+1}{\sqrt{3+x}-|x-4|+1}\le 0$.

41. $\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x-1}-2}{|x+3|-\sqrt{x^2-2x-3}}\le 0$. **42.** $\dfrac{\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x-7}{|x-7|-|x+2|}\le 0$.

43. $\dfrac{x^2-7x-24+\sqrt{x^2-7x+18}}{|x-3|-\sqrt{x-1}}\le 0$.

44. $\sqrt{4x-x^2-3}\ge\sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}$.

45. $\sqrt{x^2+4x+8}\le\sqrt{2\left(x^2+4x+6\right)}-\sqrt{x^2+4x+4}$.

46. $\dfrac{\left(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2\right)\cdot\left(|2x+3|-|3x+2|\right)}{\left(x^2-5x+4\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}+1-x\right)\cdot\left(x^{99}-1\right)}\le 0$.

47. $\dfrac{\left(\sqrt{7-x}-x-5\right)\cdot\left(\sqrt{11-4x}-x-2{,}5\right)}{\sqrt{5+3x-2x^2}\cdot\left(|4x-3|-|6x+1|\right)}\le 0$.

Ответы:

1. $(1;\ 2)\cup(4;\ 5]$. **2.** $[2{,}5;\ 3)$. **3.** $[-2;\ -1]\cup\{3\}$. **4.** $[-4;\ 1]\cup\{2\}$.

5. $(5;\ 6{,}5]$. **6.** $[3;\ 11]$. **7.** $[-7;\ -6)\cup[-5;\ -1]\cup\{1\}$.

8. $(2;\ 3)$. **9.** $[0{,}25;\ +\infty)$. **10.** $[0;\ 4]\cup\{5\}\cup(6;\ 7{,}5]$.

11. $(-\infty;\ -7)\cup(-5;\ -3]\cup[2;\ +\infty)$. **12.** $(-\infty;\ -4]\cup[6;\ 10)\cup(14;\ +\infty)$.

13. $(5;\ +\infty)$. **14.** $(-\infty;\ -8]\cup[1;\ 4)$.

15. $(0;\ 1]\cup\{2\}\cup[3;\ 4)\cup(4;\ 5]$. **16.** $(0;\ 1]\cup\{4;\ 6\}\cup[7;\ 9)\cup(9;\ 10]$.

17. $[1;\ 2)\cup\left(2+\sqrt{3};\ 6\right]$. **18.** $\left[-5;\ -2-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\dfrac{4}{3};\ -1\right]$.

19. $[-3;\ -2)\cup\left(-2+\sqrt{3};\ 1\right]$. **20.** $[-7;\ -0{,}75)\cup[0{,}5;\ 2)$.

21. $[-9;\ -7]\cup[-1;\ 1)$. **22.** $\left[-\dfrac{5}{3};\ -1\right)\cup(1;\ +\infty)$.

23. $\left(-\dfrac{3}{7};\ 0\right)\cup\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. **24.** $(-3;\ -2{,}5]\cup\{1\}\cup(1{,}5;\ 2]$.

25. $(-\infty;\ 0{,}5)$. **26.** $(-\infty;\ -0{,}75)$.

27. $\{-5\}\cup(-3;\ -2)\cup(0{,}5;\ 1]\cup(3;\ 7]$. **28.** $[2{,}5;\ 4{,}25)$. **29.** $[1{,}5;\ 3{,}25)$.

30. $(-\infty;\ -7)\cup\left[\sqrt{3};\ 3\right)$. **31.** $(-\infty;\ -2{,}5)\cup\{-1\}\cup\left(-\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$.

32. $(-\infty;\ -1{,}5)\cup\{0\}\cup\left(\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$. **33.** $(0{,}75;\ 7]$.

34. $[-2;\ 0{,}5)\cup\left[\dfrac{2}{3};\ \dfrac{\sqrt{11}-1}{2}\right]$. **35.** $[-4;\ 0{,}5)\cup[3;\ 4)$.

36. $[-4;\ -3{,}75]\cup[-3;\ -1{,}75]$. **37.** $\{3\}\cup[4;\ 7]$. **38.** $(-3;\ 5)$.

39. $[-2;\ 0)\cup[2;\ 4]$. **40.** $[-3;\ -1]\cup(1;\ 3]$.

41. $(-\infty;\ -1{,}5)\cup[3;\ 9]$. **42.** $[-1;\ 2{,}5)\cup[4;\ +\infty)$.

43. $[1;\ 2)\cup(5;\ 9]$. **44.** $\{3\}$. **45.** $\{-2\}$.

46. $[-5;\ -1]\cup\{0\}\cup(1;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$. **47.** $(-1;\ 0{,}2)\cup[0{,}5;\ 2{,}5)$.

4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решение показательных неравенств основано на *монотонности* показательной функции $y = a^x$, которая при a>1 монотонно возрастает, при $a \in (0;1)$ монотонно убывает $(a = const, a > 0, a \neq 1)$.

4.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $\begin{cases} a^x \vee b, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ x \vee \log_a b \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1) \\ x \wedge \log_a b \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a-1 > 0, \\ x - \log_a b \vee 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a - 1 < 0, \\ -(x - \log_a b) \vee 0. \end{cases}$$

Вывод: $\begin{cases} a^x - b \vee 0, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)(x - \log_a b) \vee 0.$

2. $\begin{cases} a^x - b < 0, \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$, так как $a^x > 0 \quad \forall x \in R$.

3. $\begin{cases} a^x - b > 0, \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R.$

4. $a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) \vee g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ f(x) \wedge g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a-1 > 0, \\ f(x) - g(x) \vee 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a - 1 < 0, a > 0 \\ -(f(x) - g(x)) \vee 0. \end{cases}$$

Вывод: $a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) \vee 0.$

Частные случаи

1. $\begin{cases} a^{f(x)} - b \vee 0 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^{f(x)} - a^{\log_a b} \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - \log_a b) \vee 0.$

2. $a^{f(x)} - 1 \vee 0 \Leftrightarrow a^{f(x)} - a^0 \vee 0 \Leftrightarrow (a-1) \cdot f(x) \vee 0.$

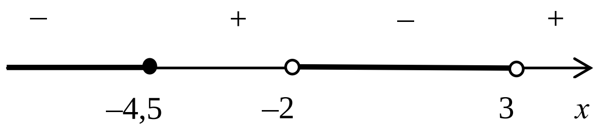
4.2. Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство $7^{\frac{1}{x+2}} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{3-x}}$. (1)

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad 7^{\frac{1}{x+2}} - 7^{\frac{3}{x-3}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (7-1)\left(\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-3}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-3-3x-6}{(x+2)(x-3)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+9}{(x+2)(x-3)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$



$x \in (-\infty;\, -4{,}5] \cup (-2;\, 3)$.

Ответ: $(-\infty;\, -4{,}5] \cup (-2;\, 3)$.

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt[3]{2^{x^2-6x-4}} \geq \left(\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1\right)^x$ (1)

Решение.

1) $3+\sqrt{8} = 3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$.

2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1\right)^x = \left(\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - 1\right)^x = \left(\sqrt{2}+1-1\right)^x = \left(\sqrt{2}\right)^x = 2^{\frac{x}{2}}$.

3) $(1) \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{x^2-6x-4}{3}} - 2^{\frac{x}{2}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-1)\left(\frac{x^2-6x-4}{3} - \frac{x}{2}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$$2x^2 - 12x - 8 - 3x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 15x - 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow (2x+1)(x-8) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$x \in (-\infty;\, -0{,}5] \cup [8;\, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\, -0{,}5] \cup [8;\, +\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $5^{x+2} + 5^{-x} - 23 \geq \log_4 64$ (1)

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad 25 \cdot 5^x + 5^{-x} - 23 - \log_4 4^3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25 \cdot 5^x + 5^{-x} - 26 \geq 0. \qquad (2)$$

Пусть $t=5^x$, $t>0$.

$$(2)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}25t+\dfrac{1}{t}-26\ge 0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}25t^2-26t+1\ge 0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}(25t-1)(t-1)\ge 0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(25\cdot 5^x-1)(5^x-1)\ge 0,\\ 5^x>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \left(5^{x+2}-5^0\right)\left(5^x-5^0\right)\ge 0\ \Leftrightarrow$$

$$(5-1)(x+2-0)(5-1)(x-0)\ge 0\ \Leftrightarrow\ (x+2)x\ge 0\ \Leftrightarrow\ x\in(-\infty;\,-2]\cup[0;\,+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\,-2]\cup[0;\,+\infty)$.

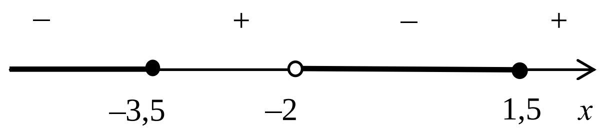
Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{9^{x^2+5x-6}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2-2x-9}}{2^{3x-4}-(0{,}5)^{6-2x}}\le 0$ (1)

Решение. $(1)\ \Leftrightarrow\ \dfrac{3^{2x^2+10x-12}-3^{-2x^2+2x+9}}{2^{3x-4}-2^{2x-6}}\le 0$

Применим МЗМ.

$$\frac{(3-1)\left(2x^2+10x-12-\left(-2x^2+2x+9\right)\right)}{(2-1)\left((3x-4)-(2x-6)\right)}\le 0\ \Leftrightarrow\ \frac{4x^2+8x-21}{x+2}\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x+7)(2x-3)}{x+2}\le 0.$$



$x\in(-\infty;\,-3{,}5]\cup(-2;\,1{,}5]$.

Ответ: $(-\infty;\,-3{,}5]\cup(-2;\,1{,}5]$.

Пример 5. Решите неравенство $27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27\ge 0$ (1)

Решение.

1) Приведем неравенство (1) к каноническому виду.

Пусть $t=3^x$, $t>0$.

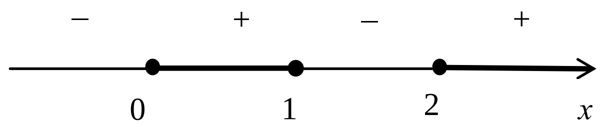
$$(1)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}t^3-13t^2+39t-27\ge 0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}(t^3-27)-(13t^2-39t)\ge 0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(t-3)\left(t^2+3t+9\right)-13t(t-3)\geq 0,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(t-3)\left(t^2-10t+9\right)\geq 0,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(t-3)(t-9)(t-1)\geq 0,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow \left(3^x-3\right)\left(3^x-3^2\right)\left(3^x-3^0\right)\geq 0 \qquad (2)$$

2) Применим МЗМ.

$$(2) \Leftrightarrow (3-1)(x-1)(3-1)(x-2)(3-1)(x-0)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)x\geq 0.$$



$x\in[0;\,1]\cup[2;\,+\infty)$.

Ответ: $[0;1]\cup[2;+\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{9^x-82\cdot 3^x+54+3^{0,5x+2}}{3^{0,5x}-3}\geq 9$ (1)

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{9^x-82\cdot 3^x+54+9\cdot 3^{0,5x}-9\cdot 3^{0,5x}+27}{3^{0,5x}-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3^{2x}-82\cdot 3^x+81}{3^{0,5x}-3}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(3^x-81\right)\left(3^x-1\right)}{3^{0,5x}-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(3^x-3^4\right)\left(3^x-3^0\right)}{3^{0,5x}-3}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(3-1)(x-4)(3-1)(x-0)}{(3-1)(0,5x-1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)x}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0;\,2)\cup[4;\,+\infty).$$

Ответ: $[0;\,2)\cup[4;\,+\infty)$.

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{50-3^x-3^{3-x}-2\left|8-3^x\right|}{19-\left|8-3^x\right|}\geq 2$ (1)

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{50-3^x-3^{3-x}-2\left|8-3^x\right|-38+2\left|8-3^x\right|}{19-\left|8-3^x\right|}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{12-3^x-3^{3-x}}{19-\left|8-3^x\right|}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3^{2x}-12\cdot 3^x+27}{\left|3^x-8\right|-19}\ge 0 \iff \frac{\left(3^x-3\right)\left(3^x-9\right)}{\left(3^x-8\right)^2-19^2}\ge 0 \iff$$

$$\frac{\left(3^x-3\right)\left(3^x-3^2\right)}{\left(3^x-8-19\right)\left(3^x-8+19\right)}\ge 0 \iff \frac{\left(3^x-3\right)\left(3^x-3^2\right)}{\left(3^x-3^3\right)\left(3^x+11\right)}\ge 0 \iff$$

$$\frac{(3-1)(x-1)(3-1)(x-2)}{(3-1)(x-3)}\ge 0 \iff \frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\ge 0 \iff x\in[1;2]\cup(3;+\infty).$$

Ответ: $[1;2]\cup(3;+\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство $\dfrac{5\cdot 4^x-6-7\cdot 10^x+4\cdot 25^x}{25^x-3}\le 2$ (1)

Решение.

I. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

$$(1) \iff \frac{5\cdot 4^x-6-7\cdot 10^x+4\cdot 25^x-2\cdot 25^x+6}{25^x-3}\le 0 \iff$$

$$\frac{2\cdot 25^x-7\cdot 10^x+5\cdot 4^x}{25^x-3}\le 0 \iff \frac{f(x)}{g(x)}\le 0, \qquad (2)$$

где $f(x)=2\cdot 25^x-7\cdot 10^x+5\cdot 4^x$, $g(x)=25^x-3$.

II. Заменим функции $f(x)$ и $g(x)$ на функции равного знака.

1) $f(x)\vee 0 \iff 2\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x\cdot 2^x+5\cdot 2^{2x}\vee 0$ (3)

$f(x)$ – однородный многочлен второй степени относительно функций 5^x и 2^x. Так как $4^x>0\ \forall x\in R$, то разделим неравенство (3) на 4^x.

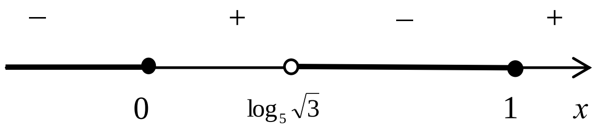
$$2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}-7\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x+5\vee 0 \iff 2\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x-1\right)\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x-\frac{5}{2}\right)\vee 0 \iff$$

$$\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x-\left(\frac{5}{2}\right)^0\right)\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x-\frac{5}{2}\right)\vee 0 \iff \left(\frac{5}{2}-1\right)(x-0)\left(\frac{5}{2}-1\right)(x-1)\vee 0 \iff x(x-1)\vee 0.$$

2) $g(x)\vee 0 \iff 5^{2x}-5^{\log_5 3}\vee 0 \iff (5-1)(2x-\log_5 3)\vee 0 \iff$

$$x-\frac{\log_5 3}{2}\vee 0 \iff x-\log_5\sqrt{3}\vee 0.$$

III. $(2) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x(x-1)}{x-\log_5\sqrt{3}} \le 0$.



$x \in (-\infty;\, 0] \cup \left(\log_5\sqrt{3};\, 1\right]$.

Ответ: $(-\infty;\, 0] \cup \left(\log_5\sqrt{3};\, 1\right]$.

Пример 9. Решите неравенство $\left(4-\sqrt{15}\right)^x + \left(4+\sqrt{15}\right)^x \le 62$ (1)

Решение.

1) Так как $\left(4-\sqrt{15}\right)\cdot\left(4+\sqrt{15}\right) = 16-15 = 1$, то $\left(4+\sqrt{15}\right)^x = \dfrac{1}{\left(4-\sqrt{15}\right)^x}$.

2) $(1) \;\Leftrightarrow\; \left(4-\sqrt{15}\right)^x + \dfrac{1}{\left(4-\sqrt{15}\right)^x} \le 62$ (2)

Пусть $t = \left(4-\sqrt{15}\right)^x = a^x$, где $a = 4-\sqrt{15},\ a \in (0;\,1),\ t > 0$.

$$(2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t + \dfrac{1}{t} - 62 \le 0, \\ t > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t^2 - 62t + 1 \le 0, \\ t > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (t-t_1)(t-t_2) \le 0, & (3) \\ t > 0, & (4) \end{cases}$$

где $t_1 = 31-\sqrt{960} = 31-8\sqrt{15} = \left(4-\sqrt{15}\right)^2 = a^2$,

$t_2 = 31+\sqrt{960} = 31+8\sqrt{15} = \left(4+\sqrt{15}\right)^2 = \left(4-\sqrt{15}\right)^{-2} = a^{-2}$.

$$\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left(a^x - a^2\right)\left(a^x - a^{-2}\right) \le 0, \\ x \in R \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \left(a^x - a^2\right)\left(a^x - a^{-2}\right) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$(a-1)(x-2)(a-1)(x+2) \le 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(x+2) \le 0 \;\Leftrightarrow\; x \in [-2;\, 2]$.

Ответ: $[-2;\, 2]$.

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{5^{(x-1)^2} + 0{,}04 - 5^{x^2-2} - 5^{1-2x}}{\sqrt{2^{2x+3} - 2^{x+1}} - 2^{x+1}} \le 0$ (1)

Решение.

I. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f(x)}{g(x)} \le 0$, (2) где $f(x)=5^{(x-1)^2}+0{,}04-5^{x^2-2}-5^{1-2x}$, $g(x)=\sqrt{2^{2x+3}-2^{x+1}}-2^{x+1}$.

II. Применим МЗМ. Заменим функции $f(x)$ и $g(x)$ на функции равного знака.

1) $f(x)\vee 0$. Воспользуемся методом группировки.

$$f(x)\vee 0 \Leftrightarrow \left(5^{x^2-2x+1}-5^{x^2-2}\right)-\left(5^{1-2x}-5^{-2}\right)\vee 0 \Leftrightarrow$$

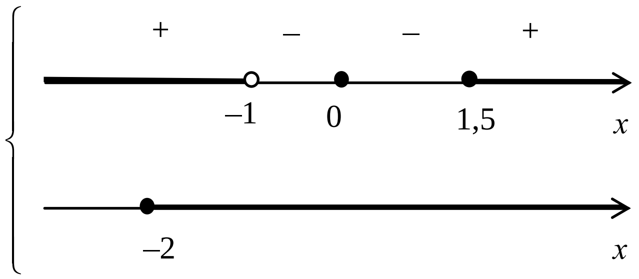
$$5^{x^2-2}\left(5^{3-2x}-1\right)-5^{-2}\left(5^{3-2x}-1\right)\vee 0 \Leftrightarrow \left(5^{3-2x}-5^{0}\right)\left(5^{x^2-2}-5^{-2}\right)\vee 0 \Leftrightarrow$$

$$(5-1)(3-2x-0)(5-1)\left(x^2-2-(-2)\right)\vee 0 \Leftrightarrow -(2x-3)x^2\vee 0.$$

$$2)\ g(x)\vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases}2^{2x+3}-2^{x+1}-2^{2x+2}\vee 0,\\ 2^{2x+3}-2^{x+1}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^{x+1}\left(2\cdot 2^{x+1}-1-2^{x+1}\right)\vee 0,\\ 2^{x+1}\left(2^{x+2}-1\right)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2^{x+1}-2^{0}\vee 0,\\ 2^{x+2}-2^{0}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2-1)(x+1-0)\vee 0,\\ (2-1)(x+2-0)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1\vee 0,\\ x+2\geq 0.\end{cases}$$

$$\textbf{III.}\ (2) \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-(2x-3)x^2}{x+1}\leq 0,\\ x+2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(2x-3)x^2}{x+1}\geq 0,\\ x\geq -2\end{cases}$$



$x\in[-2;\,-1)\cup\{0\}\cup[1{,}5;\,+\infty)$.

Ответ: $[-2;\,-1)\cup\{0\}\cup[1{,}5;\,+\infty)$.

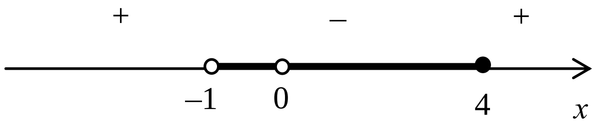
Пример 11. Решите неравенство $\dfrac{(\log_3 5)^x-(\log_3 5)^4}{(\log_3 5)^{x+2}-x\log_{3^x}5}\leq 0$ (1)

Решение.

1) Пусть $a=\log_3 5$, $a\in(1;\,2)$.

$$2)\ \begin{cases}x\log_{3^x}5=\log_3 5=a,\\ 3^x\neq 1\ (x\neq 0)\end{cases}$$

3) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^x - a^4}{a^{x+2} - a} \le 0, \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(a-1)(x-4)}{(a-1)(x+2-1)} \le 0, \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{x+1} \le 0, \\ x \ne 0 \end{cases}$



$x \in (-1;\, 0) \cup (0;\, 4].$

Ответ: $(-1;\, 0) \cup (0;\, 4].$

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{(x^2 - 6x - 7)\left(5^{|x-1|} - 25\right)}{4^{\sqrt{2x^2+9x+20}} - 30 \cdot 2^{\sqrt{2x^2+9x+20}} - 64} \ge 0$ (1)

Решение.

I. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \ge 0,$ (2)

где $f_1(x) = x^2 - 6x - 7,\ f_2(x) = 5^{|x-1|} - 25,\ f_3(x) = 4^{\sqrt{2x^2+9x+20}} - 30 \cdot 2^{\sqrt{2x^2+9x+20}} - 64$.

II. Заменим функции $f_i(x),\ i = 1,\ 2,\ 3$ на функции равного знака.

1) $f_1(x) \vee 0 \Leftrightarrow (x-7)(x+1) \vee 0$.

2) $f_2(x) \vee 0 \Leftrightarrow 5^{|x-1|} - 5^2 \vee 0 \Leftrightarrow (5-1)(|x-1| - 2) \vee 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 \vee 0 \Leftrightarrow$

$(x-1-2)(x-1+2) \vee 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) \vee 0.$

3) $f_3(x) \vee 0$.

Пусть $t = 2^{\sqrt{2x^2+9x+20}}$, так как $2x^2 + 9x + 20 > 0\ \forall x \in R\ (a = 2 > 0,\ D < 0) \Rightarrow$

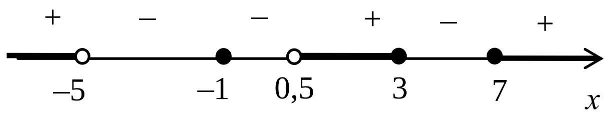
$\sqrt{2x^2 + 9x + 20} > 0 \Rightarrow t > 1.$

$f_3(x) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 30t - 64 \vee 0, \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-32)(t+2) \vee 0, \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 32 \vee 0, \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2^{\sqrt{2x^2+9x+20}} - 2^5 \vee 0, \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow (2-1)\left(\sqrt{2x^2 + 9x + 20} - 5\right) \vee 0 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 9x + 20 - 25 \vee 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 9x - 5 \vee 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+5) \vee 0.$

III. $(2) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{(x-7)(x+1)^2(x-3)}{(2x-1)(x+5)} \geq 0$.



$x \in (-\infty;\,-5) \cup \{-1\} \cup (0{,}5;\,3] \cup [7;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-5) \cup \{-1\} \cup (0{,}5;\,3] \cup [7;\,+\infty)$.

Пример 13. Решите неравенство $\dfrac{\left(5^{\sqrt{3|x|+3}} - 5^{\sqrt{x^2-25}}\right)\left(\sqrt[3]{x^2-4x-50}-3\right)}{\left(2^{x^2}-16\right)\left(3^{x-6}-1\right)} \leq 0$ (1)

Решение.

I. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{f_3(x)\cdot f_4(x)} \leq 0$, (2)

где $f_1(x) = 5^{\sqrt{3|x|+3}} - 5^{\sqrt{x^2-25}}$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x^2-4x-50} - 3$,

$f_3(x) = 2^{x^2} - 16$, $f_4(x) = 3^{x-6} - 1$.

II. Применим МЗМ. Заменим функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$ на функции равного знака.

1) $f_1(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; (5-1)\left(\sqrt{3|x|+3} - \sqrt{x^2-25}\right) \vee 0 \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (3|x|+3) - (x^2-25) \vee 0, \\ x^2 - 25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(|x|^2 - 3|x| - 28\right) \vee 0, \\ x^2 - 25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

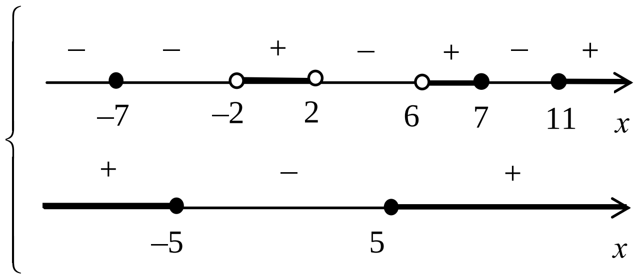
$$\begin{cases} -(|x|-7)(|x|+4) \vee 0, \\ (x-5)(x+5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-7)(x+7) \vee 0, \\ (x-5)(x+5) \geq 0. \end{cases}$$

2) $f_2(x) \vee 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 50 - 3^3 \vee 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 77 \vee 0 \Leftrightarrow (x-11)(x+7) \vee 0$.

3) $f_3(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; 2^{x^2} - 2^4 \vee 0 \;\Leftrightarrow\; (2-1)(x^2-4) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(x+2) \vee 0$.

4) $f_4(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; 3^{x-6} - 3^0 \vee 0 \;\Leftrightarrow\; (3-1)(x-6-0) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; x - 6 \vee 0$.

III. $(2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{-(x-7)(x+7)^2(x-11)}{(x-2)(x+2)(x-6)} \leq 0, \\ (x-5)(x+5) \geq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{(x-7)(x+7)^2(x-11)}{(x-2)(x+2)(x-6)} \geq 0, \\ (x-5)(x+5) \geq 0 \end{cases}$



$x \in \{-7\} \cup (6;\ 7] \cup [11;\ +\infty)$.

Ответ: $\{-7\} \cup (6;\ 7] \cup [11;\ +\infty)$.

Пример 14. Решите неравенство

$$\frac{\left(6^{|x+7|} - 6^{\left|x^2-3x+2\right|}\right)\left(\sqrt{3x^2 - 10x + 7} - 2\right)}{4^{x\log_4 3} \cdot 3^{2x^2-5x} - 1} \geq 0 \qquad (1)$$

Решение.

I. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \geq 0$, $\qquad (2)$

где $f_1(x) = 6^{|x+7|} - 6^{\left|x^2-3x+2\right|}$, $f_2(x) = \sqrt{3x^2 - 10x + 7} - 2$, $f_3(x) = 4^{x\log_4 3} \cdot 3^{2x^2-5x} - 1$.

II. Применим МЗМ. Заменим функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ на функции равного знака.

1) $f_1(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; (6-1)\left(|x+7| - \left|x^2 - 3x + 2\right|\right) \vee 0 \;\Leftrightarrow$

$(x+7)^2 - \left(x^2 - 3x + 2\right)^2 \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x + 7 - x^2 + 3x - 2\right)\left(x + 7 + x^2 - 3x + 2\right) \vee 0 \;\Leftrightarrow$

$-\left(x^2 - 4x - 5\right)\left(x^2 - 2x + 9\right) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; -\left(x^2 - 4x - 5\right) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; -(x-5)(x+1) \vee 0$,

$x^2 - 2x + 9 > 0 \;\; \forall x \in R$, так как $a = 1 > 0,\ D < 0$.

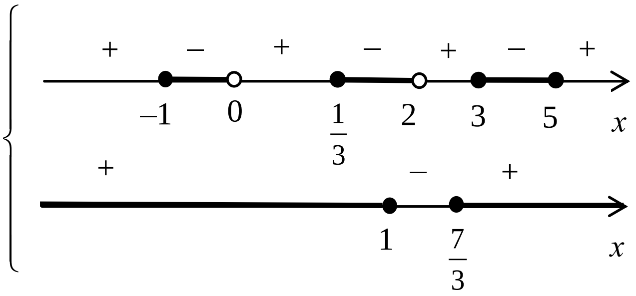
2) $f_2(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 3x^2 - 10x + 7 - 4 \vee 0, \\ 3x^2 - 10x + 7 \geq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 \vee 0, \\ 3x^2 - 10x + 7 \geq 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases} (3x-1)(x-3) \vee 0, \\ (3x-7)(x-1) \geq 0. \end{cases}$

3) $f_3(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \left(4^{\log_4 3}\right)^x \cdot 3^{2x^2-5x} - 1 \vee 0 \;\Leftrightarrow\; 3^x \cdot 3^{2x^2-5x} - 1 \vee 0 \;\Leftrightarrow$

$3^{2x^2-4x} - 3^0 \vee 0 \;\Leftrightarrow\; (3-1)\left(2x^2 - 4x - 0\right) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-2) \vee 0$.

III. $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-(x-5)(x+1)(3x-1)(x-3)}{x(x-2)} \geq 0, \\ (3x-7)(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-5)(x+1)(3x-1)(x-3)}{x(x-2)} \leq 0, \\ (3x-7)(x-1) \geq 0. \end{cases}$



$x \in [-1;\, 0) \cup \left[\dfrac{1}{3};\, 1\right] \cup [3;\, 5].$

Ответ: $[-1;\, 0) \cup \left[\dfrac{1}{3};\, 1\right] \cup [3;\, 5].$

Пример 15. Решите неравенство

$$\frac{\left(4^{\sqrt{2x^2-x}} + 2^{\sqrt{2x^2-x}+1} - 8\right)\left(8^{\log_2(x+1)} - x^3 - 10x + 3\right)}{\left(|7x+1| - |2x-4|\right)\left(0{,}9^{3x^2-x-1} - 0{,}9^{2x^2+3x+4}\right)} \geq 0 \qquad (1)$$

Решение.

I. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x) \cdot f_4(x)} \geq 0,$ (2)

где $f_1(x) = 4^{\sqrt{2x^2-x}} + 2^{\sqrt{2x^2-x}+1} - 8,\; f_2(x) = 8^{\log_2(x+1)} - x^3 - 10x + 3,$

$f_3(x) = |7x+1| - |2x-4|,\; f_4(x) = 0{,}9^{3x^2-x-1} - 0{,}9^{2x^2+3x+4}.$

II. Применим МЗМ. Заменим функции $f_i(x),\, i = 1, 2, 3, 4$ на функции равного знака.

1) $f_1(x) \vee 0$.

Пусть $t = 2^{\sqrt{2x^2-x}}$, так как $\sqrt{2x^2-x} \geq 0 \;\Rightarrow\; t \geq 1.$

$f_1(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t^2 + 2t - 8 \vee 0, \\ t \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+4)(t-2) \vee 0, \\ t \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2 \vee 0, \\ t - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2^{\sqrt{2x^2-x}} - 2 \vee 0, \\ 2^{\sqrt{2x^2-x}} - 2^0 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-1)\left(\sqrt{2x^2-x} - 1\right) \vee 0, \\ (2-1)\left(\sqrt{2x^2-x} - 0\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 \vee 0, \\ 2x^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(2x+1)(x-1)\vee 0,\\ x(2x-1)\geq 0.\end{cases}$$

2) $f_2(x)\vee 0 \iff \begin{cases}(x+1)^3-x^3-10x+3\vee 0,\\ x+1>0\end{cases} \iff$

$$\begin{cases}x^3+3x^2+3x+1-x^3-10x+3\vee 0,\\ x+1>0\end{cases} \iff \begin{cases}3x^2-7x+4\vee 0,\\ x>-1\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}(3x-4)(x-1)\vee 0,\\ x>-1.\end{cases}$$

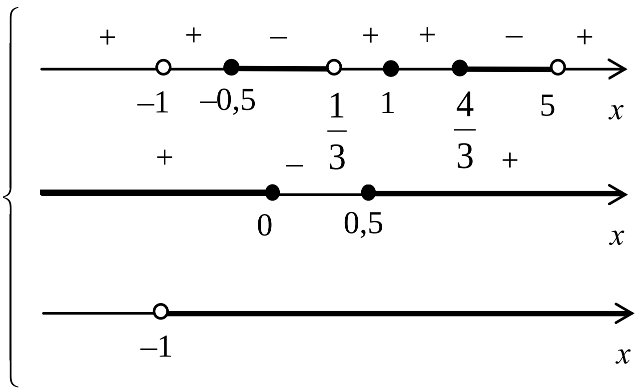
3) $f_3(x)\vee 0 \iff (7x+1)^2-(2x-4)^2\vee 0 \iff$

$(7x+1-2x+4)(7x+1+2x-4)\vee 0 \iff (5x+5)(9x-3)\vee 0 \quad (x+1)(3x-1)\vee 0$.

4) $f_4(x)\vee 0 \iff (0{,}9-1)\left((3x^2-x-1)-(2x^2+3x+4)\right)\vee 0 \iff$

$-(x^2-4x-5)\vee 0 \iff -(x-5)(x+1)\vee 0$.

III. $(2) \iff \begin{cases}\dfrac{(2x+1)(x-1)^2(3x-4)}{-(x+1)^2(3x-1)(x-5)}\geq 0,\\ x(2x-1)\geq 0,\ x>-1\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{(2x+1)(x-1)^2(3x-4)}{(x+1)^2(3x-1)(x-5)}\leq 0,\\ x(2x-1)\geq 0,\ x>-1\end{cases}$



$x\in[-0{,}5;\ 0]\cup\{1\}\cup\left[\dfrac{4}{3};\ 5\right)$.

Ответ: $[-0{,}5;\ 0]\cup\{1\}\cup\left[\dfrac{4}{3};\ 5\right)$.

4.3. Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}\le \frac{1}{64}$.

2. $(0{,}4)^{2x^2-3x+6}<(0{,}4)^5$.

3. $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{x^2-x-10}\ge\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2\right)^x$.

4. $\sqrt[6]{3^{x^2+4x-14}}\le\left(\sqrt{31+12\sqrt{3}}-2\right)^x$.

5. $\sqrt{2^{x^2+2x-10}}\ge\left(\sqrt{33+\sqrt{128}}-1\right)^x$.

6. $3^{x+1}-25\le\log_5 125-3^{2-x}$.

7. $2^{x+1}-13\ge\log_3 81-2^{3-x}$.

8. $\frac{4^{|x-3|}+4}{5}<2^{|x-3|}$.

9. $\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{3^x-9}\le 0$.

10. $2^{x+3}-x^3\cdot 2^x\le 16-2x^3$.

11. $3^{x^2+2x}-9^{x+2}-3^{x^2}\cdot 2^x+81\cdot 2^x\ge 0$.

12. $4\cdot 7^{2x+4}-3^{2x+6}-2\cdot 7^{2x+3}+3^{2x+3}\le 0$.

13. $\frac{5\cdot 3^{\sqrt{x}}+3}{9-3^{\sqrt{x}}}<3^{\sqrt{x}}$.

14. $\frac{3\left|2^x-5\right|-27-2^x-2^{3-x}}{\left|2^x-5\right|-11}\ge 3$.

15. $\frac{13-3^x-3^{2-x}-\left|2-3^x\right|}{7-\left|2-3^x\right|}\ge 1$.

16. $\frac{21-2^x-2^{6-x}-\left|3-2^x\right|}{5-\left|3-2^x\right|}\ge 1$.

17. $\frac{23-3^x-3^{4-x}-\left|4-3^x\right|}{5-\left|4-3^x\right|}\ge 1$.

18. $\frac{4^{2x+1}-12-13\cdot 36^x+15\cdot 9^{2x}}{81^x-2}\ge 6$.

19. $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x\ge 6$.

20. $\left(\sqrt{2}+1\right)^x+1<2\left(\sqrt{2}-1\right)^x$.

21. $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x\le 14$.

22. $\frac{3^{(x+2)^2}-3^{4x+4}-3^{x^2-3}+\frac{1}{27}}{\sqrt{4^{x+1}+17}-2^x-5}\ge 0$.

23. $\frac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\log_{2^x} 3}\ge 0$.

24. $\frac{\left(x^2-x-12\right)\left(25^{\sqrt{x^2-3x}}-23\cdot 5^{\sqrt{x^2-3x}}-50\right)}{2^{|7x-1|}-2^{|2x+4|}}\le 0$.

25. $\frac{\left(4^{x^2+3x-2}-0{,}5^{2x^2+2x-1}\right)\left(2x^2+x-10\right)}{\left(0{,}7^{5x+9}-0{,}7^{3x-1}\right)\left(3^{\sqrt{x^2-x+4}}-81\right)}\le 0$.

26. $\dfrac{\left(2^{\sqrt{14+|x|}}-2^{\sqrt{x^2-16}}\right)\left(\sqrt[3]{x^2+4x-52}-2\right)}{\left(3^{x^2-2}-9\right)\left(7^{x-10}-7\right)}\le 0$.

27. $\dfrac{\left(3^{\left|x^2+5x+13\right|}-3^{|x-5|}\right)\left(\sqrt{2x^2+5x+11}-3\right)}{6^{x\log_6 5}\cdot 5^{7x+3x^2}-1}\le 0$.

28. $\dfrac{\left(9^{\sqrt{5x^2-8x}}-7\cdot 3^{\sqrt{5x^2-8x}}-18\right)\left(4^{\log_2(x+3)}+x^2-5x-19\right)}{\left(|5x-9|-|3x+5|\right)\left(0{,}4^{3x^2-2x-11}-0{,}4^{x^2+x+9}\right)}\ge 0$.

Ответы:

1. $(-\infty;\,-2]\cup[4;\,+\infty)$.

2. $(-\infty;\,0{,}5)\cup(1;\,+\infty)$.

3.. $(-\infty;\,-2]\cup[5;\,+\infty)$.

4. $[-2;\,7]$.

5. $(-\infty;\,-2]\cup[5;\,+\infty)$.

6. $[-1;\,2]$.

7. $(-\infty;\,-1]\cup[3;\,+\infty)$.

8. $(1;\,3)\cup(3;\,5)$.

9. $(-\infty;\,-2{,}5]\cup[0{,}5;\,2)$.

10. $(-\infty;\,1]\cup[2;\,+\infty)$.

11. $[-2;\,0]\cup[2;\,+\infty)$.

12. $(-\infty;\,-1{,}5]$.

13. $(0;\,1)\cup(4;\,+\infty)$.

14. $(-\infty;\,1]\cup[2;\,4)$.

15. $\{1\}\cup(2;\,+\infty)$.

16. $(3;\,+\infty)$.

17. $(2;\,+\infty)$.

18. $[-1;\,0]\cup\left(\log_9\sqrt{2};\,+\infty\right)$.

19. $(-\infty;\,-2]\cup[2;\,+\infty)$.

20. $(-\infty;\,0)$.

21. $[-2;\,2]$.

22. $(-\infty;\,-1{,}75]\cup\{0\}\cup(2;\,+\infty)$.

23. $(-1;\,0)\cup(0;\,2]$.

24. $[-3;\,-1]\cup\left(-\dfrac{1}{3};\,0\right]\cup\{4\}$.

25. $(-5;\,-3)\cup\{-2{,}5\}\cup[0{,}5;\,2]\cup(4;\,+\infty)$.

26. $[-10;\,-6]\cup\{6\}\cup(11;\,+\infty)$.

27. $\left[-4;\,-\dfrac{8}{3}\right)\cup\{-2\}\cup[-0{,}5;\,0)$.

28. $[-0{,}4;\,0]\cup\{2\}\cup(4;\,7)$.

5. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Решение логарифмических неравенств основано на *монотонности* логарифмической функции $y = \log_a x$, которая при $a>1$ монотонно возрастает, при $a \in (0;1)$ монотонно убывает $\left(a = const, a > 0, a \neq 1\right)$.

5.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $\log_a f(x) \vee \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \vee g(x) \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \wedge g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a > 1, \\ f(x) - g(x) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a \in (0;1), \\ -\left(f(x) - g(x)\right) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Вывод: $\log_a f(x) - \log_a g(x) \vee 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a-1)\left(f(x) - g(x)\right) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - g(x)}{a-1} \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Частные случаи

1. $\log_a f(x) - b \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a f(x) - \log_a a^b \vee 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a-1)\left(f(x) - a^b\right) \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0, \quad a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - a^b}{a-1} \vee 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

2. $\log_a f(x) + \log_a g(x) \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_a\left(f(x) \cdot g(x)\right) - \log_a 1 \vee 0 \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(a-1)(f(x)\cdot g(x)-1)\vee 0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ a>0, a\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{f(x)\cdot g(x)-1}{a-1}\vee 0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ a>0.\end{cases}$$

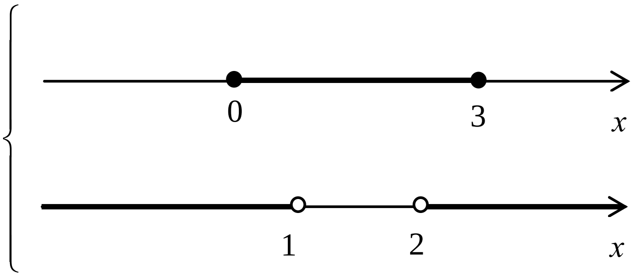
5.2. Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство $\log_{0,5}(x^2-3x+2)+1\geq 0$ (1)

Решение.

$(1) \Leftrightarrow -\log_2(x^2-3x+2)+\log_2 2\geq 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2-3x+2)-\log_2 2\leq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(2-1)(x^2-3x+2-2)\leq 0,\\ x^2-3x+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-3)\leq 0,\\ (x-2)(x-1)>0\end{cases}$$



$x\in[0;1)\cup(2;3]$.

Ответ: $[0;1)\cup(2;3]$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_{1-\sqrt{5}+\sqrt{11-2\sqrt{10}}}(5x-x^2-3)\geq 0$ (1)

Решение. Применим МЗМ.

Пусть $a=1-\sqrt{5}+\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

$(1) \Leftrightarrow \log_a(5x-x^2-3)-\log_a 1\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)(5x-x^2-3-1)\geq 0,\\ 5x-x^2-3>0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(a-1)(5x-x^2-4)\geq 0, & (2)\\ x^2-5x+3<0 & (3)\end{cases}$$

1) $a-1=\sqrt{11-2\sqrt{10}}-\sqrt{5}$.

Сравним $a-1\vee 0$.

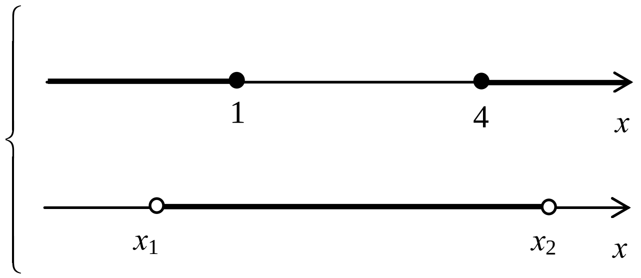
$a-1\vee 0 \Leftrightarrow \sqrt{11-2\sqrt{10}}\vee\sqrt{5} \Leftrightarrow 11-2\sqrt{10}\vee 5 \Leftrightarrow 6\vee 2\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$3 \vee \sqrt{10} \quad \Leftrightarrow \quad 9<10 \quad \Rightarrow \quad a-1<0$.

$$2)\ \begin{cases}(2)\\(3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5x+4\ge 0,\\x^2-5x+3<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)(x-1)\ge 0,\\(x-x_1)(x-x_2)<0,\end{cases}$$

где $x_1=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$; $x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$; $3=\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}=4$; $-4<-\sqrt{13}<-3 \ \Rightarrow$

$0{,}5<x_1<1$; $4<x_2<4{,}5$.



$x\in(x_1;\,1]\cup[4;\,x_2)$.

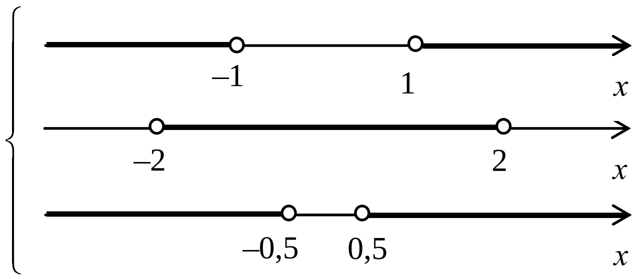
Ответ: $\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2};1\right]\cup\left[4;\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Пример 3. Решите неравенство $\log_{0,5}(4-x^2)>\log_{0,5}(6|x|-3)$ (1)

Решение. $(1) \ \Leftrightarrow \ \log_{0,5}(4-x^2)-\log_{0,5}(6|x|-3)>0 \ \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(0{,}5-1)\left((4-x^2)-(6|x|-3)\right)>0,\\4-x^2>0,\\6|x|-3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|^2+6|x|-7>0,\\x^2-4<0,\\2|x|-1>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(|x|+7)(|x|-1)>0,\\(x-2)(x+2)<0,\\(2|x|)^2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|-1>0,\\x\in(-2;\,2),\\(2x-1)(2x+1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x+1)>0,\\x\in(-2;\,2),\\(2x-1)(2x+1)>0\end{cases}$$



$x\in(-2;\,-1)\cup(1;\,2)$.

Ответ: $(-2;\,-1)\cup(1;\,2)$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\log_3\left(\log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right) < \log_{\frac{1}{27}}\left(\log_{\frac{1}{25}}\left(\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x+1}\right)\right) \qquad (1)$$

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду.

$$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(\log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right) < -\frac{1}{3}\log_3\left(-\frac{1}{2}\log_5\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\log_3\left(\log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right) + \frac{1}{3}\log_3\left(\log_5\left|\frac{x+1}{x-3}\right|\right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3\left(\log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right) + \frac{1}{3}\log_3\left(\log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right) < 0, \\ \frac{x+1}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}\log_3\left(\log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right) < 0, \\ \frac{x+1}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3\left(\log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right) - \log_3 1 < 0, \\ \frac{x+1}{x-3} > 0 \end{cases}$$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} (3-1)\left(\log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right) - 1\right) < 0, \\ \log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right) > 0, \\ \frac{x+1}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right) - \log_5 5 < 0, \\ \log_5\left(\frac{x+1}{x-3}\right) - \log_5 1 > 0, \\ \frac{x+1}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (5-1)\left(\frac{x+1}{x-3} - 5\right) < 0, \\ (5-1)\left(\frac{x+1}{x-3} - 1\right) > 0, \\ \frac{x+1}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-3} - 5 < 0, \\ \frac{x+1}{x-3} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1-5x+15}{x-3} < 0, \\ \frac{x+1-x+3}{x-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{-4x+16}{x-3}<0, \\ \dfrac{4}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{x-3}>0, \\ x-3>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4>0, \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>4 \Leftrightarrow x\in(4;+\infty).$$

Ответ: $(4;+\infty)$.

Пример 5. Решите неравенство

$$1+\log_3\left(x^2+7x+10\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+5}{9}\right)\geq\log_3\left(3x^2+16x+20\right) \qquad (1)$$

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \log_3\left(3x^2+16x+20\right)-1-\log_3\left(x^2+7x+10\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+5}{9}\right)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\log_3(3x+10)(x+2)-\log_3 3-\log_3(x+5)(x+2)+\log_3\left(\frac{x+5}{9}\right)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_3\dfrac{(3x+10)(x+2)(x+5)}{27(x+5)(x+2)}\leq 0, \\ (3x+10)(x+2)>0, \\ (x+5)(x+2)>0, \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{3x+10}{27}\leq 0, \\ x+5>0, \\ x+2>0, \\ 3x+10>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (3-1)\left(\dfrac{3x+10}{27}-1\right)\leq 0, \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq\dfrac{17}{3}, \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-2;\,\frac{17}{3}\right].$$

Ответ: $\left(-2;\,\frac{17}{3}\right]$.

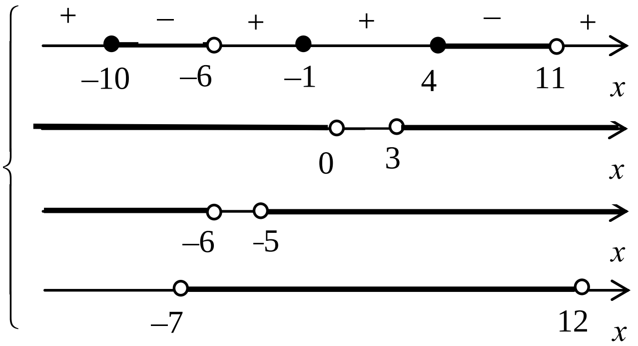
Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{\left(\log_2\left(x^2-3x\right)-2\right)\left(\log_5\left(x^2+11x+30\right)-\log_5 4-1\right)}{\log_3(x+7)\cdot\log_{0,7}(12-x)}\leq 0 \qquad (1)$$

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left(\log_2\left(x^2-3x\right)-\log_2 4\right)\left(\log_5\left(x^2+11x+30\right)-\log_5 20\right)}{\left(\log_3(x+7)-\log_3 1\right)\left(\log_{0,7}(12-x)-\log_{0,7} 1\right)}\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2-1)(x^2-3x-4)(5-1)(x^2+11x+30-20)}{(3-1)(x+7-1)(0{,}7-1)(12-x-1)} \le 0, \\ x^2-3x>0, \\ x^2+11x+30>0, \\ x+7>0,\ 12-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-4)\,(x+1)^2(x+10)}{(x+6)(x-11)} \le 0, \\ x(x-3)>0, \\ (x+5)(x+6)>0, \\ x\in(-7;\,12). \end{cases}$$



$$x\in(-7;\,-6)\cup\{-1\}\cup[4;\,11).$$

Ответ: $(-7;-6)\cup\{-1\}\cup[4;11)$.

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(4^{2x+1}-7\cdot 2^{2x+1}+10\right)}{x+1{,}5}\le 2$ (1)

Решение.

I. Приведем неравенство (1) к каноническому виду.

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \frac{\log_2\left(4^{2x+1}-7\cdot 2^{2x+1}+10\right)-(2x+3)}{x+1{,}5}\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log_2\left(4^{2x+1}-7\cdot 2^{2x+1}+10\right)-\log_2 2^{2x+3}}{x+1{,}5}\le 0\ \Leftrightarrow\ \frac{f(x)}{x+1{,}5}\le 0, \qquad (2)$$

где $f(x)=\log_2\left(4^{2x+1}-7\cdot 2^{2x+1}+10\right)-\log_2 2^{2x+3}$.

II. Заменим функцию $f(x)$ на функцию равного знака.

1) $t=2^{2x+1}$, $t>0$.

2) $f(x)\vee 0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \log_2\left(t^2-7t+10\right)-\log_2 4t\vee 0, \\ t>0 \end{cases}\ \Leftrightarrow$

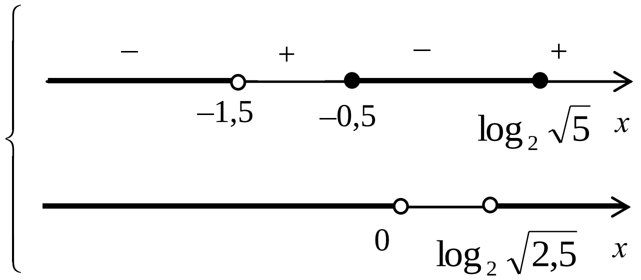
$$\begin{cases} (2-1)\left(t^2-7t+10-4t\right)\vee 0, \\ t^2-7t+10>0, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-11t+10\vee 0, \\ t^2-7t+10>0, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-10)(t-1)\vee 0, \\ (t-2)(t-5)>0, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(2^{2x+1}-2^{\log_2 10}\right)\left(2^{2x+1}-2^0\right)\vee 0, \\ \left(2^{2x+1}-2\right)\left(2^{2x+1}-2^{\log_2 5}\right)>0, \\ 2^{2x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2-1)(2x+1-\log_2 10)(2-1)(2x+1-0)\vee 0, \\ (2-1)(2x+1-1)(2-1)(2x+1-\log_2 5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-\log_2 5)(2x+1)\vee 0, \\ 2x(2x-\log_2 2{,}5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x-\log_2\sqrt{5}\right)(x+0{,}5)\vee 0, \\ x\left(x-\log_2\sqrt{2{,}5}\right)>0 \end{cases}$$

III. $(2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{\left(x-\log_2\sqrt{5}\right)(x+0{,}5)}{x+1{,}5}\le 0, \\ x\left(x-\log_2\sqrt{2{,}5}\right)>0 \end{cases}$



$x\in(-\infty;\,-1{,}5)\cup[-0{,}5;\,0)\cup\left(\log_2\sqrt{2{,}5};\,\log_2\sqrt{5}\right].$

Ответ: $(-\infty;\,-1{,}5)\cup[-0{,}5;\,0)\cup\left(\log_2\sqrt{2{,}5};\,\log_2\sqrt{5}\right].$

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{14^x}{7\left(\log_7(x-3)^2\right)^4\cdot\log_6(x+2)}\le\frac{\left(4\cdot 2^x\right)^x}{4\left(\log_7(x-3)^2\right)^4\cdot\log_6(x+2)} \qquad (1)$$

Решение.

I. Упростим неравенство (1) и приведем его к каноническому виду.

1) $\dfrac{14^x}{7}=\dfrac{2^x\cdot 7^x}{7}=2^x\cdot 7^{x-1}=2^x\cdot\left(2^{\log_2 7}\right)^{x-1}=2^x\cdot 2^{(x-1)\log_2 7}.$

2) $\dfrac{\left(4\cdot 2^x\right)^x}{4}=\dfrac{2^{2x}\cdot 2^{x^2}}{2^2}=2^x\cdot 2^{x^2+x-2}.$

3) Разделим неравенство (1) на 2^x, $\mathrm{E}\left(2^x\right)=(0;\,+\infty)$.

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \frac{2^{(x-1)\log_2 7}-2^{x^2+x-2}}{\left(\log_7(x-3)^2\right)^4\cdot\log_6(x+2)}\le 0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{2^{(x-1)\log_2 7}-2^{x^2+x-2}}{\log_6(x+2)}\le 0,\\ \left(\log_7(x-3)^2\right)^4\ne 0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

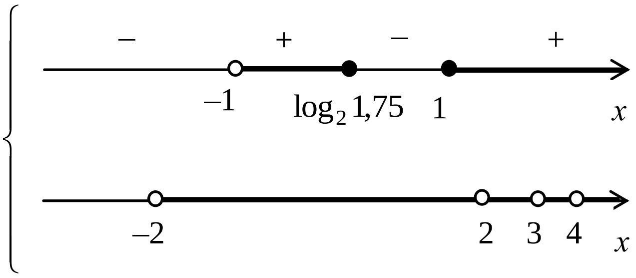
$$\begin{cases}\dfrac{2^{(x-1)\log_2 7}-2^{(x+2)(x-1)}}{\log_6(x+2)-\log_6 1}\le 0,\\ (x-3)^2>0,\ (x-3)^2\ne 1.\end{cases}$$

II. Применим МЗМ.

$$\begin{cases}\dfrac{(2-1)\left((x-1)\log_2 7-(x+2)(x-1)\right)}{(6-1)(x+2-1)}\le 0,\\ x+2>0,\ \ x\ne 2,\ \ x\ne 3,\ x\ne 4\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{(x-1)\left(x-(\log_2 7-2)\right)}{x+1}\ge 0,\\ x>-2,\ x\ne 2,\ x\ne 3,\ x\ne 4\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-\log_2 1{,}75)}{x+1}\ge 0,\\ x>-2,\ x\ne 2,\ x\ne 3,\ x\ne 4.\end{cases}$$

Оценим $\log_2 1<\log_2 1{,}75<\log_2 2\ \ \Rightarrow\ \ 0<\log_2 1{,}75<1$.



$x\in(-1;\ \log_2 1{,}75]\cup[1;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$.

Ответ: $(-1;\ \log_2 1{,}75]\cup[1;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\log_4(x+5)^4\cdot\log_{16}(x+4)^2+\log_2\frac{(x+4)^3}{x+5}-3>0 \qquad (1)$$

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{4}{2}\log_2|x+5|\cdot\dfrac{2}{4}\log_2|x+4|+3\log_2|x+4|-\log_2|x+5|-3>0\ ,\\ \dfrac{(x+4)^3}{x+5}>0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2|x+5|\cdot\log_2|x+4|+3\log_2|x+4|-\log_2|x+5|-3>0, \\ x\in(-\infty;-5)\cup(-4;+\infty)=M \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2|x+5|\cdot(\log_2|x+4|-1)+3(\log_2|x+4|-1)>0, \\ x\in M \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\log_2|x+4|-1)(\log_2|x+5|+3)>0, \\ x\in M \end{cases} \Leftrightarrow$$

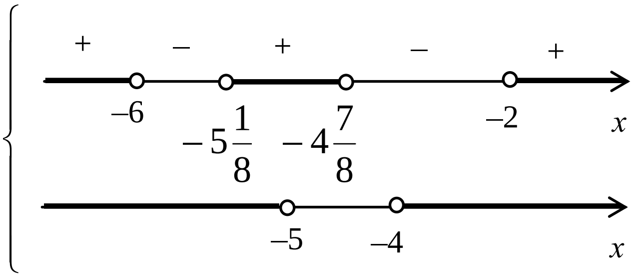
$$\begin{cases} (\log_2|x+4|-\log_2 2)(\log_2|x+5|-\log_2 2^{-3})>0, \\ x\in M \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2-1)(|x+4|-2)(2-1)\left(|x+5|-\dfrac{1}{8}\right)>0, \\ x\in M \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left((x+4)^2-2^2\right)\left((x+5)^2-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\right)>0, \\ x\in M \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+4-2)(x+4+2)\left(x+5-\dfrac{1}{8}\right)\left(x+5+\dfrac{1}{8}\right)>0, \\ x\in M \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+2)(x+6)\left(x+4\dfrac{7}{8}\right)\left(x+5\dfrac{1}{8}\right)>0, \\ x\in(-\infty;-5)\cup(-4;+\infty) \end{cases}$$



$$x\in(-\infty;-6)\cup\left(-5\frac{1}{8};-5\right)\cup(-2;+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;-6)\cup\left(-5\dfrac{1}{8};-5\right)\cup(-2;+\infty)$.

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{\log_3\left(x^2-2x-7\right)^8-\log_2\left(x^2-2x-7\right)^5}{3x^2-13x+4}\ge 0 \qquad (1)$$

Решение.

I. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0, \qquad (2)$

где $f(x)=\log_3\left(x^2-2x-7\right)^8-\log_2\left(x^2-2x-7\right)^5, \quad g(x)=3x^2-13x+4.$

Применим МЗМ. Заменим функции $f(x)$ и $g(x)$ на функции равного знака.

II. $f(x)\vee 0$.

1) Пусть $t=x^2-2x-7$.

2) $f(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\log_3 t^8-\log_2 t^5\vee 0,\\ t>0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}8\log_3|t|-5\log_2 t\vee 0,\\ t>0\end{cases} \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}8\log_3 t-5\log_2 t\vee 0,\\ t>0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\dfrac{8\log_2 t}{\log_2 3}-5\log_2 t\vee 0,\\ t>0\end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{8-5\log_2 3}{\log_2 3}\right)\cdot\log_2 t\vee 0, & (3)\\ t>0 & (4)\end{cases}$$

Оценим $(8-5\log_2 3)=\log_2 2^8-\log_2 3^5=\log_2\dfrac{256}{243}>\log_2 1=0;$

$\log_2 3>\log_2 2=1, \;\Rightarrow\; \dfrac{8-5\log_2 3}{\log_2 3}>0.$

$$\begin{cases}(3)\\(4)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 t\vee 0,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left(x^2-2x-7\right)-\log_2 1\vee 0,\\ x^2-2x-7>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

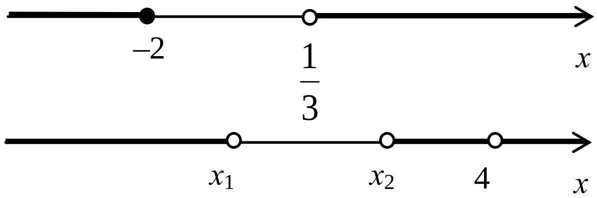
$$\begin{cases}(2-1)\left(x^2-2x-7-1\right)\vee 0,\\ (x-x_1)(x-x_2)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x-8\vee 0,\\ (x-x_1)(x-x_2)>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-4)(x+2)\vee 0,\\(x-x_1)(x-x_2)>0,\end{cases}$$

где $x_1=1-\sqrt{8}=1-2\sqrt{2};\ \ x_2=1+\sqrt{8}=1+2\sqrt{2}$.

III. $g(x)\vee 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; (3x-1)(x-4)\vee 0$.

IV. $(2) \;\;\Leftrightarrow\;\; \begin{cases}\dfrac{(x-4)(x+2)}{(3x-1)(x-4)}\geq 0,\\(x-x_1)(x-x_2)>0\end{cases} \;\;\Leftrightarrow\;\; \begin{cases}\dfrac{x+2}{3x-1}\geq 0,\\(x-x_1)(x-x_2)>0,\ x\neq 4.\end{cases}$



$x\in(-\infty;\,-2]\cup\left(1+2\sqrt{2};\ 4\right)\cup(4;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-2]\cup\left(1+2\sqrt{2};\,4\right)\cup(4;\,+\infty)$.

Пример 11. Решите неравенство

$$\log_{7-3x}5+\frac{1}{\log_2(7-3x)}\leq\frac{1}{\lg\left(4x^2-5x+1\right)} \qquad (1)$$

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

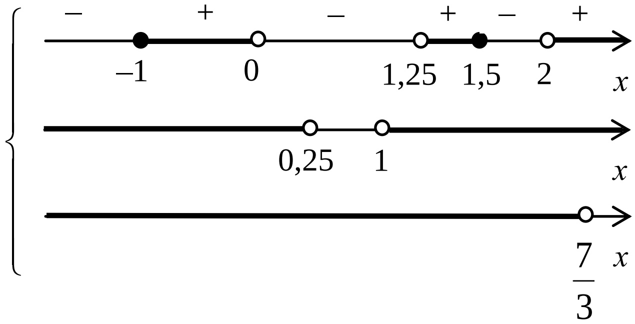
$$(1) \;\;\Leftrightarrow\;\; \log_{7-3x}5+\log_{7-3x}2\leq\frac{1}{\lg\left(4x^2-5x+1\right)} \;\;\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\lg(7-3x)}-\frac{1}{\lg\left(4x^2-5x+1\right)}\leq 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{\lg\left(4x^2-5x+1\right)-\lg(7-3x)}{\lg(7-3x)\cdot\lg\left(4x^2-5x+1\right)}\leq 0 \;\;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\lg\left(4x^2-5x+1\right)-\lg(7-3x)}{(\lg(7-3x)-\lg 1)\cdot\left(\lg\left(4x^2-5x+1\right)-\lg 1\right)}\leq 0 \;\;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(10-1)\left(4x^2-5x+1-7+3x\right)}{(10-1)(7-3x-1)(10-1)\left(4x^2-5x+1-1\right)}\leq 0,\\4x^2-5x+1>0,\ 7-3x>0\end{cases} \;\;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2-2x-6}{(6-3x)(4x^2-5x)} \le 0, \\ (x-1)(4x-1) > 0,\ x < \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(2x-3)}{(x-2)(4x-5)x} \ge 0, \\ (x-1)(4x-1) > 0,\ x < \dfrac{7}{3}. \end{cases}$$



$$x \in [-1;\ 0) \cup (1{,}25;\ 1{,}5] \cup \left(2;\ \frac{7}{3}\right).$$

Ответ: $[-1;\ 0) \cup (1{,}25;\ 1{,}5] \cup \left(2;\ \dfrac{7}{3}\right)$.

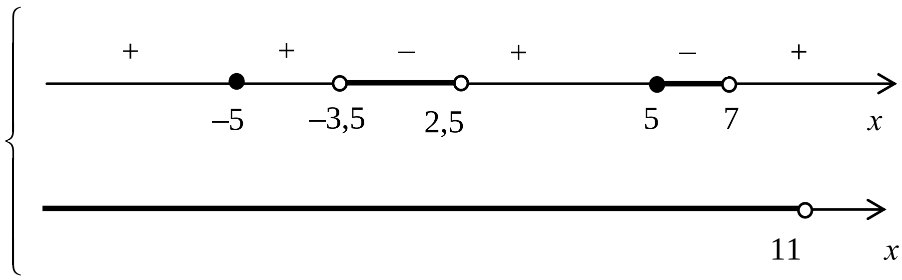
Пример 12. Решите неравенство

$$\frac{(x^2-25)(7^{3x+4}-7^{2x-1})}{(x-7)(\log_{0,3}(4x^2+9)-\log_{0,3}(44-4x))} \ge 0 \qquad (1)$$

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-5)(x+5)(7-1)(3x+4-2x+1)}{(x-7)(0{,}3-1)(4x^2+9-44+4x)} \ge 0, \\ 44-4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-5)(x+5)^2}{(x-7)(4x^2+4x-35)} \le 0, \\ x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-5)(x+5)^2}{(x-7)(2x+7)(2x-5)} \le 0, \\ x < 11 \end{cases}$$



$x \in \{-5\} \cup (-3{,}5;\ 2{,}5) \cup [5;7)$.

Ответ: $\{-5\} \cup (-3{,}5;\ 2{,}5) \cup [5;7)$.

Пример 13. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,7}\left(8+2x-x^2\right)-2\cdot\log_{0,7}(x+2)}{5^{\sqrt{x-2}}+8\sin\dfrac{7\pi}{6}-5^{1-\sqrt{x-2}}}\geq 0$ (1)

Решение.

I. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0,$ (2)

где $f(x)=\log_{0,7}(8+2x-x^2)-2\log_{0,7}(x+2)$, $g(x)=5^{\sqrt{x-2}}+8\sin\dfrac{7\pi}{6}-5^{1-\sqrt{x-2}}$

Применим МЗМ. Заменим функции $f(x)$ и $g(x)$ на функции равного знака.

II. $f(x)\vee 0\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{0,7}(8+2x-x^2)-\log_{0,7}(x+2)^2\vee 0\\ x+2>0\end{cases}, \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(0,7-1)(8+2x-x^2-(x+2)^2)\vee 0,\\ x>-2\ ,\\ 8+2x-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-(8+2x-x^2-x^2-4x-4)\vee 0,\\ x>-2\ ,\\ x^2-2x-8<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2\vee 0,\\ x>-2\ ,\\ (x-4)(x+2)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x+2)(x-1)\vee 0,\\ x>-2\ ,\\ x-4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\vee 0,\\ x\in(-2;4).\end{cases}$$

III. $g(x)\vee 0$

1) $\sin\dfrac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-0,5$.

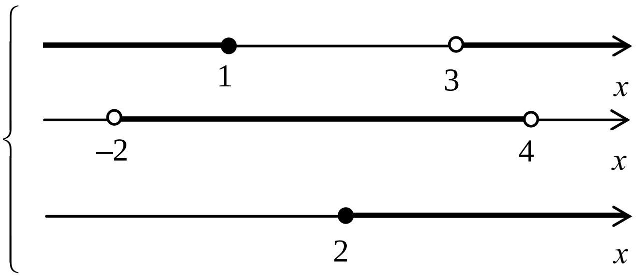
2) $t=5^{\sqrt{x-2}}$; так как $\sqrt{x-2}\geq 0$, то $t\geq 1$.

3) $g(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}t-4-\dfrac{5}{t}\vee 0,\\ t\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-4t-5\vee 0,\\ t\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(t-5)(t+1)\vee 0,\\ t\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t-5\vee 0,\\ t-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5^{\sqrt{x-2}}-5\vee 0,\\ 5^{\sqrt{x-2}}-5^0\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(5-1)(\sqrt{x-2}-1)\vee 0,\\ (5-1)(\sqrt{x-2}-0)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2-1\vee 0,\\ x-2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3\vee 0,\\ x\ge 2\end{cases}$$

IV. (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-1}{x-3}\ge 0,\\ x\in(-2;4),\ x\ge 2.\end{cases}$



$x\in(3;4)$.

Ответ: $(3;4)$.

Пример 14. Решите неравенство

$$\frac{\log_3\left(3x^2-4x+2\right)-\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)-1}}{\left(3\log_{27}27x\right)\cdot\log_3 x-2\left(\log_3 x+1\right)}<0 \qquad (1)$$

Решение.

I. $(1) \ \Leftrightarrow\ \dfrac{f(x)}{g(x)}<0,$ (2)

где $f(x)=\log_3\left(3x^2-4x+2\right)-\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)-1},$

$g(x)=\left(3\log_{27}27x\right)\cdot\log_3 x-2\left(\log_3 x+1\right).$

Применим МЗМ. Заменим функции $f(x)$ и $g(x)$ на функции равного знака.

II. $f(x)\vee 0$.

1) Пусть $z=3x^2-4x+2,\ \log_3\left(3x^2-4x+2\right)=2\log_9 z,\ z>0$.

2) $f(x)\vee 0 \ \Leftrightarrow\ 2\log_9 z-\sqrt{\log_9 z}-1\vee 0$ (3)

3) $t=\sqrt{\log_9 z},\ t\ge 0$.

4) $(3) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2t^2 - t - 1 \vee 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (2t+1)(t-1) \vee 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t - 1 \vee 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{\log_9 z} - 1 \vee 0, \\ \sqrt{\log_9 z} \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \log_9 z - 1 \vee 0, \\ \log_9 z \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \log_9 z - \log_9 9 \vee 0, \\ \log_9 z - \log_9 1 \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (9-1)(z-9) \vee 0, \\ (9-1)(z-1) \ge 0, \\ z > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} z - 9 \vee 0, \\ z - 1 \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 3x^2 - 4x - 7 \vee 0, \\ 3x^2 - 4x + 1 \ge 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (3x-7)(x+1) \vee 0, \\ (3x-1)(x-1) \ge 0. \end{cases}$$

III. $g(x) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \left(3\left(1 + \dfrac{1}{3}\log_3 x\right)\right) \cdot \log_3 x - 2\log_3 x - 2 \vee 0 \qquad (4)$

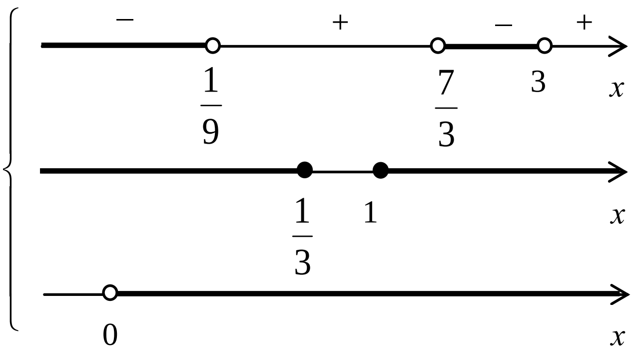
1) $u = \log_3 x, \; u \in R$.

2) $(4) \;\Leftrightarrow\; (3+u)u - 2u - 2 \vee 0 \;\Leftrightarrow\; u^2 + u - 2 \vee 0 \;\Leftrightarrow\; (u+2)(u-1) \vee 0 \;\Leftrightarrow$

$$\left(\log_3 x - \log_3 3^{-2}\right)\left(\log_3 x - \log_3 3\right) \vee 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (3-1)\left(x - 3^{-2}\right)(3-1)(x-3) \vee 0, \\ x > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{9}\right)(x-3) \vee 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

IV. $(2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{(3x-7)(x+1)}{\left(x - \dfrac{1}{9}\right)(x-3)} < 0, \\ (3x-1)(x-1) \ge 0, \; x > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{3x-7}{\left(x - \dfrac{1}{9}\right)(x-3)} < 0, \\ (3x-1)(x-1) \ge 0, \; x > 0. \end{cases}$



$x \in \left(0; \dfrac{1}{9}\right) \cup \left(\dfrac{7}{3}; 3\right)$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{9}\right) \cup \left(\dfrac{7}{3}; 3\right)$.

Пример 15. Решите неравенство

$$\frac{\log_4\left(x|x|\right)-\log_{16}(2-3x)^2}{\left(\sqrt{3x-2}-4\right)\cdot\left(0{,}4^{\log_3^2 x-2}-6{,}25^{2-\log_{3\sqrt[3]{3}}\sqrt{x}}\right)}\le 0 \qquad (1)$$

Решение.

I. (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)\cdot f_3(x)}\le 0, & (2)\\ x\in D(f_1)\cap D(f_2)\cap D(f_3), & (3)\end{cases}$

где $f_1(x)=\log_4\left(x|x|\right)-\log_{16}(2-3x)^2$, $f_2(x)=\sqrt{3x-2}-4$,

$f_3(x)=0{,}4^{\log_3^2 x-2}-6{,}25^{2-\log_{3\sqrt[3]{3}}\sqrt{x}}$.

1) $D(f_1)\cap D(f_2)\cap D(f_3)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x>0,\\(2-3x)^2>0,\\3x-2\ge 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x>\dfrac{2}{3}$.

2) $\begin{cases}(2)\\(3)\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)\cdot f_3(x)}\le 0, & (4)\\ x>\dfrac{2}{3} & (5)\end{cases}$

II. Применим МЗМ. Заменим функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ на функции равного знака.

1) $\begin{cases}f_1(x)\vee 0,\\ x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\log_4\left(x|x|\right)-\log_4|2-3x|\vee 0,\\ x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\log_4 x^2-\log_4(3x-2)\vee 0,\\ x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(4-1)\left(x^2-3x+2\right)\vee 0,\\ x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(x-2)(x-1)\vee 0,\\ x>\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

2) $\begin{cases}f_2(x)\vee 0,\\ x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\sqrt{3x-2}-4\vee 0,\\ x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}3x-2-16\vee 0,\\ x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3x-18 \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} f_3(x) \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_3^2 x-2}-\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2\left(2-\log_{\sqrt[3]{3}}\sqrt{x}\right)} \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

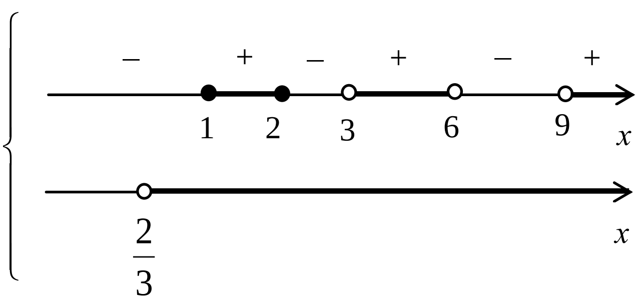
$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_3^2 x-2}-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{3\log_3 x-4} \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{5}-1\right)\left(\log_3^2 x-2-3\log_3 x+4\right) \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\left(\log_3^2 x-3\log_3 x+2\right) \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(\log_3 x-2\right)\left(\log_3 x-1\right) \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\left(\log_3 x-\log_3 9\right)\left(\log_3 x-\log_3 3\right) \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -(3-1)(x-9)(3-1)(x-3) \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-9)(x-3) \vee 0, \\ x>\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

III. $\begin{cases} (4) \\ (5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-1)}{-(x-6)(x-9)(x-3)} \le 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-6)(x-9)(x-3)} \ge 0, \\ x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$



$x \in [1;\ 2] \cup (3;6) \cup (9;\ +\infty)$.

Ответ: $[1;\ 2] \cup (3;6) \cup (9;\ +\infty)$.

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{\left(\log_{0,2}(6-x)+\log_{\sqrt{5}}\sqrt{x+3}+1\right)\left(\log_7(6+7^{-x})-1-x\right)}{\left|2x^2-2x+11\right|-\left|4x^2-2x-21\right|}\le 0 \qquad (1)$$

Решение.

I. $(1) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{f_3(x)}\le 0, \qquad (2)$

где $f_1(x)=\log_{0,2}(6-x)+\log_{\sqrt{5}}\sqrt{x+3}+1,\qquad f_2(x)=\log_7(6+7^{-x})-1-x,$

$f_3(x)=\left|2x^2-2x+11\right|-\left|4x^2-2x-21\right|.$

II. Применим МЗМ. Заменим функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ на функции равного знака.

1) $f_1(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; -\log_5(6-x)+\log_5(x+3)+\log_5 5\vee 0 \;\Leftrightarrow$

$\log_5(5x+15)-\log_5(6-x)\vee 0 \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(5-1)(5x+15-6+x)\vee 0,\\ x+3>0,\ 6-x>0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}2x+3\vee 0,\\ x\in(-3;\,6).\end{cases}$

2) $f_2(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \log_7(6+7^{-x})-(x+1)\vee 0 \;\Leftrightarrow$

$\log_7(6+7^{-x})-\log_7 7^{x+1}\vee 0 \;\Leftrightarrow$

$(7-1)(6+7^{-x}-7^{x+1})\vee 0 \;\Leftrightarrow\; -(7\cdot 7^x-7^{-x}-6)\vee 0$

Пусть $t=7^x$, $t>0$

$\begin{cases}-\left(7t-\dfrac{1}{t}-6\right)\vee 0,\\ t>0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}-\left(7t^2-6t-1\right)\vee 0,\\ t>0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}-(7t+1)(t-1)\vee 0,\\ t>0\end{cases} \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases}-(t-1)\vee 0,\\ t>0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}-\left(7^x-7^0\right)\vee 0,\\ 7^x>0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}-(7-1)(x-0)\vee 0,\\ x\in R\end{cases} \;\Leftrightarrow\; -x\vee 0.$

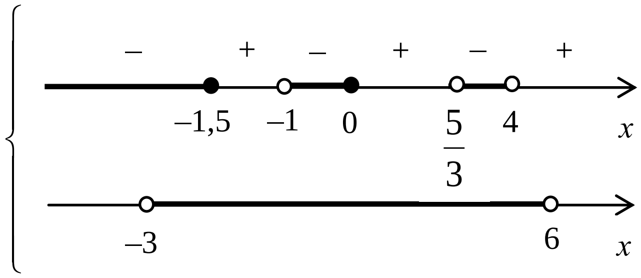
3) $f_3(x)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; \left(2x^2-2x+11\right)^2-(4x^2-2x-21)^2\vee 0 \;\Leftrightarrow$

$(2x^2-2x+11-4x^2+2x+21)(2x^2-2x+11+4x^2-2x-21)\vee 0 \;\Leftrightarrow$

$(-2x^2+32)(6x^2-4x-10)\vee 0 \;\Leftrightarrow\; -(x^2-16)(3x^2-2x-5)\vee 0 \;\Leftrightarrow$

$-(x-4)(x+4)(3x-5)(x+1)\vee 0.$

4) $(2)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \dfrac{(2x+3)(-x)}{-(x-4)(x+4)(3x-5)(x+1)} \le 0, \\ x\in(-3;\ 6) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(2x+3)x}{(x-4)(3x-5)(x+1)} \le 0, \\ x\in(-3;\ 6) \end{cases}$



$x\in(-3;-1{,}5]\cup(-1;0]\cup\left(\dfrac{5}{3};\ 4\right).$

Ответ: $(-3;-1{,}5]\cup(-1;0]\cup\left(\dfrac{5}{3};\ 4\right).$

5.3. Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x-8\right)+3>0$.

2. $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$.

3. $\log_2\dfrac{4-x}{2x+1}<2$.

4. $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x-x^2-2)\ge 0$.

5. $\log_4(x^2-5)<\log_4\left(\dfrac{7}{3}|x|-3\right)$.

6. $\log_{0,6}(3-x^2)>\log_{0,6}\left(4|x|-2\right)$.

7. $\log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right)<\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right)$.

8. $\log_4\left(\log_2\left(x^2+2x+8\right)\right)\le 1$.

9. $\log_5\left(\log_2(x^2-x+20)\right)\le 1$.

10. $\log_{0,8}\left(\log_6\left(\dfrac{x^2+x}{x+4}\right)\right)<0$.

11. $\log_{0,2}(2x^2+18x-29)+2\le\log_{0,2}(x-1)$.

12. $2+\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\dfrac{x}{4}\ge\log_2(x^2+3x-4)$.

13. $\dfrac{\left(\log_3(x^2+8x)-2\right)\left(\log_{0,5}(x^2+x-2)+2\right)}{\log_{0,2}(x+11)\cdot\log_6(5-x)}\ge 0$.

14. $\dfrac{\log_3\left(16+3^{2x+1}-16\cdot 3^x\right)}{x+1}\le 1$. **15.** $\dfrac{x\cdot\log_2\left(4^{x+1}-2^{x+1}+8\right)+3}{x+3}\le x+1$.

16. $\dfrac{10^x}{2\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\cdot\log_3(x+2)}\le\dfrac{(15\cdot 3^x)^x}{9\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\cdot\log_3(x+2)}$.

17. $\log_8(x-3)^2\cdot\log_{16}(x-7)^6+\log_2\dfrac{(x-3)^5}{x-7}-5>0$.

18. $\dfrac{\log_7(x^2-4x-4)^8-\log_2(x^2-4x-4)^3}{3+x-2x^2}\ge 0$.

19. $\dfrac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\ge 0$.

20. $\log_{4x+7}5+\dfrac{1}{\log_2(4x+7)}\le\dfrac{1}{\lg(10x^2-7x+1)}$.

21. $\log_{7x-4}3+\dfrac{1}{\log_2(7x-4)}\ge\dfrac{1}{\log_6(9x^2-2x-2)}$.

22. $\log_{2-5x}3+\dfrac{1}{\log_2(2-5x)}\le\dfrac{1}{\log_6(6x^2-6x+1)}$.

23. $\dfrac{\left(x^2-36\right)\left(\lg(2x^2+5)-\lg(5x+47)\right)}{(x-8)\left(0{,}3^{4x+3}-0{,}3^{2x+7}\right)}\le 0$.

24. $\dfrac{\left(x^2-16\right)\left(\log_5(2x^2+1)-\log_5(21-3x)\right)}{(x-11)\left(3^{x+1}-9\right)}\le 0$.

25. $\dfrac{\left(x^2-9\right)\left(\log_{0,8}(2x^2+3)-\log_{0,8}(3x+12)\right)}{(x-5)\left(2^x-1\right)}\le 0$.

26. $\dfrac{\log_{0,2}\left(x^2-6x+5\right)-2\log_{0,2}(x-4)}{9^{\sqrt{x^2-3}}+5\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}}+48\cos\dfrac{10\pi}{3}}\le 0$.

27. $\dfrac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\ge 0$.

28. $\dfrac{\sqrt{1-\log_5\left(x^2-2x+2\right)}-\log_5\left(5x^2-10x+10\right)}{(2\log_{49}x)\log_7 7x+\log_7 x-3}\le 0$.

29. $\dfrac{\log_9\left(3x|x|\right)-\log_{81}(1-4x)^2}{\left(\sqrt{4x-1}-5\right)\left(1{,}25^{1-\log_2^2 x}-0{,}64^{2+\log_{\sqrt{2}} x}\right)}\geq 0$.

30. $\dfrac{\left(\log_6\left(5+6^{-x}\right)-x-1\right)\left(1-\log_{1/3}(x+2)-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{12-x}\right)}{\left|x^2+4x-12\right|-\left|3x^2-18x+24\right|}\leq 0$.

31. $\dfrac{\left(\log_2\left(2^x-2\right)-3+x\right)\left(1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{0,5}(13-x)\right)}{\left|2x^2-10x+8\right|-\left|x^2+2x-3\right|}\geq 0$.

Ответы:

1. $(-7;-4)\cup(2;5)$. **2.** $(-1;1)\cup(3;5)$. **3.**. $(0;4)$.

4. $\left(2-\sqrt{2};1\right]\cup\left[3;2+\sqrt{2}\right)$. **5.** $\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)$. **6.** $\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$.

7. $(-\infty;-2)$. **8.** $[-4;2]$. **9.** $[-3;4]$.

10. $(-4;-3)\cup(8;+\infty)$. **11.** $[4;+\infty)$. **12.** $(1;17]$.

13. $(-10;-9]\cup[2;4)$. **14.** $(-\infty;-1)\cup\left[0;\log_3\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\log_3 4;\log_3\dfrac{16}{3}\right]$.

15. $(-3;-1]\cup[0;2]$. **16.** $[-\log_3 4{,}5;-1)\cup[1;+\infty)$.

17. $(-\infty;1)\cup\left(7\dfrac{1}{32};+\infty\right)$. **18.** $(-\infty;-1)\cup\left(-1;2-2\sqrt{2}\right)\cup[5;+\infty)$.

19. $(-\infty;-2)\cup\left(-2;2-\sqrt{15}\right)\cup[6;+\infty)$.

20. $(-1{,}75;-1{,}5)\cup[-0{,}4;0)\cup(0{,}7;1{,}5]$.

21. $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{1+2\sqrt{7}}{9}\right)\cup\left(\dfrac{5}{7};+\infty\right)$. **22.** $\left[-\dfrac{1}{3};0\right)\cup\left(0{,}2;\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

23. $(-9{,}4;-6]\cup[-3{,}5;2)\cup\{6\}\cup(8;+\infty)$. **24.** $\{-4\}\cup(1;2{,}5]\cup[4;7)$.

25. $(-4;-3]\cup[-1{,}5;0)\cup\{3\}\cup(5;+\infty)$. **26.** $[5{,}5;+\infty)$.

27. $(0{,}5;1)$. **28.** $\left(0;7^{-3}\right)\cup\{1\}$ **29.** $\left(0{,}25;\dfrac{1}{3}\right]\cup(0{,}5;1]\cup(6{,}5;32)$.

30. $[0;1{,}5)\cup(1{,}5;2)\cup(2;9)$. **31.** $\left(1;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};2\right]\cup(11;13)$.

6. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Рассмотрим функцию $y = a(x)^{f(x)}$.

По определению:

$$y = a(x)^{f(x)} = \left(10^{\lg a(x)}\right)^{f(x)} = \left(c^{\log_c a(x)}\right)^{f(x)} = c^{f(x)\log_c a(x)},$$

где $c = const$, $c > 0$, $c \neq 1$.

$$\Rightarrow \quad D(y): \begin{cases} x \in D(f), \\ x \in D(a), \\ a(x) > 0. \end{cases} \qquad E(y) = (0; +\infty).$$

6.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{f(x)\lg a(x)} - 10^{g(x)\lg a(x)} \vee 0 \quad \Leftrightarrow$

$$(10-1)\big(f(x)\lg a(x) - g(x)\lg a(x)\big) \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lg a(x) - \lg 1)\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x)-1)\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0 \\ a(x) > 0 \end{cases}$$

Вывод: $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a(x)-1)\big(f(x) - g(x)\big) \vee 0, \\ a(x) > 0. \end{cases}$

2. $a_1(x)^{f(x)} - a_2(x)^{f(x)} \vee 0 \quad \Big| : \quad a_2(x)^{f(x)}$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}\right)^{f(x)} - \left(\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}\right)^{0} \vee 0, \\ a_1(x) > 0,\ a_2(x) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} - 1\right)\big(f(x) - 0\big) \vee 0, \\ a_1(x) > 0,\ a_2(x) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \big(a_1(x) - a_2(x)\big) \cdot f(x) \vee 0, \\ a_1(x) > 0,\ a_2(x) > 0 \end{cases}$$

Вывод: $a_1(x)^{f(x)} - a_2(x)^{f(x)} \vee 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \big(a_1(x) - a_2(x)\big) \cdot f(x) \vee 0, \\ a_1(x) > 0,\ a_2(x) > 0 \end{cases}$

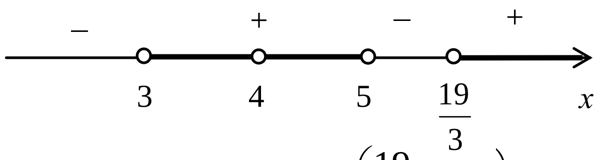
6.2. Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt[5]{|x-4|^{x+2}} < \sqrt{|x-4|^{x-3}}$ (1)

Решение. Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4|^{2(x+2)} - |x-4|^{5(x-3)} < 0, \\ |x-4| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x-4|-1)(2x+4-5x+15) < 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-4-1)(x-4+1)(3x-19) > 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-3)(3x-19) > 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$$x \in (3;\ 4) \cup (4;\ 5) \cup \left(\frac{19}{3};\ +\infty\right).$$

Ответ: $(3;\ 4) \cup (4;\ 5) \cup \left(\frac{19}{3};\ +\infty\right)$.

Пример 2. Решите неравенство $|2x-3|^{2x^2+3x-9} + |2x-3|^{9-3x-2x^2} \leq 2$ (1)

Решение.

1) $t = |2x-3|^{2x^2+3x-9}$, $t > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t} - 2 \leq 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 1 \leq 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)^2 \leq 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (t-1)^2 = 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad t = 1.$$

$$2)\ t = 1 \Leftrightarrow |2x-3|^{2x^2+3x-9} - |2x-3|^0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (|2x-3|-1)(2x^2+3x-9-0) = 0, \\ |2x-3| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2x-3-1)(2x-3+1)(2x^2+3x-9) = 0, \\ 2x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1)(2x-3)(x+3) = 0, \\ x \neq 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-3;\ 1;\ 2\}$.

Пример 3. Решите неравенство $\left(x^2-8\right)^{\sqrt{24x-4x^2-35}} \ge \left(7x-20\right)^{\sqrt{24x-4x^2-35}}$ (1)

Решение.

I. Приведем неравенство (1) к каноническому виду.

1) Пусть $f = f(x) = 24x-4x^2-35 = -\left(4x^2-24x+35\right)$, $a = a(x) = x^2-8$,

$b = b(x) = 7x-20$.

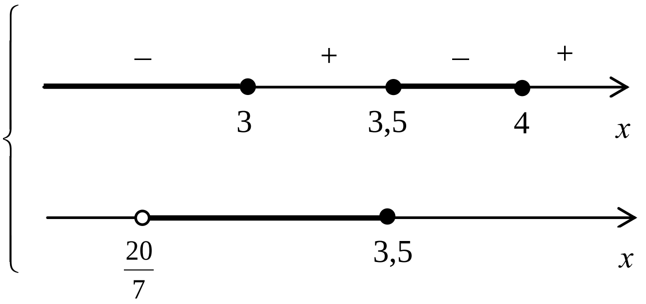
2) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^{\sqrt{f}} - b^{\sqrt{f}} \ge 0, \\ a > 0, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{f}} - 1 \ge 0, \\ a > 0,\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{f}} - \left(\dfrac{a}{b}\right)^{0} \ge 0, \\ a > 0,\ b > 0. \end{cases}$

II. Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a}{b}-1\right)\cdot\left(\sqrt{f}-0\right) \ge 0, \\ a > 0,\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)\cdot f \ge 0, \\ a > 0,\ b > 0, \\ f \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x^2-7x+12\right)\left(4x^2-24x+35\right) \le 0, \\ x^2-8 > 0, \\ 7x-20 > 0, \\ 4x^2-24x+35 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-3)(2x-5)(2x-7) \le 0, \\ \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right) > 0, \\ x > \dfrac{20}{7} = 2\dfrac{6}{7}, \\ (2x-5)(2x-7) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-4)(x-3)(2x-7) \le 0, \\ x \in \left(\dfrac{20}{7};\ 3{,}5\right] \end{cases}$$



$x \in \left(\dfrac{20}{7};\ 3\right] \cup \{3{,}5\}$.

Ответ: $\left(\dfrac{20}{7};\ 3\right] \cup \{3{,}5\}$.

Пример 4. Решите неравенство $(4-x)^{x^2-9} - \sin^2 20^\circ < (4-x)^{\log^{-1}_{\cos 20^\circ}\sqrt{4-x}}$ (1)

Решение.

I. Приведем неравенство (1) к каноническому виду.

1) OOH : $\begin{cases} 4-x>0, \\ \sqrt{4-x}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4, \\ x\neq 3. \end{cases}$

2) Упростим правую часть неравенства в OOH.

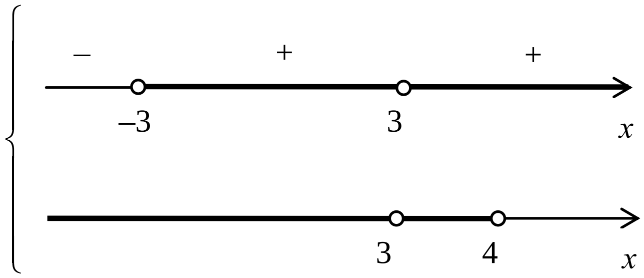
$$(4-x)^{\log^{-1}_{\cos 20^\circ}\sqrt{4-x}} = (4-x)^{\log_{\sqrt{4-x}}\cos 20^\circ} = (4-x)^{2\log_{(4-x)}\cos 20^\circ} = (4-x)^{\log_{(4-x)}\cos^2 20^\circ} = \cos^2 20^\circ.$$

3) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)^{x^2-9}-\sin^2 20^\circ<\cos^2 20^\circ, \\ x<4,\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)^{x^2-9}-1<0, \\ x<4,\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (4-x)^{x^2-9}-(4-x)^0<0, \\ x<4,\ x\neq 3. \end{cases}$$

II. Применим МЗМ.

$$\begin{cases} (4-x-1)(x^2-9-0)<0, \\ x<4,\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2(x+3)>0, \\ x<4,\ x\neq 3. \end{cases}$$



$x\in(-3;\,3)\cup(3;\,4)$.

Ответ: $(-3;\,3)\cup(3;\,4)$.

Пример 5. Решите неравенство $5\cdot 4^{\log_4^2 x}+3\cdot x^{\log_4 x}\leq 32$ (1)

Решение.

1) Упростим неравенство (1).

$$(1) \Leftrightarrow 5\cdot 4^{\log_4^2 x}+3\cdot\left(4^{\log_4 x}\right)^{\log_4 x}\leq 32 \Leftrightarrow 8\cdot 4^{\log_4^2 x}-32\leq 0 \Leftrightarrow 4^{\log_4^2 x}-4\leq 0.$$

2) Применим МЗМ.

$$(4-1)(\log_4^2 x-1)\leq 0 \Leftrightarrow (\log_4 x-1)(\log_4 x+1)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\log_4 x-\log_4 4)(\log_4(4x)-\log_4 1)\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (4-1)(x-4)(4-1)(4x-1)\leq 0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-4)(4x-1)\le 0,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[0{,}25;\ 4],\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in[0{,}25;\ 4].$$

Ответ: $[0{,}25;\ 4]$.

Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\le (x-1)^{\log_{0,04}\left(8+2x-x^2\right)}$ (1)

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду. Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^{-1}\le (x-1)^{0{,}5\log_{0,2}\left(8+2x-x^2\right)} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^{\log_{0,2}\left(8+2x-x^2\right)}-\left(\sqrt{x-1}\right)^{-1}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\log_{0,2}\left(8+2x-x^2\right)+1\right)\ge 0,\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-1-1)\left(\log_{0,2}\left(8+2x-x^2\right)-\log_{0,2}0{,}2^{-1}\right)\ge 0,\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-2)(0{,}2-1)\left(8+2x-x^2-5\right)\ge 0,\\ x>1,\\ 8+2x-x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x-3)(x+1)\ge 0,\\ x>1,\\ (x-4)(x+2)<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-2)(x-3)\ge 0,\\ x\in(1;\ 4)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;\ 2]\cup[3;\ 4).$$

Ответ: $(1;\ 2]\cup[3;\ 4)$.

Пример 7. Решите неравенство $\left(4\cdot 3^x+3^{-x}\right)^{3\log_3(x-1)-\log_3\left(2x^2-x-1\right)}>1$ (1)

Решение.

I. Пусть $a(x)=4\cdot 3^x+3^{-x}$, $a(x)>0$, $f(x)=3\log_3(x-1)-\log_3\left(2x^2-x-1\right)$.

$(1) \Leftrightarrow a(x)^{f(x)}-1>0 \Leftrightarrow a(x)^{f(x)}-a(x)^0>0$.

II. Применим МЗМ.

$(a(x)-1)(f(x)-0)>0 \Leftrightarrow (a(x)-1)\cdot f(x)>0$ (2)

1) $a(x)-1\vee 0 \Leftrightarrow 4\cdot 3^x+3^{-x}-1\vee 0$. $t=3^x$, $t>0$.

$$\begin{cases} 4t+\dfrac{1}{t}-1\vee 0, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2-t+1\vee 0, \\ t>0. \end{cases}$$

$4t^2-t+1>0\ \ \forall t>0\ \ (A=4>0,\ D<0) \Rightarrow a(x)-1>0\ \ \forall x\in R$.

Или воспользуемся неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел: $t+z\ge 2\sqrt{t\cdot z}$ при $t\ge 0,\ z\ge 0$.

Тогда $a(x)=4\cdot 3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{4\cdot 3^x\cdot 3^{-x}}=4 \Rightarrow a(x)-1\ge 3>0$.

2) (2) $\Leftrightarrow\ f(x)>0 \Leftrightarrow 3\log_3(x-1)-\log_3(2x^2-x-1)>0 \Leftrightarrow$

$$\log_3(x-1)^3-\log_3(2x+1)(x-1)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3-1)\left((x-1)^3-(2x+1)(x-1)\right)>0, \\ x-1>0, \\ (2x+1)(x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)\left((x-1)^2-2x-1\right)>0, \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1-2x-1>0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-4x>0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4)>0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4>0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(4;+\infty).$$

Ответ: $(4;+\infty)$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{4}{\left(\log_{1,7}(x-5)^2\right)\cdot\log_{3,1}(x+4)} \ge \frac{(x+3)^{\log_2(x+3)}}{4\left(\log_{1,7}(x-5)^2\right)\cdot\log_{3,1}(x+4)} \qquad (1)$$

Решение.

1) $ООН:\ \begin{cases} x+3>0, \\ x+4>0,\ x+4\ne 1, \\ (x-5)^2>0,\ (x-5)^2\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x\ne 4,\ x\ne 5,\ x\ne 6. \end{cases}$

2) При $x>-3$ $\log_{3,1}(x+4)>\log_{3,1}1=0$.

3) Умножим неравенство (1) на $4\log_{3,1}(x+4)$.

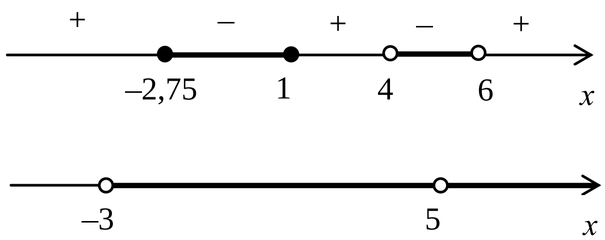
$$(1)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{16}{\log_{1,7}(x-5)^2}-\dfrac{(x+3)^{\log_2(x+3)}}{\log_{1,7}(x-5)^2}\ge 0,\\ x\in ООН\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{2^{\log_2^2(x+3)}-2^4}{\log_{1,7}(x-5)^2-\log_{1,7}1}\le 0,\\ x\in ООН.\end{cases}$$

4) Применим МЗМ.

$$\begin{cases}\dfrac{(2-1)\left(\log_2^2(x+3)-4\right)}{(1{,}7-1)\left((x-5)^2-1\right)}\le 0,\\ x\in ООН\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{(\log_2(x+3)-2)(\log_2(x+3)+2)}{(x-5-1)(x-5+1)}\le 0,\\ x\in ООН\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(\log_2(x+3)-\log_2 4)(\log_2(4x+12)-\log_2 1)}{(x-6)(x-4)}\le 0,\\ x>-3,\ x\ne 4,\ x\ne 5,\ x\ne 6\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(2-1)(x+3-4)(2-1)(4x+12-1)}{(x-6)(x-4)}\le 0,\\ x>-3,\ x\ne 5\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{(x-1)(4x+11)}{(x-6)(x-4)}\le 0,\\ x>-3,\ x\ne 5.\end{cases}$$



$$x\in[-2{,}75;\,1]\cup(4;\,5)\cup(5;\,6).$$

Ответ: $[-2{,}75;1]\cup(4;5)\cup(5;6)$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{\left(5^{\log_3(x^2-4)}-(x+2)^{\log_3 5}\right)\cdot\left(\log_7(x^2+4x-5)-1\right)}{(4x^2+2x+1)^{x^2-9x+20}-1}\le 0 \qquad (1)$$

Решение.

$$\textbf{I.}\ (1)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{f_3(x)}\le 0, & (2)\\ x\in D(f_1)\cap D(f_2)\cap D(f_3), & (3)\end{cases}$$

где $f_1(x)=5^{\log_3(x^2-4)}-(x+2)^{\log_3 5}$, $f_2(x)=\log_7(x^2+4x-5)-1$,

$$f_3(x)=(4x^2+2x+1)^{x^2-9x+20}-1.$$

1) $D(f_1)\cap D(f_2)\cap D(f_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4>0, \\ x+2>0, \\ x^2+4x-5>0, \\ 4x^2+2x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)>0, \\ x>-2, \\ (x+5)(x-1)>0, \\ x\in R \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

2) $\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{f_3(x)} \le 0, & (4) \\ x>2 & (5) \end{cases}$

II. Применим МЗМ. Заменим функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ на функции равного знака.

1) $\begin{cases} f_1(x)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\log_3(x^2-4)} - \left(3^{\log_3(x+2)}\right)^{\log_3 5} \vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{\log_3(x^2-4)} - 5^{\log_3(x+2)} \vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (5-1)\left(\log_3(x^2-4)-\log_3(x+2)\right)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-1)\left((x^2-4)-(x+2)\right)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2-x-6\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\vee 0, \\ x>2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} f_2(x)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_7(x^2+4x-5)-\log_7 7\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (7-1)(x^2+4x-5-7)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-12\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-2)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow$

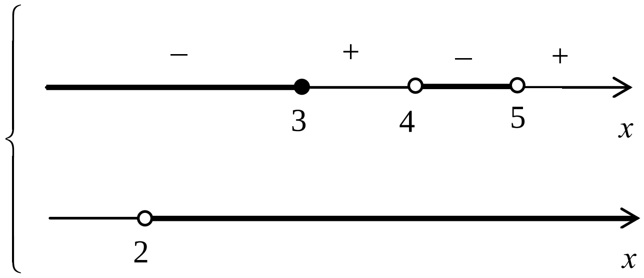
$\begin{cases} (x+6)(x-2)>0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(x)>0, \\ x>2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} f_3(x)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x^2+2x+1)^{x^2-9x+20} - (4x^2+2x+1)^0 \vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (4x^2+2x+1-1)(x^2-9x+20-0)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x+1)(x-4)(x-5)\vee 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x-4)(x-5)\vee 0, \\ x>2. \end{cases}$

III. $\begin{cases}(4)\\(5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} \le 0,\\ x > 2.\end{cases}$



$x \in (2;\ 3] \cup (4;\ 5)$.

Ответ: $(2;\ 3] \cup (4;\ 5)$.

6.3. Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $(x-5)^{x^2-7x+21} \ge (x-5)^{2x+7}$.

2. $\left(1-x^4\right)^{(1+x)^2} < \left(1-x^4\right)^{3x^2+7x-6}$.

3. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \ge \left(x^2+x+1\right)^3$.

4. $|x-2|^{10x^2-1} \le |x-2|^{3x}$.

5. $(x+1)^{\sqrt[3]{x^2+2x+1}} \le \sqrt{x+1}^{\,x+1}$.

6. $\left(x^2-2{,}5x+1\right)^{x+1} < 1$.

7. $|1-4x|^{4x^2+7x-2} + |1-4x|^{2-7x-4x^2} \le 2$.

8. $|5x-2|^{5x^2+18x-8} + |5x-2|^{8-18x-5x^2} \le 2$.

9. $\left(x^2+1\right)^{\sqrt{8x-x^2-15}} \le (2x+9)^{\sqrt{8x-x^2-15}}$.

10. $(2x+11)^{25-x^2} - \cos^2 17^\circ > (2x+11)^{\log^{-1}_{\sin 17^\circ} \sqrt{2x+11}}$.

11. $(9-2x)^{16-x^2} - \sin^2 10^\circ > (9-2x)^{\log^{-1}_{\cos 10^\circ} \sqrt{9-2x}}$.

12. $(5-x)^{x^2-4} - \cos^2 73^\circ < (5-x)^{\log^{-1}_{\sin 73^\circ} \sqrt{5-x}}$.

13. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \le 162$.

14. $3\cdot 6^{\log_6^2 x} + 2\cdot x^{\log_6 x} \ge 30$.

15. $25^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \le 30$.

16. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} \le (2x-1)^{\log_{16^{-1}}\left(6+x-x^2\right)}$.

17. $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \ge (x-1)^{\log_{\frac{1}{9}}\left(7x-2x^2-3\right)}$.

18. $\sqrt[3]{x^2-4}^{\,\log_{\left(x^2-4\right)}\left(\log^3_{(x-1)}(5x-9)\right)} \ge 2$.

19. $|x-2|^{\log_4(x+2)-\log_2 x} < 1$.

20. $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2} > x^{-1}$.

21. $\left(2^x+2^{3-x}\right)^{2\log_2(x+3)-\log_2(x+9)} < 1$.

22. $\left(4^{-x}+3\cdot 4^{x+1}\right)^{\log_7 x+\log_x 7-2} \le 1$.

23. $\left(3^{x+2}+3^{-x}\right)^{3\log_5 x-\log_5\left(2x^2+3x\right)} < 1$.

24. $\dfrac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\cdot\log_{1,9}x} \ge \dfrac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\cdot\log_{1,9}x}$.

25. $\dfrac{20^{\log_7(x+1)}}{4\left(\log_3(x-8)^2\right)^4\cdot\log_{5,4}(x+2)} \le \dfrac{\left(35\cdot(x+1)\right)^{\log_7(x+1)}}{49\left(\log_3(x-8)^2\right)^4\cdot\log_{5,4}(x+2)}$.

26. $\dfrac{\left(2^{\lg\left(x^2-1\right)}-(x+1)^{\lg 2}\right)\cdot\log_{\left(x^2+6x+9\right)}\left(5x^2-3x+1\right)}{3^{|x+7|}-3^{\left|x^2-3x+2\right|}} \ge 0$.

27. $\dfrac{|x-2|^{x^2-2x}-|x-2|^{5x-10}}{3^{(\log_9 x)\cdot\log_3\left(2x^2-7x+12\right)}-x} \le 0$.

Ответы:

1. $(5;\ 6]\cup[7;\ +\infty)$. **2.** $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$. **3.** $(-2;\ -1]\cup[-0,5;\ 0]$.

4. $[-0,2;\ 0,5]\cup[1;\ 2)\cup(2;\ 3]$. **5.** $(-1;\ 0]\cup[7;\ +\infty)$.

6. $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 0,5)\cup(2;\ 2,5)$. **7.** $\{-2;\ 0;\ 0,5\}$. **8.** $\{-4;\ 0,2;\ 0,6\}$.

9. $[3;\ 4]\cup\{5\}$. **10.** $(-5,5;\ -5)\cup(-5;\ 5)$.

11. $(-4;\ 4)\cup(4;\ 4,5)$. **12.** $(-2;\ 2)\cup(4;\ 5)$. **13.** $\left[\dfrac{1}{9};\ 9\right]$.

14. $\left(0;\ \dfrac{1}{6}\right]\cup[6;\ +\infty)$. **15.** $[0,2;\ 5]$. **16.** $(0,5;\ 1]\cup[2;\ 3)$.

17. $(1;\ 1,5]\cup\{2\}$. **18.** $\left(2;\ \sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};\ 5\right]$. **19.** $(1;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$.

20. $(0;\ 0,125)\cup(1;\ 2)$. **21.** $(-3;\ 0)$. **22.** $(0;\ 1)\cup\{7\}$.

23. $(0;\ 3)$. **24.** $\left[\dfrac{10}{9};\ 9\right)\cup(10;\ 11)$.

25. $\left(-1;\ -\dfrac{45}{49}\right]\cup[6;\ 7)\cup(7;\ 8)\cup(8;\ 9)\cup(9;\ +\infty)$. **26.** $[2;\ 5)$.

27. $(0;\ 0,5)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ 5]$.

7. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Рассмотрим функцию $y=\log_{a(x)} f(x)=\dfrac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}$,

где $c=const,\ c>0,\ c\neq 1.\qquad D(y):\begin{cases} f(x)>0,\\ a(x)>0,\\ a(x)\neq 1.\end{cases}$

7.1. Условия равносильности для МЗМ

1. $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}-\dfrac{\log_c g(x)}{\log_c a(x)}\vee 0,\\ c=const, c>0, c\neq 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow$

$$\frac{\log_c f(x)-\log_c g(x)}{\log_c a(x)-\log_c 1}\vee 0, \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{f(x)-g(x)}{a(x)-1}\vee 0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ a(x)>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x))\vee 0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ 0<a(x)\neq 1.\end{cases}$$

Вывод: $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)\vee 0 \quad\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x))\vee 0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ 0<a(x)\neq 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{f(x)-g(x)}{a(x)-1}\vee 0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ a(x)>0\end{cases}$$

2. $\log_{a_1(x)} f(x)-\log_{a_2(x)} f(x)\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{\log_c f(x)}{\log_c a_1(x)}-\dfrac{\log_c f(x)}{\log_c a_2(x)}\vee 0,\\ c=const, c>0, c\neq 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow$

$$\frac{(\log_c a_2(x)-\log_c a_1(x))\cdot\log_c f(x)}{\log_c a_1(x)\cdot\log_c a_2(x)}\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{(a_2(x)-a_1(x))(f(x)-1)}{(a_1(x)-1)(a_2(x)-1)}\vee 0,\\ f(x)>0,\\ a_1(x)>0,\\ a_2(x)>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(a_1(x)-1)(a_2(x)-1)(f(x)-1)(a_2(x)-a_1(x))\vee 0,\\ f(x)>0,\\ 0<a_1(x)\neq 1,\\ 0<a_2(x)\neq 1.\end{cases}$$

Вывод: $\log_{a_1(x)} f(x)-\log_{a_2(x)} f(x)\vee 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(a_1(x)-1)(a_2(x)-1)(f(x)-1)(a_2(x)-a_1(x))\vee 0,\\ f(x)>0,\\ 0<a_1(x)\neq 1,\\ 0<a_2(x)\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(a_2(x)-a_1(x))(f(x)-1)}{(a_1(x)-1)(a_2(x)-1)}\vee 0,\\ f(x)>0,\\ a_1(x)>0,\\ a_2(x)>0.\end{cases}$$

7.2. Примеры с решениями

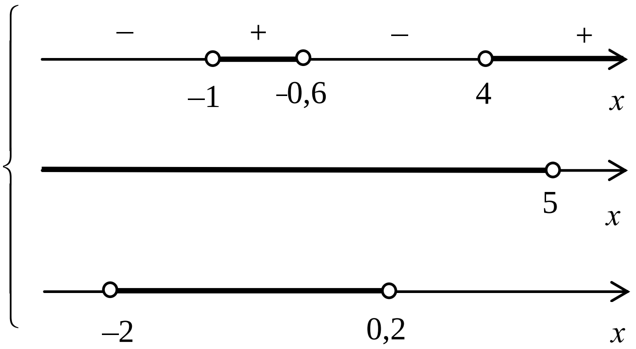
Пример 1. Решите неравенство $\log_{5-x}\left(2-9x-5x^2\right)>1$ (1)

Решение. Применим МЗМ.

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \log_{5-x}\left(2-9x-5x^2\right)-\log_{5-x}(5-x)>0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(5-x-1)\left(2-9x-5x^2-5+x\right)>0,\\ 5-x>0,\ 5-x\neq 1,\\ 2-9x-5x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)\left(5x^2+8x+3\right)>0,\\ x<5,\ x\neq 4,\\ 5x^2+9x-2<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-4)(x+1)(5x+3)>0,\\ x<5,\\ (x+2)(5x-1)<0\end{cases}$$



$x\in(-1;\,-0{,}6).$

Ответ: $(-1;\,-0{,}6)$.

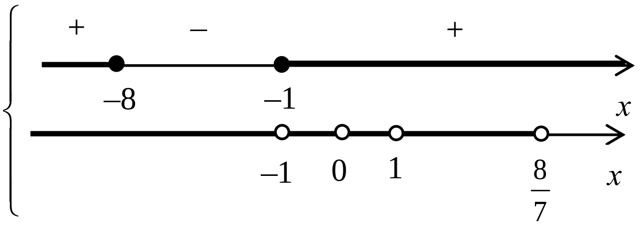
Пример 2. Решите неравенство $\log_{x^2}(8-7x)\leq 4^{\lg\sin 2{,}5\pi}$ (1)

Решение. Применим МЗМ.

$(1) \Leftrightarrow \log_{x^2}(8-7x) \le 4^{\lg 1} \Leftrightarrow \log_{x^2}(8-7x)-1 \le 0 \Leftrightarrow$

$$\log_{x^2}(8-7x)-\log_{x^2} x^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-1)(8-7x-x^2)\le 0,\\ x^2>0,\ x^2\ne 1,\\ 8-7x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-1)(x+1)(x^2+7x-8)\ge 0,\\ x\ne 0, x\ne -1,\ x\ne 1,\\ x<\dfrac{8}{7}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2(x+1)(x+8)\ge 0,\\ x\ne 0, x\ne -1,\ x\ne 1,\\ x<\dfrac{8}{7}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x+8)\ge 0,\\ x\ne 0, x\ne -1,\ x\ne 1,\\ x<\dfrac{8}{7}.\end{cases}$$



$$x\in(-\infty;-8]\cup(-1;\,0)\cup(0;\,1)\cup\left(1;\,\frac{8}{7}\right).$$

Ответ: $(-\infty;-8]\cup(-1;\,0)\cup(0;\,1)\cup\left(1;\,\dfrac{8}{7}\right)$.

Пример 3. Решите неравенство $\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}(x-1)\le 2$ (1)

Решение. $(1) \Leftrightarrow \log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}(x-1)-\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}\left(\dfrac{x-1}{|2x-3|}\right)^2 \le 0.$

Применим МЗМ.

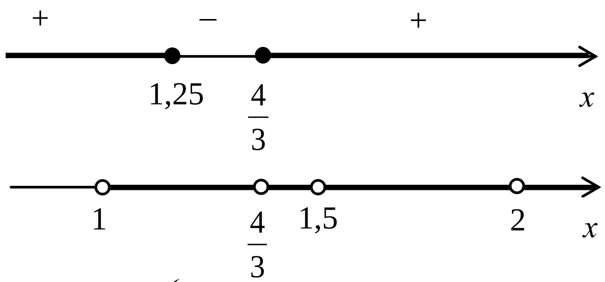
$$\begin{cases}\left(\dfrac{x-1}{|2x-3|}-1\right)\left(x-1-\left(\dfrac{x-1}{|2x-3|}\right)^2\right)\le 0,\\ \dfrac{x-1}{|2x-3|}>0,\\ \dfrac{x-1}{|2x-3|}\ne 1,\ \ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1-|2x-3|)(x-1)\left((2x-3)^2-(x-1)\right)\le 0, \\ |2x-3|\ne 0, \\ x-1>0, \\ |2x-3|-(x-1)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(|2x-3|-(x-1)\right)\left(4x^2-12x+9-x+1\right)\ge 0, \\ x\ne 1{,}5, \\ x>1, \\ (2x-3-x+1)(2x-3+x-1)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2x-3-x+1)(2x-3+x-1)\left(4x^2-13x+10\right)\ge 0, \\ x\ne 1{,}5, \\ x>1, \\ (x-2)(3x-4)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-2)^2(3x-4)(4x-5)\ge 0, \\ x\ne 1{,}5, \\ x>1, \\ x\ne 2,\ x\ne \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-4)(4x-5)\ge 0, \\ x\ne 1{,}5, \\ x>1, \\ x\ne 2,\ x\ne \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$



$$x\in(1;1{,}25]\cup\left(\frac{4}{3};\,1{,}5\right)\cup(1{,}5;\ 2)\cup(2;\,+\infty).$$

Ответ: $(1;1{,}25]\cup\left(\dfrac{4}{3};\,1{,}5\right)\cup(1{,}5;\ 2)\cup(2;\,+\infty)$.

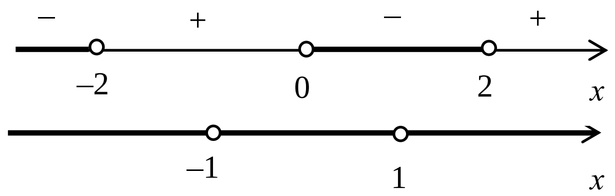
Пример 4. Решите неравенство $\log_{|x+1|}2>\log_{|x-1|}2$ (1)

Решение. $(1)\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{\log_2|x+1|}-\dfrac{1}{\log_2|x-1|}>0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\log_2|x-1|-\log_2|x+1|}{\log_2|x+1|\cdot\log_2|x-1|}>0\ \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\dfrac{(2-1)(|x-1|-|x+1|)}{(2-1)(|x+1|-1)(2-1)(|x-1|-1)}>0,\\ |x-1|>0,\ |x+1|>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-1)^2-(x+1)^2}{((x+1)^2-1)((x-1)^2-1)}>0,\\ x\neq 1,\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1-x-1)(x-1+x+1)}{(x+1-1)(x+1+1)(x-1-1)(x-1+1)}>0,\\ x\neq 1,\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{x^2(x+2)(x-2)}<0,\\ x\neq 1,\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x(x+2)(x-2)<0,\\ x\neq 1,\ x\neq -1.\end{cases}$$



$x\in(-\infty;\,-2)\cup(0;\,1)\cup(1;\,2)$.

Ответ: $(-\infty;\,-2)\cup(0;1)\cup(1;\,2)$.

Пример 5. Решите неравенство

$$3+\log_{x+4}\left(x^2+5x-14\right)>\log_{x+4}(3x-6)+\log_{5-x}(5-x)^3 \qquad (1)$$

Решение. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases}3+\log_{x+4}\left(x^2+5x-14\right)>\log_{x+4}(3x-6)+3,\\ 5-x>0,\ 5-x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\log_{x+4}\left(x^2+5x-14\right)-\log_{x+4}(3x-6)>0,\\ x<5,\ x\neq 4.\end{cases}$$

Применим МЗМ.

$$\begin{cases}(x+4-1)\left(x^2+5x-14-3x+6\right)>0,\\ x+4>0,\ x+4\neq 1,\\ x^2+5x-14>0,\\ 3x-6>0,\\ x<5,\ x\neq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)\left(x^2+2x-8\right)>0,\\ x>-4,\ x\neq -3,\\ (x+7)(x-2)>0,\\ x>2,\\ x<5,\ x\neq 4\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x+3)(x+4)(x-2)>0,\\ x\in(2;\,5),\\ x\neq 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(2;\,5),\\ x\neq 4\end{cases} \Leftrightarrow x\in(2;\,4)\cup(4;\,5).$$

Ответ: $(2;\,4)\cup(4;\,5)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\log_x(7-x)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)-\log_x(x-1) \qquad (1)$$

Решение. Приведем неравенство (1) к каноническому виду и применим МЗМ.

1) Пусть $f(x)=x^3-6x^2+14x-7$.

2) $(1) \iff \log_x f(x)-(\log_x(x-1)+\log_x(7-x))>0 \iff$

$$\begin{cases}\log_x f(x)-\log_x(x-1)(7-x)>0,\\ x-1>0,\ 7-x>0\end{cases} \iff \begin{cases}(x-1)\left(f(x)-(x-1)(7-x)\right)>0,\\ x-1>0,\ 7-x>0,\\ x>0,\ x\neq 1,\\ f(x)>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(x)-(x-1)(7-x)>0,\\ x\in(1;\ 7)\end{cases} \iff \begin{cases}x^3-6x^2+14x-7-7x+x^2+7-x>0,\\ x\in(1;\ 7)\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}x(x-2)(x-3)>0,\\ x\in(1;\ 7)\end{cases} \iff \begin{cases}(x-2)(x-3)>0,\\ x\in(1;\ 7)\end{cases} \iff x\in(1;\ 2)\cup(3;\ 7).$$

Ответ: $(1;2)\cup(3;7)$.

Пример 7. Решите неравенство

$$\log_{7-2x}(2x+3)\cdot\log_{2x+3}\left(x^2+4x+4\right)\le\log_{7-2x}(4x+9)\cdot\log_{4x+9}(5x+10) \qquad (1)$$

Решение.

1) Воспользуемся формулой перехода к новому основанию:

$$\log_a f=\frac{\log_b f}{\log_b a} \iff \log_b a\cdot\log_a f=\log_b f.$$

2) $$(1) \iff \begin{cases}\log_{7-2x}(x+2)^2-\log_{7-2x}(5x+10)\le 0,\\ 2x+3>0,\ 2x+3\neq 1,\\ 4x+9>0,\ 4x+9\neq 1.\end{cases}$$

3) Применим МЗМ.

$$\begin{cases} (7-2x-1)\left((x+2)^2-(5x+10)\right)\le 0, \\ 7-2x>0,\ 7-2x\ne 1, \\ (x+2)^2>0,\ 5x+10>0, \\ x>-1{,}5,\ x\ne -1, \\ x>-2{,}25,\ x\ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-3)\left(x^2+4x+4-5x-10\right)\le 0, \\ x<3{,}5,\ x\ne 3, \\ x\ne -2,\ x>-2, \\ x>-1{,}5,\ x\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-3)\left(x^2-x-6\right)\ge 0, \\ x\in(-1{,}5;\ 3{,}5), \\ x\ne -1,\ x\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2(x+2)\ge 0, \\ x\in(-1{,}5;\ 3{,}5), \\ x\ne -1,\ x\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-1{,}5;\ 3{,}5), \\ x\ne -1,\ x\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x\in(-1{,}5;\ -1)\cup(-1;\ 3)\cup(3;\ 3{,}5).$$

Ответ: $(-1{,}5;-1)\cup(-1;3)\cup(3;3{,}5)$.

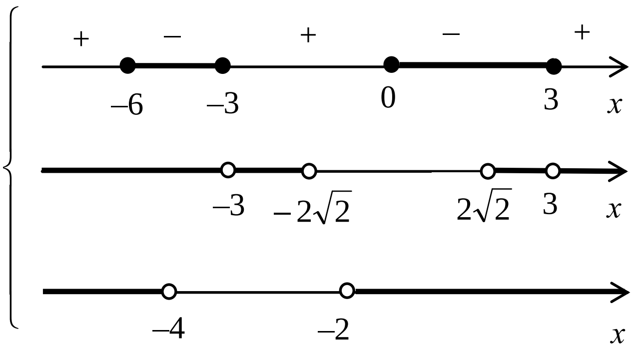
Пример 8. Решите неравенство $\dfrac{\log_3 8}{\log_3\left(x^2-8\right)} \ge \dfrac{\log_2\left(x^2+6x+8\right)}{\log_2\left(x^2-8\right)}$ (1)

Решение. (1) $\Leftrightarrow$ $\log_{x^2-8}\left(x^2+6x+8\right)-\log_{x^2-8} 8\le 0$.

Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \left(x^2-8-1\right)\left(x^2+6x+8-8\right)\le 0, \\ x^2-8>0,\ x^2-8\ne 1, \\ x^2+6x+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-9\right)\left(x^2+6x\right)\le 0, \\ \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)>0, \\ x\ne -3,\ x\ne 3, \\ (x+2)(x+4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+3)(x+6)x\le 0, \\ \left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)>0, \\ x\ne -3,\ x\ne 3, \\ (x+2)(x+4)>0. \end{cases}$$



$x\in[-6;-4)\cup\left(2\sqrt{2};3\right)$.

Ответ: $[-6;-4)\cup\left(2\sqrt{2};3\right)$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x+5}\left(x^2+4x+4\right)+\log_{-x-2}\left(-x^2-7x-10\right)\le 3 \qquad (1)$$

Решение.

1) $(1) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\log_{x+5}(x+2)^2+\log_{-x-2}(-x-2)(x+5)\le 3 \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\log_{x+5}|x+2|+\log_{-x-2}(-x-2)+\log_{-x-2}(x+5)-3\le 0,\\ x+5>0,\ x+5\ne 1,\\ -x-2>0,\ -x-2\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

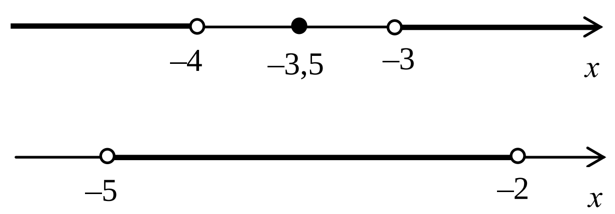
$$\begin{cases}\log_{x+5}(-x-2)+\dfrac{1}{\log_{x+5}(-x-2)}-2\le 0, & (2)\\ x\in(-5;\,-2),\ x\ne -4,\ x\ne -3. & (3)\end{cases}$$

2) Пусть $t=\log_{x+5}(-x-2)$.

$$(2) \;\Leftrightarrow\; t+\frac{1}{t}-2\le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{t^2-2t+1}{t}\le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(t-1)^2}{t}\le 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} t<0,\\ t=1.\end{array}\right.$$

3) $\begin{cases}(2)\\(3)\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_{x+5}(-x-2)-\log_{x+5}1<0,\\ \log_{x+5}(-x-2)-\log_{x+5}(x+5)=0,\end{array}\right.\\ x\in(-5;\,-2),\ x\ne -4,\ x\ne -3.\end{cases} \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(x+5-1)(-x-2-1)<0,\\ (x+5-1)(-x-2-x-5)=0,\end{array}\right.\\ x\in(-5;\,-2),\ x\ne -4,\ x\ne -3.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}(x+4)(x+3)>0,\\ (x+4)(2x+7)=0,\end{array}\right.\\ x\in(-5;\,-2),\ x\ne -4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}(x+4)(x+3)>0,\\ x=-3{,}5,\end{array}\right.\\ x\in(-5;\,-2).\end{cases}$$



$x\in(-5;\,-4)\cup\{-3{,}5\}\cup(-3;\,-2)$.

Ответ: $(-5;\,-4)\cup\{-3{,}5\}\cup(-3;\,-2)$.

Пример 10. Решите неравенство

$$\left|1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)\right|\le 1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right) \qquad (1)$$

Решение. По свойству модуля $|a| \ge a$, следовательно,

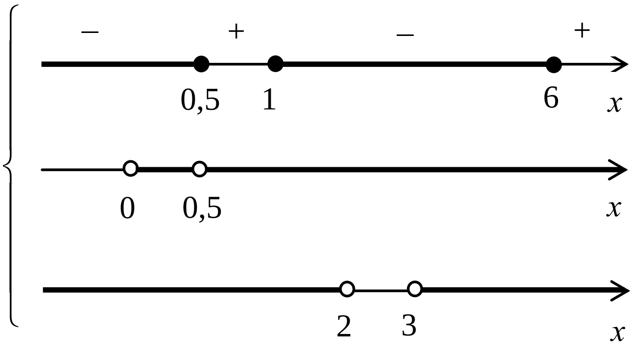
$$(1) \;\Leftrightarrow\; \left|1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)\right| = 1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right) \;\Leftrightarrow$$

$$1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)-\log_{2x} 2x \le 0. \qquad (2)$$

Применим МЗМ.

$$(2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (2x-1)\left(x^2-5x+6-2x\right) \le 0, \\ 2x>0,\; 2x \ne 1, \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (2x-1)\left(x^2-7x+6\right) \le 0, \\ x>0,\; x \ne 0{,}5, \\ (x-2)(x-3)>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2x-1)(x-6)(x-1) \le 0, \\ x>0,\; x \ne 0{,}5, \\ (x-2)(x-3)>0. \end{cases}$$



$$x \in (0;\, 0{,}5) \cup [1;\, 2) \cup (3;\, 6].$$

Ответ: $(0;\, 0{,}5) \cup [1;\, 2) \cup (3;\, 6]$.

Пример 11. Решите неравенство

$$\log_{|x-2|}\left(9^x-4^x\right) < \log_{|x-2|}\left(3^x+2^x\right) + \log_{|x-2|}\left(3^{x-2}+2^x\right) \qquad (1)$$

Решение. Упростим неравенство. Применим МЗМ.

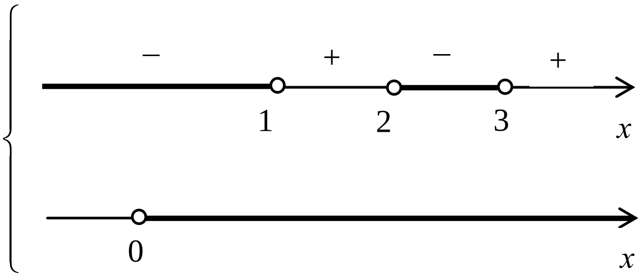
$$(1) \;\Leftrightarrow\; \left(\log_{|x-2|}\left(3^x-2^x\right)\left(3^x+2^x\right)-\log_{|x-2|}\left(3^x+2^x\right)\right)-\log_{|x-2|}\left(3^{x-2}+2^x\right)<0 \;\Leftrightarrow$$

$$\log_{|x-2|}\left(3^x-2^x\right)-\log_{|x-2|}\left(3^{x-2}+2^x\right)<0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left(|x-2|-1\right)\left(3^x-2^x-3^{x-2}-2^x\right)<0, \\ |x-2|>0,\; |x-2| \ne 1, \\ 3^x-2^x>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-2-1)(x-2+1)\left(\dfrac{8}{9}3^x-2^{x+1}\right)<0, \\ x \ne 2,\; (1{,}5)^x-1>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (x-3)(x-1)\left(3^{x-2}-2^{x-2}\right)<0, \\ x \ne 2,\; x>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)\left(1{,}5^{x-2}-1{,}5^{0}\right)<0,\\ x\neq 2,\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-1)(1{,}5-1)(x-2-0)<0,\\ x\neq 2,\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)(x-2)<0,\\ x>0.\end{cases}$$



$x\in(0;\,1)\cup(2;\,3).$

Ответ: $(0;1)\cup(2;3)$.

Пример 12. Решите неравенство

$$\log_{24x-4x^2-27}\left(11x-2x^2-9\right)\geq\log_{2x-3}(x-1) \qquad (1)$$

Решение.

I. Приведем неравенство (1) к каноническому виду.

1) $-4x^2+24x-27=-\left(4x^2-24x+27\right)=-(2x-3)(2x-9)=(2x-3)(9-2x)$.

2) $-2x^2+11x-9=-\left(2x^2-11x+9\right)=-(2x-9)(x-1)=(9-2x)(x-1)$.

3) (1) $\Leftrightarrow$ $\log_{(2x-3)(9-2x)}(9-2x)(x-1)-\log_{2x-3}(x-1)\geq 0$ (2)

4) ООН: $\begin{cases}(2x-3)(9-2x)>0,\\ (2x-3)(9-2x)\neq 1,\\ (9-2x)(x-1)>0,\\ 2x-3>0,\ 2x-3\neq 1,\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1>0,\\ 2x-3>0,\\ 9-2x>0,\\ x\neq 2,\\ (2x-3)(9-2x)\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(1{,}5;\ 4{,}5),\\ x\neq 2,\\ (2x-3)(9-2x)\neq 1.\end{cases}$

5) Перейдем в неравенстве (2) к основанию (2x–3).

$$\begin{cases}\dfrac{\log_{2x-3}(9-2x)+\log_{2x-3}(x-1)}{\log_{2x-3}(2x-3)+\log_{2x-3}(9-2x)}-\log_{2x-3}(x-1)\geq 0,\\ x\in OOH\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{2x-3}(9-2x)+\log_{2x-3}(x-1)-\log_{2x-3}(x-1)-\log_{2x-3}(9-2x)\cdot\log_{2x-3}(x-1)}{1+\log_{2x-3}(9-2x)} \geq 0, \\ x \in OOH \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{2x-3}(9-2x)\cdot\left(1-\log_{2x-3}(x-1)\right)}{\log_{2x-3}(9-2x)(2x-3)} \geq 0, \\ x \in (1{,}5;\, 4{,}5),\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

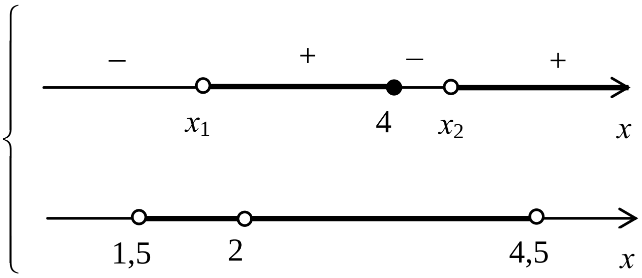
$$\begin{cases} \dfrac{\left(\log_{2x-3}(9-2x)-\log_{2x-3}1\right)\cdot\left(\log_{2x-3}(x-1)-\log_{2x-3}(2x-3)\right)}{\log_{2x-3}\left(-4x^2+24x-27\right)-\log_{2x-3}1} \leq 0, \\ x \in (1{,}5;\, 4{,}5),\ x \neq 2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

II. Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \dfrac{(2x-3-1)(9-2x-1)(2x-3-1)(x-1-2x+3)}{(2x-3-1)\left(-4x^2+24x-27-1\right)} \leq 0, \\ x \in (1{,}5;\ 4{,}5),\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2x-4)(8-2x)(2-x)}{-4x^2+24x-28} \leq 0, \\ x \in (1{,}5;\ 4{,}5),\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2(x-4)}{x^2-6x+7} \geq 0, \\ x \in (1{,}5;\ 4{,}5),\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-4}{(x-x_1)(x-x_2)} \geq 0, \\ x \in (1{,}5;\ 4{,}5),\ x \neq 2, \end{cases}$$

где $x_1 = 3-\sqrt{2},\ x_2 = 3+\sqrt{2}$.



$x \in (x_1;\, 2) \cup (2;\, 4] \cup (x_2;\, 4{,}5)$.

Ответ: $\left(3-\sqrt{2};\, 2\right) \cup (2;\, 4] \cup \left(3+\sqrt{2};\, 4{,}5\right)$.

Пример 13. Решите неравенство

$$\log_{0,2\sqrt{x^3+x^2+x-14}}\left(\log_{0,25}\left(-x^2+5x-6\right)\right) < 0 \qquad (1)$$

Решение. Применим МЗМ.

$$\begin{cases} \left(0{,}2\sqrt{x^3+x^2+x-14}-1\right)\left(\log_{0,25}\left(-x^2+5x-6\right)-1\right)<0, & (2)\\ x^3+x^2+x-14>0, & (3)\\ 0{,}2\sqrt{x^3+x^2+x-14}\neq 1, & (4)\\ \log_{0,25}\left(-x^2+5x-6\right)>0 & (5) \end{cases}$$

1) Неравенство (4) следует из неравенства (2).

2) Разложим многочлен $P(x)=x^3+x^2+x-14$ на множители, используя схему Горнера,

	1	1	1	–14
2	1	3	7	0

$P(x)=(x-2)\left(x^2+3x+7\right).$

Квадратный трехчлен $x^2+3x+7>0 \quad \forall x\in R \quad (a>0, \quad D<0)$.

3) $$\begin{cases}(2)\\(3)\\(4)\\(5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x^3+x^2+x-14-25\right)(0{,}25-1)\left(-x^2+5x-6-0{,}25\right)<0,\\ (x-2)\left(x^2+3x+7\right)>0,\\ -x^2+5x-6<1,\\ -x^2+5x-6>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x^3+x^2+x-39\right)\left(x^2-5x+6{,}25\right)<0, & (6)\\ x-2>0, & (7)\\ x^2-5x+7>0, & (8)\\ x^2-5x+6<0 & (9) \end{cases}$$

4) Разложим многочлен $P_1(x)=x^3+x^2+x-39$ на множители, используя схему Горнера,

	1	1	1	–39
3	1	4	13	0

$P_1(x)=(x-3)\left(x^2+4x+13\right).$

Квадратный трехчлен $x^2+4x+13>0 \quad \forall x\in R \quad (a>0, \quad D<0)$.

5) Квадратный трехчлен $x^2-5x+7>0 \quad \forall x\in R \quad (a>0, \quad D<0)$.

б) $\begin{cases}(6)\\(7)\\(8)\\(9)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x^2+4x+13)(x-2{,}5)^2<0,\\ x>2,\\ (x-2)(x-3)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-2{,}5)^2<0,\\ x>2,\\ x-3<0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(x-2{,}5)^2>0,\\ x\in(2;\,3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 2{,}5,\\ x\in(2;\,3)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(2;\,2{,}5)\cup(2{,}5;\,3).$$

Ответ: $(2;\,2{,}5)\cup(2{,}5;\,3)$.

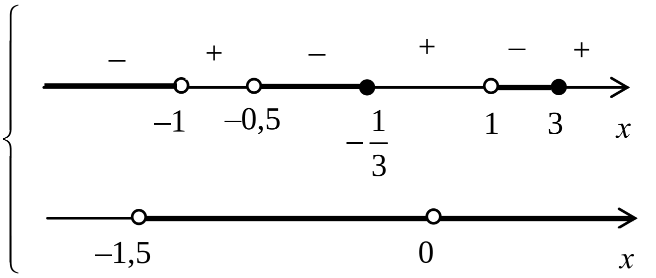
Пример 14. Решите неравенство $\dfrac{7^{2(x+2)}-2^{\sqrt{4x^2-4x+1}\cdot\log_{\sqrt{2}}7}}{\log_{x^2}(2x+5)-\log_{|x|}(2x+3)}\leq 0$ (1)

Решение. Упростим неравенство (1). Применим МЗМ.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{7^{2(x+2)}-7^{2|2x-1|}}{\log_{|x|}\sqrt{2x+5}-\log_{|x|}(2x+3)}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(7-1)\left(2(x+2)-2|2x-1|\right)}{(|x|-1)\left(\sqrt{2x+5}-(2x+3)\right)}\leq 0,\\ |x|>0,\\ |x|\neq 1,\\ 2x+5>0,\ 2x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+2)-|2x-1|}{(x-1)(x+1)\left(2x+5-(2x+3)^2\right)}\leq 0,\\ x\neq 0,\ x>-1{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+2-2x+1)(x+2+2x-1)}{(x-1)(x+1)(-4x^2-10x-4)}\leq 0,\\ x>-1{,}5,\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-3)(3x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)(2x+1)}\leq 0,\\ x>-1{,}5,\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-3)(3x+1)}{(x-1)(x+1)(2x+1)}\leq 0,\\ x>-1{,}5,\ x\neq 0.\end{cases}$$



$$x\in(-1{,}5;\,-1)\cup\left(-0{,}5;\,-\frac{1}{3}\right]\cup(1;\,3].$$

Ответ: $(-1{,}5;\,-1)\cup\left(-0{,}5;\,-\dfrac{1}{3}\right]\cup(1;\,3]$.

Пример 15. Решите неравенство $\dfrac{\log_{5-x}\left(2x^2-17x+36\right)\cdot\log_{2x+9}(4-x)}{\log_{x+6}\sqrt{4x-x^2+21}-\log_{x+6}|7-x|}\geq 0$ (1)

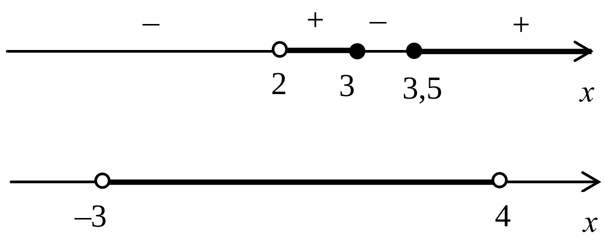
Решение. Применим МЗМ.

$$(1)\quad\Leftrightarrow\quad \frac{\left(\log_{5-x}\left(2x^2-17x+36\right)-\log_{5-x}1\right)\cdot\left(\log_{2x+9}(4-x)-\log_{2x+9}1\right)}{\log_{x+6}\sqrt{(x+3)(7-x)}-\log_{x+6}|7-x|}\geq 0\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(5-x-1)\left(2x^2-17x+36-1\right)(2x+9-1)(4-x-1)}{(x+6-1)\left(\sqrt{(x+3)(7-x)}-|7-x|\right)}\geq 0,\\ 5-x>0,\ 5-x\neq 1,\ 2x^2-17x+36>0,\\ 2x+9>0,\ 2x+9\neq 1,\ 4-x>0,\\ x+6>0,\ x+6\neq 1,\ (x+3)(7-x)>0,\ |7-x|>0\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(4-x)\left(2x^2-17x+35\right)(x+4)(3-x)}{(x+5)\left((x+3)(7-x)-(7-x)^2\right)}\geq 0,\\ x<5,\ x\neq 4,\ (x-4)(2x-9)>0,\\ x>-4{,}5,\ x\neq -4,\ x<4,\\ x>-6,\ x\neq -5,\ x\in(-3;\ 7),\ x\neq 7\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-4)(2x-7)(x-5)(x+4)(x-3)}{(x+5)(7-x)(x+3-7+x)}\geq 0,\\ x\in(-3;\ 4)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{(2x-7)(x-3)}{x-2}\geq 0,\\ x\in(-3;\ 4).\end{cases}$$



$x\in(2;\ 3]\cup[3{,}5;\ 4)$.

Ответ: $(2;\ 3]\cup[3{,}5;\ 4)$.

7.3. Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $\log_{2x+1}\left(2x^2-7x-4\right)<1$.

2. $\log_{2x+2}\left(3x^2+x-2\right)>1$.

3. $\log_{x+1}\left(11x^2+8x-3\right)>2$.

4. $\log_{x^2}(9-8x)\geq 6^{\lg(\cos 2\pi)}$.

5. $\log_{0,5}\cos^2\left(\frac{7}{3}\pi\right)+\log_{2x+2}\left(3x^2+x-2\right)>\log_{10-x}(10-x)^3$.

6. $\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}(x-2)\leq 2$.

7. $\log_{|x+2|}(x+3)>1$.

8. $\log_{0,5x-x^2+0,5}|16x+3|<0$.

9. $\log_{|x-4|}\left(x^2-4x\right)\leq 0$.

10. $\log_{|x+2|}5<\log_{|x|}5$.

11. $\log_{\sqrt{2}}2+\log_{x+5}\left(6-5x-x^2\right)<\log_{x+3}(x+3)^2+\log_{x+5}(2-8x)$.

12. $2+\log_{2x+2}\left(3x^2+x-2\right)>\log_{10-x}(10-x)^3$.

13. $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\geq\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right)$.

14. $\log_x(5-x)<\log_x\left(x^3-7x^2+14x-5\right)-\log_x(x-1)$.

15. $\log_{x+2}\left(7x^2-x^3\right)+\log_{(x+2)^{-1}}\left(x^2-3x\right)\geq\log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5-x}$.

16. $\log_{3-x}(2x+1)\cdot\log_{2x+1}x^2\leq\log_{3-x}(3x+1)\cdot\log_{3x+1}(x+2)$.

17. $2\log_{x-2}(7-2x)\cdot\log_{4x^2-28x+49}(x+1)+\log_{\left(\frac{x}{2x-4}-\frac{1}{2}\right)}\left(x^2-1\right)\leq 0$.

18. $\log_{|x+6|}2\cdot\log_2\left(x^2-x-2\right)\geq 1$.

19. $\dfrac{\log_7 12}{\log_7\left(x^2-9\right)}\geq\dfrac{\log_5\left(x^2+8x+12\right)}{\log_5\left(x^2-9\right)}$.

20. $\dfrac{\log_{7^{x+3}}49}{\log_{7^{x+3}}(-49x)}\leq\dfrac{1}{\log_7\left(\log_{\frac{1}{7}}7^x\right)}$.

21. $\log_{\frac{1}{9}}(7-6x)\cdot\log_{2-x}\dfrac{1}{3}\geq 1$.

22. $\dfrac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)}\leq\dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}$.

23. $\frac{1}{2}\log_{x-2}\left(x^2-10x+25\right)+\log_{5-x}\left(-x^2+7x-10\right)>3$**.**

24. $\frac{1}{2}\log_{x+4}\left(x^2+2x+1\right)+\log_{-x-1}\left(-x^2-5x-4\right)\le 3$**.**

25. $\frac{1}{2}\log_{x-1}\left(x^2-8x+16\right)+\log_{4-x}\left(-x^2+5x-4\right)>3$**.**

26. $2\log_{0,5x+0,5}x^2+\log_{|x|}\left(0,5x+0,5\right)\le 4$**.**

27. $2\log_{1-0,5x}\left(x-1\right)^2+\log_{|x-1|}\left(1-0,5x\right)\le 4$**.** **28.** $\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}\left(x-3\right)^2\ge 2$**.**

29. $\left|\log_{3x}\left(x^2-6x+8\right)-1\right|\le 1-\log_{3x}\left(x^2-6x+8\right)$**.**

30. $\log_{|3x-3|}\left(25^x-9^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right)$**.**

31. $\log_{|2x+2|}\left(1-9^x\right)<\log_{|2x+2|}\left(1+3^x\right)+\log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)$**.**

32. $\log_{|x+2|}\left(4^{-x}-1\right)<\log_{|x+2|}\left(2^{-x}+1\right)+\log_{|x+2|}\left(2^{-x-1}+1\right)$**.**

33. $\log_{5-4x-x^2}\left(5-9x-2x^2\right)\le\log_{1-x}\left(1-2x\right)$**.**

34. $\log_{5-x}\left(x^2-14x+49\right)\le 2\log_{5-x}\left(8x-x^2-7\right)-2$**.**

35. $\log_{0,25\sqrt{x^3+2x^2+3x-6}}\left(\log_{0,25}\left(-x^2+3x-2\right)\right)<0$**.**

36. $\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1$**.** **37.** $\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0$**.**

38. $\log_{|x|}\left(\log_2\left(4^x-12\right)\right)\le 1$**.**

39. $\log_{x-2}\left(\log_3\frac{x+3}{x-3}\right)>\log_{(x-2)^{-1}}\left(\log_{3^{-1}}\frac{x-3}{x+3}\right)$**.**

40. $\dfrac{\log_{3^{(x+1)^2-2}}\left(\log_{2x^2+2x+3}\left(x^2-2x\right)\right)}{\log_{3^{(x+1)^2-2}}\left(x^2+6x+10\right)}\ge 0$**.** **41.** $\dfrac{\log_{2^{(x+2)^2-1}}\left(\log_{2x^2+10x+15}\left(x^2+2x\right)\right)}{\log_{2^{(x+2)^2-1}}\left(x^2+10x+26\right)}\ge 0$**.**

42. $\dfrac{\log_{2x+9}\left(\log_{0,5}\left(x^2+4x\right)\right)}{\log_{2x+9}\left(x^2+8x+17\right)}\ge 0$**.** **43.** $\dfrac{3^{\sqrt{x^2-10x+25}}-4^{(5-2x)\cdot\log_2\sqrt{3}}}{\log_{(x+3)^2}\left(19-2x\right)-\log_{|x+3|}\left(2-x\right)}\ge 0$**.**

44. $\dfrac{\log_{(x+4)^2}(21-5x)-\log_{|x+4|}(1-5x)}{0{,}25^{\sqrt{x^2+2x+1}}-5^{(3x-1)\cdot\log_{\sqrt{5}}2}}\le 0$.

45. $\dfrac{\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{5x+13}\left(2x^2-21x+55\right)}{\log_{7-2x}\sqrt{12-x^2-x}-\log_{7-2x}|3-x|}\ge 0$.

46. $\dfrac{\log_{11-2x}(x+3)\cdot\log_{5x+8}(7-x)}{\log_{2x+3}\sqrt{2x-x^2+15}-\log_{2x+3}|5-x|}\ge 0$.

Ответы:

1. $(4;\ 5)$. **2.** $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **3.** $(0{,}4;\ +\infty)$. **4.** $[-9;\ -1)$.

5. $\left(\dfrac{4}{3};\ 9\right)\cup(9;10)$. **6.** $(2;\ 2{,}25]\cup\left(\dfrac{7}{3};\ 2{,}5\right)\cup(2{,}5;\ 3)\cup(3;+\infty)$.

7. $(-3;\ -2{,}5)\cup(-1;\ +\infty)$. **8.** $(-0{,}5;\ -0{,}25)\cup(-0{,}125;\ 1)$.

9. $[2-\sqrt{5};\ 0)\cup[2+\sqrt{5};\ 5)$. **10.** $(-3;\ -2)\cup(-2;-1)\cup(1;\ +\infty)$.

11. $(-3;\ -2)\cup(-2;\ -1)$. **12.** $\left(\dfrac{4}{3};\ 9\right)\cup(9;\ 10)$. **13.** $\{1\}\cup(1{,}5;\ 3)$.

14. $(1;2)\cup(4;\ 5)$. **15.** $(-2;\ -1)\cup(3;\ 5)$.

16. $\left(-\dfrac{1}{3};\ 0\right)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ 3)$. **17.** $(3;\ 3{,}5)$.

18. $(-\infty;-7)\cup(-5;-2]\cup[4;+\infty)$.

19. $[-8;\ -6)\cup(3;\ \sqrt{10})$. **20.** $[-49;\ -3)\cup(-3;\ -1)\cup\left(-\dfrac{1}{49};\ 0\right)$.

21. $[-3;\ 1)\cup\left(1;\ \dfrac{7}{6}\right)$. **22.** $(-7;\ -6)\cup[-3;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 4]$.

23. $(3;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ 4)$. **24.** $(-4;\ -3)\cup\{-2{,}5\}\cup(-2;\ -1)$.

25. $(2;\ 2{,}5)\cup(2{,}5;\ 3)$. **26.** $-0{,}5$. **27.** $1{,}5$. **28.** -1.

29. $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right)\cup[1;\ 2)\cup(4;\ 8]$. **30.** $\left(0;\ \dfrac{2}{3}\right)\cup\left(1;\ \dfrac{4}{3}\right)$ **31.** $(-1{,}5;\ -1)\cup(-0{,}5;\ 0)$.

32. $(-3;\ -2)\cup(-1;\ 0)$. **33.** $\left(-5;\ -2-2\sqrt{2}\right)\cup[-4;\ 0)\cup(0;\ 0{,}5)$.

34. $[3;\ 4)$. **35.** $(1;\ 1{,}5)\cup(1{,}5;\ 2)$. **36.** $(\log_3 10;\ +\infty)$.

37. $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};\ 2\right)$. **38.** $(\log_3 13;\ 2]$. **39.** $(3;\ 6)$.

40. $\left(-3;\ -\sqrt{2}-1\right)\cup\left(-\sqrt{2}-1;\ -1\right]$. **41.** $(-5;\ -3)$.

42. $\left[-2-1{,}5\sqrt{2};\ -4\right)\cup\left(0;\ -2+1{,}5\sqrt{2}\right]$. **43.** $(-\infty;\ -4)\cup(-3;\ -2)\cup[0;\ 2)$.

44. $(-\infty;\ -5)\cup(-3;\ -0{,}8]\cup(0;\ 0{,}2)$. **45.** $(-2;\ -1]\cup(-0{,}5;\ 1)$.

46. $(-1{,}4;\ -1)\cup(1;\ 5)$.

8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ

8.1. Использование области определения функций

Пример 1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+3}+(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}\ge\sqrt{2x-2}-x+1 \qquad (1)$$

Решение.

I. $ООН:\ \begin{cases}x^2-4x+3\ge 0,\\ 3+2x-x^2\ge 0,\\ 2x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-1)\ge 0,\\ (x-3)(x+1)\le 0,\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-1)\ge 0,\\ x-3\le 0,\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)\ge 0,\\ x\in[1;\,3]\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=3.\end{array}\right.$$

II. Проверим полученные значения на исходное неравенство (1).

1) $\begin{cases}x=1,\\ 0\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=1.$ 2) $\begin{cases}x=3,\\ 0\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=3.$

Ответ: $\{1;\,3\}$.

8.2. Использование ограниченности функций

8.2.1. Использование неотрицательности функций

I. $\begin{cases}f(x)+g(x)\ge 0,\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\quad x\in D(f)\cap D(g).$

II. $\begin{cases}f(x)+g(x)>0,\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x\in D(f)\cap D(g),\\ x\ne x_k,\end{cases}$

где x_k – решения системы $\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)=0.\end{cases}$

III. $\begin{cases}f(x)+g(x)\le 0,\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+g(x)=0,\\ f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)=0.\end{cases}$

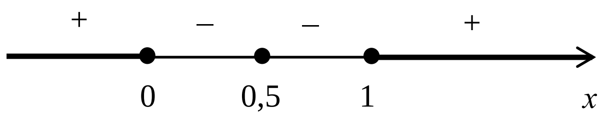
Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{(2x-1)^4-(2x-1)^2}+(2x-1)^2\geq 0$ (1)

Решение. $(1)\ \Leftrightarrow\ f_1(x)+f_2(x)\geq 0,$ (2)

где $f_1(x)=\sqrt{(2x-1)^4-(2x-1)^2}$, $f_2(x)=(2x-1)^2$.

1) OOH: $(2x-1)^4-(2x-1)^2\geq 0\ \Leftrightarrow\ (2x-1)^2\left((2x-1)^2-1\right)\geq 0\ \Leftrightarrow$

$(2x-1)^2(2x-1-1)(2x-1+1)\geq 0\ \Leftrightarrow\ (2x-1)^2(x-1)x\geq 0.$



$x\in(-\infty;\,0]\cup\{0{,}5\}\cup[1;\,+\infty).$

2) Так как $f_1(x)\geq 0,\ f_2(x)\geq 0$ на OOH, то $(2)\ \Leftrightarrow\ x\in OOH\ \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty;\,0]\cup\{0{,}5\}\cup[1;\,+\infty).$

Ответ: $(-\infty;\,0]\cup\{0{,}5\}\cup[1;\,+\infty).$

Пример 3. Решите неравенство $|x-1|+\log_2\left(x^2-2x+5\right)-2\leq 0$ (1)

Решение. $(1)\ \Leftrightarrow\ f_1(x)+f_2(x)\leq 0,$ (2)

где $f_1(x)=|x-1|,\quad f_2(x)=\log_2\left(x^2-2x+5\right)-2.$

1) OOH: $x^2-2x+5>0\ \Leftrightarrow\ x\in R.$

2) $x^2-2x+5=(x-1)^2+4\geq 4\ \Rightarrow\ f_2(x)\geq 0.$

3) $(2)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} f_1(x)+f_2(x)\leq 0,\\ f_1(x)\geq 0,\ \ f_2(x)\geq 0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0\end{cases}\ \Leftrightarrow$

$\begin{cases}|x-1|=0,\\ \log_2\left(x^2-2x+5\right)-2=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=1,\\ \log_2 4-2=2-2=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ x=1.$

Ответ: $\{1\}$.

Пример 4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}16^x+12^x-2\cdot 9^x<0, & (1)\\ \log_{1-\frac{x^2}{26}}\left(x^2-10|x|+26\right)-\log_{1+\frac{x^2}{26}}\left(x^2-10|x|+26\right)\geq 0 & (2)\end{cases}$$

Решение.

I. Решим неравенство (1). Разделим (1) на 9^x $\left(E\left(a^t\right)=\left(0;+\infty\right)\right)$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{4}{3}\right)^{x}-2<0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{x}+2\right)\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{x}-1\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x}-\left(\frac{4}{3}\right)^{0}<0 \Leftrightarrow x-0<0 \Leftrightarrow x<0.$$

II. Решим неравенство (2).

1) Обозначим $a_1(x)=1-\dfrac{x^2}{26},\ a_1(x)\in(0;1),\ a_2(x)=1+\dfrac{x^2}{26},\ a_2(x)>1,$

$g(x)=x^2-10|x|+26=(|x|-5)^2+1\geq 1,$ при $x<0$ $g(x)=(x+5)^2+1\geq 1.$

Тогда $f_1(x)=\log_{a_1(x)}g(x)\leq 0,\ \ f_2(x)=\log_{a_2(x)}g(x)\geq 0.$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)-f_2(x)\geq 0, \\ f_1(x)\leq 0, \\ f_2(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-f_1(x))+f_2(x)\leq 0, \\ -f_1(x)\geq 0, \\ f_2(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_{a_1(x)}g(x)=0, \\ \log_{a_2(x)}g(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow g(x)=1 \Leftrightarrow (|x|-5)^2+1=1 \Leftrightarrow |x|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=5. \end{array}\right.$$

III. $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-5.$

Ответ: $\{-5\}$.

8.2.2. Метод мини-максов (метод оценки)

$$\begin{cases} f(x)\leq g(x), \\ f(x)\geq A, \\ g(x)\leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq A, \\ g(x)\leq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$$

Пример 5. Решите неравенство $7^{-|x-3|}\cdot\log_2\left(6x-x^2-7\right)\geq 1$ (1)

Решение.

$(1) \Leftrightarrow \log_2\left(6x-x^2-7\right)\geq 7^{|x-3|} \Leftrightarrow f(x)\geq g(x),$ (2)

где $f(x)=\log_2(6x-x^2-7)$, $g(x)=7^{|x-3|}$.

Найдем $E(f)$, $E(g)$.

1) $E(f)-?$

а) $t=t(x)=-x^2+6x-7=-(x^2-6x+7)=-(x-3)^2+2 \quad \Rightarrow \quad t\le 2.$

б) $\begin{cases} f(t)=\log_2 t, \\ t\in(0;\ 2]. \end{cases}$

Так как функция $y=f(t)$ возрастает на промежутке $t\in(0;\ 2]$ $(a=2>1)$, то $E(f)=(-\infty;\ 1] \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\le 1.$

2) $E(g)-?$

а) $z=|x-3|$, $z\ge 0$;

б) $\begin{cases} g(z)=7^z, \\ z\ge 0. \end{cases}$

Так как функция $y=g(z)$ возрастает на промежутке

$z\in[0;\ +\infty)$ $(a=7>1)$, то $E(g)=[1;\ +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad g(x)\ge 1$.

3) $\begin{cases} f(x)\ge g(x), \\ f(x)\le 1, \\ g(x)\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\le 1, \\ g(x)\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=1, \\ g(x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \log_2(6x-x^2-7)=1, \\ 7^{|x-3|}=1=7^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ \log_2 2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=3.$

Ответ: $\{3\}$.

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x|)\ge 2^{|x|}-2, & (1) \\ \log_{(x+2,5)}\left(\dfrac{x-5}{2x-3}\right)^2>0 & (2) \end{cases}$$

Решение.

I. Решим неравенство (1).

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\ge g(x),$ (3)

где $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x|)$, $g(x)=2^{|x|}-2$.

Найдем $E(f)$, $E(g)$.

1) $E(f)-?$

а) $u=|\sin x|$, $u\in[0;\,1]$.

б) $\begin{cases} t=3+|\sin x|=3+u, \\ u\in[0;\,1] \end{cases} \Rightarrow \quad t\in[3;\,4]$.

в) $\begin{cases} f(t)=\log_{\frac{1}{3}} t, \\ t\in[3;\,4]. \end{cases}$

Так как функция $y=f(t)$ убывает на промежутке $[3;\,4]$ $\left(a=\dfrac{1}{3}\in(0;\,1)\right)$, то

$$E(f)=\left[\log_{\frac{1}{3}} 4;\ \log_{\frac{1}{3}} 3\right]=[-\log_3 4;\,-1].$$

2) $E(g)-?$

а) $\begin{cases} z=2^{|x|}, \\ |x|\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad z\ge 2^0=1 \quad \Leftrightarrow \quad z\ge 1.$

б) $\begin{cases} g(x)=z-2, \\ z\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \quad E(g)=[-1;\,+\infty) \quad \Leftrightarrow \quad g(x)\ge -1.$

3) (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge g(x), \\ f(x)\le -1, \\ g(x)\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\le -1, \\ g(x)\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-1, \\ g(x)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x|)=-1, \\ 2^{|x|}-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ \log_{\frac{1}{3}}(3+0)=-\log_3 3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0.$$

II. $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ \log_{2,5}\left(\dfrac{25}{9}\right)=\log_{2,5}\left(2\dfrac{7}{9}\right)>\log_{2,5} 2,5=1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0.$

Ответ: $\{0\}$.

8.3. Использование монотонности функций

Принцип монотонности для неравенств

Пусть функция $y=f(t)$ определена и строго монотонна на промежутке M.

1. Если функция $y=f(t)$ возрастает на промежутке M, то

$$f(t_1(x))-f(t_2(x))\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} t_1(x)-t_2(x)\vee 0,\\ t_1(x)\in M,\\ t_2(x)\in M.\end{cases}$$

2. Если функция $y=f(t)$ убывает на промежутке M, то

$$f(t_1(x))-f(t_2(x))\vee 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -(t_1(x)-t_2(x))\vee 0,\\ t_1(x)\in M,\\ t_2(x)\in M.\end{cases}$$

Теорема о корне

1. Если в уравнении $f(x)=C=const$ функция $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна на множестве M, то уравнение имеет на M *не более одного корня*.

2. Если в уравнении $f(x)=g(x)$ функция $y=f(x)$ непрерывна и строго *возрастает*, а функция $y=g(x)$ непрерывна и строго *убывает* на множестве M, то уравнение имеет на M *не более одного корня*.

Пример 7. Решите неравенство $\sqrt{2x-3}+\sqrt[3]{x+6}\le 3$ (1)

Решение.

1) $ООН:\ \ 2x-3\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ge 1{,}5.$

2) Функция $y=f(x)=\sqrt{2x-3}+\sqrt[3]{x+6}$ возрастает при $x\ge 1{,}5$, как сумма двух возрастающих функций.

3) Так как $f(2)=\sqrt{4-3}+\sqrt[3]{2+6}=3$, то по теореме о корне $x=2$ единственный корень уравнения $f(x)=3$.

4) $(1) \Leftrightarrow f(x)\le 3 \Leftrightarrow f(x)\le f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2, \\ x\ge 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1{,}5;\ 2]$.

Ответ: $[1{,}5;\ 2]$.

Пример 8. Решите неравенство $4\left(1+\log_3\left(x^2+3x-7\right)\right)\ge 18-3x-x^2$ (1)

Решение. $(1) \Leftrightarrow 4\log_3\left(x^2+3x-7\right)+\left(x^2+3x-14\right)\ge 0$ (2)

1) $t=x^2+3x-7,\ x^2+3x-14=t-7$.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\log_3 t+t-7\ge 0, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t)\ge 0, & (3) \\ t>0. & (4) \end{cases}$$

где $f(t)=4\log_3 t+t-7$.

2) Функция $y=f(t)$ возрастает при $t>0$, как сумма двух возрастающих функций.

3) Так как $f(3)=4+3-7=0$, то по теореме о корне $t=3$ единственный корень уравнения $f(t)=0$.

4) $\begin{cases} (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t)\ge f(3), \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 3, \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow t\ge 3 \Leftrightarrow x^2+3x-7\ge 3 \Leftrightarrow$

$x^2+3x-10\ge 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -5, \\ x\ge 2. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\ -5]\cup[2;\ +\infty)$.

Пример 9. Решите неравенство $\dfrac{\arccos\left(x^2-6x+8\right)-\arccos(x-2)}{\log_2^3(8-x)-3x+4}\ge 0$ (1)

Решение.

$$\text{I. } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\ge 0, & (2) \\ x\in D(f_1)\cap D(f_2), & (3) \end{cases}$$

где $f_1(x)=\arccos\left(x^2-6x+8\right)-\arccos(x-2)$, $f_2(x)=\log_2^3(8-x)-3x+4$.

1) $D(f_1)\cap D(f_2) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -1\le x^2-6x+8\le 1, \\ -1\le x-2\le 1, \\ 8-x>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2-6x+7\le 0, \\ x^2-6x+9\ge 0, \\ x\in[1;\,3], \\ x<8 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\in[x_1;\,x_2], \\ x\in R, \\ x\in[1;\,3] \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x\in[x_1;\,3],$ где $x_1=3-\sqrt{2},\; x_2=3+\sqrt{2}$.

$$2)\; \begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\ge 0, & (4) \\ x\in[x_1;\,3]. & (5) \end{cases}$$

II. Применим МЗМ. Заменим функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на функции равного знака.

1) Функция $y=f_1(t)=\arccos(t)$ убывает на $t\in[-1;\,1]$ $\Rightarrow$

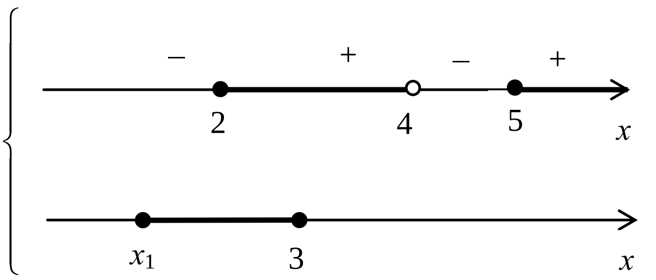
$$\begin{cases} f_1(x)\vee 0, \\ x\in[x_1;\,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-(x^2-6x+8)\vee 0, \\ x\in[x_1;\,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x^2-7x+10)\vee 0, \\ x\in[x_1;\,3] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -(x-5)(x-2)\vee 0, \\ x\in[x_1;\,3]. \end{cases}$$

2) Функция $y=f_2(x)$ убывает на $x\in[x_1;\,3]$. Так как $f_2(4)=0$, то по теореме о корне $x=4$ единственный корень уравнения $f_2(x)=0$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} f_2(x)\vee 0, \\ x\in[x_1;\,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(x)-f_2(4)\vee 0, \\ x\in[x_1;\,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\vee 0, \\ x\in[x_1;\,3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-4)\vee 0, \\ x\in[x_1;\,3]. \end{cases}$$

$$\textbf{III.}\; \begin{cases} (4) \\ (5) \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{(x-5)(x-2)}{x-4}\ge 0, \\ x\in[x_1;\,3]. \end{cases}$$



$x\in[2;\,3]$.

Ответ: $[2;\,3]$.

8.4. Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}\ge\sqrt{x}-1$.

2. $\sqrt{(x-6)^2(x-8)}\ge|x-6|\sqrt{64-x^2}$.

3. $\left(2+\sqrt{x^2-7x+12}\right)\left(\frac{2}{x}-1\right)\le\left(\sqrt{14x-2x^2-24}+2\right)\cdot\log_x\frac{2}{x}$.

4. $\sqrt{x^2-7x+10}+9\log_4\frac{x}{8}\ge2x+\sqrt{14x-20-2x^2}-13$.

5. $\sqrt{(x+1)^4-(x+1)^2}+(x+1)^2\ge0$.

6. $\sqrt{(7x+1)^2-(7x+1)^4}+4(7x+1)^2>0$.

7. $(\log_2 x-1)^2+(x-2)^2>0$.

8. $\sqrt{x^2+x+4}-\sqrt{7-x}>x^2+2x-3$.

9. $\begin{cases}25^x+3\cdot10^x-4\cdot4^x>0,\\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)-\log_{1+\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)\ge0.\end{cases}$

10. $5^{-|x-2|}\cdot\log_2\left(4x-x^2-2\right)\ge1$.

11. $2x-x^2\ge\log_9\left(x^2+7x+1\right)-\log_9 x$.

12. $\left(6x-10-x^2\right)\cdot\log_{\sqrt{2}}\left(1+\cos^2x+\sin^2\pi x+4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\right)\ge-2$.

13. $2\left(1+\sin^2(x-1)\right)\le2^{2x-x^2}$.

14. $5^{2x^2-2x+1}\le\sqrt{3\sin\left(\pi x-arctg\frac{4}{3}\right)+4\cos\left(\pi x-arctg\frac{4}{3}\right)}$.

15. $\begin{cases}\left(2^x+2^{-x}\right)\le2\cos\frac{x^2+x}{6},\\ \log_{x+3}\left(\frac{x-6}{2x-5}\right)^2>0\end{cases}$.

16. $\sqrt{14-x}-\sqrt{x-4}\le\sqrt{x-1}$.

17. $\sqrt[4]{x}+x^5+2\log_6(x+5)-3\sqrt{1-x}<4$.

18. $\log_2\left(\sqrt{x^2-8x-11}+1\right)\cdot\lg\left(x^2-8x-10\right)\ge2$.

19. $\dfrac{\arcsin\frac{x-1}{2}-\arcsin\left(x^2-4x+3\right)}{\log_2\left(2x^2+3\right)-\log_2(9x-1)}\le0$.

20. $\dfrac{3^{\sqrt{x-1}}-7^{\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{x+1}{9}\right)}}{|x+5|-|17-x|}\geq 0$.

21. $\dfrac{\left(\sqrt{x+3}+x-3\right)\left(\sqrt{4x+5}+x-4\right)}{\left|8-|2x-3|\right|-9}\geq 0$.

Ответы:

1. $\{1\}$.
2. $\{6;\,8\}$.
3. $\{4\}$.
4. $\{2\}$.

5. $(-\infty;\,-2]\cup\{-1\}\cup[0;\,+\infty)$.
6. $\left[-\dfrac{2}{7};\,-\dfrac{1}{7}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{7};\,0\right]$.

7. $(0;\,2)\cup(2;\,+\infty)$.
8. $(-3;\,1)$.
9. $\{6\}$.

10. $\{2\}$.
11. $\{1\}$.
12. $\{3\}$.
13. $\{1\}$.

14. $\{0{,}5\}$.
15. $\{0\}$.
16. $[5;\,14]$.
17. $[0;\,1)$.

18. $(-\infty;\,-2]\cup[10;\,+\infty)$.
19. $[1;\,3]$.
20. $[1;\,2]\cup(6;\,+\infty)$.

21. $\{1\}\cup(10;\,+\infty)$.

9. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

9.1. Примеры с решениями

Пример 1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\log_{0,5}\left(8x^2+24x-16\right)+\log_2\left(x^4+6x^3+9x^2\right)}{x^2+3x-10} \geq 0, & (1) \\ \dfrac{|3x-5|-|x+2|}{|3x-4|-|x+1|} \geq 0. & (2) \end{cases}$$

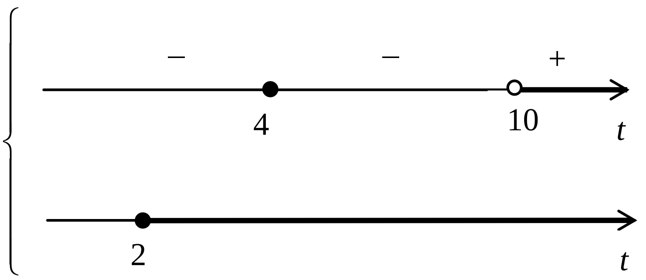
Решение.

I. Решим неравенство (1).

$$(1) \iff \frac{\log_2\left(x^2+3x\right)^2-\log_2\left(8\left(x^2+3x\right)-16\right)}{\left(x^2+3x\right)-10} \geq 0,$$

$$t=x^2+3x, \quad t=(x+1{,}5)^2-2{,}25 \ \Rightarrow \ t \geq -2{,}25.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2 t^2-\log_2(8t-16)}{t-10} \geq 0, \\ t \geq -2{,}25 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(2-1)\left(t^2-8t+16\right)}{t-10} \geq 0, \\ t \geq -2{,}25, \\ t^2>0,\ 8t-16>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(t-4)^2}{t-10} \geq 0, \\ t>2 \end{cases} \iff$$



$$\left[\begin{array}{l} t=4, \\ t>10 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2+3x-4=0, \\ x^2+3x-10>0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} (x+4)(x-1)=0, \\ (x+5)(x-2)>0 \end{array}\right. \iff$$

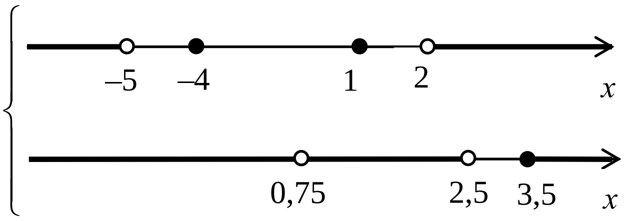
$$x \in (-\infty;\,-5) \cup \{-4\} \cup \{1\} \cup (2;\,+\infty).$$

II. Решим неравенство (2).

$$(2) \iff \frac{(3x-5-x-2)(3x-5+x+2)}{(3x-4-x-1)(3x-4+x+1)} \geq 0 \iff \frac{(2x-7)(4x-3)}{(2x-5)(4x-3)} \geq 0 \iff$$

$$\begin{cases}\dfrac{2x-7}{2x-5}\ge 0,\\ x\ne 0{,}75\end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;\ 0{,}75)\cup(0{,}75;\ 2{,}5)\cup[3{,}5;\ +\infty).$$

III. $\begin{cases}(1)\\ \\ (2)\end{cases} \Leftrightarrow$



$$x\in(-\infty;\ -5)\cup\{-4\}\cup\{1\}\cup(2;\ 2{,}5)\cup[3{,}5;\ +\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\ -5)\cup\{-4\}\cup\{1\}\cup(2;\ 2{,}5)\cup[3{,}5;\ +\infty)$.

Пример 2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}\le \dfrac{\sqrt{x^4-3x^2+6x+8}}{\sqrt{8-x}}, & (1)\\ \dfrac{(x+8)^{x^2-x-3}-(x+8)^{2x+7}}{\log_5(x+6)}\ge 0. & (2)\end{cases}$$

Решение.

I. Решим неравенство (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^4-3x^2+6x+8}-\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{8-x}\ge 0,\\ 8-x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^4-3x^2+6x+8-(x+2)(8-x)\ge 0,\\ x^4-3x^2+6x+8\ge 0,\\ x+2\ge 0,\\ 8-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^4-3x^2+6x+8+x^2-6x-16\ge 0,\\ x\in[-2;\ 8)\end{cases} \Leftrightarrow$$

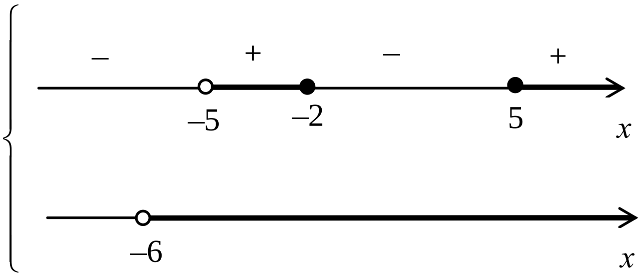
$$\begin{cases}x^4-2x^2-8\ge 0,\\ x\in[-2;\ 8)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-4)(x^2+2)\ge 0,\\ x\in[-2;\ 8)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x+2)\ge 0,\\ x\in[-2;\ 8)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x\in\{-2\}\cup[2;\ 8).$$

II. Решим неравенство (2).

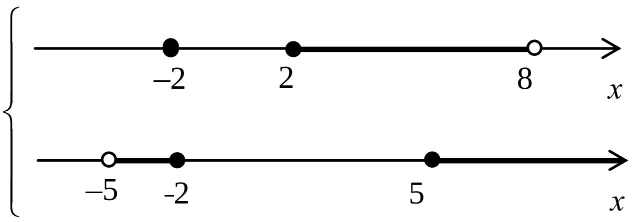
$$(2)\ \Leftrightarrow\ \frac{(x+8)^{x^2-x-3}-(x+8)^{2x+7}}{\log_5(x+6)-\log_5 1}\ge 0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{(x+8-1)(x^2-x-3-2x-7)}{(5-1)(x+6-1)}\ge 0,\\ x+8>0,\quad x+6>0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+7)(x^2-3x-10)}{x+5}\ge 0,\\ x>-6\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{(x-5)(x+2)}{x+5}\ge 0,\\ x>-6.\end{cases}$$



$x\in(-5;\,-2]\cup[5;\,+\infty).$

III. $\begin{cases}(1)\\ (2)\end{cases}\ \Leftrightarrow$



$x\in\{-2\}\cup[5;\,8).$

Ответ: $\{-2\}\cup[5;\,8).$

Пример 3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}\le 10, & (1)\\ \log_2(5x-3)-4\cdot\log_{5x-3}2>3. & (2)\end{cases}$$

Решение.

I. Решим неравенство (1).

$$(1)\ \Leftrightarrow\ 5^{\log_5^2 x}+\left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x}\le 10\ \Leftrightarrow\ 2\cdot 5^{\log_5^2 x}-10\le 0\ \Leftrightarrow\ 5^{\log_5^2 x}-5\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$(5-1)(\log_5^2-1)\le 0\ \Leftrightarrow\ (\log_5 x-1)(\log_5 x+1)\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$(\log_5 x-\log_5 5)(\log_5(5x)-\log_5 1)\le 0\ \Leftrightarrow\begin{cases}(5-1)(x-5)(5-1)(5x-1)\le 0,\\ x>0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-5)(5x-1)\le 0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in[0{,}2;\ 5].$$

II. Решим неравенство (2).

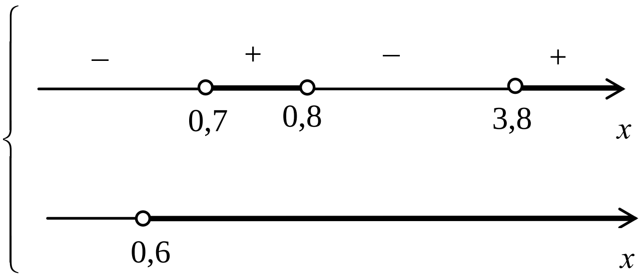
$$(2) \Leftrightarrow \quad \log_2(5x-3)-\frac{4}{\log_2(5x-3)}-3>0 \qquad (3)$$

$t=\log_2(5x-3)$.

$$(3) \Leftrightarrow \quad t-\frac{4}{t}-3>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2-3t-4}{t}>0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t-4)(t+1)}{t}>0 \quad \Leftrightarrow$$

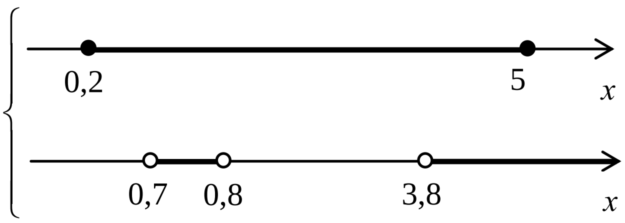
$$\frac{(\log_2(5x-3)-\log_2 16)(\log_2(10x-6)-\log_2 1)}{\log_2(5x-3)-\log_2 1}>0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(2-1)(5x-3-16)(2-1)(10x-6-1)}{(2-1)(5x-3-1)}>0, \\ 5x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{(5x-19)(10x-7)}{5x-4}>0, \\ x>0{,}6. \end{cases}$$



$x\in(0{,}7;\ 0{,}8)\cup(3{,}8;\ +\infty)$.

III. $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow$



$x\in(0{,}7;\ 0{,}8)\cup(3{,}8;\ 5]$.

Ответ: $(0{,}7;\ 0{,}8)\cup(3{,}8;\ 5]$.

Пример 4. Решите систему неравенств

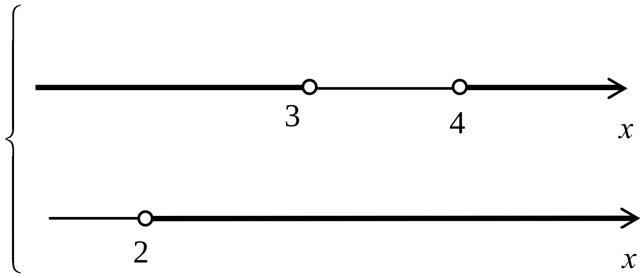
$$\begin{cases} (x-2)^{x^2-6x+8}>1, & (1) \\ \dfrac{\log_2^2(2x-3)+3\cdot\log_2(2x-3)-14}{\log_2(2x-3)-3}>4. & (2) \end{cases}$$

Решение.

I. Решим неравенство (1).

$$(1)\ \Leftrightarrow\ (x-2)^{x^2-6x+8}-(x-2)^0>0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}(x-2-1)\left(x^2-6x+8-0\right)>0,\\ x-2>0\end{cases}\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-3)(x-4)(x-2)>0,\\ x-2>0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}(x-3)(x-4)>0,\\ x-2>0.\end{cases}$$



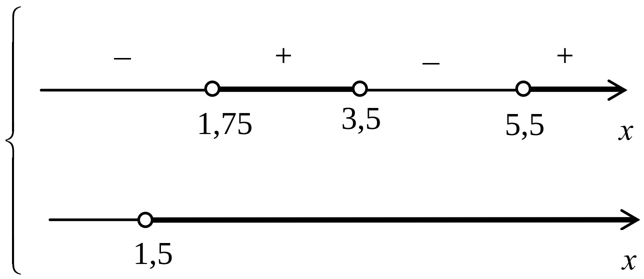
$x\in(2;\,3)\cup(4;\,+\infty).$

II. Решим неравенство (2). $t=\log_2(2x-3),\quad t\in R.$

$$(2)\ \Leftrightarrow\ \frac{t^2+3t-14}{t-3}-4>0\ \Leftrightarrow\ \frac{t^2+3t-14-4t+12}{t-3}>0\ \Leftrightarrow\ \frac{t^2-t-2}{t-3}>0\ \Leftrightarrow$$

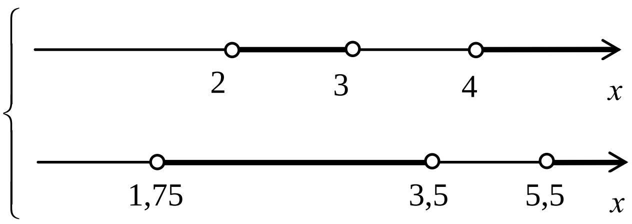
$$\frac{(t-2)(t+1)}{t-3}>0\ \Leftrightarrow\ \frac{(\log_2(2x-3)-\log_2 4)(\log_2(4x-6)-\log_2 1)}{\log_2(2x-3)-\log_2 8}>0\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(2-1)(2x-3-4)(2-1)(4x-6-1)}{(2-1)(2x-3-8)}>0,\\ 2x-3>0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{(2x-7)(4x-7)}{2x-11}>0,\\ x>1{,}5.\end{cases}$$



$x\in(1{,}75;\,3{,}5)\cup(5{,}5;\,+\infty).$

III. $\begin{cases}(1)\\ (2)\end{cases}\ \Leftrightarrow$



$x\in(2;\,3)\cup(5{,}5;\,+\infty).$

Ответ: $(2;\,3)\cup(5{,}5;\,+\infty).$

Пример 5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{x+3}\left(x^2-3x+3\right)\cdot\log_{5-x}(x-1)\le 0, & (1)\\ |5-3x|^{2x-9}+|5-3x|^{9-2x}\le 2. & (2)\end{cases}$$

Решение.

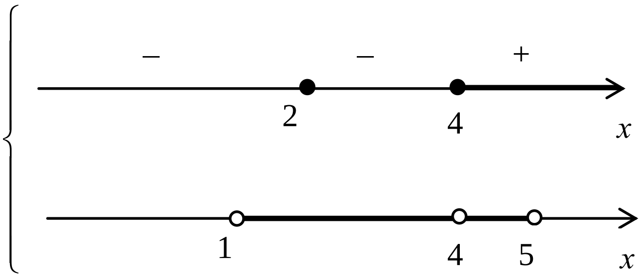
I. Решим неравенство (1).

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \left(\log_{x+3}\left(x^2-3x+3\right)-\log_{x+3}1\right)\left(\log_{5-x}(x-1)-\log_{5-x}1\right)\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x+3-1)\left(x^2-3x+3-1\right)(5-x-1)(x-1-1)\le 0,\\ x+3>0,\ \ x+3\ne 1,\\ x^2-3x+3>0,\\ 5-x>0,\ \ 5-x\ne 1,\ \ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x+2)\left(x^2-3x+2\right)(x-4)(x-2)\ge 0,\\ x>-3,\ \ x\ne -2,\\ x\in R,\\ x<5,\ \ x\ne 4,\ \ x>1\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}(x+2)(x-2)^2(x-1)(x-4)\ge 0,\\ x\in(1;\,5),\ \ x\ne 4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(x-2)^2(x-4)\ge 0,\\ x\in(1;\,5),\ \ x\ne 4.\end{cases}$$



$x\in\{2\}\cup(4;\,5)$.

II. Решим неравенство (2).

1) $t=|5-x|^{2x-9},\ t>0.$

$$(2)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}t+\dfrac{1}{t}-2\le 0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}t^2-2t+1\le 0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}(t-1)^2\le 0,\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow\ \ t=1.$$

$$2)\ t=1\ \Leftrightarrow\ |5-3x|^{2x-9}-|5-3x|^{0}=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}(|5-3x|-1)(2x-9-0)=0,\\ |5-3x|>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(5-3x-1)(5-3x+1)(2x-9)=0,\\ 5-3x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4-3x)(6-3x)(2x-9)=0,\\ x\neq \dfrac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3},\\ x=2,\\ x=4{,}5.\end{array}\right.$$

III. $\begin{cases}(1)\\ (2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\{2\}\cup(4;\ 5),\\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3},\\ x=2,\\ x=4{,}5\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,\\ x=4{,}5.\end{array}\right.$

Ответ: $\{2;\ 4{,}5\}$.

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{4^x-9\cdot 2^x-2^{0,5x+1}+16}{2^{0,5x}-4}\geq -2, & (1)\\ \log_{2|x|}\left(x^2-10x+21\right)\leq \log_{2|x|}5. & (2)\end{cases}$$

Решение.

I. Решим неравенство (1).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4^x-9\cdot 2^x-2\cdot 2^{0,5x}+16+2\cdot 2^{0,5x}-8}{2^{0,5x}-4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{2x}-9\cdot 2^x+8}{2^{0,5x}-4}\geq 0 \Leftrightarrow$$

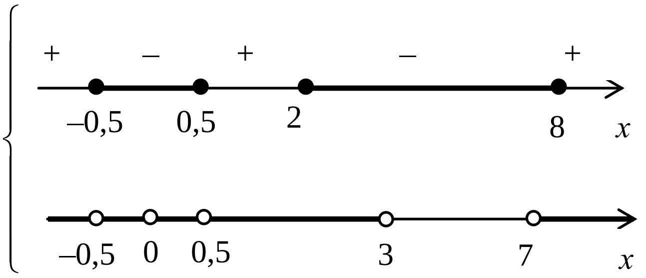
$$\frac{(2^x-8)(2^x-1)}{2^{0,5x}-4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^x-2^3)(2^x-2^0)}{2^{0,5x}-2^2}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2-1)(x-3)(2-1)(x-0)}{(2-1)(0{,}5x-2)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)x}{x-4}\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0;\ 3]\cup(4;\ +\infty).$$

II. Решим неравенство (2).

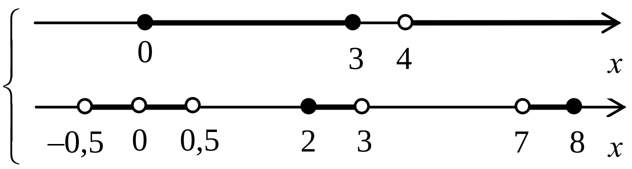
$$(2) \Leftrightarrow \log_{2|x|}\left(x^2-10x+21\right)-\log_{2|x|}5\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(2|x|-1)\left(x^2-10x+21-5\right)\leq 0,\\ 2|x|>0,\ \ 2|x|\neq 1,\\ x^2-10x+21>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2x-1)(2x+1)\left(x^2-10x+16\right)\le 0,\\ x\ne 0,\ x\ne -0{,}5,\ x\ne 0{,}5,\\ (x-7)(x-3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-1)(2x+1)(x-8)(x-2)\le 0,\\ x\ne 0,\ x\ne -0{,}5,\ x\ne 0{,}5,\\ (x-7)(x-3)>0.\end{cases}$$



$x\in(-0{,}5;\ 0)\cup(0;\ 0{,}5)\cup[2;\ 3)\cup(7;\ 8]$.

III. $\begin{cases}(1)\\ (2)\end{cases}\Leftrightarrow$



.

$x\in(0;\ 0{,}5)\cup[2;\ 3)\cup(7;\ 8]$.

Ответ: $(0;\ 0{,}5)\cup[2;\ 3)\cup(7;\ 8]$.

Пример 7. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\left(3^{x\log_3 4}\cdot 4^{7x^2-6}-1\right)\cdot\log_x\dfrac{4x+1}{6x-6}\ge 0, & (1)\\ 4x^2-3|2x-5|\le 20x-27. & (2)\end{cases}$$

Решение.

I. Решим неравенство (1).

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \left(4^{x+7x^2-6}-4^0\right)\cdot\left(\log_x\frac{4x+1}{6x-6}-\log_x 1\right)\ge 0\ \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(4-1)\left(7x^2+x-6-0\right)(x-1)\left(\dfrac{4x+1}{6x-6}-1\right)\ge 0,\\ x>0,\ x\ne 1,\\ \dfrac{4x+1}{6x-6}>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(7x-6)(x+1)(x-1)(4x+1-6x+6)}{6x-6}\ge 0,\\ x>0,\ x\ne 1,\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-(2x-7)\ge 0,\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow\ x\in(1;\ 3{,}5].$$

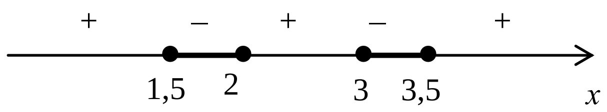
II. Решим неравенство (2).

$$(2)\ \Leftrightarrow\ (4x^2-20x+25)-3|2x-5|+2\le 0\ \Leftrightarrow\ |2x-5|^2-3|2x-5|+2\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$(|2x-5|-2)(|2x-5|-1)\le 0\ \Leftrightarrow$$

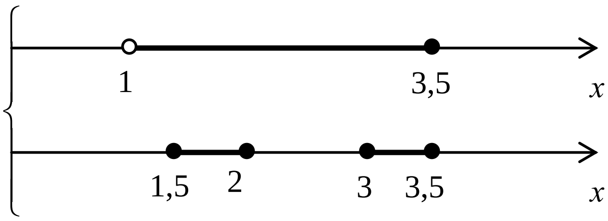
$$(2x-5-2)(2x-5+2)(2x-5-1)(2x-5+1)\le 0\ \Leftrightarrow$$

$$(2x-7)(2x-3)(x-3)(x-2)\le 0.$$



$x\in[1{,}5;\ 2]\cup[3;\ 3{,}5].$

III. $\begin{cases}(1)\\ \\(2)\end{cases}\Leftrightarrow$



$x\in[1{,}5;\ 2]\cup[3;\ 3{,}5].$

Ответ: $[1{,}5;\ 2]\cup[3;\ 3{,}5].$

9.2. Примеры для самостоятельного решения

Решите системы неравенств:

1. $$\begin{cases}\dfrac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}(6x^2-12x-9)}{x^2-2x-8}\ge 0,\\[2mm] \dfrac{|2x-9|-|3x+2|}{|2x-11|-|3x+4|}\ge 0.\end{cases}$$

2. $$\begin{cases}\sqrt{3-x}\le\dfrac{\sqrt{x^4-9x^2-2x+6}}{\sqrt{x+5}},\\[2mm] \dfrac{(3{,}5-x)^{x^2+15x+21}-(3{,}5-x)^{3x-11}}{\lg(x+7)}\le 0.\end{cases}$$

3. $$\begin{cases}5\cdot 3^{\log_3^2 x}-243\le 2\cdot x^{\log_3 x},\\ 2\cdot\log_4(3x-2)+2\cdot\log_{3x-2}4>5.\end{cases}$$

4. $\begin{cases} 5^{\log_5^2 x} + 6 \cdot x^{\log_5 x} \le 35, \\ \log_{|x+2|}\left(4 + 7x - 2x^2\right) \le 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x+3)^{x^2-x-2} < 1, \\ \dfrac{\log_3^2(5-2x) + \log_3(5-2x) - 8}{\log_3(5-2x) - 1} < 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \log_{7-2x}(x+2) \cdot \log_{x+4}\left(x^2 - 5x + 7\right) \le 0, \\ |4x-9|^{2x-11} + |4x-9|^{11-2x} \le 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \log_{3-x}(x+1) \cdot \log_{x+5}(4-x) \ge 0, \\ \left|\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}\right|^{x-1,2} + \left|\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}\right|^{1,2-x} \le 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{25^x - 6 \cdot 5^x + 5^{0,5x+1} - 120}{5^{0,5x} - 25} \ge 5, \\ \log_{2|x|}\left(x^2 - 13x + 36\right) \le \log_{2|x|} 6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \left(2^{x\log_2 5} \cdot 5^{3x^2+9x-8} - 1\right) \cdot \log_{x+1} \dfrac{2x-3}{x+1} \le 0, \\ 4x^2 - 4|7-2x| \le 28x - 52. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{\left(25x - 3x^2 + 18\right) \cdot \sqrt{x-1}}{\log_4|x-7| - 1} \ge 0, \\ 9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x \le 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \log_{x+2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} \le \log_{x+2}(4-x), \\ 6^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 4 \le 0. \end{cases}$

Ответы:

1. $(-\infty;\ -15) \cup [-11;\ -2) \cup \{-1\} \cup \{3\} \cup (4;\ +\infty)$.

2. $(-5;\ -4] \cup \{3\}$.

3. $\left(1;\ \dfrac{4}{3}\right) \cup (6;\ 9]$.

4. $[1;\ 4)$.

5. $(-3;\ -2) \cup (-1;\ 1)$.

6. $\{2;\ 2,5\}$.

7. $\{1,2\}$.

8. $(0;\ 0,5) \cup (9;\ 10]$.

9. $[2;\ 3] \cup \{4\}$.

10. $[1;\ \log_{1,5} 3]$.

11. $[0;\ 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и начала математического анализа: 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.–7-е изд., доп.–М.: Просвещение, 2008. – 464с.
2. Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов // Математика в школе.–1969.–№3.
3. ЕГЭ 2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов. / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.:Национальное образование, 2011. – 192с. (ЕГЭ-2012. ФИПИ – школе).
4. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 304 с.
5. Коропец З.Л. Иррациональные неравенства: методическое пособие. / З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева. – Орел: ОрелГТУ, 2008. – 18 с.
6. Коропец З.Л. Математика. Практикум для подготовки к Единому государственному экзамену (ЕГЭ): практикум для вузов. / З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева. – Орел: ОрелГТУ, 2010. – 93 с.
7. Коропец З.Л. Математика: учеб. пособие: в 4 ч. / З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева. –Орел: ОрелГТУ. – Ч.1. Уравнения. – 2005. – 75с.; Ч.2. Неравенства. – 2002. – 78с.
8. Коропец З.Л. Математика. Варианты сложных задач единого государственного экзамена (ЕГЭ) и образцы решений: учебно-

методическое пособие. / З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева. – 2-е изд. доп. – Орел: ОрелГТУ, 2008. – 28с.

9. Мельников И.И. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах / И.И. Мельников, И.Н. Сергеев. – М.:Издательство Московского университета, 1990. – 303с.
10. Моденов В.П. Метод декомпозиции при решении трансцендентных уравнений и неравенств // Математика в школе. – 2001. – №5.
11. Сергеев И.Н., Панферов В.С. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства. / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.:МЦНМО, 2011. – 72с.