ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.С. Шведов

К БАЙЕСОВСКОМУ АНАЛИЗУ МАТРИЧНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СОСТОЯНИЕ-НАБЛЮДЕНИЕ

Препринт WP2/2012/01
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
2012

УДК 519.246
ББК 22.172
Ш34

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

Ш34 **Шведов, А. С.** К байесовскому анализу матричной линейной модели состояние-наблюдение : препринт WP2/2012/01 [Текст] / А. С. Шведов ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2012. – 20 с. – 70 экз.

Матричные *t*-распределения с вектором степеней свободы, предложенные автором (2009, 2010), применяются в линейной динамической модели с нормальными возмущениями. Устанавливается, что при определенных условиях именно такими *t*-распределениями являются маргинальные распределения и для состояний, и для наблюдений.

УДК 519.246
ББК 22.172

Классификация JEL: C14, C32.
Ключевые слова: *t*-распределение случайной матрицы; динамическая линейная модель.

Shvedov, A. S. Bayesian analysis of the linear matrix-variate state space model : Working paper WP2/2012/01 [Text] / A. S. Shvedov ; National Research University "Higher School of Economics". – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2012. – 20 p. – 70 copies.

Matrix-variate *t*-distribution with vector of degrees of freedom is applied to dynamic linear model with normal disturbances. This *t*-distribution has been suggested by the author (2009, 2010). Under certain conditions the marginal distributions of observations and unobserved variates are *t*-distributions of this type.

JEL Classification: C14, C32.
Key phrases: matrix-variate t-distribution; dynamic linear model.

Препринты Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

1. Введение

Одна из линий в современной статистической и эконометрической науке – это модификация фильтра Калмана в рамках теории байесовского прогнозирования. При изучении динамической линейной модели в статье [7] обобщаются на случай матричных наблюдений некоторые результаты о сопряженности семейства нормальных-гамма распределений, приводимые в книге [8, гл. 16] для векторных наблюдений.

Напомним, что семейство распределений называется сопряженным для некоторой модели, если из принадлежности к этому семейству априорного распределения входящих в модель величин вытекает принадлежность к этому же семейству и апостериорного распределения соответствующих величин. Использование сопряженных семейств распределений дает возможность решить задачу в замкнутом виде, не прибегая к симулированию апостериорных распределений и применению численных методов, что является безусловным преимуществом такого подхода. Основной недостаток при этом – малая возможность маневра при выборе априорного распределения. Поэтому расширение семейства априорных распределений с сохранением свойства сопряженности представляет значительный интерес.

В настоящей работе расширение семейства априорных распределений (по сравнению с работой [7]) с сохранением свойства сопряженности достигается за счет использования матричного гамма-распределения более общего вида в априорном нормальном-гамма распределении. Данный результат является новым также и для векторных, а не только для матричных наблюдений.

Маргинальные распределения и для состояний, и для наблюдений, получаемые в работах [8], [7], являются матричными (или векторными) t-распределениями. При этом тот параметр, который для одномерных t-распределений называется числом степеней свободы, в этих работах также остается положительным числом.

Более общее семейство t-распределений, когда данный параметр является вектором, предложено автором в работах [2] (при изучении распределений случайных векторов) и [3] (при изучении распределений случайных матриц). Ряд результатов, связанных с этими t-распределениями, содержится в статье [4]. Именно такими t-распределениями являются маргинальные распределения и для состояний, и для наблюдений в изучаемой модели.

В разделе 2 настоящей работы приводятся результаты о сопряженности семейства нормальных-гамма распределений для линейной модели состояние-наблюдение с нормальными возмущениями. Раздел 3 содержит необходимые сведения о распределениях случайных матриц.

2. Сопряженное семейство матричных нормальных-гамма распределений

Матричные распределения $N_{r\times m}$, $G_{m\times m}$, $T_{r\times m}$, $NG_{r,m}$ описаны в разделе 3.

Модель состояние-наблюдение имеет вид

$$y_t = \zeta_t{}'\Phi_t + \eta_t, \qquad \eta_t|S \sim N_{m\times q}\left(0, S^{-1}, Q_t^{-1}\right);$$

$$\zeta_t = \Psi_t\zeta_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t|S \sim N_{r\times m}\left(0, R_t^{-1}, S^{-1}\right);$$

где $t = 1, 2, \ldots$ Первое из этих уравнений называется уравнением для наблюдения, а второе – уравнением для состояния. При каждом t

y_t – $m \times q$ случайная матрица,

ζ_t – $r \times m$ случайная матрица,

Φ_t – известная $r \times q$ матрица,

Ψ_t – известная $r \times r$ матрица,

Q_t – известная положительно определенная $q \times q$ матрица,

R_t – известная положительно определенная $r \times r$ матрица,

S – положительно определенная $m \times m$ случайная матрица.

Пусть априорное распределение

$$\zeta_0, S \sim NG_{r,\,m}\left(z_0, \Sigma_0, a_0, A_0\right),$$

где z_0 – $r \times m$ матрица, Σ_0 – положительно определенная $r \times r$ матрица, a_0 – $m \times 1$ вектор, обладающий свойствами, описанными в подразделе 2 раздела 3, A_0 – положительно определенная $m \times m$ матрица.

Возмущения $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t, \ldots, \eta_1, \ldots, \eta_t, \ldots$ независимы и независимы с априорным распределением.

Обозначим через Y_t набор наблюдений $y_1, \ldots, y_t$.

При $t = 1$ под условным распределением $\zeta_{t-1}, S|Y_{t-1}$ понимается априорное распределение.

Теорема 1. Если

$$\zeta_{t-1}, S|Y_{t-1} \sim NG_{r,\,m}\left(z_{t-1}, \Sigma_{t-1}, a_{t-1}, A_{t-1}\right),$$

то

$$\zeta_t, S|Y_{t-1} \sim NG_{r,\,m}\left(z_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}, a_{t-1}, A_{t-1}\right),$$

где

$$z_{t|t-1} = \Psi_t z_{t-1},$$
$$\Sigma_{t|t-1} = \Psi_t \Sigma_{t-1} \Psi_t' + R_t^{-1}.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$\zeta_{t-1} |\, S, Y_{t-1} \sim N_{r\times m}\left(z_{t-1}, \Sigma_{t-1}, S^{-1}\right).$$

Тогда из уравнения состояния с использованием теорем 6 и 7 получаем

$$\zeta_t |\, S, Y_{t-1} \sim N_{r\times m}\left(z_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}, S^{-1}\right).$$

Утверждение теоремы следует из того, что маргинальное распределение

$$S|Y_{t-1} \sim G_{m\times m}\left(a_{t-1}, A_{t-1}\right).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если верно заключение теоремы 1 относительно распределения $\zeta_t, S|Y_{t-1}$, то

$$y_t, S|Y_{t-1} \sim NG_{m,\,q}\left(f_t, \Lambda_t, a_{t-1}, A_{t-1}\right),$$

где

$$f_t = z'_{t|t-1}\Phi_t,$$
$$\Lambda_t = \Phi'_t\Sigma_{t|t-1}\Phi_t + Q_t^{-1}.$$

Замечание. В утверждении теоремы 2 понимается, что порядок ковариационных матриц следующий:

$$y_t |\, S, Y_{t-1} \sim N_{m\times q}\left(f_t, S^{-1}, \Lambda_t\right).$$

Доказательство. Из того, что

$$\zeta_t |\, S, Y_{t-1} \sim N_{r\times m}\left(z_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}, S^{-1}\right),$$

по теореме 5 следует, что

$$\zeta'_t |\, S, Y_{t-1} \sim N_{m\times r}\left(z'_{t|t-1}, S^{-1}, \Sigma_{t|t-1}\right).$$

По теоремам 6 и 7 получаем

$$y_t|\, S, Y_{t-1} \sim N_{m\times q}\left(z'_{t|t-1}\Phi_t, S^{-1}, \Phi'_t\Sigma_{t|t-1}\Phi_t + Q_t^{-1}\right).$$

Утверждение теоремы следует из того, что маргинальное распределение

$$S|Y_{t-1} \sim G_{m\times m}\left(a_{t-1}, A_{t-1}\right).$$

Теорема 2 доказана.

Лемма. Пусть L и M – положительно определенные $r\times r$ матрицы, Q – положительно определенная $q\times q$ матрица, Φ – $r\times q$ матрица. Дано, что

$$L^{-1} = \Phi Q\Phi' + M^{-1}.$$

Тогда

$$L = M - M\Phi K^{-1}\Phi' M,$$

где

$$K = \Phi' M\Phi + Q^{-1}.$$

Доказательство.

$$\left(M - M\Phi K^{-1}\Phi' M\right)\left(M^{-1} + \Phi Q\Phi'\right) =$$

$$= I_r - M\Phi K^{-1}\Phi' + M\Phi K^{-1}KQ\Phi' - M\Phi K^{-1}\Phi' M\Phi Q\Phi' =$$

$$= I_r - M\Phi K^{-1}\Phi' + M\Phi K^{-1}\Phi' M\Phi Q\Phi' +$$

$$+ M\Phi K^{-1}\Phi' - M\Phi K^{-1}\Phi' M\Phi Q\Phi' = I_r.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$e_t = y_t - f_t.$$

Теорема 3. Если верны заключения теорем 1 и 2 относительно распределений $\zeta_t, S|Y_{t-1}$ и $y_t, S|Y_{t-1}$, то

$$\zeta_t, S|Y_t \sim NG_{r,\,m}\left(z_t, \Sigma_t, a_t, A_t\right),$$

где

$$\Sigma_t = \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1}\Phi_t\left(\Phi_t'\Sigma_{t|t-1}\Phi_t + Q_t^{-1}\right)^{-1}\Phi_t'\Sigma_{t|t-1},$$

$$z_t = z_{t|t-1} + \Sigma_t\Phi_t Q_t e_t',$$

$$a_{t,\,j} = a_{t-1,\,j} + \frac{1}{2}\,q \quad \text{при } j = 1, \ldots, m,$$

$$A_t = A_{t-1} + \frac{1}{2}\,e_t\Lambda_t^{-1}e_t'.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$f(s|Y_t) \propto f(y_t|\,s, Y_{t-1})f(s|Y_{t-1}).$$

Согласно теореме 2

$$f(y_t|\,s, Y_{t-1}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}\,mq}\,|\Lambda_t|^{-\frac{1}{2}\,m}\,|s|^{\frac{1}{2}\,q}\,\mathrm{etr}\left(-\frac{1}{2}\,se_t\,\Lambda_t^{-1}e_t'\right).$$

С другой стороны,

$$f(s|Y_{t-1}) = \gamma_{a,A}\,\mathrm{etr}\,(-As)\prod_{j=1}^{m}\left|s_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}},$$

где $a = a_{t-1}$, $A = A_{t-1}$. (Отметим, что индекс j указывает, что a_j – это j-я координата вектора a. В то же время индекс $t-1$ указывает, что вектор a_{t-1} относится к моменту времени $t-1$.) Таким образом,

$$f(s|Y_t) \propto \mathrm{etr}\,(-Bs)\prod_{j=1}^{m}\left|s_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}},$$

где

$$b_j = a_j + \frac{1}{2}\, q, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$B = A + \frac{1}{2}\, e_t \Lambda_t^{-1} e_t'.$$

Положим $a_t = b,\ A_t = B$.

Во-вторых, воспользуемся формулой

$$f(\zeta_t|\, s, Y_t) = f(\zeta_t|\, y_t, s, Y_{t-1}) \propto f(y_t|\, \zeta_t, s, Y_{t-1}) f(\zeta_t|\, s, Y_{t-1}).$$

Из уравнения для наблюдения y_t следует, что

$$y_t|\, \zeta_t, s \sim N_{m\times q}\left(\zeta_t'\Phi_t, s^{-1}, Q_t^{-1}\right).$$

Из теоремы 1 следует, что

$$\zeta_t|\, s, Y_{t-1} \sim N_{r\times m}\left(z_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}, s^{-1}\right).$$

Поэтому

$$f(\zeta_t|\, s, Y_t) \propto \operatorname{etr}\left(-\frac{1}{2}\, s\left(y_t - \zeta_t'\Phi_t\right) Q_t \left(y_t - \zeta_t'\Phi_t\right)'\right) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{etr}\left(-\frac{1}{2}\, \Sigma_{t|t-1}^{-1}\left(\zeta_t - z_{t|t-1}\right) s \left(\zeta_t - z_{t|t-1}\right)'\right) = \operatorname{etr}\left(-\frac{1}{2}\, \Xi\right),$$

где

$$\Xi = s\left(y_t - \zeta_t'\Phi_t\right) Q_t \left(y_t - \zeta_t'\Phi_t\right)' +$$

$$+ s\left(\zeta_t - z_{t|t-1}\right)' \Sigma_{t|t-1}^{-1}\left(\zeta_t - z_{t|t-1}\right) =$$

$$= s\zeta_t'\left(\Phi_t Q_t \Phi_t' + \Sigma_{t|t-1}^{-1}\right)\zeta_t -$$

$$- s\zeta_t'\left(\Phi_t Q_t y_t' + \Sigma_{t|t-1}^{-1} z_{t|t-1}\right) - s\left(y_t Q_t \Phi_t' + z_{t|t-1}' \Sigma_{t|t-1}^{-1}\right)\zeta_t + c,$$

матрица c не зависит от ζ_t.

Определим матрицу Σ_t при помощи формулы

$$\Sigma_t^{-1} = \Phi_t Q_t \Phi_t' + \Sigma_{t|t-1}^{-1}.$$

Из леммы следует, что матрица Σ_t имеет тот вид, который дается в формулировке теоремы. Определим матрицу z_t,

$$z_t = \Sigma_t \left(\Phi_t Q_t y_t' + \Sigma_{t|t-1}^{-1} z_{t|t-1} \right).$$

Заметим, что

$$\Sigma_t^{-1} z_t = \Phi_t Q_t y_t' + \Sigma_{t|t-1}^{-1} z_{t|t-1}.$$

Воспользовавшись определением матрицы Σ_t^{-1} для преобразования матрицы $\Sigma_{t|t-1}^{-1}$, получаем

$$\Sigma_t^{-1} z_t = \Phi_t Q_t y_t' + \Sigma_t^{-1} z_{t|t-1} - \Phi_t Q_t \Phi_t' z_{t|t-1} =$$

$$= \Phi_t Q_t e_t' + \Sigma_t^{-1} z_{t|t-1}.$$

Поэтому матрица z_t имеет тот вид, который дается в формулировке теоремы.

Тогда

$$\Xi = s\zeta_t' \Sigma_t^{-1} \zeta_t - s\zeta_t' \Sigma_t^{-1} z_t - s z_t' \Sigma_t^{-1} \zeta_t + c =$$

$$= s(\zeta_t - z_t)' \Sigma_t^{-1} (\zeta_t - z_t) + c_1,$$

где матрица c_1 не зависит от ζ_t. Таким образом,

$$\zeta_t | \, s, Y_t \sim N_{r \times m} \left(z_t, \Sigma_t, s^{-1} \right).$$

Из вида распределений $s|Y_t$ и $\zeta_t | \, s, Y_t$ следует утверждение теоремы.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Маргинальные распределения имеют вид

$$\zeta_t|Y_{t-1} \sim T_{r\times m}\left(z_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}, a_{t-1}, A_{t-1}\right),$$

$$y_t|Y_{t-1} \sim T_{m\times q}\left(f_t, \Lambda_t, a_{t-1}, A_{t-1}\right),$$

$$\zeta_t|Y_t \sim T_{r\times m}\left(z_t, \Sigma_t, a_t, A_t\right).$$

Утверждение теоремы 4 следует из теорем 1, 2, 3 и 8.

3. Распределения случайных матриц, используемые в работе

Данный раздел носит вспомогательный характер, все результаты здесь, за исключением теоремы 8, являются известными.

С каждой $r \times m$ матрицей

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & \dots & x_{rm} \end{pmatrix}$$

свяжем $rm \times 1$ вектор

$$\mathrm{vec}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

где x_k – k-й столбец матрицы X.

Через I_k будем обозначать единичную $k \times k$ матрицу.

Пусть R – положительно определенная $r \times r$ матрица, S – положительно определенная $m \times m$ матрица. Через $R \otimes S$ обозначается $rm \times rm$ матрица, являющаяся кронекеровым

произведением матриц R и S. Определение кронекерова произведения и доказательства основных его свойств даются, например, в [3, раздел 4].

Матричное нормальное распределение. Пусть μ – произвольная $r \times m$ матрица. Напомним, что $r \times m$ случайная матрица Z имеет матричное нормальное распределение со средним μ и с ковариационными матрицами R^{-1} и S^{-1}, если $rm \times 1$ случайный вектор $\mathrm{vec}\,(Z')$ имеет rm-мерное нормальное распределение со средним $\mathrm{vec}\,(\mu')$ и с ковариационной матрицей $(R \otimes S)^{-1}$.

Здесь штрих означает транспонирование.

Многомерное нормальное распределение, то есть нормальное распределение случайных векторов, описывается, например, в [1, гл. 3]. В частности, функция плотности случайного вектора $\mathrm{vec}\,(Z')$ имеет вид

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}\,rm}\,|R \otimes S|^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{vec}((z-\mu)')'\,(R \otimes S)\,\mathrm{vec}((z-\mu)')\right),$$

где через $|\cdot|$ обозначается определитель матрицы. Нетрудно показать, что последнее выражение совпадает с

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}\,rm}\,|R|^{\frac{1}{2}\,m}\,|S|^{\frac{1}{2}\,r}\,\mathrm{etr}\left(-\frac{1}{2}\,R(z-\mu)\,S(z-\mu)'\right),$$

где $\mathrm{etr}(\cdot) = \exp\,(\mathrm{tr}(\cdot))$.

Запись

$$Z \sim N_{r\times m}\left(\mu, R^{-1}, S^{-1}\right)$$

означает, что $r \times m$ случайная матрица Z имеет матричное нормальное распределение со средним μ и с ковариационными матрицами R^{-1} и S^{-1}.

Теорема 5. Если $Z \sim N_{r\times m}\left(\mu, R^{-1}, S^{-1}\right)$, то

$$Z' \sim N_{m\times r}\left(\mu', S^{-1}, R^{-1}\right).$$

Доказательство легко получается из того, что для любых матриц A и B, произведение которых является квадратной матрицей,

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$$

и из вида функции плотности матричного нормального распределения.

Напомним, что характеристической функцией $r\times m$ случайной матрицы Z называется функция

$$\varphi_Z(X) = E\left(\operatorname{etr}\left(i\, ZX'\right)\right),$$

здесь X – это $r \times m$ матрица.

Из соотношения

$$\operatorname{tr}(ZX') = \operatorname{vec}(Z')'\operatorname{vec}(X')$$

и из вида характеристической функции многомерного нормального распределения (см., например, [1, гл. 3]) следует, что если $Z \sim N_{r\times m}\left(\mu, V, W\right)$, то

$$\varphi_Z(X) = \varphi_{\operatorname{vec}(Z')}\left(\operatorname{vec}(X')\right) =$$

$$= \exp\left(i\operatorname{vec}(X')'\operatorname{vec}(\mu') - \frac{1}{2}\operatorname{vec}(X')'(V\otimes W)\operatorname{vec}(X')\right) =$$

$$= \operatorname{etr}\left(i\, X\mu' - \frac{1}{2}\, VXWX'\right).$$

Существенно, что через характеристические функции многомерное нормальное распределение может задаваться

не только тогда, когда матрицы V и W положительно определенные, но и тогда, когда эти матрицы положительно полуопределенные.

Теорема 6. Пусть $Z \sim N_{r\times m}(\mu, V, W)$, F – $s\times r$ матрица, G – $m \times n$ матрица. Тогда

$$FZG \sim N_{s\times n}(F\mu G, FVF', G'WG).$$

Доказательство. Пусть X – $s \times n$ матрица. Тогда

$$\varphi_{FZG}(X) = E\left(\operatorname{etr}\left(i\,FZGX'\right)\right) =$$

$$= E\left(\operatorname{etr}\left(i\,ZGX'F\right)\right) = \varphi_Z(F'XG') =$$

$$= \operatorname{etr}\left(i\,F'XG'\mu' - \frac{1}{2}\,VF'XG'WGX'F\right) =$$

$$= \operatorname{etr}\left(i\,X\left(F\mu G\right)' - \frac{1}{2}\,\left(FVF'\right)X\left(G'WG\right)X'\right).$$

То есть характеристическая функция случайной матрицы FZG является характеристической функцией распределения

$$N_{s\times n}(F\mu G, FVF', G'WG).$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Пусть

$$Z \sim N_{r\times m}(\mu_1, V_1, W), \quad Y \sim N_{r\times m}(\mu_2, V_2, W),$$

Z и Y независимы. Тогда

$$Z + Y \sim N_{r\times m}(\mu_1 + \mu_2, V_1 + V_2, W).$$

Доказательство следует из того, что сумма независимых нормальных случайных векторов является нормальным случайным вектором (см., например, [1, теорема 3.15]) и из свойств кронекерова произведения матриц.

Матричное гамма-распределение. Напомним, что для любой $m \times m$ матрицы

$$C = \{c_{i\,j}\}, \quad 1 \le i, j \le m,$$

через $C^{[k]}$ и $C_{[k]}$ обозначаются подматрицы

$$C^{[k]} = \{c_{i\,j}\}, \quad 1 \le i, j \le k,$$

$$C_{[k]} = \{c_{i\,j}\}, \quad m - k + 1 \le i, j \le m,$$

где $k = 1, \ldots, m$.

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_m)$ – m-мерный вектор такой, что

$$a_j > \frac{j-1}{2}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Также введем обозначения $a_0 = 0$, $a_{m+1} = \dfrac{m+1}{2}$. A – положительно определенная $m \times m$ матрица.

Будем говорить, что положительно определенная $m \times m$ случайная матрица S имеет гамма-распределение с параметрами a и A, если функция плотности случайной матрицы S имеет вид

$$f(s) = \gamma_{a,A} \operatorname{etr}(-As) \prod_{j=1}^{m} \left| s_{[j]} \right|^{a_j - a_{j+1}},$$

где

$$\gamma_{a,A} = \left(\Gamma_m^*(a) \prod_{j=0}^{m-1} \left| A^{[m-j]} \right|^{a_j - a_{j+1}} \right)^{-1},$$

$$\Gamma_m^*(a) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2} \right),$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция. Функция $f(s)$ задана в области пространства $\mathrm{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, которую мы будем обозначать $s > 0$, и которая состоит из таких точек

$$s = (s_{11}, \ldots, s_{1r}, s_{22}, \ldots, s_{2r}, \ldots, s_{rr}),$$

что матрица s положительно определена.

При $a_1 = \ldots = a_m$ приведенное гамма-распределение совпадает с распределением Уишарта. Для векторного параметра a матричное гамма-распределение введено в работах [5], [6].

Запись

$$S \sim G_{m\times m}(a, A)$$

означает, что положительно определенная $m \times m$ случайная матрица S имеет гамма-распределение с параметрами a и A.

Матричное t-распределение. Пусть вектор a и матрица A те же, что и в предыдущем подразделе, Σ – положительно определенная $r \times r$ матрица, ζ и z – $r \times m$ матрицы (через ζ будем обозначать также $r \times m$ случайную матрицу).

Будем говорить, что $r \times m$ случайная матрица ζ имеет t-распределение с параметрами z, Σ, a, A, и записывать это в виде

$$\zeta \sim T_{r\times m}(z, \Sigma, a, A),$$

если функция плотности случайной матрицы ζ имеет вид

$$f(\zeta) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}mr}\,\Gamma_m^*(b)\,(\Gamma_m^*(a))^{-1}\,|A|^{-\frac{1}{2}r}\,|\Sigma|^{-\frac{1}{2}m}\,\cdot$$

$$\cdot \prod_{j=0}^{m-1} \left| I_{m-j} + \frac{1}{2}\left(A^{[m-j]}\right)^{-1}\left((\zeta - z)'\,\Sigma^{-1}\,(\zeta - z)\right)^{[m-j]} \right|^{b_j - b_{j+1}},$$

где

$$b_j = a_j + \frac{r}{2}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$b = (b_1, \ldots, b_m)$, $b_0 = 0$, $b_{m+1} = \dfrac{m+1}{2}$, (см. [3]).

Матричное нормальное-гамма распределение. Пусть условное распределение

$$\zeta | S \sim N_{r\times m}\left(z, \Sigma, S^{-1}\right),$$

и маргинальное распределение

$$S \sim G_{m\times m}(a, A).$$

Тогда совместное распределение ζ, S называется нормальным-гамма с параметрами z, Σ, a, A, и используется запись

$$\zeta, S \sim NG_{r,m}(z, \Sigma, a, A).$$

Теорема 8. Пусть совместное распределение

$$\zeta, S \sim NG_{r,m}(z, \Sigma, a, A).$$

Тогда маргинальное распределение

$$\zeta \sim T_{r\times m}(z, \Sigma, a, A).$$

Доказательство. Для функции плотности совместного распределения имеем

$$f(\zeta, s) \propto |s|^{\frac{1}{2}\,r} \operatorname{etr}\left(-\frac{1}{2}\,\Sigma^{-1}(\zeta - z)\, s(\zeta - z)'\right) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{etr}(-As) \prod_{j=1}^{m} \left|s_{[j]}\right|^{a_j - a_{j+1}} =$$

$$= \operatorname{etr}\left(-\left(A + \frac{1}{2}\,(\zeta - z)'\Sigma^{-1}(\zeta - z)\right) s\right) \prod_{j=1}^{m} \left|s_{[j]}\right|^{b_j - b_{j+1}},$$

где

$$b_j = a_j + \frac{r}{2}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Отсюда

$$S|\zeta \sim G_{m\times m}(b, B(\zeta)),$$

где

$$B(\zeta) = A + \frac{1}{2}\,(\zeta - z)'\Sigma^{-1}(\zeta - z).$$

Поэтому функция плотности маргинального распределения

$$f(\zeta) = \frac{f(\zeta, S)}{f(\zeta|S)} \propto \frac{1}{\gamma_{b,\,B(\zeta)}} \propto$$

$$\propto \prod_{j=0}^{m-1} \left|\left(A + \frac{1}{2}\;(\zeta - z)'\,\Sigma^{-1}\,(\zeta - z)\right)^{[m-j]}\right|^{b_j - b_{j+1}}.$$

Теорема 8 доказана.

Библиографический список

[1] Шведов А.С. Математические основы и оценка параметров эконометрических моделей состояние-наблюдение. М.: ГУ ВШЭ, 2005.

[2] Шведов А.С. Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение. Препринт WP2/2009/01. М.: ГУ ВШЭ, 2009.

[3] Шведов А.С. t-распределение случайной матрицы и его применение в регрессионной модели. Препринт WP2/2010/01. М.: ГУ ВШЭ, 2010.

[4] Шведов А.С. Робастная регрессия с применением t-распределения и EM-алгоритма // Эконом. журнал Высшей школы экономики, т.15, вып. 1 (2011), 68 – 87.

[5] Bellman R. A generalization of some integral identities due to Ingham and Siegel // Duke Math. J., 23 (1956), 571 – 577.

[6] Olkin I. A class of integral identities with matrix argument // Duke Math. J., 26 (1959), 207 – 213.

[7] Salvador M., Gallizo J.L., Gargallo P. Bayesian inference in a matrix normal dynamic linear model with unknown covariance matrices // Statistics, 38 (4), 2004, 307 – 335.

[8] West M., Harrison J. Bayesian forecasting and dynamic models. 2nd ed., Berlin: Springer, 1997.

Препринт WP2/2012/01
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Шведов Алексей Сергеевич

К байесовскому анализу матричной линейной модели состояние-наблюдение

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» с представленного оригинал-макета

Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Тираж 70 экз. Уч.-изд. л. 1
Усл. печ. л. 1,2. Заказ № . Изд. № 1508

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
Тел.: (499) 611-24-15