Д.В. Мусатов,
А.В. Савватеев
Российская экономическая школа,
М. Бретон
GREMAQ and IDEI, Université
de Toulouse I, Toulouse, France,
С. Вебер
CORE, Catholic University of Louvain,
Louvain, Belgium

КОАЛИЦИОННО И МИГРАЦИОННО УСТОЙЧИВЫЕ РАЗБИЕНИЯ НА КЛУБЫ

Введение

В последнее десятилетие в серии работ различных авторов изучаются вопросы существования коалиционно и миграционно устойчивых разбиений на клубы. В настоящей работе изучается одномерная непрерывная модель с континуумом агентов, распределенных по прямой согласно некоторой плотности. Прямая может толковаться как географическое пространство, в котором живут агенты, или как вкусовое пространство: у каждого агента есть любимое значение некоторого параметра. Любое множество агентов может объединиться в клуб и создать клубное благо, поместив его в некоторой точке той же прямой. В случае географического пространства эта точка будет буквально точкой размещения блага, в случае вкусового – некоторой характеристикой. Затраты на клубное благо делятся поровну между всеми членами клуба, при этом каждый участник несет личные издержки пропорционально своей удаленности от блага (при географической интерпретации это транспортные издержки, при вкусовой – неудовольствие от неидеальной характеристики). Для размещения блага выбирается медианная точка клуба, поскольку именно она минимизирует суммарные издержки, а также (в одномерном случае) побеждает любую другую по Кондорсе.

Изучаются два вида равновесий: миграционное и коалиционное. При миграционном равновесии никакой агент не хочет поменять свой клуб. При коалиционном никакая группа агентов не имеет стимула отделиться и образовать собственный клуб. В общем случае равновесие одного вида не является автоматически равновесием другого вида. Для миграционного равновесия важно только совпадение издержек на границах клубов, а сами издержки могут быть сколь угодно большими. При коалиционном равновесии для осуществления миграции необходимо согласие принимающей стороны.

В предыдущих работах было доказано, что в общем случае коалиционного равновесия может не существовать, а миграционное равновесие существует всегда. В настоящей работе приведены два новых результата. Во-первых, коалиционное равновесие существует при монотонно убывающей плотности распределения агентов (в этом случае они распределены на некотором луче). Во-вторых, миграционное равновесие на отрезке не просто существует, а существует для любого наперед заданного числа клубов, причем эти клубы связны.

Математическая модель

В этом разделе мы опишем одномерную непрерывную модель формирования клубов. Каждый агент характеризуется точкой θ из некоторого множества $W \subset \mathbb{R}$, мы будем рассматривать случаи отрезка, луча и всей прямой. Агенты распределены по W в соответствии с некоторой непрерывной плотностью распределения $p(\theta)$. Разбиением на клубы называется представление W в виде объединения некоторого количества (измеримых) множеств S_i, пересечение любых двух из которых имеет нулевую меру. Каждый клуб образует клубное благо в своей медианной точке $m(S_i)$. Затраты на поддержание блага равны некоторому положительному числу g при любом размере клуба и делятся поровну между всеми его участниками. Также каждый агент θ несет транспортные издержки $|\theta - m|$, где m – медиана клуба, в котором он состоит. Таким образом, суммарные издержки агента θ, входящего в клуб S, составляют $C(\theta, S) = \frac{g}{|S|} + |\theta - m(S)|$. Никаких побочных платежей не предусматривается.

Разбиение называется миграционно устойчивым, если никакой агент не хочет поменять свой клуб, т.е. при всех θ если $\theta \in S$, то для любого другого клуба S' выполнено $C(\theta, S') \geq C(\theta, S)$. Ясно, что достаточно проверить всех агентов, живущих «на границе» между клубами. Если им невыгодно менять клуб, то другим тем более: в старом клубе они несут меньшие издержки, а в новом понесут бóльшие.

Разбиение называется коалиционно устойчивым, если никакая группа агентов не хочет выделиться и образовать отдельный клуб. Формально это означает, что не существует такого T, что $C(\theta, T) < C(\theta, S(\theta))$ для всех $\theta \in T$. Здесь $S(\theta)$ – клуб, в который входит агент θ.

Результаты для коалиционного равновесия

В этом разделе мы сформулируем и обсудим основные результаты. Подробные доказательства опускаются из-за недостатка места.

Теорема 1. *Для произвольной плотности населения коалиционно устойчивого разбиения на клубы может не существовать*.

Это результат доказан в статье [Bogomolnaia, Le Breton, Savvateev, Weber, 2008в] для дискретной модели. Его нетрудно распространить и на непрерывную модель. Примером может служить «двухпиковое» распределение с примерно одинаково населенными пиками.

Перейдем к случаю монотонного убывания $p(\theta)$. Заметим, что для любого агента существует оптимальный клуб среди тех, в которых он находится на левом краю (ниже будем называть его просто оптимальным). Обратим внимание, что такой клуб является связным: если он не связен, возьмем связный такой же длины. От этого затраты агента на клуб не изменятся, а медиана может сдвинуться только влево, отчего транспортные издержки снизятся. Определим функцию $C^r(\theta)$ как издержки агента θ в этом клубе. Из убывания плотности населения следует, что эта функция возрастает. Однако при выполнении дополнительного условия регулярности она растет не слишком быстро.

Условие регулярности. Монотонно убывающая плотность $p(\theta)$ называется регулярной, если на любом оптимальном клубе она меняется не более чем в два раза.

Утверждение 2. Если плотность регулярна, то $\frac{d}{d\theta}C^r(\theta) < 1$.

Теперь сформулируем основную теорему о монотонном случае.

Теорема 3. *Если* $W = [0,+\infty)$, *а плотность населения* $p(\theta)$ *строго убывает, то коалиционно устойчивое разбиение существует.*

Устойчивое разбиение строится конструктивно. Сначала образуем клуб, оптимальный для агента 0. Затем образуем клуб $[\theta_0, \theta_1]$, оптимальный для агента θ_0, затем $[\theta_1, \theta_2]$, оптимальный для θ_1, и так далее. Таким образом, весь луч разобьется на отрезки. Можно доказать, что на границах отрезков издержки агента в правой коалиции выше издержек в левой коалиции, так что разбиение не будет миграционно устойчивым. Однако коалиционная устойчивость от этого не нарушается: левая коалиция не примет мигрантов из правой. Можно доказать, что у каждого агента θ издержки $C(\theta)$ при таком разбиении не боль-

ше, чем $C^r(\theta)$: на левом краю каждого клуба они совпадают, далее до медианы убывают, далее растут с производной 1, но на правом краю все еще ниже. Если плотность регулярна, то все следует из утверждения 2. Для нерегулярной плотности требуется специальное рассуждение.

Из того, что $C(\theta) \le C^r(\theta)$ сразу следует устойчивость: в любой коалиции T издержки самого левого агента не меньше, чем $C(\theta)$, поэтому он заблокирует отделение. □

Естественным обобщением монотонно убывающей плотности на луче является однопиковая плотность на всей прямой. Мы предполагаем, что и результат о существовании коалиционно устойчивого разбиения на клубы обобщается на однопиковый случай, однако доказательство получено только для регулярных плотностей. (Разумеется, в определении регулярности оптимальными клубами слева от пика называются те, которые оптимальны для самого правого их жителя.)

Теорема 4. *Пусть плотность населения однопиковая и регулярная. Тогда существует коалиционно устойчивое разбиение на клубы.*

Идея доказательства похожа на монотонный случай. Нужно правильным образом выбрать клуб, содержащий пик плотности, а вправо и влево клубы строятся так же, как и раньше: оптимально для агентов, живущих с краев уже построенной части. Тогда коалиции справа и слева от пика не отделятся по тем же причинам, что и раньше, а содержащие пик – за счет правильного выбора центрального клуба и условия медленного убывания плотности. (Последнее нужно для исключения несвязных коалиций.) □

Результат для миграционного равновесия

Теорема 5. *Пусть плотность населения на отрезке строго положительна. Тогда для любого целого числа $n \ge 1$ существует миграционно устойчивое разбиение отрезка на n клубов.*

Доказательство достаточно коротко и изящно, чтобы привести его полностью. Удивительным образом оно использует лемму Гейла – Никайдо, предназначенную для доказательства существования равновесия Вальраса. Для простоты будем считать, что отрезок имеет длину 1 и разбит на отрезки (положительных) длин $a_1,\dots,a_n$. Тогда агенты на каждом отрезке несут издержки по общим правилам, и для каждого отрезка возникают два числа c_{iL} и c_{iR} – из-

держки агентов, расположенных на левом и правом краях соответственно. Они равны соответственно

$$\frac{g}{a_i}+\left(m_i-a_1-\ldots-a_{i-1}\right) \text{ и } \frac{g}{a_i}+\left(a_1+\ldots+a_{i-1}+a_i-m_i\right).$$

Как нетрудно заметить, разбиение является миграционно устойчивым тогда и только тогда, когда при всех i от 2 до n выполнено $c_{i-1,R}=c_{iL}$. Докажем, что набор длин, для которого это выполнено, всегда найдется. Рассмотрим вектор-функцию

$$\Psi\left(a_1,\ldots,a_n\right)=(a_2(c_{1R}-c_{2L}),a_1(c_{2L}-c_{1R})+a_3(c_{2R}-c_{3L}),\ldots,a_{(n-2)}(c_{(n-1,L)}-c_{(n-2,R)})+$$
$$+a_n(c_{(n-1,R)}-c_{nL}),a_{n-1}(c_{nL}-c_{(n-1,R)})).$$

Эта функция отображает внутренность $(n-1)$-мерного симплекса в -мерное пространство и обладает следующими свойствами.

1. **Непрерывность.** Здесь используется строгая положительность плотности: в этом случае медиана отрезка непрерывно зависит от его концов, а те – от набора длин всех отрезков.

2. **Равномерная ограниченность снизу.**

$$a_{i-2}\left(c_{i-1,L}-c_{i-2,R}\right)+a_i\left(c_{i-1,R}-c_{iL}\right)\geq -a_{i-2}c_{i-2,R}-a_ic_{iL}\geq$$
$$\geq -\left(1+g\right)-\left(1+g\right)=-\left(2+g\right).$$

3. **Закон Вальраса.** $\sum_{i=1}^{n}a_i\Psi_i\left(\vec{a}\right)=0.$ Проверяется непосредственно.

4. **Стремление к бесконечности при приближении к границе симплекса**. Поскольку ограниченность снизу уже доказана, достаточно доказать стремление к бесконечности суммы положительных слагаемых в сумме $\Psi_1+\ldots+\Psi_n$: тогда и сам вектор Ψ будет стремиться к бесконечности. А эта сумма равняется $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}$, что стремится к бесконечности при векторе $\vec{a}$, стремящемся к границе симплекса.

По лемме Гейла – Никайдо при выполнении этих условий существует $\vec{a}$, такое что $\Psi_i\left(\vec{a}\right)=\vec{0}.$ Тогда последовательным разбором компонент вектора Ψ устанавливается, что $c_{i-1,R}=c_{iL}$ при всех i от 2 до n, что и требовалось. □

Заключение

В изучаемой нами теории остается много открытых вопросов и неисследованных областей. Например, было бы интересно получить аналоги теорем 3–4 для дискретной модели, в теореме 4 избавиться от условия регулярности, а теорему 5 распространить на произвольное распределение. Интересно также получить другие необходимые или достаточные условия существования или отсутствия устойчивого разбиения.

Теория имеет большое значение для политической географии, поскольку моделирует образование стран и регионов, а также миграционные процессы. Вопрос существования равновесий важен, так как от ответа на него зависит, можно ли пускать эти процессы на самотек или они требуют регулирования.

Литература

Alesina A., Spolaore E. On the Number and Size of Nations // Quarterly Journal of Economics. 1997. 112 (4). P. 1027–1056.

Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A.V., Weber, S. Heterogeneity Gap in Unidimensional Spatial Models // Journal of Public Economic Theory. 2008. 10 (3). P. 455–473.

Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A.V., Weber S. Stability of Jurisdiction Structures under the Equal Share and Median Rules // Economic Theory. 2008. 34 (3). P. 523–543.

Dreze J., Le Breton M., Savvateev A.V., Weber S. Almost Subsidy-Free Spatial Pricing in a Multidimensional Setting // Journal of Economic Theory. 2009. 143 (1). P. 275–291.

Dreze J., Le Breton M., Weber S. Rawlsian Pricing of Access to Public Facilities: A Unidimensional Illustration // Journal of Economic Theory. 2007. 136. P. 759–766.

Greenberg J., Weber S. Strong Tiebout Equilibrium under Restricted Preferences Domain // Journal of Economic Theory. 1986. 38. P. 101–117.

Jehiel P., Scotchmer S. Constitutional Rules of Exclusion in Jurisdiction Formation // Review of Economic Studies. 2001. 68(2), P. 393–413.

Jehiel P., Scotchmer S. Free Mobility and the Optimal Number of Jurisdictions // Annales d'Economie et de Statistique. 1997. 45. P. 219–232.

Le Breton M., Weber S. Secession-Proof Allocations and Stable Group Structures in Model of Horizontal Product Differentiation // Group Formation in Eco-

nomics: Networks, Clubs and Coalitions / G. Demange, M. Wooders (eds.) Cambridge University Press, 2004. P. 266–285.

Le Breton M., Weber S. The Art of Making Everybody Happy: How to Prevent a Secession // IMF Staff Papers. 2003. 50 (3). P. 403–435.

Westhof F. Existence of Equilibria in Economies with a Local Public Good // Journal of Economic Theory. 1977. 14. P. 84–112.