В. А. Замараев (Нижний Новгород)

ПОДКЛАССЫ ХОРДАЛЬНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ДРЕВЕСНОЙ ШИРИНОЙ

Введение

Древесная ширина – графовый параметр, представляющий интерес в связи с тем, что многие задачи, являющиеся NP-трудными в классе всех графов, могут быть решены за полиномиальное время на графах с ограниченной древесной шириной.

Для того, чтобы дать формальное определение древесной ширины графа, определим связанные с ней понятия. *Древесной декомпозицией* графа $G=(V,E)$ называется пара $(\Re,T)$, где $\Re=\{R_1,\dots,R_s\}$ – семейство подмножеств множества V, а T – дерево, вершинами которого являются множества R_i, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $V(G)=\bigcup_{i=1}^{s} R_i$,
2. для любого ребра $(u,v)\in E(G)$ существует $j\in\{1,\dots,s\}$ такое, что $u,v\in R_j$,
3. для любой вершины $u\in V(G)$ множество $\{R\in\Re \mid u\in R\}$ порождает поддерево в дереве T.

Шириной древесной декомпозиции $(\Re,T)$ называется величина равная $\max_{i=1,s}|R_i|-1$, а *древесной шириной* $tw(G)$ графа G – минимальная ширина древесной декомпозиции среди всех древесных декомпозиций графа G.

Используя известные результаты (см., например, [7]), можно сформулировать более простое для восприятия, по мнению автора, определение древесной ширины. Граф называется *хордальным* (или триангулированным), если любой его порожденный цикл является треугольником. *Триангуляцией* графа G назовем любой хордальный граф H, который можно получить из G добавлением новых ребер. Используя это понятие, древесную ширину можно определить следующим образом:

$$tw(G)=\min\{w(H)-1 \mid H - \text{триангуляция графа } G\},$$

где $w(H)$ – максимальный размер клики в H.

Двудольный граф называется *хордальным двудольным*, если всякий его цикл длины не менее 6 имеет хорду. Другими словами, класс хордальных двудольных графов составляют в точности такие графы, у которых любой порожденный цикл содержит ровно 4 вершины. Хордальные двудольные графы были введены М.Ч. Голумбиком и К.Ф. Госсом [4] в 1978 году и привлекли немало внимания. Например, хордальные двудольные графы оказываются полезными в линейном программировании, так как двудольная матрица смежности любого графа из этого класса является вполне сбалансированной [5].

Перед тем, как перейти к формулировке основных результатов, введем необходимые понятия и обозначения. Через C_n и $K_{p,q}$ мы будем обозначать простой n-вершинный цикл и полный двудольный граф с долями мощности p и q соответственно. Множество X называется *наследственным классом графов*, если оно замкнуто относительно изоморфизма и операции удаления вершины. В работе используется описание наследственных классов через множество запрещенных порожденных подграфов. Пусть M множество графов, тогда через $Free(M)$ принято обозначать множество всех графов, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графам из M. Общеизвестно, что множество графов X является наследственным классом тогда и только тогда, когда $X=Free(M)$ для некоторого M. Например, $Free(\{C_3,C_4,C_5,C_6,\dots\})$ – класс лесов, а $Free(\{C_3,C_5,C_6,C_7\dots\})$ – класс хордальных двудольных графов. Если древесная ширина любого графа из класса X не превосходит d, то будем говорить, что древесная ширина X ограничена константой d.

Древесная ширина

В [6] В.В. Лозин и Д. Раутенбах показали, что хордальные двудольные графы с ограниченной степенью вершин имеют ограниченную древесную ширину.

Теорема 1. *Если степень любой вершины хордального двудольного графа G не превосходит Δ, то* $tw(G)\le\Delta^2$.

Заметим, что степени вершин двудольного граф G не превосходят p тогда и только тогда, когда G не содержит $K_{1,p+1}$ в качестве порожденного подграфа. Таким образом, теорема 1 утверждает, что для любого $p \in \mathrm{N}$ подкласс хордальных двудольных графов $Free(\{K_{1,p}, C_3, C_5, C_6, C_7, \ldots\})$ имеет ограниченную древесную ширину. Основным результатом доклада является обобщение этого факта. А именно, охарактеризованы все наследственные подклассы хордальных двудольных графов с ограниченной древесной шириной.

Теорема 2. *Пусть* $X = Free(M)$ *– бесконечный подкласс хордальных двудольных графов.* X *имеет ограниченную древесную ширину тогда и только тогда, когда* M *содержит* $K_{p,q}$ *для некоторых натуральных* p *и* q.

Оценка числа графов

Известно, что число помеченных n-вершинных графов в классе хордальных двудольных графов не меньше $n^{\Omega(n \log n)}$ [8]. Если в классе этих графов запретить порожденный $C_4 = K_{2,2}$, то мы получим класс лесов, в котором, как не трудно показать, число n-вершинных помеченных графов не превосходит n^{2n}. Этот результат можно обобщить, используя теорему 2 и известные результаты относительно числа помеченных n-вершинных графов в классе с ограниченной древесной шириной. Число n-вершинных помеченных графов с кликовой шириной не более k не превосходит $n! C^n$, где C некоторая константа, зависящая от k [2]. В свою очередь, кликовая ширина графа G не превосходит $2^{2tw(G)+2}+1$ [3]. Эти рассуждения с учетом теоремы 2 приводят нас к заключению, что число n-вершинных помеченных графов в классе $Free(\{C_3, K_{p,q}, C_5, C_6, C_7, \ldots\})$ не превосходит $n^{c(p,q)n}$. С другой стороны для любых натуральных p и q таких, что $p+q \geq 3$, класс $Free(\{C_3, K_{p,q}, C_5, C_6, C_7, \ldots\})$ содержит подкласс графов, у которых степень каждой вершины не больше единицы. В таком

подклассе не менее $\lfloor n/2 \rfloor!$ помеченных n-вершинных графов [1]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для любых натуральных* p *и* q *таких, что* $p+q \geq 3$, *число помеченных* n*-вершинных графов в классе* $Free(\{C_3, K_{p,q}, C_5, C_6, C_7, \ldots\})$ *равно* $n^{\Theta(n)}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00107-а).

Литература

1. *Алексеев В.Е.* О нижних ярусах решётки наследственных классов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 1997. – Серия 1, Т. 4, – С. 3-12.

2. *Allen P., Lozin V., Rao M.* Clique-width and the speed of hereditary properties, Electronic Journal of Combinatorics, 16 (2009) Research Paper 35.

3. *Courcelle B., Olariu S.* Upper bounds to the clique width of graphs, Discrete Appl. Math., 101, 2000, pp. 77-114.

4. *Golumbic M.C., Goss C.F.* Perfect elimination and chordal bipartite graphs, J. Graph Theory, 2, 1978, pp. 155-163.

5. *Hoffman A.J., Kolen A.W.J., Sakarovitch M.* Totally-balanced and greedy matrices, SIAM J. Algebr. Discrete Meth., 6 (1985), pp. 721-730.

6. *Lozin V.V., Rautenbach D.* Chordal bipartite graphs of bounded tree- and clique-width, Discrete Mathematics, Vol. 283, I. 1-3, 2004, pp. 151-158.

7. *Reed B.* Tree width and tangles: a new connectivity measure and some applications, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 241, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 87–162.

8. *Spinrad J.P.* Nonredundant 1's in Γ-Free Matrices // SIAM Journal on Discrete Mathematics, – 1995. – V. 8, – I. 2, pp. 251-257

В. А. Замараев, viktor.zamaraev@gmail.com

Почтовый адрес: 603159, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Карла Маркса, д. 32, кв. 397.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского