УДК 517.972.9

А.В. Колесников

Московский государственный университет печати
Государственный университет — Высшая школа экономики

Транспортировка масс и сжимающие отображения

Согласно известному результату Л. Каффарелли, оптимальная транспортировка стандартной гауссовской меры в логарифмически вогнутую меру $e^{-W}dx$, удовлетворяющую условию $D^2W \geqslant Id$, является 1-липшицевым отображением. Настоящая работа представляет собой краткий обзор различных результатов и приложений, полученных в этом направлении.

Ключевые слова: оптимальная транспортировка, уравнение Монжа–Ампера, логарифмически вогнутые меры, гауссовы меры, изопериметрические неравенства, неравенства Соболева.

I. Введение

Пусть α — неотрицательное число. Будем называть отображение $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \alpha$-липшицевым, если

$$|T(x) - T(y)| \leqslant \alpha |x - y|.$$

Для гладкого T это эквивалентно условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|DT(x)\| \leqslant \alpha,$$

где $\|\cdot\|$ — операторная норма. В случае $\alpha = 1$ мы будем просто писать «сжатие».

Аналогично, если $T : X \to Y$ — отображение между метрическими пространствами, будем говорить, что T — сжатие, если $\rho_Y(T(x_1),T(x_2)) \leqslant \rho_X(x_1,x_2)$.

Пусть μ — вероятностная мера в метрическом пространстве (M,ρ). Для произвольного множества $A \subset M$ определим поверхностную меру μ^+ границы ∂A:

$$\mu^+(\partial A) = \underline{\lim}_{h \to 0} \frac{\mu(A_h) - \mu(A)}{h},$$

где $A_h = \{x : \rho(x,A) \leqslant h\}$.

Множество A называется изопериметрическим, если оно имеет минимальную поверхностную меру среди множеств такой же меры $\mu(A)$. Изопериметрическая функция $\mathcal{I}_\mu$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{I}_\mu(t) = \inf\{\mu^+(\partial A) : \mu(A) = t\}.$$

Изопериметрические множества в большинстве случаев невозможно найти. В то же время для изопериметрических функций существуют различные оценки, имеющие обширные приложения в анализе, геометрии и теории вероятностей. Например, хорошо известно, что изопериметрические неравенства влекут неравенства типа Соболева. Подробнее см. в [9, 18, 22, 24, 27].

Многочисленные приложения сжимающих отображений основаны на следующем элементарном факте:

Пусть X, Y — два метрических пространства, и X наделено мерой μ. Предположим, что существует сжатие $T : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y. Тогда мера-образ $\nu = \mu \circ T^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{I}_\nu \geqslant \mathcal{I}_\mu.$$

В настоящей работе в основном изучается случай оптимальной транспортировки мер. Пусть нам даны две борелевские вероятностные меры μ и ν на $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим оптимальную транспортировку $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, минимизирующую «стоимость транспортировки»

$$W_2^2(\mu,\nu) = \int |x - T(x)|^2 d\mu$$

среди отображений, отображающих μ в ν, $\nu = \mu \circ T^{-1}$. Последнее означает, что $\mu \circ T^{-1}(A) = \nu(A)$ для любого борелевского множества A. Если $\mu = \rho_0 dx$ и $\nu = \rho_1 dx$ абсолютно непрерывны, то такое T существует и может быть получено из решения транспортной задачи Монжа–Канторовича. Более того, это отображение μ-единственно и имеет вид $T = \nabla\Phi$, где Φ — выпуклая функция (см. [27]). Предполагая гладкость Φ, легко проверить, что Φ является решением следующего нелинейного уравнения (уравнения Монжа–Ампера):

$$\rho_1(\nabla\Phi) \det D^2\Phi = \rho_0.$$

Настоящая статья содержит обзор работ о сжимаемости оптимальных транспортных отображений. Первый результат в этом направлении был доказан Л. Каффарелли (см. [6]). Согласно этому результату, если μ — стандартная гауссовская мера $\mu = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ и $\nu = e^{-W}dx$ с $D^2W \geqslant Id$, то соответствующее отображение T является сжатием. Иэ этого наблюдения немедленно следует теорема сравнения Бакри–Леду [2] и различные функциональные неравенства, включающие логарифмическое неравенство Соболева для равномерно логарифмически вогнутых мер. Среди других приложений отметим гауссовское корреляционное неравенство и неравенство Браскампа–Либа. Мы также обсудим некоторые обобщения теоремы Каффарелли и некоторые открытые проблемы.

II. Теорема Каффарелли о сжатии

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 будут цитироваться в работе как «теорема Каффарелли о сжатии». Оригинальная формулировка была дана в теореме 2.

Теорема 1 (L. Caffarelli). Пусть $T = \nabla\Phi$ оптимальная транспортировка, отображающая вероятностную меру $\mu = e^{-V}dx$ в вероятностную меру $\nu = e^{-W}dx$. Пусть V и W дважды непрерывно дифференцируемы и $D^2W \geqslant K$. Тогда для любого единичного вектора e:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \Phi_{ee}^2 \leqslant \frac{1}{K} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} V_{ee}.$$

В частности, если μ — стандартная гауссовская мера и $K \geqslant 1$, то T — сжатие.

Идея доказательства:

1) Принцип максимума.

Приведем идею доказательства, основанного на принципе максимума. Функции V, W и Φ предполагаются достаточно регулярными. Впрочем, гладкость Φ можно вывести из гладкости V, W (плюс некоторые ограничения на рост, см. теорему 4.14 [27]). Запишем формулу замены переменных

$$e^{-V} = e^{-W(\nabla\Phi)}\det D^2\Phi.$$

Возьмем логарифм от обеих частей

$$V = W(\nabla\Phi) - \log\det D^2\Phi.$$

Зафиксируем единичный вектор e и продифференцируем эту формулу вдоль e. Для этого применим фундаментальное соотношение

$$\partial_e \ln\det D^2\Phi = \frac{\partial_e \det D^2\Phi}{\det D^2\Phi} = \mathrm{Tr}(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_e.$$

Продифференцировав эту формулу вдоль другого направления v и пользуясь тем, что

$$D^2\Phi_v(D^2\Phi)^{-1} + D^2\Phi\big[(D^2\Phi)^{-1}\big]_v = 0,$$

получаем

$$\partial_{ev}\ln\det D^2\Phi = \mathrm{Tr}(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_{ev} -$$

$$-\mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_e(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_v\Big].$$

Используем опять формулу замены переменных

$$V_e = \langle\nabla W(\nabla\Phi), D^2\Phi\cdot e\rangle - \mathrm{Tr}(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_e$$

и

$$V_{ee} = \langle D^2W(\nabla\Phi)D^2\Phi\cdot e, D^2\Phi\cdot e\rangle + \langle\nabla W(\nabla\Phi), \nabla\Phi_{ee}\rangle -$$

$$-\mathrm{Tr}(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_{ee} + \mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_e\Big]^2.$$

Предположим, что Φ_{ee} достигает максимума в точке x_0. Тогда

$$\nabla\Phi_{ee}(x_0) = 0, D^2\Phi_{ee} \leqslant 0.$$

Заметим, что $\mathrm{Tr}\big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_e\big]^2 > 0$, потому что это равно $\mathrm{Tr}C^2$, где

$$C = (D^2\Phi)^{-1/2}D^2\Phi_e(D^2\Phi)^{-1/2}$$

— симметричная матрица.

Очевидно, $\mathrm{Tr}(D^2\Phi(x_0))^{-1}D^2\Phi_{ee}(x_0) \leqslant 0$, следовательно

$$V_{ee}(x_0) \geqslant K\|D^2\Phi(x_0)\cdot e\| \geqslant K\Phi_{ee}^2(x_0).$$

Таким образом,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\Phi_{ee}^2 \leqslant \frac{1}{K}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} V_{ee}(x_0).$$

2) Разностные приращения

Вместо того чтобы дифференцировать уравнение Монжа–Ампера, можно рассмотреть разностные приращения

$$\delta_2\Phi(x) = \Phi(x+\mathrm{th}) + \Phi(x-\mathrm{th}) - 2\Phi(x) \geqslant 0$$

для некоторого вектора $h\in\mathbb{R}^d$, $|h| = 1$. Используя приближения, можно свести ситуацию к случаю, когда $\mathrm{supp}(\nu)$ — ограниченная выпуклая область и V, W — локально гельдеровы. Из результатов Каффарелли о гельдеровой регулярности следует $\Phi \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Кроме того, используя приближения, можно полагать, что μ убывает не быстрее гауссовской меры, то есть $V(x) \leqslant C_1 + C_2|x|^2$ для некоторых $C_1, C_2 \geqslant 0$. Тогда имеет место следующая лемма (см. лемму 4 в [6]).

Лемма 1. $\lim_{x\to\infty}\delta_2\Phi(x) = 0$.

Следовательно, существует точка максимума x_0 функции $\delta_2\Phi(x)$. Дифференцирование по x_0 влечет

$$\nabla\Phi(x_0+\mathrm{th}) + \nabla\Phi(x_0-\mathrm{th}) = 2\nabla\Phi(x_0), \quad (1)$$

$$D^2\Phi(x_0+\mathrm{th}) + D^2\Phi(x_0-\mathrm{th}) \leqslant 2D^2\Phi(x_0).$$

Из вогнутости определителя следует

$$\det D^2\Phi(x_0) \geqslant \det\Big(\frac{D^2\Phi(x_0+\mathrm{th}) + D^2\Phi(x_0-\mathrm{th})}{2}\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \Big(\det D^2\Phi(x_0+\mathrm{th})\det D^2\Phi(x_0-\mathrm{th})\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Применив формулу замены переменных $\det D^2\Phi = e^{W(\nabla\Phi)-V}$, получаем

$$V(x_0+\mathrm{th}) + V(x_0-\mathrm{th}) - 2V(x_0) \geqslant$$

$$\geqslant W(\nabla\Phi(x_0+\mathrm{th})) + W(\nabla\Phi(x_0-\mathrm{th})) - 2W(\nabla\Phi(x_0)). \quad (2)$$

Из (1) вытекает, что $v := \nabla\Phi(x_0+\mathrm{th}) - \nabla\Phi(x_0) = \nabla\Phi(x_0) - \nabla\Phi(x_0-\mathrm{th})$. Таким образом, получаем из (2), что

$$\sup V_{hh}\cdot t^2 \geqslant K|\nabla\Phi(x_0+\mathrm{th}) - \nabla\Phi(x_0)|^2 =$$

$$= K|\nabla\Phi(x_0 - \mathrm{th}) - \nabla\Phi(x_0)|^2 = K|v|^2.$$

В силу выпуклости Φ:

$$\Phi(x_0 + \mathrm{th}) + \Phi(x_0 - \mathrm{th}) - 2\Phi(x_0) \leqslant$$

$$\leqslant t\langle\nabla\Phi(x_0 + \mathrm{th}) - \nabla\Phi(x_0 - \mathrm{th}),h\rangle =$$

$$= 2t\langle v,h\rangle \leqslant 2t|v|.$$

Таким образом,

$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^d} V_{hh}}{K} \geqslant \Big(\frac{\delta_2\Phi}{2t^2}\Big)^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\Phi_{hh} \leqslant 2C$$

при $C = \sqrt{\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^d} V_{hh}}{K}}$. Но эта оценка хуже желаемой. Чтобы получить нужную оценку, используем дополнительную информацию, что $\Phi_{hh} \leqslant a_0 C$, где $a_0 = 2$. Применим соотношение

$$\Phi(x_0 + \mathrm{th}) + \Phi(x_0 - \mathrm{th}) - 2\Phi(x_0) =$$

$$= \int_0^t \langle\nabla\Phi(x_0 + \mathrm{sh}) - \nabla\Phi(x_0 - \mathrm{sh}),h\rangle ds.$$

В силу выпуклости $\Phi\langle\nabla\Phi(x_0 + \mathrm{sh}) - \nabla\Phi(x_0 - \mathrm{sh}),h\rangle \leqslant \langle\nabla\Phi(x_0+\mathrm{th})-\nabla\Phi(x_0-\mathrm{th}),h\rangle$, выполнена оценка

$$\Phi(x_0+\mathrm{th})+\Phi(x_0-\mathrm{th})-2\Phi(x_0) \leqslant \int_0^t \min\big(2a_0\mathrm{Cs},2|v|\big)ds.$$

Вычисляя правую часть и принимая во внимание, что $|v| \leqslant Ct$, получаем

$$\Phi(x_0 + \mathrm{th}) + \Phi(x_0 - \mathrm{th}) - 2\Phi(x_0) \leqslant a_1 Ct^2,$$

где $a_1 = \frac{3}{2}$. Таким образом, $\Phi_{hh} \leqslant a_1 C$. Повторяя эти аргументы бесконечное число раз, получим $\Phi_{hh} \leqslant a_n C$ и $\lim_n a_n = 1$. Теорема доказана.

3) L^p-оценки

См. раздел 6.

Замечание 2. Заметим, что теорема из [6] несколько отличается от результата выше. Ниже приведен оригинальный результат Каффарелли.

Теорема 2 (L. Caffarelli). Пусть $\mu = e^{-Q}dx$ — произвольная гауссовская мера. Тогда для любой меры $\nu = e^{-Q-P}dx$, где P — выпуклая функция, соответствующая оптимальная транспортировка T является сжатием.

Идея доказательства: Применим принцип максимума. Мы ищем максимум $\Phi_{ee}(x)$ среди единичных e и $x \in \mathbb{R}^d$. Применим соотношение, полученное выше

$$Q_{ee} = \langle D^2(Q + P)(\nabla\Phi)D^2\Phi \cdot e,D^2\Phi \cdot e\rangle +$$

$$+\langle\nabla(Q + P)(\nabla\Phi),\nabla\Phi_{ee}\rangle - \mathrm{Tr}(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_{ee}+$$

$$+\mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_e\Big]^2.$$

Из тех же самых аргументов, что и выше, следует

$$Q_{ee} \geqslant \langle D^2(Q + P)(\nabla\Phi)D^2\Phi \cdot e,D^2\Phi \cdot e\rangle.$$

Учтем, что P — выпуклая функция и e — собственный вектор $D^2\Phi$. Получаем

$$Q_{ee} \geqslant \Phi^2_{ee} \cdot Q_{ee}(\nabla\Phi).$$

Из того, что Q_{ee} постоянно, следует искомое утверждение.

III. Равномерно выпуклые меры общего вида

Доказательство, основанное на изучении дифференциальных разностей, может быть легко обобщено на случай равномерно логарифмически вогнутых мер (в обобщенном смысле). Последнее означает, что потенциал W удовлетворяет соотношению

$$W(x + y) + W(x - y) - W(x) \geqslant \delta(|y|)$$

для некоторой возрастающей неотрицательной функции δ. Следующий результат был доказан в [15].

Теорема 3. Предположим, что V и W удовлетворяют соотношению

$$V(x + y) + V(x - y) - 2V(x) \leqslant A_p|y|^{p+1},$$

$$W(x + y) + W(x - y) - 2W(x) \geqslant A_q|y|^{q+1}$$

для некоторых $0 \leqslant p \leqslant 1$, $1 \leqslant q$, $A_p > 0$, $A_q > 0$.

Тогда Φ удовлетворяет неравенству

$$\Phi(x+\mathrm{th})+\Phi(x-\mathrm{th})-2\Phi(x) \leqslant 2\Big(\frac{A_p}{A_q}\Big)^{\frac{1}{q+1}} t^{1+\alpha} \quad (3)$$

для любого единичного вектора $h \in \mathbb{R}^d$ с $\alpha = \frac{p+1}{q+1}$.

Замечание 3. Константа в (3) в общем случае не оптимальна.

Из (3) следует, что $\nabla\Phi$ — глобально гельдерово отображение. Это верно и без предположния выпуклости Φ, но выпуклый случай проще и следует из леммы, сообщенной автору Сашей Содиным.

Лемма 2. Для любой выпуклой функции f и единичного вектора h выполнено

$$|\nabla f(x + \mathrm{th}) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{t} \sup_{v:|v|=1} \Big(f(x + 2tv) + f(x - 2tv) - 2f(x)\Big).$$

Используя эту лемму, можно усилить результат о гёльдеровой транспортировке.

Теорема 4. Предположим, что

$$V(x + y) + V(x - y) - 2V(x) \leqslant |y|^2,$$

и

$$W(x + y) + W(x - y) - W(x) \geqslant \delta(|y|)$$

для некоторой неотрицательной возрастающей функции δ. Тогда

$$|\nabla\Phi(x) - \nabla\Phi(y)| \leqslant 8\delta^{-1}(4|x-y|^2).$$

Применяя эту оценку, можно перенести знаменитое гауссовское изопериметрическое неравенство на случай (обобщенной) равномерно выпуклой меры. Напомним (см. [1]), что стандартная гауссова мера γ удовлетворяет гауссовому изопериметрическому неравенству

$$\gamma(A^r) \geqslant \Phi(\Phi^{-1}(\gamma(A)) + r),$$

где $A^r = \{x \in \mathbb{R}^d : \exists\ a \in A : |a-x| < r\}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Следовательно, применяя теорему 4 к мерам $\mu = \gamma$ и $\nu = e^{-W}dx$ с потенциалом W, удовлетворяющим

$$W(x+y) + W(x-y) - W(x) \geqslant \delta(|y|),$$

мы получаем

$$\nu\big(A^r\big) \geqslant \Phi\Big(\Phi^{-1}(\nu(A)) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta(r/8)}\Big).$$

В частности, ν обладает безразмерным свойством концентрации

$$\nu\big(A^r\big) \geqslant 1 - \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{1}{8}\delta(r/8)\Big),$$

если $\nu(A) \geqslant 1/2$. Близкий результат был получен Е. Мильманом и С. Содиным в работе [23] с помощью локализационых аргументов. Из результатов Е. Мильмана [21] следует, что изопериметрическим неравенства и неравенства концентрации эквивалентны для логарифмически вогнутых мер. Подробнее о неравенствах концентрации см. [18, 22].

IV. Мера Лебега на выпуклом множестве

В этом разделе мы обсудим следующую проблему.

Проблема 1. Рассмотрим» хорошую» μ (например, произведение гауссовских или экспоненциальных мер). Требуется эффективно оценить липшицеву константу оптимального отображения, отображающего μ в нормированную меру Лебега на выпуклом множестве K.

Замечание 4. Прямые произведения мер являются «хорошими», потому что константы для неравенств типа Соболева (константы Чигера, Пуанкаре и т.д.) легко оцениваются для таких мер. К другим хорошим мерам можно отнести логарифмически вогнутые с равномерно выпуклым или радиально-симметричным потенциалом.

Эта задача была мотивирована известной гипотезой Каннана–Ловаша–Симоновича (КЛС-гипотеза). Напомним, что константой Чигера $C_{\mathrm{ch}}(K)$ выпуклого тела K называется наименьшая константа, для которой выполнено неравенство

$$\int\limits_K \Big| f - \frac{1}{\lambda(K)} \int\limits_K f dx \Big| dx \leqslant C_{\mathrm{ch}}(K) \int\limits_K |\nabla f| dx$$

для любой гладкой функции f.

КЛС-гипотеза. Существует такая универсальная константа c, что

$$C_{\mathrm{ch}}(K) \geqslant c$$

для любого выпуклого $K \subset \mathbb{R}^d$, удовлетворяющего соотношениям

$$\int\limits_K x_i dx = 0, \frac{1}{\lambda(K)} \int\limits_K x_i x_j dx = \delta_i^j.$$

Подробнее о КЛС-гипотезе см. [5, 12, 21].

Некоторые результаты такого типа были получены в [15]. Аргументы ниже обобщают доказательство, основанное на принципе максимума. Рассмотрим оптимальную транспортировку, отображающую $e^{-V}dx$ в $\frac{1}{\lambda(K)}\lambda|_K$. Зафиксируем единичный вектор h. Найдем такую функцию ψ, что функция

$$\psi(\Phi_h) + \log \Phi_{hh}$$

будет ограничена сверху. Предположим, что x_0 — точка максимума этой функции. В этой точке

$$\psi'(\Phi_h)\nabla\Phi_h + \frac{1}{\Phi_{hh}}\nabla\Phi_{hh} = 0, \qquad (4)$$

$$\psi''(\Phi_h)\nabla\Phi_h \oplus \nabla\Phi_h + \psi'(\Phi_h)D^2\Phi_h + \frac{1}{\Phi_{hh}}D^2\Phi_{hh} - \\ - \frac{1}{\Phi_{hh}^2}\nabla\Phi_{hh} \oplus \nabla\Phi_{hh} \leqslant 0. \qquad (5)$$

Дифференцирование формулы замены переменных дает соотношения (см. раздел 1):

$$V_h = -\mathrm{Tr}(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_h,$$

$$V_{hh} = -\mathrm{Tr}(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_{hh} + \mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_h\Big]^2.$$

Умножим (5) на $(D^2\Phi)^{-1}$, возьмем след и подставим выражение для V_{hh} в формулу. Получим

$$V_{hh} \geqslant -\frac{1}{\Phi_{hh}}\mathrm{Tr}\big[(D^2\Phi)^{-1} \cdot \nabla\Phi_{hh} \oplus \nabla\Phi_{hh}\big] + \\ + \Phi_{hh} \cdot \psi''(\Phi_h)\mathrm{Tr}\big[(D^2\Phi)^{-1} \cdot \nabla\Phi_h \oplus \nabla\Phi_h\big] + \\ + \Phi_{hh} \cdot \psi'(\Phi_h)\mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_h\Big] + \mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_h\Big]^2.$$

Заметим, что $\mathrm{Tr}(D^2\Phi)^{-1} \cdot \nabla\Phi_h \oplus \nabla\Phi_h = \Phi_{hh}$. Из (4) вытекает, что $\nabla\Phi_{hh} = -\Phi_{hh}\psi'(\Phi_h)\nabla\Phi_h$. Подставляя это в неравенство для V_{hh}, получаем

$$V_{hh} \geqslant \Phi_{hh}^2\big[\psi'' - (\psi')^2\big] \circ \Phi_h + \\ + \Phi_{hh} \cdot \psi'(\Phi_h)\mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_h\Big] + \\ + \mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_h\Big]^2.$$

Заметим, что

$$\mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_h\Big] = \mathrm{Tr}C, \mathrm{Tr}\Big[(D^2\Phi)^{-1}D^2\Phi_h\Big]^2 = \mathrm{Tr}C^2,$$

где

$$C = (D^2\Phi)^{-1/2}(D^2\Phi_h)(D^2\Phi)^{-1/2}$$

— симметричная матрица. По неравенству Коши

$$V_{hh} \geqslant \Phi_{hh}^2\Big[\psi'' - \Big(1+\frac{d}{4}\Big)(\psi')^2\Big] \circ \Phi_h.$$

Предположим, что V_{hh} ограничено константой C. Пусть ψ — функция, удовлетворяющая соотношению $\psi'' - \Big(1+\frac{d}{4}\Big)(\psi')^2 \geqslant e^{2\psi}$. Получаем

$$C \geqslant \Phi_{hh}^2(x_0)e^{2\psi(\Phi_h(x_0))} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \Phi_{hh}^2 e^{2\psi(\Phi_h)}.$$

В частности, выбирая подходящую функцию ψ, получим следующее утверждение (см. детали в [15]).

Теорема 5. 1) Оптимальная транспортировка T стандартной гауссовой меры γ в $\frac{1}{\lambda(K)}\lambda|_K$, где K — выпуклое тело, удовлетворяет оценке

$$\|DT\| \leqslant c\sqrt{d}\mathrm{diam(K)},$$

где c — универсальная константа, а diam(K) — диаметр K.

2) Оптимальная транспортировка T меры $\mu = e^{-V}dx$ в $\frac{1}{\lambda(K)}\lambda|_K$, где $V_{hh} \leqslant C$, $|V_h| \leqslant C$ для некоторого C и всех h, $|h| = 1$, удовлетворяет оценке

$$\|DT\| \leqslant c\mathrm{diam(K)},$$

где c зависит только от C.

К сожалению, оценки теоремы 5 недостаточно сильны, чтобы дать новое доказательство даже известных результатов о константе Чигера для выпуклых тел. Возникает следующая естественная проблема.

Проблема 2. Существует ли не зависящая от размерности оценка для $\|DT\|$, где $\mu = \gamma$ и $\nu = \frac{1}{\lambda(K)}\lambda|_K$? Тот же самый вопрос для произведения экспоненциальных распределений.

Заметим также, что было бы достаточно получить оценки для $\int \|DT\|^p d\mu$. Это следует из результата Е. Мильмана об эквивалентности норм для логарифмически вогнутых мер [21].

V. Сжатие для транспортировки мер, порожденной полугруппами

Результат о сжатии для другого типа транспортировки был недавно получен в [13].

Рассмотрим полугруппу $P_t = e^{tL}$, порожденную

$$L = \Delta - \langle\nabla V,\nabla\rangle = e^V \mathrm{div}(e^{-V}\cdot\nabla)$$

и поток вероятностных мер

$$\nu_t = P_t(e^{-W+V})\cdot\mu.$$

Очевидно, μ — инвариантная мера для P_t, $\nu_0 = \nu$, и $\nu_\infty = \mu$.

Запишем уравнение для ν_t:

$$\frac{d}{dt}\nu_t = LP_t(e^{-W+V})\cdot\mu = \mathrm{div}\big[\nabla P_t(e^{-W+V})\cdot e^{-V}\big] =$$

$$= \mathrm{div}\big[\nabla \log P_t(e^{-W+V})\cdot\nu_t\big].$$

Соответствующий поток диффеоморфизмов определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}S_t = -\nabla\log P_t(e^{-W+V})\circ S_t, S_0 = Id, \qquad (6)$$

где ν_t и S_t связаны соотношением

$$\nu_t = \nu\circ S_t^{-1}.$$

В частности, предельное отображение $S_\infty = \lim_{t\to\infty} S_t$ отображает ν в μ. Обозначим обратное отображение через T_t:

$$T_t\circ S_t = Id, T = \lim_{t\to\infty} T_t.$$

Свойство сжатия для $T = S^{-1}$ эквивалентно свойству «расширения» для S. Так как T и S — диффеоморфизмы, то достаточно доказать, что $(DS_t)^*DS_t \geqslant Id$. Используя (6), получаем

$$\frac{d}{dt}DS_t(x) = -DW_t(S_t)\cdot DS_t, W_t = \nabla\log P_t(e^{-W+V}).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(DS_t)^*DS_t = 2(DS_t)^*\cdot DW_t(S_t)\cdot DS_t.$$

Если

$$DW_t(S_t) = -D^2\log P_t(e^{-W+V}) \geqslant 0,$$

то S_t обладает нужным свойством.

Предположим, что функция U, определенная по формуле

$$\nu = e^{-U}\cdot\mu, U = W - V,$$

выпукла. Тогда свойство $-D^2\log P_t(e^{-W+V}) = -D^2\log P_t e^{-U} \geqslant 0$ означает, что P_t *сохраняет логарифмически вогнутые функции*. Так мы получили следующую теорему.

Теорема 6. Предположим, что U — выпуклая функция. Если $U_t = -\log P_t e^{-U}$ — выпуклая функция для любого $t \geqslant 0$, то каждое отображение T_t является 1-сжатием.

Заметим, что согласно результату из [14], свойством сохранять *все* логарифмически вогнутые функции обладают только диффузионные гауссовские полугруппы. Тем не менее Ким и Мильман показали, что при наличии некоторой симметрии логарифмическая вогнутость может сохраняться. Доказательство основано на применении принципа максимума.

В частности, ими было получен следующий результат (см. более общую формулировку в [13]).

Теорема 7. Предположим, что μ — продакт-мера, V и U — выпуклые функции, причем U удовлетворяет условию $U(x_1,...,x_n) = U(\pm x_1,...,\pm x_n)$, и V имеет вид $V(x) = \sum_{i=1}^d \rho_i(|x_i|)$, где $\rho_i''' \leqslant 0$.

Тогда T — сжатие. Кроме этого, оптимальная транспортировка T_{opt}, отображающая μ в ν, тоже является сжатием.

Кратко обсудим идею доказательства. Пусть t_0 — первый момент, когда U_t теряет выпуклость. Предположим, что минимум $\partial_{ee}U_{t_0}$ достигается в некоторой точке x_0 для некоторого направления e. Тогда $(d/dt - \Delta)\partial_{ee}U_t|_{t_0,x_0} \leqslant 0$. Кроме этого, $\nabla\partial_e U_t = 0$ и $\nabla\partial_{ee}U_t = 0$. Используя это, можно показать, что

$$(d/dt - \Delta)\partial_{ee}U_t|_{t_0,x_0} = -\langle \nabla U_t, \nabla V_{ee}\rangle|_{t_0,x_0}.$$

В момент t_0 функция U_t еще выпукла и легко показать, что правая часть равенства неотрицательна. Это ведет к противоречию.

VI. L^p-сжатие

В этом разделе мы обсудим L^p-обобщения теоремы Каффарелли (см. [16]). Результаты доказаны с помощью так называемой леммы о касательной (см. [16]). Огромное преимущество этого подхода состоит в том, что заранее не требуется никакой регулярности функции Φ. Детали и обсуждение связи с транспортными неравенствами см. в [16].

Замечание 5. Оценки, полученные в этом разделе, не зависят от размерности и являются априорными соболевскими глобальными оценками для оптимальной транспортировки. В частности, они могут быть обобщены на случай бесконечномерных мер.

Теорема 8. Предположим, что $D^2W \geqslant K\cdot\mathrm{Id}$. Для любого единичного вектора e, $p \geqslant 1$, выполнены оценки

$$K\|\Phi_{ee}^2\|_{L^p(\mu)} \leqslant \|(V_{ee})_+\|_{L^p(\mu)},$$

$$K\|\Phi_{ee}^2\|_{L^p(\mu)} \leqslant \frac{p+1}{2}\|V_e^2\|_{L^p(\mu)}.$$

Доказательство. Зафиксируем единичный вектор e. Согласно результатам Мак–Кэна [19] формула замены переменных

$$V(x) = W(\nabla\Phi(x)) - \log\det D_a^2\Phi$$

выполнена μ-почти всюду. Здесь $D_a^2\Phi$ — обсолютно непрерывная часть второй производной $D^2\Phi$, понимаемой в смысле обобщенных функций (производная Александрова). Имеем

$$V(x+te) - V(x) = W(\nabla\Phi(x+te)) - W(\nabla\Phi(x)) -$$
$$- \log\Big[(\det{}_a D^2\Phi(x))^{-1}\cdot \det{}_a D^2\Phi(x+te)\Big].$$

В силу равномерной выпуклости W:

$$V(x+te) - V(x) \geqslant$$
$$\geqslant \langle \nabla\Phi(x+te) - \nabla\Phi(x), \nabla W(\nabla\Phi(x))\rangle +$$
$$+\frac{K}{2}|\nabla\Phi(x+te) - \nabla\Phi(x)|^2 -$$
$$- \log\Big[(\det{}_a D^2\Phi(x))^{-1}\cdot \det{}_a D^2\Phi(x+te)\Big].$$

Умножим это соотношение на $(\delta_{te}\Phi)^p$, где $p \geqslant 0$,

$$\delta_{te}\Phi = \Phi(x+te) + \Phi(x-te) - 2\Phi(x),$$

и проинтегрируем по μ. Применим следующую простую лемму

Лемма 3. Пусть $\varphi : A \to \mathbb{R}$, $\psi : B \to \mathbb{R}$ — выпуклые функции на выпуклых множествах A, B. Предположим, что $\nabla\psi(B) \subset A$. Тогда

$$\mathrm{div}(\nabla\varphi \circ \nabla\psi) \geqslant \mathrm{Tr}\big[\mathrm{D_a^2}\varphi(\nabla\psi)\cdot \mathrm{D_a^2}\psi\big]\mathrm{dx} \geqslant 0,$$

где div — дивергенция в смысле обобщенных функций.

Интегрируя по частям и применяя лемму, получаем

$$\int \langle \nabla\Phi(x+te) - \nabla\Phi(x), \nabla W(\nabla\Phi(x))\rangle (\delta_{te}\Phi)^p d\mu =$$
$$= \int \langle \nabla\Phi(x+te)\circ(\nabla\Psi) - x, \nabla W(x)\rangle (\delta_{te}\Phi)^p \circ (\nabla\Psi) d\nu \geqslant$$
$$\geqslant \int \Big(\mathrm{Tr}\big[D_a^2\Phi(x+te)\cdot(D_a^2\Phi)^{-1}\big]\circ(\nabla\Psi) - d\Big)(\delta_{te}\Phi)^p \circ$$
$$\circ(\nabla\Psi)d\nu +$$
$$+p\int \Big\langle \nabla\Phi(x+te)\circ(\nabla\Psi) - x, (D^2\Psi)\nabla\delta_{te}\Phi\circ(\nabla\Psi)\Big\rangle$$
$$(\delta_{te}\Phi)^{p-1}\circ(\nabla\Psi)d\nu.$$

Заметим, что

$$\mathrm{Tr}A - d - \log\det A \geqslant 0$$

для любого A вида $A = \mathrm{BC}$, где B и C симметричны и положительны. Действительно,

$$\mathrm{Tr}A - d - \log\det A = \mathrm{Tr}C^{1/2}\mathrm{B}C^{1/2} - d -$$
$$- \log\det C^{1/2}\mathrm{B}C^{1/2} = \sum_i \lambda_i - 1 - \log\lambda_i,$$

где λ_i — собственные значения $C^{1/2}\mathrm{B}C^{1/2}$.

Таким образом,

$$\int \big(V(x+te) - V(x)\big)(\delta_{te}\Phi)^p d\mu \geqslant$$
$$\geqslant \frac{K}{2}\int |\nabla\Phi(x+te) - \nabla\Phi(x)|^2(\delta_{te}\Phi)^p d\mu +$$
$$+p\int \Big\langle \nabla\Phi(x+te) - \nabla\Phi(x), (D^2\Psi)\circ\nabla\Phi(x)\nabla\delta_{te}\Phi\Big\rangle$$
$$(\delta_{te}\Phi)^{p-1}d\mu.$$

Применим то же неравенство к $-te$ и рассмотрим сумму

$$\int \big(V(x+te) + V(x-te) - 2V(x)\big)(\delta_{te}\Phi)^p d\mu \geqslant$$

$$\geqslant \frac{K}{2}\int |\nabla\Phi(x+te)-\nabla\Phi(x)|^2(\delta_{te}\Phi)^p d\mu+$$

$$+\frac{K}{2}\int |\nabla\Phi(x-te)-\nabla\Phi(x)|^2(\delta_{te}\Phi)^p d\mu+$$

$$+p\int \Big\langle \nabla\delta_{te}\Phi,(D_a^2\Phi)^{-1}\nabla\delta_{te}\Phi\Big\rangle(\delta_{te}\Phi)^{p-1}d\mu.$$

Заметим. что последнее слагаемое неотрицательно. Разделив на t^{2p} и перейдя к пределу, получаем

$$\int V_{ee}\Phi_{ee}^p d\mu \geqslant K\int \|D^2\Phi\cdot e\|^2\Phi_{ee}^p d\mu+$$

$$+p\int \langle (D^2\Phi)^{-1}\nabla\Phi_{ee},\nabla\Phi_{ee}\rangle\Phi_{ee}^{p-1}d\mu. \qquad (7)$$

Для доказательства первой части заметим, что

$$\int V_{ee}\Phi_{ee}^p d\mu \geqslant K\int \Phi_{ee}^{p+2}d\mu.$$

Из неравенств Гельдера следует

$$\|(V_{ee})_+\|_{L^{(p+2)/2}(\mu)}\|\Phi_{ee}^p\|_{L^{(p+2)/p}(\mu)} \geqslant \int V_{ee}\Phi_{ee}^p d\mu.$$

Отсюда вытекает нужный результат.

Для доказательства второй части утверждения применим интегрирование по частям

$$\int V_{ee}\Phi_{ee}^p d\mu = -p\int V_e\Phi_{eee}\Phi_{ee}^{p-1}d\mu + \int V_e^2\Phi_{ee}^p d\mu =$$

$$= -p\int \langle\nabla\Phi_{ee},V_e\cdot e\rangle\Phi_{ee}^{p-1}d\mu + \int V_e^2\Phi_{ee}^p d\mu.$$

В силу неравенства Коши эта величина не превосходит

$$p\int \langle (D^2\Phi)^{-1}\nabla\Phi_{ee},\nabla\Phi_{ee}\rangle\Phi_{ee}^{p-1}d\mu+$$

$$+\frac{p}{4}\int V_e^2\langle D^2\Phi e,e\rangle\Phi_{ee}^{p-1}d\mu + \int V_e^2\Phi_{ee}^p d\mu.$$

Неравенство (7) влечет

$$\frac{p+4}{4}\int V_e^2\Phi_{ee}^p d\mu \geqslant K\int |\nabla\Phi_e|^2\Phi_{ee}^p d\mu \geqslant K\int \Phi_{ee}^{p+2}d\mu.$$

Конец доказательства такой же, как и в первой части.

Следствие 1. В пределе $p\to\infty$ мы снова получаем теорему Каффарелли:

$$K\|\Phi_{ee}\|^2_{L^\infty(\mu)} \leqslant \|(V_{ee})_+\|_{L^\infty(\mu)}.$$

Более сложная оценка для операторной нормы $\|\cdot\|$ также была получена в [16].

Теорема 9. Предположим, что $D^2W\geqslant K\cdot\mathrm{Id}$. Тогда для любого $r\geqslant 1$ выполнено

$$K\Big(\int \|D^2\Phi\|^{2r}d\mu\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant \Big(\int \|(D^2V)_+\|^r d\mu\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

VII. Сжатие бесконечных мер

В этом разделе мы обсудим результаты о сжатии бесконечных мер. Заметим, что в отличие от вероятностного случая, здесь нет естественной нормировки мер.

Начнем с одномерного примера.

Пример 1. Пусть $d=1$, $\mu=\lambda|_{\mathbb{R}^+}$, $\nu=I_{[0,+\infty)}\rho dx$ и $\rho\geqslant 1$. Стандартная монотонная транспортировка T является сжатием.

Доказательство. Действительно, это следует из точного представления T:

$$\int_0^T \rho dx = x.$$

Посмотрим, что произойдет в случае $d=2$ и сферически инвариантной меры-образа.

Пример 2 (F. Morgan). Пусть $d=2$ и $\mu=\lambda$, $\nu=\Psi(r)dx$. Естественная транспортировка имеет вид

$$T(x)=\varphi(r)\cdot n, n=\frac{x}{r}.$$

Очевидно,

$$\nu(T(B_r)) = 2\pi\int_0^{\varphi(r)} s\Psi(s)dr = \pi r^2 = \mu(B_r).$$

Вычислим DT в базисе (n,v), где $v=\frac{(-x_2,x_1)}{r}$. Получаем

$$\partial_n T=\varphi'\cdot n\partial_v T=\frac{\varphi}{r}\cdot v.$$

Очевидно, необходимым и достаточным условием того, чтобы T было сжатием, является

$$\varphi'\leqslant 1$$

или $\psi'\geqslant 1$ для $\psi=\varphi^{-1}$. Из формулы замены переменной мы получаем

$$\psi(r)=\sqrt{2\int_0^r s\Psi(s)ds}.$$

Условие $\psi'\geqslant 1$ эквивалентно $\int_0^r s\Psi(s)ds \leqslant \frac{(r\Psi(r))^2}{2}$. Последнее выполнено, например, если

$$(s\Psi(s))'\geqslant 1.$$

Действительно, в этом случае

$$\int_0^r s\Psi(s)ds \leqslant \int_0^r s\Psi(s)(s\Psi(s))'ds = \frac{(r\Psi(r))^2}{2}.$$

Пример 3. Аналогично, если размерность равна d, достаточным условием для отображения $T=\varphi(r)\frac{x}{r}$ между λ и $\Psi(r)dx$ является

$$(r\Psi^{\frac{1}{d-1}}(r))'\geqslant 1.$$

Следствие 2. В d-мерном евклидовом пространстве с плотностью $\Psi(r)$, удовлетворяющей

$$(r\Psi^{\frac{1}{d-1}}(r))' \geqslant 1,$$

выполнено евклидово изопериметрическое неравенство.

Некоторые примеры сжимающих отображений естественным образом возникают в геометрии (см. [20], предложения 1.1 и 1.2).

Предложение 1. Пусть M — плоскость, наделенная метрикой

$$dr^2 + g^2(r)r^2 d\theta^2$$

(поверхность революции), $g \geqslant 1$. Тогда тождественное отображение M в евклидову плоскость с мерой gdx является сжатием, сохраняющим объем.

В частности, $\cosh^2(r)dx$ является липшицевым образом H^2 (с метрикой $dr^2 + \cosh^2(r)d\theta^2$).

Следующая теорема сравнения была получена в [17]. Оказывается, что естественная модель логарифмически вогнутого распределения на прямой имеет следующий вид:

$$\nu_A = \frac{dx}{\cos Ax}, -\frac{\pi}{2A} < x < \frac{\pi}{2A}.$$

Его потенциал V удовлетворяет $V''e^{-2V} = A^2$. Используя результат [25] о симметрии изопериметрических множеств, несложно вычислить изопериметрическую функцию ν_A:

$$\mathcal{I}_{\nu_A}(t) = e^{\mathrm{At}/2} + e^{-\mathrm{At}/2}.$$

Предложение 2. Пусть $\mu = e^W dx$ — мера на $\mathbb{R}^1$ с четным выпуклым потенциалом W. Предположим, что

$$W''e^{-2W} \geqslant A^2$$

и $W(0) = 0$. Тогда μ являтся образом ν_A при 1-липшицевом возрастающем отображении.

Доказательство. Без потери общности можно предположить, что W — гладкая функция и $W''e^{-2W} > A^2$. Пусть φ — выпуклый потенциал, т.ч. $T = \varphi'$ отображает μ в ν_A. Кроме этого, мы требуем, чтобы отображение T было нечетным. Очевидно, φ' удовлетворяет уравнению

$$e^W = \frac{\varphi''}{\cos A\varphi'}.$$

Пусть x_0 — точка локального максимума для φ''. Тогда в этой точке

$$\varphi^{(3)}(x_0) = 0, \varphi^{(4)}(x_0) \geqslant 0.$$

Дифференцируя формулу замены переменной в x_0 дважды, мы получаем

$$W'' = \frac{\varphi^{(4)}}{\varphi''} - \Big(\frac{\varphi^{(3)}}{\varphi''}\Big)^2 + \frac{A^2}{\cos^2 A\varphi'}(\varphi'')^2 + A\frac{\sin A\varphi'}{\cos A\varphi'}\varphi'''.$$

Следовательно, в точке x_0

$$W'' \leqslant \frac{A^2}{\cos^2 A\varphi'}(\varphi'')^2 = A^2 e^{2W}.$$

Но это противоречит основному предположению.

Таким образом, φ'' не имеет локального максимума. Заметим, что φ — выпуклая функция. Из этого следует, что 0 является точкой глобального минимума φ''. Тогда $\varphi'' \geqslant \varphi''(0) = 1$. Очевидно, T^{-1} является искомым отображением.

VIII. Другие результаты и приложения

Немедленным следствием теоремы о сжатии является теорема сравнения Бакри–Леду, вероятностный аналог теоремы сравнения Леви–Громова для многообразий положительной кривизны Риччи.

Теорема 10. Предположим, что $\mu = e^{-V}dx$, где $D^2V \geqslant Id$ — вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Тогда

$$\mathcal{I}_\mu \geqslant \mathcal{I}_\gamma,$$

где γ — стандартная гауссовская мера.

Таким же образом теорема о сжатии применима к различным функциональным неравенствам и неравенствам концентрации для логарифмически вогнутых мер (логарифмическое неравенство Соболева, неравенство Пуанкаре и т.д.).

Следующая нерешенная проблема известна под названием *гауссова корреляционная гипотеза.*

Гауссова корреляционная гипотеза. Пусть A и B — симметрические выпуклые множества, а γ — стандартная гауссовская мера. Тогда

$$\gamma(A \cap B) \geqslant \gamma(A)\gamma(B). \qquad (8)$$

Гауссова корреляционная гипотеза возникла в 70-е годы. Основные положительные результаты — неравенство верно в двумерном случае и в случае, когда одно из множеств — эллипсоид. Случай эллипсоида был доказан Ж. Арже ([10]), а транспортное решение получено Д. Кордеро–Ераскином [8].

Предложение 3. Пусть B — эллипсоид. Тогда (8) выполнено.

Доказательство. Применив линейное преобразование мер, можно свести неравенство к случаю, когда B — шар, а γ некоторая гауссова мера. Рассмотрим оптимальную транспортировку T между γ и $\gamma_A = \frac{1}{\gamma(A)}\gamma_{|A}$. По теореме $2T$ — сжатие. В силу симметрии $T(0) = 0$. Таким образом, $T(B) \subset B$ и

$$\frac{\gamma(A \cap B)}{\gamma(A)} = \gamma_A(B) = \gamma(T^{-1}(B)) \geqslant \gamma(B).$$

Теорема доказана.

Следующее красивое наблюдение [11] следует из теоремы о сжатии и свойств полугруппы Орнштейна–Уленбека.

Теорема 11. Если γ — стандартная гауссовская мера, g — симметричная выпуклая функция, f — симметричная логарифмически вогнутая функция, то

$$\int f g d\gamma \leqslant \int f d\gamma \cdot \int g d\gamma.$$

Доказательство. Пусть $T(x) = x + \nabla\varphi(x)$ — оптимальная транспортировка γ в $\frac{f\cdot\gamma}{\int f d\gamma}$. Достаточно доказать, что

$$\int g(x + \nabla\varphi(x)) d\gamma \leqslant \int g d\gamma.$$

Положим

$$\psi(t) = \int g(x + P_t(\nabla\varphi(x))) d\gamma,$$

где $P_t = e^{tL}$ — полугруппа Орнштейна–Уленбека с генератором $L = \Delta - \langle x,\nabla\rangle$. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int g(x + P_t(\nabla\varphi(x))) d\gamma =$$

$$= \int \langle \nabla g(x + P_t(\nabla\varphi(x))), L P_t(\nabla\varphi(x))\rangle d\gamma.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = -\int \mathrm{Tr}\Big[D^2 g(x + P_t(\nabla\varphi(x)))\cdot(I+M)M\Big] d\gamma,$$

где

$$M = DP_t(\nabla\varphi(x)) = e^{-t/2}P_t(D^2\varphi).$$

В силу теоремы о сжатии $I + M \geqslant 0$ и $M \leqslant 0$. Тогда $\mathrm{Tr}\Big[D^2 g \cdot (I+M)M\Big] \leqslant 0$ и функция $\psi(t)$ возрастает. Заметим, что $P_{+\infty}(\nabla\varphi) = \int \nabla\varphi d\gamma = \frac{\int x f d\gamma}{\int f d\gamma} = 0$. Таким образом, $\int g(x + \nabla\varphi(x)) d\gamma \leqslant \psi(+\infty) = \int g d\gamma$. Теорема доказана.

Некоторые другие приложения к корреляционным неравенствам были получены в [8, 13]. Обобщение предложения 3 на негауссовы меры было получено в [13] (см. следствие 4.1).

Другие приложения, полученные в работах [6, 8, 10, 13], касаются неравенств вида

$$\int \Gamma(x) d\mu \leqslant \int \Gamma(x) d\nu,$$

где $\Gamma(x)$ — выпуклая функция (неравенства моментов и т.д.).

Следующая теорема была получена в [7] с помощью теоремы о сжатии. В частности, она дает положительное решение для так называемой (B)-гипотезы для гауссовских мер.

Теорема 12. Пусть K — выпуклое множество и γ — гауссовская мера. Тогда функция

$$t \to \gamma(e^t K)$$

— логарифмически вогнутая.

Заметим, что кроме результатов из предыдущего раздела ничего не известно о сжимающих отображениях многообразий.

Следующий результат был получен С.И. Вальдимарссоном (см. [26]). Пусть M — неотрицательная симметричная матрица. Обозначим через γ_M гауссову меру с плотностью

$$\sqrt{\det M} e^{-\pi\langle Mx,x\rangle}.$$

Теорема 13. Пусть A, G и B — положительно определенные линейные преобразования, $A < G$, $GB = BG$, H — выпуклая функция, а μ_0 — вероятностная мера. Оптимальная транспортировка $T = \nabla\Phi$ вероятностных мер

$$\mu = \gamma_{B^{-1/2}GB^{-1/2}} * \mu_0 and \nu = \mathrm{C}e^{-H}\cdot\gamma_{B^{-1/2}A^{-1}B^{-1/2}}$$

удовлетворяет

$$D^2\Phi \leqslant G.$$

Специальный вид меры μ позволил Вальдимарссону (см. также работу Ф. Барта [3]) получить с помощью транспортных аргументов новую форму неравенства Браскампа–Либа. См. детали в [26].

Мы закончим раздел следующим наблюдением из [4].

Предложение 4. Пусть $\mu = I_{[0,+\infty)}e^{-x}dx$ — односторонняя экспоненциальная мера $\nu = e^g\cdot\mu$, удовлетворяющая $|g'| \leqslant c$ для некоторого $c < 1$. Монотонная транспортировка T, отображающая ν в μ, удовлетворяет

$$T'(x) \in [1-c, 1+c]$$

для всех $x \in [0,\infty)$. Обратное отображение $S = T^{-1}$ является $\frac{1}{1-c}$-сжатием.

Результат вытекает из точного представления T, но может быть эвристически доказан с помощью принципа максимума, примененного к S. Действительно,

$$g(s) - S + \log S' = -x.$$

Если x_0 — точка максимума для S', имеем $S''(x_0) = 0$. Кроме этого,

$$g'(S(x_0))S'(x_0) - S'(x_0) + \frac{S''(x_0)}{S'(x_0)} = -1.$$

Очевидно, $S'(x_0) = \frac{1}{1-g'(S(x_0))} \leqslant \frac{1}{1-c}$.

Используя это свойство, можно транспортными методами доказать 1-мерное неравенство Талаграна для показательных распределений (см. [4], предложение 6.6).

Работа написана при поддерржкке грантов РФФИ 07-01-00536, РФФИ 08-01-90431-Укр и Гранта ДААД A1008062. Автор благодарен Фрэнку Моргану и Эмануэлю Мильману за поддержку и ценные замечания.

Литература

1. *Богачев В.И.* Гауссовские меры. — М.: Наука, 1997.

2. *Bakry D., Ledoux M.* Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator // Invent. Math. — 2005. — V. 123(1). — P. 259-281.

3. *Barthe F.* On a reverse form of the Brascamp–Lieb inequality // Invent. Math. — 1998. — V. 2. — P. 335-361.

4. *Barthe F., Kolesnikov A.V.* Mass transport and variants of the logarithmic Sobolev inequality // Journal. Geom. Analysis. — 2008. — V. 18(4) — P. 921-979.

5. *Bobkov S.* On isoperimetric constants for log-concave probability distributions. In Geometric aspects of functional analysis // Israel Seminar 2004-2005, volume 1910 of Lecture Notes in Math. — P. 81-88.

6. *Caffarelli L.A.* Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities // Comm. Math. Phys. — 2000. — V. 214(3) — P. 547-563.

7. *Cordero–Erausquin D., Fradelizi M., Maurey B.* The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems // J. Funct. Anal. — 2004. — V. 214 — P. 410-427.

8. *Cordero–Erausquin D.* Some applications of mass transport to Gaussian type inequalities // Arch. Rational Mech. Anal. — 2002. — V. 161. — P. 257-269.

9. *Gromov M.* Metric structure for Riemannian and non-Riemannian spaces // Birkhäuser — Boston, 1998. — V. 152.

10. *Hargé G.* A particular case of correlation inequality for the Gaussian measure // Ann. Probab. — 1999. — V. 27. — P. 1939-1951.

11. *Hargé G.* A convex / log-concave correlation inequality for Gaussian measure and an application to abstract Wiener spaces // Probab. Theory Related Fields — 2004. — V. 13, N. 3 — P. 415-440.

12. *Kannan R., Lovàsz L., Simonovits S.* Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma // Discrete Comput. Geom. — 1995. — V. 13(3-4) — P. 541-559.

13. *Kim Y.-H., Milman E.* A Generalization of Caffarelli's Contraction Theorem via (reverse) Heat Flow. — arXiv:1002.0373.

14. *Kolesnikov A.V.* On diffusion semigroups preserving the log-concavity // J. Funct. Anal. — 2001. — V. 186.

15. *Kolesnikov A.V.* On global Hölder estimates of optimal transportation. — arXiv: 0810.5043.

16. *Kolesnikov A.V.* On Sobolev regularity of mass transport and transportation inequalities. — arXiv:1007.1103.

17. *Kolesnikov A.V., Zhdanov R.I.* On isoperimetric sets of radially symmetric measures. — arXiv:1002.1829.

18. *Ledoux M.* The concentration of measure phenomenon., Mathematical Surveys and Monographs 89 // Amer. Math. Soc. — 2001.

19. *McCann R.J.* A convexity principle for interacting gases // Adv. Math. — 1997. — V. 128. — P. 153-179.

20. *Maurmann Q., Morgan F.* Isoperimetric comparison theorems for manifolds with density // Calculus of Variations and Partial Differential Equations — 2009. — V. 36, N. 1. — P. 1-5.

21. *Milman E.* On the role of Convexity in Functional and Isoperimetric Inequalities // Proc. London Math. Soc. — 2009. — V. 99 (3) — P. 32-66.

22. *Milman V., Schechtman G.* Asymptotic theory of finite dimensional normed vector spaces. Lect Notes in Math. // Springer. — 1986.

23. *Milman E., Sodin S.* An isoperimetric inequality for uniformly log-concave measures and uniformly convex bodies // Jour. Funct. Anal. — 2008. — V. 254(5). — P. 1235-1268.

24. *Ros A.* The isoperimetric problem. Lecture at Clay Mathematical Institute on the Global Theory of Minimal Surfaces — 2001.

25. *Rosales C., Ca ñete A., Bayle V., Morgan F.* On the isoperimetric problem in Euclidean space with density // Calc. — 2007. — V. 31. — P. 27-46.

26. *Valdimarsson S.I.* On the Hessian of optimal transport potential // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl Sci. — 2007. — V. 6(3) — P. 441-456.

27. *Villani C.* Topics in Optimal Transportation // Amer. Math. Soc. Providence — Rhode Island, 2003.

Поступила в редакцию 04.12.2010.