Функциональный анализ и его приложения
2011, т. 45, вып. 1, с. 1–15

УДК 517.98+517.95

Сильно эллиптические системы 2-го порядка с граничными условиями на незамкнутой липшицевой поверхности*

© 2011. М. С. Агранович

Рассматриваются граничные задачи и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка с граничными условиями на компактной незамкнутой липшицевой поверхности S с липшицевым краем. Основная цель — выяснение условий однозначной разрешимости этих задач в пространствах H^s — простейших L_2-пространствах типа Соболева — с использованием операторов типа потенциала на S. Обсуждаются вопросы о регулярности решений с выходом в несколько более общие пространства бесселевых потенциалов и Бесова и о свойствах решений спектральных задач со спектральным параметром в условиях сопряжения на S, включая асимптотики собственных значений.

1. Постановки задач. Мы рассмотрим сильно эллиптическую систему 2-го порядка для простоты на n-мерном торе $\mathbb{T} = \mathbb{T}^n$ с 2π-периодическими координатами x_j $(j = 1, \dots, n)$ вне $(n-1)$-мерной липшицевой поверхности S с $(n-2)$-мерным липшицевым краем ∂S $(n \geqslant 2)$. Более точно, мы будем считать, что S — часть замкнутой липшицевой поверхности Γ, делящей тор на две области $\Omega^{\pm}$, и что граница ∂S делит Γ на две области, $S = S_1$ и S_2. В выборе дополнительной части S_2 границы Γ имеется очевидный произвол. Система задана на всем торе и записана в дивергентной форме:

$$Lu := -\sum \partial_j a_{j,k}(x)\partial_k u(x) + \sum b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Здесь коэффициенты — это $m \times m$-матрицы с комплексными элементами и u — вектор-столбец высоты m; $a_{j,k} \in C^1(\mathbb{T})$, $b_j \in C^{0,1}(\mathbb{T})$ (липшицевы) и $c \in L_\infty(\mathbb{T})$; $\partial_k = \partial/\partial x_k$. Стороны границы Γ, обращенные к $\Omega^{\pm}$, обозначим через $\Gamma^{\pm}$. Аналогично определим $S^{\pm}$. Граничные условия будут задаваться на $S^{\pm}$.

Через H^s мы обозначаем простейшие L_2-пространства бесселевых потенциалов; при $s \geqslant 0$ это L_2-пространства Соболева–Слободецкого. Все обозначения и предположения, кроме наличия края у граничной поверхности, такие же, как в [3]. Сводка сведений об используемых в настоящей статье пространствах H^s, H^s_p и B^s_p содержится в [3]; в обзоре [4] она повторена и немного дополнена. Можно смотреть также [5]. (Все работы автора, включенные в литературу, можно найти на его странице в Интернете `http://www.agranovich.nm.ru`.)

Сильная эллиптичность — это равномерная положительная определенность действительной части главного символа — матрицы $a(x,\xi) = \sum a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k$ при вещественных ξ, $|\xi| = 1$. Дополнительно действительная часть скалярного произведения $(cu, u)_{\mathbb{T}}$ предполагается достаточно большой — настолько, что

*Поддержано грантом РФФИ.

отвечающая системе форма

$$\Phi_{\mathbb{T}}(u,v)=\int_{\mathbb{T}}\Big[\sum a_{j,k}(x)\partial_k u(x)\cdot\partial_j\overline{v}(x)+\sum b_j(x)u(x)\cdot\overline{v}(x)+c(x)u(x)\cdot\overline{v}(x)\Big]\,dx \tag{1.2}$$

коэрцитивна на пространстве $H^1(\mathbb{T})$ в смысле справедливости (усиленного) неравенства Гординга $C\operatorname{Re}\Phi_{\mathbb{T}}(u,u)\geqslant\|u\|^2_{H^1(\mathbb{T})}$. Как следствие уравнение $Lu=f$ однозначно разрешимо в $H^1(\mathbb{T})$ при $f\in H^{-1}(\mathbb{T})$ в силу леммы Лакса–Мильграма о слабых решениях абстрактного уравнения $Lu=f$, где L — ограниченный оператор, определяемый приведенной ниже формулой (1.4). Приведем формулировку этой леммы в нужной нам форме (ср., например, [21]).

Лемма 1.1. *Пусть H — гильбертово пространство и H^* — сопряженное к нему пространство относительно формы (f,v), $v\in H$, $f\in H^*$, и пусть задано $f\in H^*$. Предположим, что для непрерывной полуторалинейной формы $\Phi(u,v)$ на H выполнено неравенство*

$$C\operatorname{Re}\Phi(u,u)\geqslant\|u\|^2_H. \tag{1.3}$$

Тогда существует один и только один элемент $u\in H$, такой, что

$$\Phi(u,v)=(f,v) \tag{1.4}$$

при всех $v\in H$, и оператор $L^{-1}\colon f\mapsto u$ ограничен.

Далее, аналогичные форме $\Phi_{\mathbb{T}}(u,v)$ формы $\Phi_{\Omega^\pm}(u,v)$ коэрцитивны на пространствах $\widetilde{H}^1(\Omega^\pm)$, у нас в смысле справедливости неравенств $C\operatorname{Re}\Phi_{\Omega^\pm}(u,u)\geqslant\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega^\pm)}$. (Через $\widetilde{H}^s(\Omega^\pm)$ обозначаются подпространства в $H^s(\mathbb{T})$, состоящие из элементов с носителями в $\overline{\Omega^\pm}$.) Этим обеспечивается однозначная разрешимость задач Дирихле в $\Omega^\pm$. Коэрцитивность форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ на $H^1(\Omega^\pm)$ дополнительно предполагаем; известны достаточные для этого условия. Она обеспечивает однозначную разрешимость задач Неймана в $\Omega^\pm$. В частности, можно рассматривать обобщенные системы неоднородной анизотропной упругости (см., например, [25]) и уравнение Бельтрами–Лапласа с младшими членами.

Пусть $\Omega_0=\mathbb{T}\setminus\overline{S}$. Обратим внимание на то, что эта область не является липшицевой. Нам нужно определить пространство $H^1(\Omega_0)$. Было бы неправильно определять его как пространство сужений функций из $H^1(\mathbb{T})$ на Ω_0, так как при таком определении следы функций из него на $S^\pm$ всегда были бы одинаковыми. Определим $H^1(\Omega_0)$ как пространство функций u из $L_2(\Omega_0)$, сужения которых на $\Omega^\pm$ принадлежат H^1, со следами $\gamma^\pm u=u^\pm$ на $\Gamma^\pm$ (они принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$), совпадающими на S_2; при этом

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_0)}=\|u\|^2_{H^1(\Omega^+)}+\|u\|^2_{H^1(\Omega^-)}. \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что скачок $[u]=u^- - u^+$ на S принадлежит $\widetilde{H}^{1/2}(S)$. (Через $\widetilde{H}^s(S)$ обозначается подпространство элементов в $H^s(\Gamma)$ с носителями в $\overline{S}$.)

Замечание. Это определение пространства $H^1(\Omega_0)$ равносильно следующему стандартному определению. Это пространство состоит из таких принадлежащих L_2 в области Ω_0 функций u, что все их первые производные $\partial_j u$ в смысле обобщенных функций в этой области тоже принадлежат L_2; при этом

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_0)}=\|u\|^2_{L_2(\Omega_0)}+\sum\|\partial_j u\|^2_{L_2(\Omega_0)}. \tag{1.6}$$

Равносильность следует из формулы Нечаса интегрирования по частям для функций из H^1 в липшицевой области [24, с. 121]: если написать ее в $\Omega^\pm$ для функции u, принадлежащей $H^1(\Omega_0)$ в смысле первого определения, и основной функции из $C_0^\infty(\Omega_0)$, то после сложения этих формул члены на S_2 сокращаются.

Следовательно, пространство $H^1(\Omega_0)$ не зависит от выбора поверхности S_2.

Поскольку система $Lu = f$ на торе предположена однозначно разрешимой, будем считать, что $f = 0$ в Ω_0.

Решения граничных задач для системы $Lu = 0$ ищутся в $H^1(\Omega_0)$ (до п. 6 мы будем рассматривать только простейшие пространства). Это означает, в частности, что если φ — любая функция из $C_0^\infty(\Omega_0)$, то $(u, \widetilde{L}\varphi)_{\Omega_0} = 0$. Здесь $\widetilde{L}$ — оператор, формально сопряженный к L.

Мы рассмотрим следующие задачи.

1°. Задача Дирихле для системы $Lu = 0$ в Ω_0 с условиями Дирихле на $S^\pm$:

$$u^\pm = g^\pm \text{ на } S^\pm, \tag{1.7}$$

где $g^\pm \in H^{1/2}(S)$ и $[g] = g^- - g^+ \in \widetilde{H}^{1/2}(S)$.

2°. Задача Неймана для той же системы в Ω с условиями Неймана

$$T^\pm u = h^\pm \text{ на } S^\pm, \tag{1.8}$$

где $T^\pm u$ — конормальная производная, $h^\pm \in H^{-1/2}(S)$ и $[h] \in \widetilde{H}^{-1/2}(S)$.

Поясним последнюю постановку. Напомним, что конормальная производная $T^\pm u$ функции u из $H^1(\Omega^\pm)$ в общем случае *определяется* по u и $Lu = f$ формулой Грина

$$(f, v)_{\Omega^\pm} = \Phi_{\Omega^\pm}(u, v) \mp (T^\pm u, v^\pm)_\Gamma. \tag{1.9}$$

См. [21, с. 117]. Здесь v — любая пробная функция из $H^1(\Omega^\pm)$ и $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega^\pm)$, в формах слева и справа используется соответствующая двойственность. Конормальная производная оказывается принадлежащей $H^{-1/2}(\Gamma)$. Значит, она принадлежит $H^{-1/2}(S)$ и то же верно для скачка $[Tu] = T^- u - T^+ u$. Однако справедливо следующее

Предложение 1.2. *Пусть u — решение системы* (1.1) *в Ω_0, принадлежащее $H^1(\Omega_0)$. Тогда $[Tu] \in \widetilde{H}^{-1/2}(S)$, т.е.* $\operatorname{supp}[Tu] \subset \overline{S}$.

Доказательство. Если $f = Lu \in L_2(\Omega^\pm)$, то u можно рассматривать как элемент пространства $E(\Omega^\pm)$ с нормой

$$\|u\|_{E(\Omega^\pm)} = (\|u\|^2_{H^1(\Omega^\pm)} + \|Lu\|^2_{L_2(\Omega^\pm)})^{1/2}. \tag{1.10}$$

В этом пространстве плотно пространство $C^\infty(\overline{\Omega^\pm})$ сужений на $\Omega^\pm$ функций из $C^\infty(\mathbb{T})$. (В [18, с. 59] это по существу проверено для лапласиана, но доказательство сохраняется в общем случае.) На гладких функциях конормальная производная вычисляется по формуле

$$T^\pm u = \sum \nu_j(x) a_{j,k}(x) \gamma^\pm \partial_k u(x), \tag{1.11}$$

где $\nu_j(x)$ — координаты единичной нормали к Γ (она есть почти во всех точках $x \in \Gamma$), которую считаем направленной в Ω^-; $\gamma^\pm w = w^\pm$ — оператор перехода к следу. При аппроксимации в $E(\Omega^\pm)$ гладкими функциями имеет место сходимость конормальных производных в $H^{-1/2}(\Gamma)$. (Ср. [22], где рассмотрены более общие f.) В частности, у нас $f=0$ и конормальные производные аппроксимирующих функций одинаковы с двух сторон вблизи любой точки на S_2. Значит, носитель скачка $[Tu]$ лежит на $\overline{S}$. □

В акустике и электродинамике поверхность с краем — модель незамкнутого экрана, в теории упругости — модель трещины. В этих случаях подобные задачи рассматривали Стефан и Костабель–Стефан (см., в частности, [28]–[30], [12]). У них задачи упругости рассмотрены для системы Ламе (изотропная среда). Кроме того, $g^{\pm}$ первоначально считались совпадающими и $h^{\pm}$ — тоже. Обобщения на анизотропные среды в трехмерных областях получены, в частности, в работах Дудучавы–Натрошвили–Шаргородского [15] и Дудучавы–Вендланда [16]. См. также [19] и литературу в этих работах. Во всех этих работах поверхность S и ее край предполагались достаточно гладкими и применялся метод Винера–Хопфа с использованием псевдодифференциальных операторов в форме, предложенной Эскиным в [17]. Это позволило не только изучить регулярность решения, но и исследовать его асимптотическое поведение при приближении к краю поверхности S. В этих работах просматривается возможность обобщений более простых результатов об однозначной разрешимости (или фредгольмовости) на произвольные сильно эллиптические системы 2-го порядка в липшицевых областях без предположений о гладкости, без псевдодифференциальных операторов и без метода Винера–Хопфа. Именно эта возможность реализуется в настоящей работе. Используется тот же путь сведе́ния задач к эквивалентным уравнениям на S. Автор затрагивал эти вопросы в [6], но там общность недостаточна. Конечно, без метода Винера–Хопфа до асимптотики решений вряд ли можно добраться, но небольшое продвижение в вопросе о регулярности решений мы все же получим, и оно полезно при нахождении асимптотики собственных значений спектральных задач, постановка которых указана ниже (задачи 5°, 6°).

Мы рассмотрим также следующие задачи для системы $Lu=0$ в Ω_0.

3°. Задача с условиями

$$[u]=g, \quad [Tu]=h \ \text{ на } \ S. \tag{1.12}$$

Здесь $g\in\widetilde{H}^{1/2}(S)$, $h\in\widetilde{H}^{-1/2}(S)$.

4°. Смешанная задача с условиями

$$u^{+}=g \ \text{ на } \ S^{+}, \quad T^{-}u=h \ \text{ на } \ S^{-}. \tag{1.13}$$

Здесь снова $g\in H^{1/2}(S)$, $h\in H^{-1/2}(S)$. При рассмотрении этой задачи мы следуем работе Дудучавы–Натрошвили [14], в которой рассмотрена система анизотропной упругости, но снова обходимся без предположений гладкости и без метода Винера–Хопфа. Здесь мы предполагаем систему (1.1) формально самосопряженной. Ср. [21, с. 231–234], где рассмотрены общие смешанные задачи в липшицевой области с замкнутой границей и получены эквивалентные уравнения на ней в случае формально самосопряженной системы.

Литература по смешанным задачам чрезвычайно обширна, задача 4° является нестандартным вариантом этих задач. В [5] автор рассмотрел общие (стандартные) смешанные задачи для сильно эллиптических систем 2-го порядка в липшицевой области с замкнутой границей и получил эквивалентные уравнения на ней без предположения о формальной самосопряженности. Там можно проследить некоторые параллели с настоящей работой.

5°. Первая спектральная задача

$$[u] = 0, \quad u^{\pm} = -\lambda [Tu] \text{ на } S. \tag{1.14}$$

6°. Вторая спектральная задача

$$[Tu] = 0, \quad [u] = -\lambda T^{\pm} \text{ на } S. \tag{1.15}$$

Подобные спектральные задачи в случае замкнутой липшицевой границы рассмотрены в [3], [4]. Их первоначальная постановка в случае уравнения Гельмгольца принадлежит московскому физику Б. З. Каценеленбауму и его сотрудникам Н. Н. Войтовичу и А. Н. Сивову, см. [31] или [8].

2. Операторы типа потенциала и задача 3°**.** Оператор L^{-1}, обратный к оператору L на торе, является интегральным оператором, это так называемый ньютонов потенциал. Его ядро $\mathscr{E}(x, y)$ — фундаментальное решение для L. Напомним, что потенциалы простого и двойного слоя определяются на заданных на Γ функциях (с небольшим запасом регулярности) формулами

$$\mathscr{A}\psi(x) = \int_\Gamma \mathscr{E}(x, y)\psi(y)\, dS_y, \tag{2.1}$$

$$\mathscr{B}\varphi(x) = \int_\Gamma (\widetilde{T}^+_y \mathscr{E}^*(x, y))^* \varphi(y)\, dS_y. \tag{2.2}$$

Здесь $\widetilde{T}^+(\,\cdot\,)$ — конормальная производная для формально сопряженного к L оператора $\widetilde{L}$ (см. [21]). Исследование этих операторов элементарными средствами проведено в [21]; см. также [3]. Нам понадобится ряд проверенных там утверждений об этих операторах. В частности, их можно найти в [3]. Перечислим их.

1. Оператор $\mathscr{A}$ продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\mathbb{T})$ и, значит, в $H^1(\Omega^{\pm})$. Функция $\mathscr{A}\psi$ при $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ является решением системы $Lu = 0$ в $\Omega^{\pm}$. След $A\psi = \gamma^{\pm}\mathscr{A}\psi$ этой функции на Γ — ограниченный оператор из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$. При предположении о коэрцитивности форм $\Phi_{\Omega^{\pm}}$ на $\widetilde{H}^1(\Omega^{\pm})$ оператор A обратим.

2. Оператор $\mathscr{B}$ действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega^{\pm})$. Функция $\mathscr{B}\varphi$ при $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ является решением системы $Lu = 0$ в $\Omega^{\pm}$.

3. Положим, как в [21],

$$B = \tfrac{1}{2}(\gamma^+\mathscr{B} + \gamma^-\mathscr{B}) \quad \text{и} \quad \widehat{B} = \tfrac{1}{2}(T^+\mathscr{A} + T^-\mathscr{A}). \tag{2.3}$$

Первый из этих операторов — это прямое значение потенциала двойного слоя, он ограничен в $H^{1/2}(\Gamma)$. Второй ограничен в $H^{-1/2}(\Gamma)$ и равен $\widetilde{B}^*$: является сопряженным к прямому значению потенциала двойного слоя для $\widetilde{L}$ относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$ на прямое произведение $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. При нашем предположении о коэрцитивности форм $\Phi_{\Omega^{\pm}}$ на $H^1(\Omega^{\pm})$ операторы $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ обратимы.

4. Справедливы соотношения

$$T^{\pm}\mathscr{A} = \pm\tfrac{1}{2}I + \widehat{B}, \quad \gamma^{\pm}\mathscr{B} = \mp\tfrac{1}{2}I + B, \quad T^+\mathscr{B} = T^-\mathscr{B}. \tag{2.4}$$

Оператор $H = -T^{\pm}\mathscr{B}$ — это так называемый гиперсингулярный оператор, он действует ограниченным образом из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$. При нашем предположении о коэрцитивности форм $\Phi_{\Omega^{\pm}}$ на $H^1(\Omega^{\pm})$ оператор H обратим. Оператор

H^{-1} связан с A соотношениями

$$H^{-1} = (\tfrac{1}{4}I - B^2)^{-1}A = A(\tfrac{1}{4}I - \widehat{B}^2)^{-1}. \tag{2.5}$$

5. Формула

$$u = \mathscr{B}\varphi - \mathscr{A}\psi, \quad \text{где } \varphi = [u], \ \ \psi = [Tu], \tag{2.6}$$

дает представление решения системы $Lu = 0$ в $\Omega^{\pm}$ через скачки на Γ. Здесь $u \in H^1(\Omega^{\pm})$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Этот перечень мы будем дополнять по мере надобности.

Теперь перейдем к случаю поверхности S с краем. В этом случае формулу (2.6) можно записать со скачками на S:

$$u = \mathscr{B}[u]_S - \mathscr{A}[Tu]_S. \tag{2.7}$$

Эта функция — решение системы $Lu = 0$ вне $\overline{S}$, принадлежащее $H^1(\Omega_0)$, так как оно принадлежит $H^1(\Omega^{\pm})$ и $u^+ = u^-$ на S_2. Как нетрудно видеть, получается

Предложение 2.1. *Задача* 3° *однозначно разрешима, и формула* (2.7) *выражает ее решение.*

3. Задачи Дирихле и Неймана. Введем операторы

$$A_S\psi = (A\psi)|_S, \quad B_S\varphi = (B\varphi)|_S \qquad (\psi \in \widetilde{H}^{-1/2}(S),\ \varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(S)). \tag{3.1}$$

Очевидно, что A_S — ограниченный оператор из $\widetilde{H}^{-1/2}(S)$ в $H^{1/2}(S)$, а B_S — ограниченный оператор из $\widetilde{H}^{1/2}(S)$ в $H^{1/2}(S)$.

Рассмотрим задачу Дирихле. Переходя в (2.7) с двух сторон на S, складывая получающиеся соотношения и деля на 2, получаем

$$g = B_S\varphi - A_S\psi, \quad \text{где } g = \tfrac{1}{2}(g^+ + g^-),\ \varphi = g^- - g^+. \tag{3.2}$$

Это уравнение относительно ψ, аналогичное использованным в работах [28]–[30], [12], [15], [16].

Предложение 3.1. *Для оператора A_S справедливо неравенство типа Гординга*

$$\|\psi\|^2_{\widetilde{H}^{-1/2}(S)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}(A_S\psi, \psi)_S, \qquad \psi \in \widetilde{H}^{-1/2}(S), \tag{3.3}$$

и, следовательно, этот оператор обратим в силу леммы Лакса–Мильграма.

Поясним, что справа используется двойственность пространств $H^{1/2}(S)$ и $\widetilde{H}^{-1/2}(S)$ относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(S)$ на прямое произведение этих пространств. Неравенство (3.3) вытекает из аналогичного неравенства для оператора A:

$$\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}(A\psi, \psi)_\Gamma, \qquad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{3.4}$$

последнее влечет обратимость этого оператора в силу той же леммы. В [3] вывод этого неравенства опущен, проверено аналогичное неравенство для операторов $N_{\pm}$ (Neumann-to-Dirichlet). Для полноты изложения проверим неравенство (3.4).

Для $u = \mathscr{A}\psi$ из формул Грина (1.9) в $\Omega^{\pm}$ в силу соотношения $\psi = -[T\mathscr{A}\psi]$ (см. первое равенство в (2.4)) получается формула

$$\Phi_{\Omega^+}(u, u) + \Phi_{\Omega^-}(u, u) = (\psi, A\psi)_\Gamma.$$

Из (усиленных) неравенств Гординга в $\Omega^\pm$ получаем

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega^+)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega^-)} \leqslant C_2 \operatorname{Re}(\psi, A\psi)_\Gamma = C_2 \operatorname{Re}(A\psi, \psi)_\Gamma.$$

Так как задачи Неймана у нас предположены однозначно разрешимыми, а априорные оценки для их решений в случае однородной системы являются двусторонними, то

$$\|T^\pm u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_3 \|u\|_{H^1(\Omega^\pm)}.$$

Значит,

$$\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|[T\mathscr{A}\psi]\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant C_1 \operatorname{Re}(A\psi, \psi)_\Gamma.$$

Неравенство (3.4) проверено.

Теорема 3.2. *Задача Дирихле в постановке* 1° *имеет одно и только одно решение, принадлежащее* $H^1(\Omega_0)$.

Действительно, скачок $[Tu]_S$ определяется по данным Дирихле из уравнения (3.2), после чего решение строится по формуле (2.7). При нулевых данных Дирихле это решение — нулевое.

Перейдем к задаче Неймана. Здесь картина аналогична. Введем оператор

$$H_S\varphi = (H\varphi)|_S \qquad (\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(S)). \tag{3.5}$$

Это ограниченный оператор из $\widetilde{H}^{1/2}(S)$ в $H^{-1/2}(S)$. Вычислив конормальные производные от обеих частей формулы (2.7) с двух сторон на S, сложив и разделив на 2, получим уравнение относительно φ

$$h = -H_S\varphi - \widehat{B}_S\psi, \text{ где } h = \tfrac{1}{2}(h^+ + h^-), \ \psi = h^- - h^+, \tag{3.6}$$

оно аналогично использованным в тех же работах [28]–[30], [12], [15], [16].

Предложение 3.3. *Для оператора* H_S *справедливо неравенство типа Гординга*

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(S)} \leqslant C_4 \operatorname{Re}(H_S\varphi, \varphi)_S, \qquad \varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(S), \tag{3.7}$$

так что этот оператор обратим в силу леммы Лакса–Мильграма.

Здесь справа используется двойственность пространств $H^{-1/2}(S)$ и $\widetilde{H}^{1/2}(S)$. Неравенство (3.7) вытекает из аналогичного неравенства для оператора H:

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant C_4 \operatorname{Re}(H\varphi, \varphi)_\Gamma, \qquad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.8}$$

Для доказательства последнего неравенства полагаем $u = \mathscr{B}\varphi$ и выводим из формул Грина соотношение

$$\Phi_{\Omega^+}(u, u) + \Phi_{\Omega^-}(u, u) = (H\varphi, \varphi)_\Gamma.$$

Далее действуем, как в предыдущем случае, пользуясь тем, что оценки для решений задач Дирихле являются двусторонними.

В неравенствах (3.4), (3.3), (3.8), (3.7) проявляется хорошо известная идея о «сильной эллиптичности» операторов типа потенциала на границе, отвечающих сильно эллиптическим системам. См. указания и литературу в [20].

Теперь аналогично теореме 3.2 получается

Теорема 3.4. *Задача Неймана в постановке* 2° *имеет одно и только одно решение, принадлежащее* $H^1(\Omega_0)$.

Отметим, что аналогичные операторам A_S и H_S операторы N_S и D_S рассматриваются в [5].

4. Смешанная задача. Чтобы построить ее решение u, будем искать скачки

$$\varphi = [u]_S \in \widetilde{H}^{1/2}(S), \quad \psi = [Tu]_S \in \widetilde{H}^{-1/2}(S). \tag{4.1}$$

Вычисляя конормальную производную функции (2.7) на S^- и граничное значение этой функции на S^+, получаем уравнения

$$\begin{aligned} -H_S\varphi - (-\tfrac{1}{2}I + \widehat{B}_S)\psi &= h, \\ (-\tfrac{1}{2}I + B_S)\varphi - A_S\psi &= g. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Уравнения не случайно записаны в этом порядке: мы следуем [14] и [21]. Оператор

$$\mathscr{T} = \begin{pmatrix} H_S & -\frac{1}{2}I + \widehat{B}_S \\ \frac{1}{2}I - B_S & A_S \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

действует ограниченным образом из пространства

$$\widetilde{\mathscr{H}} = \widetilde{H}^{1/2}(S) \times \widetilde{H}^{-1/2}(S) \tag{4.4}$$

в пространство

$$\mathscr{H} = H^{-1/2}(S) \times H^{1/2}(S). \tag{4.5}$$

Эти два пространства двойственны относительно продолжения скалярного произведения $(u_1, v_1)_S + (u_2, v_2)_S$ на их прямые произведения. Для столбца $U = (\varphi, \psi)'$ имеем

$$(\mathscr{T}U, U) = (H_S\varphi, \varphi)_\Gamma + ((-\tfrac{1}{2}I + \widehat{B}_S)\psi, \varphi)_\Gamma + ((\tfrac{1}{2}I - B_S)\varphi, \psi)_\Gamma + (A_S\psi, \psi)_\Gamma. \tag{4.6}$$

Предположим, что L — формально самосопряженный оператор. В это предположение мы включаем условие

$$\sum b_j\nu_j = 0 \ \text{ на } \ S, \tag{4.7}$$

см. [4]. Тогда $\widehat{B} = B^*$ и из (4.6) видно, что

$$\operatorname{Re}(\mathscr{T}U, U) = (H_S\varphi, \varphi)_\Gamma + (A_S\psi, \psi)_\Gamma, \tag{4.8}$$

остальное сокращается (знак Re справа сейчас не нужен). Воспользуемся предложениями 3.1 и 3.3. Получаем, что уравнение $\mathscr{T}U = F$, где F — столбец $(h, g)'$, однозначно разрешимо по лемме Лакса–Мильграма. Этим доказана

Теорема 4.1. *При условии формальной самосопряженности оператора L задача 4° однозначно разрешима.*

Можно рассмотреть случай, когда только главная часть оператора L является формально самосопряженной, но на этом не будем останавливаться.

5. Спектральные задачи. Для задач на *собственные* функции справедливо

Предложение 5.1. *Задачи 5° и 6° эквивалентны соответственно уравнениям*

$$A_S\psi = \lambda\psi, \quad \textit{где } \ \psi = [Tu]_S, \ u = -\mathscr{A}\psi, \tag{5.1}$$

и

$$H_S^{-1}\varphi = \lambda\varphi, \quad \textit{где } \ \varphi = [u]_S, \ u = \mathscr{B}\varphi. \tag{5.2}$$

Проверка аналогична проведенной в [3] в случае поверхности без края.

Здесь можно пояснить, что обратимые операторы $A_S\colon \widetilde{H}^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S)$ и $H_S\colon \widetilde{H}^{1/2}(S) \to H^{-1/2}(S)$ действуют из более широкого пространства в более узкое в первом случае и наоборот во втором; промежуточным является, в частности, пространство $L_2(S)$. Поэтому спектральные задачи имеют смысл.

Далее мы приводим спектральные результаты, аналогичные изложенным в [4] в случае границы Γ без края, поэтому не будем останавливаться на некоторых подробностях.

Рассмотрим оператор A_S. Наиболее благоприятным является случай формально самосопряженной системы (1.1). В этом случае $(A_S\psi_1, \psi_2)_S$ — скалярное произведение в $\widetilde{H}^{-1/2}(S)$, относительно которого A_S является самосопряженным оператором с положительным дискретным спектром. Из собственных функций составляется ортонормированный базис, и он остается ортогональным базисом в $H^{1/2}(S)$ относительно скалярного произведения $(A_S^{-1}\varphi_1, \varphi_2)_S$. Этот результат переносится на промежуточные пространства $H^s(S) = \widetilde{H}^s(S)$, $|s| < 1/2$. Для собственных значений λ_j оператора A_S, упорядоченных в порядке невозрастания с учетом кратностей, справедлива оценка $\lambda_j \leqslant Cj^{-1/(n-1)}$. Более того, получается асимптотическая формула для собственных значений: в п. 7 мы укажем путь к ее получению.

Если лишь главная часть оператора L — формально самосопряженный оператор, то A_S — слабое возмущение самосопряженного оператора A_S^0, который строится по «подправленной» в младших членах системе $L_0u = 0$. Собственные значения содержатся в сколь угодно узком угле с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ с некоторого номера. Система корневых функций полна в $\widetilde{H}^{-1/2}(S)$ и $H^{1/2}(S)$ и является там базисом для метода суммирования Абеля–Лидского со скобками порядка $n - 1 + \varepsilon$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. Результат о полноте переносится на промежуточные пространства.

Наконец, в самом общем случае спектр дискретен и сохраняется оценка s-чисел $s_j \leqslant C_1 j^{-1/(n-1)}$. Полнота и суммируемость методом Абеля–Лидского сохраняются, если раствор угла с биссектрисой $\mathbb{R}_+$, содержащего все значения форм $\Phi_{\Omega^\pm}(u, u)$, меньше $\pi/(n-1)$. Собственные значения лежат в этом угле. Для доказательства в дополнительном угле выводится оптимальная оценка для резольвенты оператора A_S^{-1}: если (буквы φ и ψ раньше имели другой смысл)

$$(A_S^{-1} - \lambda I)\varphi = \psi, \tag{5.3}$$

то

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(S)} + |\lambda| \|\varphi\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(S)} \leqslant C_2 \|\psi\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(S)}. \tag{5.4}$$

См. указания в [3, п. 6]. Снова результат о полноте переносится на промежуточные пространства.

Спектральные свойства оператора H_S^{-1} аналогичны только что изложенным. Если L — формально самосопряженный оператор, то в $H^{-1/2}(S)$ вводится скалярное произведение $(H_S^{-1}\psi, \psi)_\Gamma$.

6. Регулярность решений.

6.1. Мы продолжаем считать формы $\Phi_{\Omega^\pm}$ коэрцитивными на $H^1(\Omega^\pm)$.

Вместо H^σ теперь нужны более общие пространства H_p^σ бесселевых потенциалов и B_p^σ Бесова, где $1 < p < \infty$; при $p = 2$ они совпадают с H^σ. См., например, [3] или [4]. Пусть сначала граница замкнута — не имеет края. Тогда решения однородной системы $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$ можно искать в пространствах $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$ или $B_p^{1/2+s+1/p}(\Omega^\pm)$, данные Дирихле задаются в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$, а данные Неймана — в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$, $|s| < 1/2$ (при других s теряют, вообще говоря, смысл данные Дирихле на липшицевой поверхности Γ или S). Положим $t = 1/p$. Как и в предыдущих работах автора, допустимые точки (s,t) образуют квадрат

$$Q = \{(s,t) : |s| < 1/2,\ 0 < t < 1\}. \tag{6.1}$$

Задачи Дирихле и Неймана, однозначно разрешимые в его центре $(0, 1/2)$, остаются однозначно разрешимыми, по крайней мере, при $|s| < \varepsilon$ и $|t - 1/2| < \delta$ с достаточно малыми положительными ε и δ в силу теоремы Шнейберга об экстраполяции обратимости операторов, действующих в интерполяционных шкалах [27]. Никаких дополнительных ограничений на систему при этом накладывать не нужно. Далее, может быть, с некоторым уменьшением ε и δ, обобщаются утверждения об ограниченности и обратимости операторов

$$A\colon B_p^{-1/2+s}(\Gamma) \to B_p^{1/2+s}(\Gamma) \quad \text{и} \quad H\colon B_p^{1/2+s}(\Gamma) \to B_p^{-1/2+s}(\Gamma).$$

Кроме того, ограничены и обратимы операторы $\frac{1}{2}I \pm B$ в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ в $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$. Обобщается и формула (2.6). Все это объяснено в [3] и [4].

Переходя к случаю границы с краем, нужно прежде всего определить пространство $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega_0)$. Определим его так же, как в уже рассмотренном случае $s = 0$, $p = 2$: оно будет состоять из функций $u \in L_p(\Omega_0)$, принадлежащих $H_p^{1/2+s+1/p}$ в $\Omega^\pm$, следы которых на Γ (принадлежащие $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$) совпадают на S_2, так что скачок $[u]$ принадлежит $\widetilde{B}_p^{1/2+s}(S)$. Пространство $B_p^{1/2+s+1/p}(\Omega_0)$ определим аналогично. Замечание, сделанное в п. 1, распространяется, по крайней мере, на пространства $H_p^1(\Omega)$.

Мы теперь можем рассматривать решения системы $Lu = 0$ в $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega_0)$ или $B_p^{1/2+s+1/p}(\Omega_0)$. В задаче Дирихле

$$g^\pm \in B_p^{1/2+s}(S) \quad \text{и} \quad [g] \in \widetilde{B}_p^{1/2+s}(S). \tag{6.2}$$

В задаче Неймана

$$h^\pm \in B_p^{-1/2+s}(S) \quad \text{и} \quad [h] \in \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S), \tag{6.3}$$

так как предложение 1.2 обобщается:

Предложение 6.1. *Пусть u — решение системы $Lu = 0$ в Ω_0, принадлежащее $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega_0)$. Тогда $[Tu] \in \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S)$.*

Доказательство при $Lu = 0$ проводится аналогично доказательству предложения 1.2 (с заменой L_2 на L_p).

Далее, из приведенных в п. 6.1 утверждений получаются сначала утверждения об ограниченности операторов

$$A_S\colon \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S) \to B_p^{1/2+s}(S) \quad \text{и} \quad H_S\colon \widetilde{B}_p^{1/2+s}(S) \to B_p^{-1/2+s}(S), \tag{6.4}$$

а также операторов

$$\tfrac{1}{2}I \pm B_S\colon \widetilde{B}_p^{1/2+s}(S) \to B_p^{1/2+s}(S) \quad \text{и} \quad \tfrac{1}{2}I \pm \widehat{B}_S\colon \widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S) \to B_p^{-1/2+s}(S) \tag{6.5}$$

при $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$ с достаточно малыми ε и δ. Теперь заметим, что используемые здесь семейства пространств являются интерполяционными для комплексного метода интерполяции по каждому из индексов. Для семейств $\{B_p^{1/2+s}(S)\}$ и $\{B_p^{-1/2+s}(S)\}$ это следует из того, что переход от пространств на Γ к соответствующим пространствам на S есть ретракция (обратный переход с использованием оператора продолжения есть коретракция). В отношении семейств $\{\widetilde{B}_p^{1/2+s}(S)\}$ и $\{\widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S)\}$ можно использовать теорему о двойственности для комплексного метода интерполяции: эти пространства двойственны соответственно к $B_{p'}^{-1/2-s}(S)$ и $B_{p'}^{1/2-s}(S)$ и рефлексивны. См., например, [9, пп. 4.5 и 6.4]. А так как в центре квадрата Q наши операторы обратимы, то можно применить теорему Шнейберга и сделать вывод об обратимости этих операторов при рассматриваемых (s,t), может быть, с уменьшением ε и δ. Итак, справедлива

Теорема 6.2. *Операторы* (6.4) *и* (6.5) *обратимы при* $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$ *с достаточно малыми* ε *и* δ.

То же верно для оператора (4.3) при $L = \widetilde{L}$. Обобщается и формула (2.7). Это приводит к следующему основному результату.

Теорема 6.3. *Существуют такие* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, *что при любых* $g^\pm \in B_p^{1/2+s}(S)$ *и* $h^\pm \in B_p^{-1/2+s}(S)$, $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$, *задачи Дирихле и соответственно Неймана имеют единственные решения в* $H_p^{1/2+s+1/p}(\Omega_0)$. *Кроме того, в таких же пространствах однозначно разрешимы задача* 3° *и задача* 4°. *Пространства* H *в этих утверждениях можно заменить на аналогичные пространства* B.

Как следствие при улучшении регулярности $g^\pm$ и $h^\pm$ улучшается регулярность решений — в указанных пределах.

6.2. Перейдем к спектральным задачам.

Теорема 6.4. *Корневые функции оператора* A_S *принадлежат объединению пространств* $B_p^{1/2+s}(S)$, $|s| < \varepsilon$, $|t - 1/2| < \delta$. *Спектр при этом не зависит от* (s,t). *В пространствах* $B_p^{1/2+s}(S)$ *и* $\widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S)$ *сохраняются утверждения о базисности при* $p = 2$ *в случае формальной самосопряженности оператора* L, *о полноте и суммируемости рядов методом Абеля–Лидского в остальных случаях. Утверждения о базисности и полноте распространяются на промежуточные по* s *пространства.*

Для оператора H_S^{-1} *справедливы аналогичные результаты с заменой пространств* $\widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S)$ *и* $B_p^{1/2+s}(S)$ *соответственно на* $B_p^{-1/2+s}(S)$ *и* $\widetilde{B}_p^{1/2+s}(S)$.

Приведем пояснения. Гладкость собственных функций оператора A_S видна из уравнения $A_S\psi = \lambda\psi$. Аналогично получается гладкость присоединенных функций. Используя (плотные) вложения наших пространств, убеждаемся, как в [1], что сохраняются утверждения о полноте и независимости спектра от (s,t). Немного расширяется промежуток значений s, при которых в случае формально самосопряженного оператора L получается базисность. Суммируемость спектральных разложений методом Абеля–Лидского получается с использованием абстрактной теоремы из [2], а необходимая для этого оценка резольвенты, обобщающая (5.4),

$$\|\varphi\|_{B_p^{1/2+s}(S)} + |\lambda| \|\varphi\|_{\widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S)} \leqslant C\|\psi\|_{\widetilde{B}_p^{-1/2+s}(S)}, \tag{6.6}$$

получается средствами теории интерполяции опять с использованием теоремы Шнейберга. А именно, сначала получается равномерная по параметру оценка первого слагаемого слева, затем, с использованием уравнения (5.3), оценка второго слагаемого.

Добавочно полнота получается во всех пространствах, отвечающих точкам квадрата Q, в которые пространства с установленной полнотой плотно вложены. Плотность вложений имеет место автоматически.

7. Спектральные асимптотики. Здесь мы получим асимптотические формулы для собственных значений оператора A_S и, при добавочных предположениях, для собственных значений оператора H_S^{-1}. См. теорему 7.1 ниже. Оператор L теперь предполагаем формально самосопряженным. Сначала мы приведем результаты для операторов в области с замкнутой границей, ср. [4].

7.1. В работе [7] получена асимптотическая формула для собственных значений интегрального оператора на «почти гладкой» липшицевой поверхности Γ — псевдодифференциального оператора отрицательного порядка, ядро которого является сужением на $\Gamma \times \Gamma$ ядра эллиптического псевдодифференциального оператора в $\mathbb{R}^n$ на единицу меньшего порядка. Почти гладкой там названа поверхность, бесконечно гладкая вне замкнутого подмножества нулевой меры. Вместо $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать тор.

Примером как раз является наш оператор A, если коэффициенты оператора L бесконечно гладкие. В этом случае в качестве оператора на торе берем ньютонов потенциал; его ядро — фундаментальное решение для L. Предположение о бесконечной гладкости коэффициентов оператора L в конечном счете снимается аппроксимацией заданных коэффициентов бесконечно гладкими, поэтому будем считать коэффициенты бесконечно гладкими. Оператор A сначала рассматривается в $L_2(\Gamma)$.

Для вывода асимптотики используется специальное разбиение поверхности на малые части U_j $(j = 0, \dots, K)$. Оператор A записывается в виде $\sum A_{j,k}$, где $A_{j,k} = \theta_j A \theta_k \cdot$ и θ_j — характеристическая функция части U_j. Асимптотика в случае оператора $A_{j,j}$, отвечающего гладкой части U_j поверхности Γ, $j > 0$, известна, например, из результатов Бирмана–Соломяка. Ключевым моментом является оценка s-чисел остальных операторов $A_{j,k}$. Она имеет вид

$$s_l(A_{j,k}) \leqslant C \min(\varepsilon_j, \varepsilon_k) l^{-1/(n-1)}, \tag{7.1}$$

где ε_j оценивается через меру множества U_j и стремится к нулю, если эта мера стремится к нулю. Здесь существенно, что для нашего A выполнено исходное предположение о ядре рассматриваемого оператора. Оценка (7.1) позволяет использовать технику возмущений, развитую у Бирмана–Соломяка [10], и получить искомый результат. Детали см. в [7, §4]. Ясно, что результат получается и для операторов вида $\theta A \theta \cdot$, если θ — характеристическая функция части поверхности Γ. Именно этим мы воспользуемся дальше.

Предположение о структуре ядра оператора, указанное выше, не выполнено для оператора H^{-1}. Но оценки s-чисел вида (7.1) можно получить и в том случае, когда оператор допускает две записи $T_1 A$ и $A T_2$, где T_1 и T_2 — ограниченные операторы. Из (2.5) видно, что оператор H^{-1} допускает такие представления. Однако нужна ограниченность и обратимость операторов $\frac{1}{2} I \pm B$ и $\frac{1}{2} I \pm \widehat{B}$ не в указанных в п. 2 пространствах, а в $L_2(\Gamma)$. Такие результаты существуют в литературе, но получены они (на основе совсем другого подхода к задачам в липшицевых областях) не для всех сильно эллиптических систем. Заведомо они справедливы в случае уравнения Бельтрами–Лапласа [23] и системы Ламе [13], к которым можно прибавить младшие члены. В этих случаях асимптотика получается этим методом и для оператора H^{-1} на почти гладкой поверхности. В остальных случаях получается точная по порядку оценка собственных значений.

То, что операторы A и H^{-1} рассматриваются как действующие в $L_2(\Gamma)$, не отражается на собственных функциях и собственных значениях.

Ограничение, состоящее в том, что поверхность Γ почти гладкая, в случае оператора A сняли Розенблюм и Тащиян [26].

7.2. Перейдем к операторам на незамкнутой поверхности. Пусть

$$A_S\psi = \lambda\psi. \tag{7.2}$$

Здесь сначала $\psi \in \widetilde{H}^{-1/2}(S)$. Но вместе с левой частью ψ принадлежат $H^{1/2}(S)$. Тогда ψ принадлежит промежуточным пространствам $\widetilde{H}^s(S) = H^s(S)$, $|s| < 1/2$, в частности, $L_2(S)$. Это позволяет, используя продолжение функций нулем, переписать равенство (7.2) в виде

$$\theta A\theta\psi = \lambda\psi, \tag{7.3}$$

где θ — характеристическая функция для S. И обратно, из (7.3) следует (7.2).

Приведем окончательный результат. Собственные значения $\lambda_j(A_S)$ оператора A_S нумеруются в порядке невозрастания с учетом кратностей.

Теорема 7.1. *Имеет место формула*

$$\lambda_j(A_S) = C_{A_S} j^{-1/(n-1)} + o(j^{-1/(n-1)}), \tag{7.4}$$

где

$$C_{A_S}^{n-1} = (2\pi)^{-(n-1)} \iint_{T^*S} n_\alpha(x',\xi')\,dx'd\xi', \tag{7.5}$$

$\alpha(x',\xi')$ *— главный символ оператора* A *и* $n_\alpha(x',\xi')$ *— число его собственных значений, больших* 1.

Для оператора H_S^{-1} *справедлив аналогичный результат в случае почти гладкой поверхности* Γ, *если оператор* L *скалярный или если это матричный оператор с оператором Ламе в старшей части.*

Кокасательное расслоение и символ на липшицевой поверхности понимаются формально, но кокасательные пространства и символ определены почти всюду на S и формуле (7.5) можно придать смысл как в случае почти гладкой поверхности (см. [7]), так и в общем случае (см. [26]).

На вычислении символов операторов A и H^{-1} (в гладком случае) останавливаться не будем, см. указания в [4].

В заключение сделаем три замечания.

1. Мы считали, что обе области $\Omega^\pm$ лежат на торе. Вместо тора в принципе можно рассмотреть содержащую Γ область с гладкой границей и, например, однородным условием Дирихле на ней или более общее гладкое многообразие с гладким краем или без края. Но можно (и полезно) рассматривать $\mathbb{R}^n$; тогда надо выбирать подходящие условия в Ω^- на бесконечности, что отражается, конечно, на выборе пространств. См. [11].

2. Если не предполагать, что коэрцитивность форм $\Phi_{\Omega^\pm}$ имеет место в усиленной форме, то вместо теорем об однозначной разрешимости задач или об обратимости операторов получаются результаты об их фредгольмовости с нулевым индексом. Эти обобщения не требуют большого труда, но приводят к усложнениям формулировок; мы избегали на этом останавливаться.

3. В текст этой работы внесены добавления перед ее сдачей в печать: добавлены смешанные задачи и спектральные асимптотики.

Автор искренне благодарит Т. А. Суслину: она ознакомилась с работой и прислала список ценных редакционных замечаний.

Литература

[1] М. С. Агранович, *Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **40**:4 (2006), 83–103.

[2] М. С. Агранович, *Спектральные задачи в липшицевых областях для сильно эллиптических систем в банаховых пространствах H_p^σ и B_p^σ*, Функц. анализ и его прил., **42**:4 (2008), 2–23.

[3] М. С. Агранович, *Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в областях с липшицевой границей*, Функц. анализ и его прил., **43**:3 (2009), 3–25.

[4] М. С. Агранович, *Спектральные задачи в липшицевых областях*, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, т. 39 (в печати).

[5] М. С. Агранович, *Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка*, Функц. анализ и его прил., **45** (в печати).

[6] M. S. Agranovich, *Strongly elliptic second order systems with spectral parameter in transmission conditions on a nonclosed surface*, in: Operator Theory: Advances and Applications, vol. 164, Birkhäuser, Basel, 2006, 1–21.

[7] М. С. Агранович, Б. А. Амосов, *Оценки s-чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях*, Функц. анализ и его прил., **30**:2 (1996), 1–18.

[8] M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH, Berlin, 1999. (Переработанное английское издание книги [31].)

[9] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

[10] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов*, I, Труды ММО, **27** (1972), 3–52.

[11] M. Costabel, M. Dauge, *On representation formulas and radiation conditions*, Math. Methods Appl. Sci., **20**:2 (1997), 133–150.

[12] M. Costabel, E. Stephan, *An improved boundary element Galerkin method for three-dimensional crack problems*, Integral Equations and Operator Theory, **10**:4 (1987), 467–504.

[13] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, G. C. Verchota, *Boundary value problems for systems of elastostatics in Lipschitz domains*, Duke Math. J., **57**:3 (1988), 795–818.

[14] R. Duduchava, D. Natroshvili, *Mixed crack type problem in anisotropic elasticity*, Math. Nachr., **191** (1998), 83–107.

[15] Р. В. Дудучава, Д. Г. Натрошвили, Е. М. Шаргородский, *Граничные задачи математической теории трещин*, Труды Института прикладной математики им. И. Н. Векуа Тбилисского унив., **39** (1990), 68–84.

[16] R. Duduchava, W. L. Wendland, *The Wiener–Hopf method for systems of pseudodifferential equations with an application to crack problems*, Integral Equations Operator

Theory, **23**:3 (1995), 294–335.

[17] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973.

[18] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston, 1985.

[19] G. C. Hsiao, E. P. Stephan, W. L. Wendland, *An integral equation formulation for a boundary value problem of elasticity in the domain exterior to an arc*, in: Lecture Notes in Math., vol. 1121, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 153–165.

[20] G. C. Hsiao, W. L. Wendland, *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[21] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[22] S. E. Mikhailov, *Traces, extensions, co-normal derivatives and solution regularity of elliptic systems with smooth and non-smooth coefficients*, `http://arxiv.org/abs/0906.3875`.

[23] M. Mitrea, M. Taylor, *Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal., **163**:2 (1999), 181–251.

[24] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

[25] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North Holland, Amsterdam, 1992.

[26] G. Rozenblum, G. Tashchiyan, *Eigenvalue asymptotics for potential type operators on Lipschitz surfaces*, Russian J. Math. Phys., **13**:3 (2006), 326–339.

[27] И. Я. Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств*, Матем. исслед., **9**:2 (1974), 214–227.

[28] E. Stephan, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems, screen and transmission problems in* $\mathbb{R}^3$, Habilitationsschrift, Darmstadt, THD-preprint 848, 1984.

[29] E. Stephan, *A boundary integral equation method for three-dimensional crack problems in elasticity*, Math. Methods Appl. Sci., **8**:4 (1986), 609–623.

[30] E. Stephan, *Boundary integral equations for screen problems in* $\mathbb{R}^3$, Integral Equations Operator Theory, **10**:2 (1987), 236–257.

[31] Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции*, с добавлением М. С. Аграновича «Спектральные свойства задач дифракции», стр. 289–416, Наука, М., 1977.

Московский институт электроники и математики
e-mail: magran@orc.ru

Поступило в редакцию
28 апреля 2010 г.