ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Кафедра высшей математики

ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ» С РАЗБОРОМ ТИПИЧНЫХ ЗАДАЧ (для гр. К-41 ФИТиВТ)

Методические указания для самостоятельной работы студентов

Москва 2013

Составитель канд. физ.-мат. наук В.Н. Деменко

Варианты домашней работы по курсу «Функциональный анализ» с разбором типичных задач (для гр. К-41 ФИТиВТ). Методические указания для самостоятельной работы студентов. /Моск. ин-т электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; Сост. В.Н.Деменко. М., 2013. – 28 с.

Методические указания содержат 15 вариантов домашнего задания по курсу «Функциональный анализ» для студентов 2-го курса ФИТиВТ специальности 230100.62. На конкретных примерах изложены способы решения этих задач. Приводятся необходимые для выполнения задания определения и формулировки теорем.

ISBN 978-5-94506-311-2

Учебное издание

Варианты домашней работы по курсу «Функциональный анализ» с разбором типичных задач

Составитель ДЕМЕНКО Виктория Николаевна

Редактор Е.С. Резникова
Технический редактор О.Г.Завьялова

Подписано в печать 30.01.2013. Формат 60×84/16. Бумага офсетная № 2.
Печать – ризография. Усл. печ. л. 1, 75. Уч.-изд.л. 1,58. Тираж 30 экз. Изд.№ 9. Заказ .
Бесплатно.
Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
109028, Москва, Б.Трехсвятительский пер., 3.
Редакционно-издательский отдел Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 1

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$10x(t)+\int_0^t x^3(s)\,ds=t,\quad 0\le t\le 1,$$
имеет единственное решение в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию $\left|x(t)\right|\le 1$. Указать алгоритм поиска решения. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного оператора
$$A:\ (x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)\to\left(\frac{x_1}{2},\frac{2x_2}{3},\dots,\frac{nx_n}{n+1},\dots\right)$$
в пространстве l_2.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t e^s x(s)\,ds=4x(t)+t\,.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^{\pi}(\sin s+\cos 2t)\,x(s)\,ds=x(t)+\sin 3t\,.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(x'^2-x^2\right)dt\to extr,\\[2ex] \displaystyle\qquad\int_0^{\pi/2} tx\,dt=0,\\[2ex] x(0)=1,\quad x\left(\pi/2\right)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 2

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$5x(t)+\int_0^t s\sin\left(x(s)\right)ds=t$$
имеет единственное решение в пространстве $C\left[0;1\right]$. Указать алгоритм

поиска решения. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0\left(t\right)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f\left(x\right)=\int_0^1 x\left(t\right)dt-2x\left(\frac{1}{2}\right)$$
в пространстве $C\left[0;1\right]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t x(s)\sin s ds+2x(t)=\sin t.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi\left(\sin 2s+\cos t\right)x\left(s\right)ds=x\left(t\right)+\sin t\,.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум**:**

$$\begin{cases}\int_0^1\left(x+x'\right)^2dt\to extr,\\ \int_0^1 txdt=1/2,\\ x(0)=0,\quad x\left(1\right)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 3

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$x(t)-t=\int_0^t \sqrt[10]{1+x(s)}\,ds \quad (0\le t\le 1)$$
имеет единственное решение в классе неотрицательных непрерывных функций. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^\pi x(t)\cos t\,dt$$
в пространстве $C[0;\pi]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t \cos s\,x(s)\,ds=2x(t)+\cos t.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi (\sin s+\cos 2t)\,x(s)\,ds=x(t)+\cos 4t\,.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\pi \left(x'^2-4x^2\right)dt\to extr,\\ \displaystyle\int_0^\pi tx\,dt=0,\\ x(0)=1,\quad x(\pi)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 4

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$10x(t)-\int_0^t \frac{ds}{1+x(s)}=t$$
имеет единственное решение в классе неотрицательных непрерывных на $[0;1]$ функций. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^{\pi} x(t)\cos t dt$$
в пространстве $C_2[0;\pi]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью $0{,}1$ в пространстве $C[0,1]$ интегральное уравнение
$$\int_0^t \sqrt{s}x(s)ds+2x(t)=t.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^{\pi}(\sin 2s+\cos t)x(s)ds=x(t)+\cos 3t\,.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 x'^2 dt \to extr, \\ \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{t}dt=1, \\ x(0)=1, \quad x(1)=0. \end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 5

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$10x(t)+t+\int_0^t \sin\big(x(s)\big)ds=0$$
имеет единственное решение в пространстве $C[0;1]$. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного оператора
$$A:\ (x_1,x_2,...,x_n,...)\to\left(\frac{x_1}{3},\frac{x_2}{2},...,\frac{nx_n}{n+2},...\right)$$
в пространстве l_2.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[1,2] интегральное уравнение
$$\int_1^t \frac{1}{s}x(s)ds=2x(t)+\ln t\,.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^{\pi}(\sin s+\cos 2t)x(s)ds=x(t)+1.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(x'^2-x^2\right)dt\to extr,\\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin 2t dt=0;\ x(0)=1,\\ x(0)=1,\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 6

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$5x(t)-t=\int_0^t\sqrt{1+x(s)}\,ds$$
имеет единственное решение в классе неотрицательных непрерывных на $[0;1]$ функций. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=x(0)-2\int_0^1 tx(t)\,dt$$
в пространстве $C[0;1]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[1,2] интегральное уравнение
$$\int_1^t \ln s\,x(s)\,ds+2x(t)=\frac{1}{t}.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi(\sin 2s+\cos t)\,x(s)\,ds=x(t)+1.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\left(x^2+x'^2\right)dt\to extr,\\ \displaystyle\int_0^1 x\sin\pi t\,dt=1,\\ x(0)=1,\quad x(1)=e.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 7

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$20x(t)+\int_0^t x^2(s)\,ds=t,\quad 0\le t\le 1,$$
имеет единственное решение в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|x(t)|\le 1$. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^{\pi} x(t)\cos 2t\,dt$$
в пространстве $C[0;\pi]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t se^s x(s)\,ds=4x(t)+1.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^{\pi}(\cos s+\sin 2t)\,x(s)\,ds=x(t)+\sin 4t\,.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x'^2-4x^2\right)dt\to extr,\\ \displaystyle\int_0^{\pi}x'\sin t\,dt=0,\\ x(0)=2,\ x(\pi)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 8

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$x(t)-\int_0^t \frac{x(s)}{10+x(s)}ds=t, \qquad 0\le t\le 1,$$
имеет единственное решение в классе неотрицательных непрерывных функций. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^\pi x(t)\cos 2t dt$$
в пространстве $C_2[0;\pi]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t s\cos s x(s)ds+2x(t)=1.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi (\cos 2s+\sin t)x(s)ds=x(t)+\sin 3t.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases} \int_0^1 (x-2x')^2 dt \to extr, \\ \int_0^1 xdt = 1/2, \\ x(0)=0,\ x(1)=0. \end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 9

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$2x(t)+\int_0^t s^{10}x^2(s)\,ds=t,\quad 0\le t\le 1,$$
имеет единственное решение в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|x(t)|\le 1$. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)x(t)\,dt+2x(1)$$
в пространстве $C[0;1]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t s\sin s\,x(s)\,ds=2x(t)+1.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi(\cos s+\sin 2t)\,x(s)\,ds=x(t)+\cos 3t$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\pi\left(x'^2-x^2\right)dt\to extr,\\ \displaystyle\int_0^\pi x'\sin\frac{t}{2}\,dt=1,\\ x(0)=2,\ \ x(\pi)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 10

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$10x(t)-t=\int_0^t \frac{x(s)}{1+x^2(s)}ds, \quad 0\le t\le 1,$$
имеет единственное решение в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|x(t)|\le 1$. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^{\pi} x(t)\sin 2t dt$$
в пространстве $C[0;\pi]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t (t+s)x(s)ds = 4x(t)+e^t.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^{\pi} (\cos 2s+\sin t)x(s)ds = x(t)+\cos t.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases} \int_0^1 x'^2 dt \to extr, \\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{t}} dt = 1, \\ x(0)=0, \quad x(1)=0. \end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 11

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$30x(t)+\int_0^t x^3(s)\,ds=1,\quad 0\le t\le 1,$$
имеет единственное решение в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|x(t)|\le 1$. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^{\pi} x(t)\sin 2t\,dt$$
в пространстве $C_2[0;1]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t e^{-s}x(s)ds+2x(t)=te^t.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^{\pi}(\cos s+\sin 2t)x(s)ds=x(t)+1$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\int_0^{\pi/2}\left(x'^2-4x^2\right)dt\to extr,\\ \int_0^{\pi/2}x'\cos t\,dt=0,\\ x(0)=1,\ x\left(\pi/2\right)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 12

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$20x(t)=\int_0^t tg\frac{\pi x(s)}{4}ds+1,\quad 0\le t\le 1,$$
имеет единственное решение в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию $|x(t)|\le 1$. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного оператора
$$A:\ (x_1,x_2,...,x_n,...)\to\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}},\frac{2x_2}{\sqrt{5}},...,\frac{nx_n}{\sqrt{n^2+1}},...\right)$$
в пространстве l_2.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[1,2] интегральное уравнение
$$\int_1^t \frac{1}{\sqrt{s}}x(s)ds=2x(t)+\sqrt[3]{t}.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi(\cos 2s+\sin t)x(s)ds=x(t)+1.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\int_0^1\left(x^2+4x'^2\right)dt\to extr,\\ \int_0^1 xtdt=1,\\ x(0)=0,\quad x(1)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 13

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$5x(t)-\int_0^t s\sqrt[3]{x(s)+1}\,ds=1$$
имеет единственное решение в классе неотрицательных непрерывных функций. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^1 x(t)\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$$
в пространстве $C[0;1]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t \sqrt[3]{s}\,x(s)\,ds+2x(t)=t.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi (\sin s+\cos 2t)\,x(s)\,ds+x(t)=\sin 3t.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\pi \left(x'^2-x^2\right)dt\to extr,\\ \displaystyle\int_0^\pi x\cos 2t\,dt=0,\\ x(0)=2,\ x(\pi)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 14

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$10x(t)+t=\int_0^t arctg\left(x(s)\right)ds$$
имеет единственное решение в $C[0;1]$. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^\pi x(t)\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)dt$$
в пространстве $C[0;\pi]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью $0{,}1$ в пространстве $C[0,1]$ интегральное уравнение
$$\int_0^t e^s x(s)ds=4x(t)+te^{-t}.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi(\sin 2s+\cos t)x(s)ds+x(t)=\sin t.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\int_0^1(x+2x')^2\,dt\to extr,\\ \int_0^1 xdt=1/2,\\ x(0)=0,\ x(1)=0.\end{cases}$$

Домашняя работа по функциональному анализу (гр. КТ-41)

Вариант № 15

1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение
$$5x(t)+\int_0^t s\cos\big(x(s)\big)ds=t$$
имеет единственное решение в пространстве $C[0;1]$. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.
2. Найти норму линейного функционала
$$f(x)=\int_0^\pi x(t)\left(\sin t-\frac{1}{2}\right)dt$$
в пространстве $C_2[0;\pi]$.
3. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение
$$\int_0^t \sin s x(s)ds=2x(t)+\cos t.$$
Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?
4. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:
$$\int_0^\pi (\sin s+\cos 2t)x(s)ds+x(t)=\cos 4t.$$
5. Исследовать задачу на условный экстремум
$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^\pi \left(x'^2-4x^2\right)dt\to extr,\\ \displaystyle\int_0^\pi xe^t dt=0,\\ x(0)=1,\ x(\pi)=1.\end{cases}$$

В настоящем комментарии мы, дабы не загромождать изложение, не будем останавливаться на определениях метрического пространства, открытого и замкнутого множеств, полного пространства. Все эти определения и основные, относящиеся к этим понятиям теоремы можно найти, например, в книге «Элементы теории функций и функционального анализа» (А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин, гл.II).

Остановимся только на некоторых определениях и формулировках теорем, непосредственно используемых при решении задач.

Принцип сжимающих отображений

Определение. Метрическое пространство $C[a,b]$ - пространство функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ с расстоянием $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|$.

Утверждение. $C[a;b]$ - полное пространство.

Утверждение. Подмножество Y полного метрического пространства X само является полным метрическим пространством тогда и только тогда, когда Y замкнуто в X.

Примеры. Множества $A=\left\{x(t)\in C[a,b]\,\middle|\, x(t)\geq 0,\ t\in[a,b]\right\}$ и $B=\left\{x(t)\in C[a,b]\,\middle|\, \left|x(t)\right|\leq 1,\ t\in[a,b]\right\}$ - замкнуты в $C[a,b]$.

Определение. Отображение $f: X\to X$ называется сжимающим, если существует такое число $\alpha\in(0;1)$, что для любых точек $x,y\in X$ выполняется неравенство

$$\rho_X\left(f(x);f(y)\right)\leq\alpha\rho_X(x,y).$$

Теорема (о неподвижной точке сжимающего отображения). Пусть f - сжимающее отображение полного метрического пространства X в себя. Тогда уравнение

$$f(x)=x.$$

имеет решение, и это решение единственно.

Из доказательства теоремы следует, что решение можно искать как предел следующей рекуррентной последовательности. Начальный элемент выбирается произвольно $x_0\in X$, последующие по формуле: $x_{n+1}=f(x_n)\quad(n\geq 0)$.

Формула для оценки погрешности приближенного решения:

$$\rho\left(x_n,x^*\right)\leq\rho\left(x_1,x_0\right)\frac{\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Задача 1. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, доказать, что функциональное уравнение

$$10x(t)-t=\int_0^t\ln\left(1+x(s)\right)ds,\quad 0\leq t\leq 1,$$

имеет единственное решение в классе неотрицательных непрерывных функций. Вычислить два первых приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t)\equiv 0$. Оценить погрешность приближенного решения.

Решение. Представим исходное уравнение в виде

$$x(t)=\frac{1}{10}\int_0^t \ln(1+x(s))\,ds+\frac{t}{10}.$$

Решение этого уравнения является неподвижной точкой отображения

$$f(x)=\frac{1}{10}\int_0^t \ln(1+x(s))\,ds+\frac{t}{10}.$$

Пусть X - множество непрерывных, неотрицательных на $[0;1]$ функций. Так как X является замкнутым подмножеством полного метрического пространства $C[0;1]$, то само является полным метрическим пространством.

Очевидно также, что f отображает X в себя.

Покажем, что f является сжимающим отображением. В самом деле,

$$\rho_C(f(x),f(y))=\max_{0\le t\le 1}\frac{1}{10}\left|\int_0^t \ln(1+x(s))\,ds+t-\int_0^t \ln(1+y(s))\,ds-t\right|=$$

$$\max_{0\le t\le 1}\frac{1}{10}\left|\int_0^t \big(\ln(1+x(s))-\ln(1+y(s))\big)ds\right|=\max_{0\le t\le 1}\frac{1}{10}\left|\int_0^t \frac{1}{1+z(s)}(x(s)-y(s))\,ds\right|,$$

где при всех $s\in[0;1]$ значения функции $z(s)$ лежат между $x(s)$ и $y(s)$, то есть $z(s)\ge 0$ (мы воспользовались формулой Лагранжа для конечных приращений применительно к дифференцируемой функции $\varphi(u)=\ln(1+u)$ на отрезке $[x(s),y(s)]$).

Таким образом, получаем:

$$\rho_C(f(x),f(y))\le\max_{0\le t\le 1}\frac{1}{10}\int_0^t |x(s)-y(s)|\,ds\le\max_{0\le t\le 1}\frac{1}{10}\int_0^t \max_{0\le s\le 1}|x(s)-y(s)|\,ds=$$

$$=\frac{1}{10}\rho_C(x,y)\max_{0\le t\le 1}\int_0^t ds=\frac{1}{10}\rho_C(x,y).$$

Следовательно, отображение f - сжимающее с коэффициентом сжатия $\alpha=\frac{1}{10}$.

По теореме о неподвижной точке сжимающего отображения, уравнение (1) имеет единственное решение в X. Это решение является пределом рекуррентной последовательности x_n ($x_{n+1}=f(x_n)$, x_0 - произвольно).

Найдем два первых приближения к решению. Итак, $x_0(t)\equiv 0$,

$$x_1(t)=f(x_0)=\frac{1}{10}\int_0^t \ln(1+0)\,ds+\frac{t}{10}=\frac{t}{10},$$

$$x_2(t)=f(x_1)=\frac{1}{10}\int_0^t \ln\left(1+\frac{s}{10}\right)ds+\frac{t}{10}=\left(1+\frac{t}{10}\right)\ln\left(1+\frac{t}{10}\right).$$

Оценим погрешность приближенного решения. Имеем:

$$\rho\left(x_2, x^*\right) \le \rho\left(x_1, x_0\right)\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{t}{10} - 0\right|\frac{1/100}{9/10} = \frac{1}{900}.$$

Пространство линейных операторов

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства. Рассмотрим отображение $X \to Y$, называемое оператором. Оператор $A: X \to Y$ называется линейным оператором, если он сохраняет линейные операции, то есть $A\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) = \lambda A\left(x_1\right) + \mu A\left(x_2\right)$.

Теорема. Если линейный оператор $A \in Op\left(X;Y\right)$ непрерывен, то конечна величина

$$\|A\| = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1}\|Ax\|_Y.$$

Если $Y = R$, то оператор называется **функционалом.** Для этого частного случая выпишем формулу для нормы:

$$\| f \| = \sup_{x\ne 0}\frac{\left| f\left(x\right)\right|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1}\left| f\left(x\right)\right|.$$

Задача 2. Найти норму линейного оператора

$A: \left(x_1, x_2, ..., x_n, ...\right) \to \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}, \frac{2x_2}{\sqrt{5}}, ..., \frac{nx_n}{\sqrt{n^2+1}}, ...\right)$ в пространстве l_2.

Решение. Последовательность $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ монотонно возрастает, и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$. Оценим $\|A\|$ сверху:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{l_2}=1}\|Ax\|_{l_2} = \sup_{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_k^2} = 1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}x_n^2} < \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_k^2} = 1.$$

Обозначим через e_n вектор, у которого $n-$я координата равна единице, а все остальные – нули. Оценим теперь норму оператора снизу:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{l_2}=1}\|Ax\|_{l_2} \ge \|Ae_n\|_{l_2} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow \|A\| \ge \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1.$$

Окончательно получаем $\|A\| = 1$.

Задача 3. Найти норму линейного функционала $f\left(x\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} x\left(t\right)\sin t dt$ в пространстве $C_2\left[-\pi;\pi\right]$.

Решение. Оценим $\| f \|$ сверху (воспользуемся неравенством Коши-Буняковского):

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_{C_2}=1} |f(x)| = \sup_{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} x^2(t)dt}=1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin t dt \right| \le \sup_{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} x^2(t)dt}=1} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} x^2(t)dt} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt} = \sqrt{2\pi}.$$

Теперь оценим норму снизу:

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{C_2}} \ge \frac{|f(\sin t)|}{\|\sin t\|_{C_2}} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt}} = \sqrt{2\pi}.$$

Получаем: $\|f\| = \sqrt{2\pi}$.

Задача 4. Найти норму линейного функционала $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin t dt$ в пространстве $C[-\pi;\pi]$.

Решение. Оценим $\|f\|$ сверху:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_C=1} |f(x)| = \sup_{\max\limits_{-\pi\le t\le\pi}|x(t)|=1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin t dt \right| \le \sup_{\max\limits_{-\pi\le t\le\pi}|x(t)|=1} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)||\sin t| dt \le \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt = 4.$$

Для того, чтобы предыдущее неравенство обратилось в равенство, надо взять функцию $x_0(t) = \operatorname{sgn} t$, но она разрывна в нуле и не принадлежит $C[-\pi,\pi]$. Рассмотрим приближения функции $x_0(t)$ непрерывными функциями $x_n(t)$ -

$$x_n(t) = \begin{cases} -1,\ t \in \left[-\pi; -\frac{1}{n}\right], \\ nt,\ t \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \\ 1,\ t \in \left[\frac{1}{n}, \pi\right]. \end{cases}$$

Имеем: $\int_{-\pi}^{\pi} |x_0(t) - x_n(t)| dt = \int_{-1/n}^{1/n} |x_0(t) - x_n(t)| dt < \frac{2}{n}$. Оценим норму функционала снизу:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_C=1} |f(x)| = \sup_{\max\limits_{-\pi\le t\le\pi}|x(t)|=1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin t dt \right| \ge \left| \int_{-\pi}^{\pi} x_n(t)\sin t dt \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(x_0(t) + x_n(t) - x_0(t)\right)\sin t dt \right| \ge$$

$$\ge \left| \int_{-\pi}^{\pi} x_0(t)\sin t dt \right| - \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(x_n(t) - x_0(t)\right)\sin t dt \right| \ge \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt - \frac{2}{n} = 4 - \frac{2}{n} \Rightarrow \|f\| \ge \lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{2}{n}\right) = 4.$$

То есть $\|f\| = 4$.

Задача 5. Найти норму линейного функционала $f(x)=\int\limits_{-1}^{1}x(t)tdt-x(1)$ в пространстве $C[-1;1]$.

Решение. Оценим $\|f\|$ сверху:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|_C=1}|f(x)|=\sup_{\max\limits_{-1\le t\le 1}|x(t)|=1}\left|\int\limits_{-1}^{1}x(t)tdt-x(1).\right|\le\sup_{\max\limits_{-1\le t\le 1}|x(t)|=1}\left(\int\limits_{-1}^{1}|x(t)||t|dt+1\right)\le\left(\int\limits_{-1}^{1}|t|dt+1\right)=2.$$

Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1,1]$ функций $x_n(t)$:

$$x_n(t)=\begin{cases}-1,\ t\in\left[-1,-\dfrac{1}{n}\right],\\ n,\ t\in\left(-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right),\\ 1,\ t\in\left[\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right],\\ 2n(1-t)-1,\ t\in\left(1-\dfrac{1}{n},1\right].\end{cases}$$

Оценим норму функционала снизу, причем для упрощения выкладок сразу учтем, что модуль функций $\varphi(t)=t$ и $x_n(t)$ не превосходит 1 на $[-1,1]$ и что $x_n(1)=-1$:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|_C=1}|f(x)|\ge|f(x_n)|\ge\left|-\int\limits_{-1}^{-1/n}tdt\right|-\int\limits_{-1/n}^{1/n}dt+\int\limits_{1/n}^{1-1/n}tdt-\int\limits_{1-1/n}^{1}dt+1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{2}{n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}+1=2-\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n}.$$

Получаем $\|f\|\ge\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{n}\right)=2,$ или $\|f\|=2$.

Интегральное уравнение Фредгольма

Интегральным уравнением Фредгольма называется уравнение

$$\int\limits_{a}^{b}K(s,t)x(s)ds=\lambda x(t)+y(t),$$

то есть уравнение

$$Jx(t)=\lambda x(t)+y(t),$$

где J - оператор Фредгольма: $Jx(t)=\int\limits_{a}^{b}K(s,t)x(s)ds$.

Интегральное уравнение Вольтерра

Интегральным уравнением Вольтерра называется уравнение

$$\int_a^t K(s,t)x(s)ds = \lambda x(t) + y(t).$$

Теорема. Пусть J - интегральный оператор Вольтерра с ядром $K(s,t)$, непрерывным в треугольнике $T:\{a \le t \le b,\ a \le s \le t\}$ и $y(t) \in C[a,b]$. Тогда для любого $\lambda \ne 0$ интегральное уравнение Вольтерра имеет единственное решение в пространстве $C[a,b]$, которое можно искать в виде

$$x = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^n y}{\lambda^n}.$$

Пусть $x_k = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{J^n y}{\lambda^n}$, тогда,

$$\|x_k - x\| \le e^{\frac{M(b-a)}{|\lambda|}}\frac{M^k(b-a)^k\|y\|}{|\lambda|^{k+1}k!}.$$

Задача 6. Пользуясь формулой разложения решения интегрального уравнения в ряд, решить приближенно с точностью 0,1 в пространстве C[0,1] интегральное уравнение $\int_0^t (t+s)x(s)ds = 4x(t) + \cos t$. Сколько слагаемых в разложении надо взять, чтобы добиться точности 0,01?

Решение. Это интегральное уравнение Вольтерра с ядром $K(s,t) = t + s\ (s \le t)$, $M = \max_{0 \le s,t \le 1}|t+s| = 2$, $\lambda = 4$, $b - a = 1 - 0 = 1$,

$\|y\| = \max_{0 \le t \le 1}|\cos t| = 1.$

Рассмотрим приближенное решение $x_k = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{J^n y}{\lambda^n}$. Выясним, сколько слагаемых в сумме следует взять, чтобы достичь точности 0,1. Воспользуемся формулой для оценки приближенного решения уравнения Вольтерра.

При $k = 2$ получаем: $\|x - x_2\| \le e^{\frac{1}{2}}\frac{2^2}{|4|^3\,2!} \approx 0.05 < 0.1$. То есть искомое приближенное решение $x_2 = -\frac{1}{4}\left(\cos t + \frac{1}{4}\int_0^t (t+s)\cos s\,ds\right) = \frac{1}{16} - \frac{5}{16}\cos t - \frac{1}{8}t\sin t$.

Для того, чтобы достичь точности 0,01, достаточно 3 слагаемых.

Интегральное уравнение с вырожденным ядром

Интегральным уравнением с вырожденным ядром называется уравнение $Jx = \lambda x + y$, где J - интегральный оператор с вырожденным ядром.

Пусть

$$Jx(t)=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)\right)x(s)\,ds.$$

Введем матрицу $\mathbf{C}=\left(c_{i,j}\right)$, где $c_{i,j}=\int_a^b a_i(s)b_j(s)\,ds$ и вектор-столбец $\beta=(\beta_i)$, где $\beta_i=\int_a^b a_i(s)y(s)\,ds$.

Теорема. Пусть функции $a_i(t), b_i(t), y(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда, если λ не является собственным значением матрицы **C**, то уравнение

$$\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)\right)x(s)\,ds=\lambda x(t)+y(t)$$

имеет единственное решение в $C[a,b]$.

Это решение имеет вид $x(t)=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i(t)-y(t)\right)$, где коэффициенты α_i определяются из уравнения $\left(\alpha=(\alpha_i)\right)$:

$$(\mathbf{C}-\lambda\mathbf{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}.$$

Задача 7. Доказать, что интегральное уравнение имеет решение, и найти это решение:

$$\int_0^\pi(\cos 2s+\sin t)x(s)\,ds+x(t)=\sin t.$$

Решение. В нашем случае

$a_1(s)=\cos 2s,\ b_1(t)=1,\ a_2(s)=1,\ b_2(t)=\sin t,\ y(t)=\sin t,\ \lambda=-1.$

Построим матрицу **C**: $c_{11}=\int_0^\pi\cos 2s\,ds=0$, $c_{12}=\int_0^\pi\cos 2s\sin s\,ds=-\frac{2}{3}$, $c_{21}=\int_0^\pi ds=\pi$, $c_{22}=\int_0^\pi\sin s\,ds=2$ и вектор β: $\beta_1=\int_0^\pi\cos 2s\sin s\,ds=-\frac{2}{3}$, $\beta_2=\int_0^\pi\sin s\,ds=2$. Имеем $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & -2/3\\ \pi & 2\end{pmatrix}$;

Собственные значения матрицы **C** комплексные, не совпадают с $\lambda=-1$. Следовательно, уравнение имеет единственное решение. Найдем его:

$(\mathbf{C}+\mathbf{E})=\begin{pmatrix}1 & -2/3\\ \pi & 3\end{pmatrix}$; $(\mathbf{C}+\mathbf{E})^{-1}=\frac{3}{9+2\pi}\begin{pmatrix}3 & 2/3\\ -\pi & 1\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\frac{3}{9+2\pi}\begin{pmatrix}3 & 2/3\\ -\pi & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/3\\ 2\end{pmatrix}=\frac{3}{9+2\pi}\begin{pmatrix}-2/3\\ (2\pi+6)/3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x(t)=\dfrac{2-3\sin t}{9+2\pi}$.

Простейшая задача вариационного исчисления

Пусть $X=C^1\left[a,b\right]$; $f\left(x\right)=\int\limits_a^b F\left(t,x,x'\right)dt$. Надо решить задачу

$$\begin{cases} f\left(x\right)\to extr \\ x(a)=A; \quad x(b)=B \end{cases}$$

(1)

Теорема. Если функция $x(t)\in C^2$ и является решением задачи (1), то она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right)=0$ (уравнение Эйлера).

Условный экстремум

Пусть в линейном нормированном пространстве X задан функционал f, и надо решить задачу: $f\left(x\right)\to extr$ при условии $g\left(x\right)=0$, где $g\left(x\right)$ - другой заданный функционал.

Для бесконечномерных линейных нормированных пространств справедлива теорема, аналогичная соответствующей теореме из конечномерного анализа:

Теорема. Пусть f,g - дифференцируемые функционалы (g - непрерывно дифференцируем), пусть x_0 - точка условного экстремума, причем она не особая, то есть $dg\left(x_0,h\right)\neq 0$.

Тогда существует число λ (множитель Лагранжа) такое, что
$df\left(x_0,h\right)=\lambda dg\left(x_0 h\right)$ для $\forall h\in X$.

По-другому:

$$d\underbrace{\left[f-\lambda g\right]\left(x_0,h\right)}_{\varphi}=0 \qquad (\varphi \text{ - \textbf{\textit{функционал Лагранжа}}}).$$

Если ограничений несколько, то условие принимает вид

$$d\left[f-\lambda_1 g_1-...-\lambda_n g_n\right]\left(x_0,h\right)=0.$$

Задача для интегрального функционала в C^1

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\int\limits_a^b F\left(t,x,x'\right)dt\to extr \\ g\left(x\right)=\int\limits_a^b G\left(t,x,x'\right)dt=0 \end{cases} \qquad (2)$$

Относительно функций F,G предполагаем, что они имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков при $a \le t \le b$ и произвольных значениях x, x'.

Если кривая $x = x_0(t)$ является решением задачи (2), не будучи при этом экстремалью функционала g, то, по теореме, существует число λ такое, что искомая кривая является экстремалью для функционала $\varphi = f - \lambda g$:

$$\varphi(x) = \int_a^b \Phi(t,x,x')\,dt = \int_a^b \left[F - \lambda G\right](t,x,x')\,dt,$$

а следовательно, будет решением уравнения Эйлера для $\Phi = F - \lambda G$.

Задача 8. Исследовать задачу на условный экстремум $\int_0^{\pi/2} \left(x'^2 - x^2\right)dt \to extr,\ \int_0^{\pi/2} x'\cos 2t\,dt = 0;\ \ x(0)=1,\ \ x\left(\pi/2\right)=0.$

Решение. Имеем $F(t,x,x') = x'^2 - x^2,\ G(t,x,x') = x'\cos 2t,\ F - \lambda G = x'^2 - x^2 - \lambda x'\cos 2t.$

Запишем уравнение Эйлера:

$$-2x = \frac{d}{dt}\left(2x' - \lambda\cos 2t\right),$$

или

$$-2x = 2x'' + 2\lambda\sin 2t$$

$$x'' + x = -\lambda\sin 2t. \qquad (3)$$

Общее решение однородного уравнения $x'' + x = 0$ - $x_0 = c_1\cos t + c_2\sin t$, частное решение $\bar{x}$ неоднородного уравнения ищем в виде $\bar{x} = a\cos 2t + b\sin 2t$. Подставляя $\bar{x}$ в (3), получаем $\bar{x} = \frac{\lambda}{3}\sin 2t$.

Экстремалями (решениями уравнения Эйлера) в нашей задаче будут функции $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{\lambda}{3}\sin 2t$.

Далее учитываем граничные условия: $x(0) = c_1 = 1,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 = 0$ и интегральное:

$$\int_0^{\pi/2} \left(-\sin t + \frac{2\lambda}{3}\cos 2t\right)\cos 2t\,dt = 0,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{\lambda\pi}{6} = 0.$$

Окончательно получаем: экстремаль поставленной задачи - $x(t) = \cos t - \frac{2}{\pi}\sin 2t$.

Примечание. Ответ на вопрос, будет ли данная функция доставлять условный минимум (максимум) нашей задаче или нет, требует дальнейшего исследования.

Вопросы к защите домашней работы

1. Дайте определение расстояния, метрического пространства. Определите метрические пространства $R^n,\ l_2,\ C[a,b],\ C_2[a,b],\ C^1[a,b]$.
2. Дайте определение окрестности, внутренней точки, открытого множества.
3. Дайте определение фундаментальной последовательности, полного метрического пространства. Приведите примеры полного и неполного пространств.
4. Дайте определение непрерывного отображения. Дайте определение сжимающего отображения.
5. Сформулируйте теорему о неподвижной точке сжимающего отображения.
6. Дайте определение нормы, линейного нормированного пространства, определите линейные нормированные пространства: $R^n,\ l_2,\ C[a,b],\ C_2[a,b],\ C^1[a,b]$.
7. Дайте определение линейного оператора, пространства линейных операторов, нормы линейного оператора.
8. Определите интегральный оператор Фредгольма, приведите формулу для вычисления ядра произведения интегральных операторов. Сформулируйте теорему об оценке нормы интегрального оператора Фредгольма в пространстве $C[a,b]$.
9. Определите интегральное уравнение Фредгольма. Сформулируйте теорему о достаточном условии разрешимости интегрального уравнения Фредгольма в пространстве $C[a,b]$.
10. Приведите формулу для разложения решения интегрального уравнения в ряд. Запишите формулу для оценки погрешности приближенного решения при замене ряда конечной суммой.
11. Определите интегральный оператор Вольтерра. Приведите формулу для ядра произведения интегральных операторов Вольтерра.
12. Запишите формулу для оценки нормы степени интегрального оператора Вольтерра.
13. Определите интегральное уравнение Вольтерра. Когда оно имеет единственное решение в классе непрерывных функций? Приведите формулу для оценки погрешности приближенного решения.
14. Определите интегральный оператор с вырожденным ядром, интегральное уравнение с вырожденным ядром. Сформулируйте теорему о достаточных условиях однозначной разрешимости интегрального уравнения с вырожденным ядром.
15. Дайте определение дифференцируемого функционала.
16. Запишите формулу для дифференциала интегрального функционала $f(x)=\int\limits_a^b F(t,x)\,dt$ в пространстве $C[a,b]$.

17. Запишите формулу для дифференциала интегрального функционала $f(x)=\int_a^b F(t,x,x')dt$ в пространстве $C^1[a,b]$.
18. Дайте определение локального экстремума функционала. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемого функционала.
19. Сформулируйте простейшую задачу вариационного исчисления. Запишите уравнение Эйлера (необходимое условие экстремума интегрального функционала).
20. Приведите формулу первого интеграла уравнения Эйлера для случая

$$f(x)=\int_a^b F(x,x')\,dt .$$

21. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума функционала $f(x)=\int_a^b F(t,x,x')dt$ при условии $g(x)=\int_a^b G(t,x,x')dt=0$.