МАТЕМАТИКА

УДК 515.168.3; 514.77; 515.165

ОБОБЩЁННЫЕ НАДСТРОЕЧНЫЕ СЛОЕНИЯ

Н.И. Жукова, Г.В. Чубаров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

n.i.zhukova@rambler.ru

Поступила в редакцию 19.06.2012

Введено понятие обобщённых надстроечных слоений. Дана интерпретация групп голономии этих слоений. Установлена связь с интегрируемыми связностями Эресмана. Обобщённые надстроечные слоения $(M,\mathcal{F})$ охарактеризованы посредством существования специальной полной римановой метрики на M, относительно которой это слоение вполне геодезическое. Доказан критерий устойчивости слоев в смысле Эресмана и Риба.

Ключевые слова: обобщённое надстроечное слоение, орбифолд, локально устойчивый слой, группа голономии.

1. Основные результаты

Обобщённым надстроечным слоением мы называем слоение, полученное надстройкой гоморфизма фундаментальной группы хорошего орбифолда в группу диффеоморфизмов произвольного многообразия, называемого трансверсальным. В случае, когда орбифолд является многообразием, эта конструкция совпадает с известной конструкцией надстроечного слоения, принадлежащей Хефлигеру. Она обобщает понятие надстройки диффеоморфизма, принадлежащее Смейлу, хорошо известное и часто используемое в теории динамических систем.

Исследованию различных аспектов надстроечных слоений посвящены работы авторов [1] и [2].

Напомним, что орбифолд называется хорошим, если для него существует накрывающее пространство, являющееся многообразием, и очень хорошим, если он имеет конечнолистное накрытие многообразием.

Обобщенное надстроечное слоение $(M,\mathcal{F})$ определяется заданием хорошего орбифолда B, q -мерного многообразия T и гомоморфизма

$$\rho: \ \pi_1^{orb}(B,b_0)\to Diff(T)$$

фундаментальной группы $\pi_1^{orb}\left(B,b_0\right)$ орбифолда B в группу диффеоморфизмов многообразия T, удовлетворяющих некоторому условию (точное определение см. в разделе 2). При этом используется обозначение $(M,\mathcal{F}) = Sus(T,B,\rho)$, введённое нами в [1] для обозначения надстроечных слоений. Группа $\Psi=\rho(\pi_1^{orb}(B,b_0))$ называется *глобальной группой голономии* слоения $(M,\mathcal{F})$.

Гладкие орбифолды можно рассматривать как гладкие многообразия с особенностями. В случае, когда орбифолд B – гладкое многообразие, обобщенное надстроечное слоение является надстроечным слоением.

Целью данной работы является исследование свойств обобщённых надстроечных слоений. Особое внимание уделено характеристическим свойствам этих слоений.

Показано, что любое обобщённое надстроечное слоение изоморфно в категории слоений некоторому каноническому (теорема 2). Это дает простой способ построения примеров таких слоений (см. раздел 8). Нами найдена характеризация обобщённого надстроечного слоения с помощью интегрируемой связности Эресмана (теорема 3) и посредством существования специальной полной римановой метрики на слоеном многообразии, относительно которой такое слоение вполне геодезическое (теорема 4 и следствие 1).

Под локальной устойчивостью слоя L произвольного слоения $(M,\mathcal{F})$ понимается локальная устойчивость в смысле Эресмана (определение приведено в разделе 7). Слоение называется локально устойчивым, если локально устойчив каждый его слой.

Найден критерий локальной устойчивости обобщённого надстроечного слоения $(M,\mathcal{F})$ =

= $Sus(T,B,\rho)$ с компактным трансверсальным многообразием T (теорема 5). Показано, что локально устойчивое слоение указанного класса имеет конечную глобальную группу голономии Ψ, является параллельным слоением на некотором полном приводимом римановом многообразии, пространство слоев которого есть очень хороший орбифолд (теорема 6).

Все многообразия, орбифолды и диффеоморфизмы предполагаются гладкими класса C^r, где r – произвольное натуральное число. Через $Diff^r(T)$ обозначается группа C^r диффеоморфизмов с C^r-топологией. Все окрестности предполагаются открытыми.

2. Обобщённые надстроечные слоения и их группы голономии

Основные понятия теории орбифолдов можно найти, например, в книге [3].

Пусть B – хороший p-мерный орбифолд и $\pi_1^{orb}(B,b_0)$ – его фундаментальная группа. Пусть T – гладкое q-мерное многообразие класса C^r, $\rho:\pi_1^{orb}(B,b_0)\to Diff(T)$ – гомоморфизм групп. Введём обозначения $G:=\pi_1^{orb}(B,b_0)$ и $\Psi=\rho(G)$. Рассмотрим универсальное накрытие $k:\hat{B}\to B$. Согласно предположению, орбифолд B – хороший, следовательно, $\hat{B}$ – гладкое многообразие. Зададим правое действие группы G на $\hat{B}\times T$

$$\Theta\colon \hat{B}\times T\times G\to \hat{B}\times T : (x,t,g)\mapsto \left(g^{-1}(x),\rho(g^{-1})(t)\right),$$

где $\hat{B}\to\hat{B}: x\mapsto g^{-1}(x)$ – накрывающее преобразование, индуцированное элементом $g^{-1}\in G$. Поскольку группа G действует на $\hat{B}$ собственно разрывно, то действие Θ группы G на произведении $\hat{B}\times T$ также собственно разрывное. Следовательно, фактор-пространство $M:=(\hat{B}\times T)/G$ естественным образом наделяется структурой гладкого хорошего орбифолда. Предположим, что группа G действует на $\hat{B}\times T$ свободно, тогда $M=(\hat{B}\times T)/G$ – гладкое многообразие размерности $n=p+q$.

Отображение $p: M=\left(\hat{B}\times T\right)/G\to B=\hat{B}/G$ является субмерсией на орбифолд B. Поскольку

$$\Theta(g):\hat{B}\times t\to\hat{B}\times\rho\left(g^{-1}\right)(t)$$

для любого $t\in T$, то действие дискретной группы G сохраняет тривиальное слоение $\mathbb{F}=\{\hat{B}\times t | t\in T\}$ произведения $\hat{B}\times T$. Поэтому фактор-отображение $f_0:\hat{B}\times T\to\left(\hat{B}\times T\right)/G=M$ индуцирует на M слоение $\mathcal{F}$ класса C^r, слои которого трансверсальны слоям расслоения $p:M\to B$. Пара $(M,\mathcal{F})$ называется *обобщённым надстроечным слоением* и обозначается нами через $(M,\mathcal{F})=Sus(T,B,\rho)$, а $p:M\to B$ называется *ассоциированным расслоением над орбифолдом* B. Группу диффеоморфизмов $\Psi=\rho(G)$ многообразия T будем называть *глобальной группой голономии* надстроечного слоения $(M,\mathcal{F})$.

Замечание 1. В конструкции обобщенного надстроечного слоения фундаментальная группа $G:=\pi_1^{orb}(B,b_0)$ и $\Psi:=\rho(G)$ определены с точностью до внутренних автоморфизмов.

3. Двуслоения, накрытые произведением

3.1.Связность Эресмана для слоений

Понятие связности Эресмана для слоений введено Блюменталем и Хебдой [4].

Пусть $(M,\mathcal{F})$ – гладкое слоение коразмерности q, $\mathfrak{M}$ – q-мерное гладкое распределение, трансверсальное $(M,\mathcal{F})$. Это означает, что в каждой точке x из M выполняется равенство

$$T_xM=T_x\mathcal{F}\oplus\mathfrak{M}_x,$$

где $T_x\mathcal{F}$ – касательное пространство к слою слоения $(M,\mathcal{F})$ в точке x. Распределение $\mathfrak{M}$ называется *горизонтальным*, а $T\mathcal{F}$ – *вертикальным*. Здесь все отображения предполагаются кусочно-гладкими. Кривая называется *вертикальной,* если она лежит в одном слое слоения $(M,\mathcal{F})$. Кривая называется *горизонтальной*, если каждый ее гладкий кусок – интегральная кривая распределения $\mathfrak{M}$.

Вертикально-горизонтальной гомотопией (кратко *в.г.г.*) называется отображение $H\colon I_1\times I_2\to$ $\to M$, где $I_1=I_2=[0,1]$, для которого сужение $H_{I_1\times\{t\}}$ при любом $t\in I_2$ – горизонтальная кривая, а сужение $H_{\{s\}\times I_2}$ для каждого $s\in I_2$ – вертикальная кривая. Пара путей $(H_{I_1\times\{0\}},H_{\{0\}\times I_2})$ называется *базой в.г.г. H*. Пара путей (σ,h) с общим началом $\sigma(0)=h(0)$, где $\sigma:I\to M$ – горизонтальная, h: $I_2\to M$ – вертикальная кривая, называется *допустимой для в.г.г.* Если существует в.г.г. H с базой (σ,h), то такая гомотопия единственная.

Определение 1. Если для любой допустимой пары путей (σ,h) существует в.г.г. с базой (σ,h), то распределение $\mathfrak{M}$ называется связностью

Эресмана для слоения $(M,\mathcal{F})$. Если распределение $\mathfrak{M}$ интегрируемо, то связность Эресмана $\mathfrak{M}$ для слоения $(M,\mathcal{F})$ называется интегрируемой.

3.2. Двуслоения, накрытые произведением

Исследованию слоений, накрытых произведением, посвящена работа [5] первого автора.

Если $f:N \to M$ – гладкое накрывающее отображение, причем на многообразии M задано слоение $\mathcal{F}$, то на многообразии N индуцируется слоение, обозначаемое через $f^{*}\mathcal{F}$, слои которого накрывают посредством f соответствующие слои слоения $\mathcal{F}$.

Тройка $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ – трансверсальные слоения, то есть $T_xM = T_x\mathcal{F}_1 \oplus T_x\mathcal{F}_2$ для всех $x \in M$, называется *двуслоением*. Морфизмами двуслоений $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ и $(M', \mathcal{F}_1', \mathcal{F}_2')$ называются гладкие отображения $f:M \to M'$, являющиеся одновременно морфизмами слоений $(M,\mathcal{F}_1)$, $(M', \mathcal{F}_1')$ и $(M,\mathcal{F}_2)$, $(M', \mathcal{F}_2')$. Категория, объектами которой являются двуслоения, а морфизмами – морфизмы двуслоений, обозначается через $\mathcal{B}if$ и называется *категорией двуслоений*.

Говорят, что двуслоение $(M,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ *накрыто произведением*, если существует такое гладкое накрывающее отображение $f:N \to M$, что $N = N_1\times N_2$, а индуцированные слоения $f^{*}\mathcal{F}_1$ и $f^{*}\mathcal{F}_2$ совпадают с тривиальными слоениями $\mathbb{F}_1 = \{N_1 \times \{z\} | z \in N_2\}$ и $\mathbb{F}_2 = \{\{y\} \times N_2 | y \in N_1\}$ произведения $N_1\times N_2$, соответственно.

3.3. Каноническое двуслоение, накрытое произведением

Пусть $N_1\times N_2$ – произведение многообразий N_1 и N_2, $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$ – тривиальные слоения произведения $N = N_1\times N_2$. Предположим, что Ψ – некоторая группа автоморфизмов двуслоения $(N_1\times N_2, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2)$ в категории $\mathcal{B}if$. Тогда на пространстве N_1 слоёв слоения $(N, \mathbb{F}_2)$ индуцирована группа диффеоморфизмов Ψ_1, а на $N_2 = N/\mathbb{F}_1$ индуцирована группа диффеоморфизмов Ψ_2, причём каждое преобразование $\psi \in \Psi_2$ можно представить в виде $\psi = (\psi_1,\psi_2)$, где $\psi_i \in \Psi_i$, $i = 1,2$, $\psi(x,y) = (\psi_1(x), \psi_2(y))$ для любых $(x,y) \in N_1 \times N_2$.

Определение 2. Если при этом группа Ψ удовлетворяет условиям:

1) канонические эпиморфизмы групп $\theta_i : \Psi \to \Psi_i$: $(\psi_1,\psi_2) \to \psi_i$, $i = 1,2$, являются изоморфизмами групп;

2) группа Ψ действует свободно и собственно разрывно на произведении многообразий $N = N_1\times N_2$, то определено фактор-многообразие $S = (N_1\times N_2)/\Psi$ с двуслоением (S, F_1, F_2), накрытым произведением $N_1\times N_2$. При этом двуслоение $((N_1\times N_2)/\Psi, F_1, F_2)$ называется каноническим.

Теорема 1. Если $(M,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ – двуслоение, накрытое произведением, то:

1) существует изоморфизм $\Xi : (M, \mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \to ((N_1\times N_2)/\Psi, F_1,F_2)$ в категории двуслоений $\mathcal{B}if$ на некоторое каноническое двуслоение $((N_1\times N_2)/\Psi, F_1,F_2)$;

2) группа Ψ изоморфна фактор-группе $\pi_1(M)/(K_1\times K_2)$ фундаментальной группы многообразия M по произведению нормальных делителей $K_1\times K_2$, изоморфных фундаментальным группам $\pi_1(N_1, x_1)$ и $\pi_1(N_2, x_2)$ соответственно;

3) каноническое двуслоение $((N_1\times N_2)/\Psi, F_1,F_2)$ определено однозначно с точностью до диффеоморфизмов f_i многообразий N_i и сопряжённости группы Ψ диффеоморфизмами (f_1,f_2) произведения $N_1\times N_2$.

Доказательство. Предположим, что $(M,\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ – двуслоение, накрытое произведением, и $\chi : \hat{M} \to M$ – гладкое универсальное накрывающее отображение. Тогда $\hat{M} = M_1 \times M_2$ и тривиальные слоения $\mathbb{F}_1 = \{M_1 \times \{z\} | z \in M_2\}$ и $\mathbb{F}_2 = \{\{y\} \times M_2 | y \in M_1\}$ совпадают с индуцированными слоениями $\chi^{*}\mathcal{F}_1$ и $\chi^{*}\mathcal{F}_2$, соответственно. При этом фундаментальная группа $\pi_1(M,x)$ действует свободно и собственно разрывно на произведении $M_1\times M_2$ как группа G автоморфизмов двуслоения $(M_1\times M_2, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2)$ в категории $\mathcal{B}if$. Кроме того, $M = (M_1\times M_2)/G$. Поэтому на многообразии слоёв $M_2 = \hat{M}/\mathbb{F}_1$ слоения $(\hat{M}, \mathbb{F}_1)$ индуцируется группа диффеоморфизмов G_2, а на многообразии слоёв $M_1 = \hat{M}/\mathbb{F}_2$ индуцируется группа G_1, причём каждое преобразование $g \in G$ можно записать в виде $g = (g_1,g_2)$, $g_i \in G_i$, $i = 1,2$, и $g(y,z) = (g_1(y), g_2(z))$ для любых точек $(y,z) \in M_1 \times M_2$. Отображения $q_i:G \to G_i$: $(g_1,g_2) \to g_i$ являются эпиморфизмами групп. Подгруппа $K_i := \mathrm{Ker}\, q_i$ группы G действует на произведении $M_1\times M_2$ свободно и собственно разрывно. Так как $K_1 = \{(e_1, g_2) \in G \mid g_2 \in G_2\}$, где e_i – единица группы G_i, то группа $H_2 := q_2(K_1)$ действует свободно и собственно разрывно на многообразии M_2. Поэтому определено фактор-многообразие $N_2 := M_2/H_2$. Так как H_2 – нормальная подгруппа группы G_2, то на N_2 индуцировано действие фактор-группы $\Psi_2 := G_2/H_2$, причём пространство орбит M_2/G_2 гомеоморфно пространству орбит N_2/Ψ_2.

Аналогично определена нормальная подгруппа $H_1 := q_1(K_2)$ группы G_1, свободно и собственно разрывно действующая на M_1. Следовательно, определено фактор-многообразие $N_1 := M_1/H_1$ с индуцированным действием фактор-группы $\Psi_1 := G_1/H_1$, причём пространство орбит M_1/G_1 гомеоморфно пространству орбит N_1/Ψ_1.

На произведении $N_1\times N_2 = (M_1\times M_2)/(H_1\times H_2)$ индуцировано действие фактор-группы $\Psi \cong G/(H_1\times H_2)$, причём существует диффеоморфизм $\Xi : M \to (N_1\times N_2)/\Psi$, удовлетворяющий равенству $\Xi\circ\chi = \alpha\circ\beta$, где $\beta = (\beta_1,\beta_2)$, $\beta_i : M_i \to N_i = M_i/H_i$, и $\alpha : N_1\times N_2 \to (N_1\times N_2)/\Psi$ – проекции на многообразия орбит соответствующих групп диффеоморфизмов.

Как доказано Шапиро ([6], лемма 1), существует такой изоморфизм фактор-групп $\theta:\Psi_1 = G_1/H_1 \to \Psi_2 = G_2/H_2$, что $\Psi = \{(\psi_1,\psi_2)\,|\,\psi_1\in\Psi_1,\ \psi_2 = \theta(\psi_1)\}$. Следовательно, канонические эпиморфизмы $\hat{q}_i : \Psi\to\Psi_i : (\psi_1,\psi_2)\mapsto\psi_i$, $i = 1,2$, являются изоморфизмами групп. Отсюда, поскольку группа Ψ образована автоморфизмами тривиального двуслоения $(N_1\times N_2, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2)$ произведения $N_1\times N_2$, следует, что определено каноническое двуслоение $((N_1\times N_2)/\Psi, F_1, F_2)$ и Ξ – изоморфизм двуслоений $(M,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ и $((N_1\times N_2)/\Psi, F_1,F_2)$ в категории $\mathcal{B}if$.

Осталось напомнить, что группа Ψ изоморфна фактор-группе $G/(K_1\times K_2)$, где

$$G\cong\pi_1(M,x),\ K_i\cong H_i\cong\pi_1(N_i,x_i).$$

Замечание о том, что универсальное накрывающее многообразие определено с точностью до диффеоморфизма, а группа накрывающих преобразований определена с точностью до сопряжений этими диффеоморфизмами, завершает доказательство.

4. Каноническое обобщённое надстроечное слоение

Будем рассматривать произведения многообразий $N_1\times N_2$ с тривиальными слоениями $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2$.

Предположим, что Ψ – группа автоморфизмов двуслоения $(N_1\times N_2, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2)$ в категории $\mathcal{B}if$. Тогда на N_i, $i = 1,2$, индуцирована группа диффеоморфизмов Ψ_i, $\Psi = \{(\psi_1,\psi_2)\,|\,\psi_i\in\Psi_i\}$ и определены эпиморфизмы $\hat{q}_i : \Psi\to\Psi_i : (\psi_1, \psi_2)\mapsto\psi_i$. Предположим, что $\hat{q}_i : \Psi\to\Psi_i$ – изоморфизмы групп, причём группа Ψ_2 действует собственно разрывно на многообразии N_2, а группа Ψ действует на $N_1\times N_2$ свободно. Тогда определено каноническое двуслоение $((N_1\times N_2)/\Psi, F_1,F_2)$, накрытое произведением $N_1\times N_2$, обладающее тем свойством, что пространство орбит N_1/Ψ_1 гомеоморфно пространству слоёв слоения $\mathcal{F}_2$ и представляет собой орбифолд B.

Лемма 1. Построенное выше слоение $((N_1\times N_2)/\Psi, F_1)$ является обобщённым надстроечным слоением.

Доказательство. Действительно, пусть, как и выше, $\beta_i : M_i \to N_i$ – универсальные накрывающие отображения, α: $N_1\times N_2 \to (N_1\times N_2)/\Psi$ – фактор-отображение, тогда $\chi = \alpha\circ\beta$: $M_1\times M_2 \to (N_1\times N_2)/\Psi$, где $\beta = (\beta_1,\beta_2)$ – универсальное накрывающее отображение для M, причем двуслоение $((N_1\times N_2)/\Psi,F_1,F_2)$ накрыто произведением $M_1\times M_2$. Фундаментальная группа $\pi_1(M,x)$ действует на произведении многообразий $M_1\times M_2$ как группа накрывающих преобразований G и индуцирует на M_i группу диффеоморфизмов G_i. Будем использовать обозначения, введённые в разделе 3.

Так как $B\cong N_1/\Psi_1\cong M_1/G_1$, то из односвязности многообразия M_1 вытекает, что группа G_1 изоморфна фундаментальной группе $\pi_1^{orb}(B,b_0)$ орбифолда B. Определено отображение

$$\rho : \pi_1^{orb}(B,b_0)\cong G_1 \to Diff\ (N_2),$$

ставящее в соответствие элементу $g_1\in G_1$ преобразование $g_2\cdot H_2$, где $(g_1,g_2)\in G$, $H_2 = q_2\ (K_1)$ – нормальный делитель группы G_2, определённый выше, причем ρ – мономорфизм групп. Более того, $\rho(G_1) = \Psi_2$. Положим $T := N_2$ и заметим, что $(M,\mathcal{F}) = Sus(T, B, \rho)$ – обобщённое надстроечное слоение.

Определение 3. Построенное выше слоение $((N_1\times N_2)/\Psi,F_1)$ называется каноническим обобщённым надстроечным слоением.

Таким образом, из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Любое обобщённое надстроечное слоение $(M,\mathcal{F})$ изоморфно (посредством C^r-диффеоморфизма) в категории слоений некоторому каноническому обобщённому надстроечному слоению $((N_1\times N_2)/\Psi, F_1)$.

Замечание 2. Используя теорему Касивабары о разложении гладкого односвязного многообразия в произведение многообразий [7], нетрудно показать, что двуслоение $(M,\mathcal{F}, \mathcal{F}^t)$ накрыто произведением тогда и только тогда, когда $T\mathcal{F}$ – связность Эресмана для слоения $(M, \mathcal{F}^t)$.

Благодаря этому замечанию теорема 2 может быть переформулирована в следующем эквивалентном виде.

Теорема 3. Гладкое слоение $(M,\mathcal{F})$ является обобщённым надстроечным тогда и только тогда, когда его касательное распределение $\mathfrak{M} = T\mathcal{F}$ является интегрируемой связностью Эресмана для слоения, образованного слоями некоторой субмерсии $p\colon M \to B$ многообразия M на орбифолд B.

5. Группы голономии

Напомним, что подмножество слоеного многообразия называется *насыщенным*, если его можно представить в виде объединения каких-либо слоев слоения. Слой L слоения $(M,\mathcal{F})$ называется *замкнутым,* если он является замкнутым подмножеством многообразия M, слой L называется *собственным,* если L – вложенное подмногообразие в M. Слоение называется *собственным*, если каждый его слой – собственный. Имеет место следующее легко доказываемое утверждение.

Предложение 1. Пусть $(M,\mathcal{F}) = Sus(T, B, \rho)$ – обобщённое надстроечное слоение, $\Psi := Im(\rho) \subset \subset Diff\ (T$ – его глобальная группа голономии, $f_0 : \hat{B}\times T \to M = (\hat{B}\times T)/G$ – фактор-отображение и $r : \hat{B}\times T \to T$ – проекция на второй сомножитель. Пусть x – любая точка из M, $z \in r(f_0^{-1}(x)) \in T$ и Ψ_z – стационарная подгруппа группы Ψ в точке z. Тогда:

1) группа ростков $\{\{\psi_z\} | \psi \in \Psi_z\}$ изоморфна ростковой группе голономии $\Gamma(L,x)$ слоя L, содержащего x;

2) слой $L = L(x)$ является замкнутым (собственным) тогда и только тогда, когда орбита $\Psi\cdot z$ точки z есть замкнутое (соответственно, дискретное) подмножество многообразия T.

6. Вполне геодезичность обобщённых надстроечных слоений

Теорема 4. Для того чтобы $(M,\mathcal{F})$ являлось обобщённым надстроечным слоением с компактным трансверсальным многообразием, необходимо и достаточно существования такой полной римановой метрики g на M, что $(M,\mathcal{F})$ – вполне геодезическое слоение риманова многообразия (M,g), допускающее ортогональное компактное слоение.

Доказательство. Пусть $(M,\mathcal{F}) = Sus(T, B, \rho)$, причём T – компактно и $p\colon M \to B$ – ассоциированное трансверсальное расслоение над орбифолдом B. Как известно [8], на любом гладком орбифолде существует полная риманова метрика. Пусть g_M и g_B – полные римановы метрики на M и B, соответственно. Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $k : \hat{B} \to B$ для орбифолда B. Поскольку B – хороший орбифолд, то $\hat{B}$ – многообразие, причем существование полной римановой метрики g_B на B эквивалентно существованию полной римановой метрики g_0 на $\hat{B}$, инвариантной относительно группы накрывающих преобразований G универсального накрытия k.

Накрывающее отображение $f_0 : \hat{B}\times T \to M$ индуцирует на произведении многообразий $\hat{B}\times T$ полную риманову метрику $f_0^* g_M$. Определим новую риманову метрику $\hat{g}$ на $\hat{B}\times T$ следующим образом. Любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}(\hat{B}\times T)$ однозначно представимо в виде $X = X_1 + X_2$, где X_1 касается слоев тривиального слоения $\mathbb{F}_1 = \{\hat{B}\times\{t\} | t \in T\}$, а X_2 касается слоения $\mathbb{F}_2 = \{\{x\}\times T | x \in \hat{B}\}$. Риманова метрика g_0 на $\hat{B}$ индуцирует на каждом слое $\hat{B}\times\{t\}$ риманову метрику $g_0(t)$, которую для краткости будем обозначать по-прежнему через g_0.

Положим

$$\hat{g}(X,Y) := g_0(X_1,Y_1) + f_0^* g_M(X_2,Y_2), \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(\hat{B}\times T). \tag{1}$$

Тогда $\hat{g}$ – риманова метрика, в которой слои слоений $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$ ортогональны.

Покажем, что риманова метрика $\hat{g}$ полная, причём каждый слой тривиального слоения $\mathbb{F}_1$ является полным вполне геодезическим подмногообразием риманова многообразия $(\hat{B}\times T, \hat{g})$. Каноническая проекция $pr : \hat{B}\times T \to \hat{B}$ является римановой субмерсией $(\hat{B}\times T, \hat{g})$ на $(\hat{B}, g_0)$. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $y_n = (x_n,t_n)$ в $(\hat{B}\times T, \hat{g})$. Так как риманова субмерсия не увеличивает расстояния, то x_n – фундаментальная последовательность в $(\hat{B}, g_0)$, которая сходится в силу полноты метрики g_0. Пусть $\lim x_n = x_0$ при $n \to \infty$. Благодаря компактности слоя $\{x_0\}\times T$ последовательность $z_n = (x_0,t_n) \in \{x_0\}\times T$ имеет сходящуюся подпоследовательность z_{n_k}. Пусть $\lim z_{n_k} = z_0 =$

$=(x_0,t_0)$ при $k\to\infty$. Покажем, что последовательность y_n сходится к $y_0=(x_0,t_0)$ в $(\hat{B}\times T,\ \hat{g})$. Обозначим через d функцию расстояния риманова многообразия $(\hat{B}\times T,\ \hat{g})$, а через d_0 – функцию расстояния римановой метрики g_0. Тогда из определения метрики $\hat{g}$ вытекает выполнение соотношений

$$d(y_{n_k},z_0)\le d(y_{n_k},z_{n_k})+d(z_{n_k},z_0)=$$
$$=d_0(y_{n_k},z_{n_k})+d(z_{n_k},z_0).$$

Заметим, что $d_0(y_{n_k},z_{n_k})=d_0(x_{n_k},x_0)\to 0$ при $k\to\infty$. Кроме того, в силу выбора подпоследовательности z_{n_k}, выполняется равенство $\lim z_{n_k}=z_0$ при $k\to\infty$. Отсюда, согласно (1), следует сходимость подпоследовательности y_{n_k} к z_0. Так как y_n – фундаментальная последовательность, то необходимо $\lim y_n=z_0$ при $n\to\infty$. Таким образом, метрическое пространство $(\hat{B}\times T,\ d)$ полное. Согласно теореме Хопфа–Ринова это влечет геодезическую полноту римановой метрики $\hat{g}$. Из вида метрики $\hat{g}$ вытекает, что каждый слой стандартного слоения $\mathbb{F}_1=\{\hat{B}\times\{t\}|t\in T\}$ является вполне геодезическим подмногообразием в $(\hat{B}\times T,\ \hat{g})$.

Инвариантность римановых метрик g_0 на B_0 относительно G и g_M относительно действия группы G на $\hat{B}\times T$ влечет G-инвариантность римановой метрики $\hat{g}$ на $\hat{B}\times T$. Следовательно, $\hat{g}$ индуцирует риманову метрику g на фактор-многообразии $M=(\hat{B}\times T)/G$, относительно которой фактор-отображение $f_0:\hat{B}\times T\to M$ является римановым накрытием, т.е. $\hat{g}=f_0^*g$. Поскольку f_0 – локальная изометрия и локальный изоморфизм слоений ($\hat{B}\times T$, $\mathbb{F}_1$) и $(M,\mathcal{F})$, то вполне геодезичность слоения ($\hat{B}\times T$, $\mathbb{F}_1$) в $(\hat{B}\times T,\ \hat{g})$ влечет вполне геодезичность слоения $(M,\mathcal{F})$ в (M,g).

По условию трансверсальное многообразие T компактно. Из определения обобщенного надстроечного слоения вытекает, что T накрывает каждый слой трансверсального слоения $(M,\mathcal{F}^t)$. Следовательно, $(M,\mathcal{F}^t)$ – компактное слоение. Кроме того, слоения $(M,\mathcal{F})$ и $(M,\mathcal{F}^t)$ ортогональны.

Обратно, пусть слоение $(M,\mathcal{F})$ удовлетворяет условиям доказываемой теоремы, и $(M,\mathcal{F}^{\perp})$ – дополнительное по ортогональности слоение. При этом $(M,\mathcal{F}^{\perp})$ является римановым слоением. Тогда (см., например [9]), двуслоение $(M,\ \mathcal{F},\mathcal{F}^{\perp})$ накрыто произведением. По условию слоение $(M,\mathcal{F}^{\perp})$ компактно. Хорошо известно, что для любого компактного риманова слоения $(M,\mathcal{F}^{\perp})$ пространство слоёв – гладкий орбифолд. Поэтому, согласно теореме 3, $(M,\mathcal{F})$ – обобщенное надстроечное слоение.

Следствие 1. Гладкое слоение $(M,\mathcal{F})$ коразмерности q является обобщенным надстроечным слоением тогда и только тогда, когда существует такая полная риманова метрика g на M, в которой ортогональное q-мерное распределение интегрируемо и определяет компактное риманово слоение.

7. Локальная устойчивость слоёв

Понятие устойчивости слоев слоений введено основателями теории слоений Эресманом и его учеником Рибом.

Определение 4. Слой L слоения $(M,\mathcal{F})$ коразмерности q называется локально устойчивым в смысле Эресмана, если существует семейство насыщенных окрестностей $\{W_k|k\in\mathbb{N}\}$, обладающее следующими свойствами:

1) существует такая субмерсия $f_1:W_1\to L$, что для любого $k\in\mathbb{N}$ тройка (W_k,f_k,L), где $f_k=f_1|_{W_k}$ – локально тривиальное расслоение со стандартным слоем q-мерным диском D^q, причем слои этого расслоения трансверсальны слоям слоения $(W_k,\mathcal{F}_{Wk})$;

2) для произвольной точки $x\in L$ множество $\{W_k f_1^{-1}(x)|k\in\mathbb{N}\}$ – база топологии слоя $f_1^{-1}(x)$ в точке x.

Согласно известной теореме Риба, любой компактный слой слоения с конечной группой голономии локально устойчив. Подчеркнем, что в следующей теореме слои слоения $(M,\mathcal{F})$, вообще говоря, не компактны.

Теорема 5. Пусть $(M,\mathcal{F})=Sus(T,\ B,\ \rho)$ – обобщенное надстроечное слоение с компактным трансверсальным многообразием T. Тогда для локальной устойчивости слоения $(M,\mathcal{F})$ необходимо и достаточно, чтобы каждый слой этого слоения был замкнутым подмножеством многообразия M.

Доказательство. Предположим, что каждый слой обобщенного надстроечного слоения $(M,\mathcal{F})=Sus(T,B,\rho)$ локально устойчив в смысле

Эресмана. Из определения 4 вытекает, что каждый слой этого слоения является собственным, т.е. вложенным подмногообразием в M. Согласно предложению 1, это эквивалентно дискретности каждой орбиты глобальной группы голономии Ψ. Покажем, что каждая орбита группы Ψ замкнута. Предположим, что существует незамкнутая орбита $\Psi{\cdot}t$, где $t \in T$. Тогда найдется последовательность $\psi_n \in \Psi$, такая, что $\psi_n(t) \to t_0 \in T$ при $n \to \infty$.

Пусть, как и выше, $f_0 : \hat{B} \times T \to M = \hat{B} \times T / G$ – фактор-отображение. При этом слоение $(M,\mathcal{F})$ накрыто тривиальным расслоением $r : \hat{B} \times T \to T$. Заметим, что локальная устойчивость слоя $L = L(x_0)$, проходящего через x_0, где $x_0 \in f_0\left(\hat{B} \times \{t_0\}\right)$, влечет существование счетного семейства вложенных окрестностей U_m, $U_{m+1} \subset U_m$, $m \in \mathbb{N}$, образующих базу топологии T в точке t_0, инвариантных относительно группы Ψ. Так как $\psi_n(t) \to t_0 \in T$ при $n \to \infty$, то существует такое натуральное число n_0, что орбита $\Psi{\cdot}t$ пересекает все окрестности U_k при $k > n_0$. Получаем противоречие с инвариантностью U_m относительно группы Ψ. Таким образом, каждая орбита группы Ψ дискретна и замкнута, следовательно, все слои слоения $(M,\mathcal{F})$ замкнуты.

Обратно, предположим, что слоение $(M,\mathcal{F}) = Sus(T, B, \rho)$ имеет компактное трансверсальное многообразие T и все его слои – замкнутые подмножества в M. Тогда, согласно предложению 1, все орбиты глобальной группы голономии Ψ замкнутые. Как известно, любой замкнутый слой слоения является собственным, поэтому каждая орбита группы Ψ дискретна. Так как замкнутое дискретное подмножество компактного многообразия T конечно, то все орбиты группы Ψ конечны. Согласно теореме Эпштейна ([10], теорема 7.3), группа гомеоморфизмов многообразия, все орбиты которой конечны, является конечной. Поэтому группа Ψ конечна. Пусть $\Psi = \{\psi_1,\dots,\psi_m\}$. Следовательно, на T существует риманова метрика, инвариантная относительно группы Ψ.

Действительно, пусть g_T – произвольная риманова метрика на T. Тогда $\widetilde{g} = \sum_{k=1}^{m} \psi_k^* g_T$ – риманова метрика на T, инвариантная относительно группы Ψ, т.к. для любого элемента $\psi_i \in \Psi$ имеет место цепочка равенств $\psi_i^* \widetilde{g} = \sum_{k=1}^{m} (\psi_i \circ \psi_k)^* g_T = \sum_{k=1}^{m} \psi_k^* g_T = \widetilde{g}$. Таким образом, Ψ – группа изометрий риманова многообразия $(T, \widetilde{g})$. Это означает, что слоение $(M,\mathcal{F})$ – риманово. Так как оно имеет связность Эресмана и все его слои замкнутые, то все его слои локально устойчивы (см., например, теорему 1 в [11], а также [12]).

Теорема 6. Если обобщенное надстроечное слоение $(M,\mathcal{F}) = Sus(T, B, \rho)$ коразмерности q с компактным трансверсальным многообразием локально устойчиво, то:

1) его глобальная группа голономии $\Psi = \rho(\pi_1(B,b))$ конечна;

2) пространства слоев $M/\mathcal{F}$ *и* $M/\mathcal{F}^t$ слоений $(M,\mathcal{F})$ и $(M,\mathcal{F}^t)$ – очень хорошие орбифолды;

3) на многообразии M существует такая полная риманова метрика g, что (M,g) – приводимое риманово многообразие с параллельными слоениями $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^t$.

Доказательство. Пусть $(M,\mathcal{F}) = Sus(T, B, \rho)$ – локально устойчивое обобщенное надстроечное слоение. Тогда из доказательства теоремы 5 вытекает конечность его глобальной группы голономии Ψ, т.е. выполняется 1).

При доказательстве теоремы 1 отмечено, что пространство слоев $M/\mathcal{F}$ можно отождествить с пространством орбит T/Ψ, поэтому $M/\mathcal{F}$ – очень хороший орбифолд. Из теоремы 3 вытекает, что двуслоение $(M,\mathcal{F},\mathcal{F}^t)$ изоморфно в категории $\mathcal{B}if$ некоторому каноническому $((N_1 \times N_2)/\Psi, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Так как пространство слоев $M/\mathcal{F}^t$ можно отождествить с пространством орбит N_1/Ψ_1, где $\Psi_1 \cong \Psi$ – конечная группа, то $M/\mathcal{F}^t$ – очень хороший орбифолд. Таким образом, имеет место утверждение 2).

Из доказательства теоремы 5 вытекает, что слоение $(M,\mathcal{F})$ – риманово и на M существует трансверсально проектируемая относительно этого слоения риманова метрика g_M, в которой слоения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^t$ ортогональны. Так как каждый слой слоения $(M,\mathcal{F}^t)$ накрыт многообразием T, то он компактен. Поэтому g_M индуцирует на каждом слое слоения $(M,\mathcal{F}^t)$ полную риманову метрику. Пусть g – полная риманова метрика на M, построенная при доказательстве теоремы 4, относительно которой $(M,\mathcal{F})$ – вполне геодезическое слоение. Тогда равенство

$$\hat{g}(X,Y) := g(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}) + g_M(X_{\mathcal{F}^t}, Y_{\mathcal{F}^t}),$$

где $X = X_{\mathcal{F}} + X_{\mathcal{F}^t}$, $Y = Y_{\mathcal{F}} + Y_{\mathcal{F}^t}$, определяет такую риманову метрику на M, что оба слоения $\mathcal{F}$

и $\mathcal{F}^t$ – римановы и вполне геодезические одновременно. Это означает, что указанные слоения параллельны в $(M,\hat{g})$, а риманово многообразие $(M,\hat{g})$ является приводимым. Так же, как при доказательстве теоремы 4, проверяется полнота метрики $\hat{g}$.

8. Пример

Пусть $N_1 = N_2 = \mathbb{T}^2$ – двумерный тор. На произведении $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ определим действие группы Ψ, порожденной ψ и $\widetilde{\psi}$, следующим образом. Произвольную точку произведения $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ запишем в виде $(e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\delta}, e^{i\gamma})$, где $\alpha,\beta,\delta,\gamma \in \mathbb{R}^1$. Положим по определению

$$\psi\left(\left(e^{i\alpha},e^{i\beta},e^{i\delta},e^{i\gamma}\right)\right)=\left(e^{-i\alpha},e^{i\beta},e^{i(\delta+\pi)},e^{i\gamma}\right),$$
$$\widetilde{\psi}\left(\left(e^{i\alpha},e^{i\beta},e^{i\delta},e^{i\gamma}\right)\right)=\left(e^{i\alpha},e^{i(\beta+\pi)},e^{i\delta},e^{-i\gamma}\right).$$

Тогда группа Ψ изоморфна группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Группа Ψ сохраняет тривиальные слоения произведения $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ и действует свободно. На каждом сомножителе $\mathbb{T}^2$ произведения $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ индуцируются группы диффеоморфизмов Ψ_1 и Ψ_2, причем канонические эпиморфизмы q_i: $\Psi \to \Psi_i$, $i = 1,2$, являются изоморфизмами групп. Поэтому на компактном 4-мерном многообразии $M = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)/\Psi$ определено каноническое двуслоение $(M,\mathcal{F},\mathcal{F}^t)$. Так как группы Ψ_1 и Ψ_2 конечны и действуют не свободно, то пространста слоёв $M/\mathcal{F}_1 \cong \mathbb{T}^2/\Psi_2$ и $M/\mathcal{F}_2 \cong \mathbb{T}^2/\Psi_1$ – очень хорошие орбифолды, диффеоморфные кольцу $[0,1]\times S^1$ с множеством орбифолдных точек $\{0\}\times S^1 \cup \{1\}\times S^1$.

Таким образом, каждое из слоений $(M,\mathcal{F}_1)$ и $(M,\mathcal{F}_2)$ – обобщенное надстроечное.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-01-00457-а, и ФЦП «Кадры», проект № 14.B3721.0361.

Список литературы

1. Zhukova N.I., Chubarov G.V. Aspects of the Qualitative Theory of Suspended foliations // Journal of Difference Equations and Applicatons. 2003. V. 9. № 3/4. P. 393–405.
2. Жукова Н.И., Чубаров Г.В. Критерий структурной устойчивости надстроечных слоений // Вестник ННГУ. 2011. № 1. С. 153–161.
3. Adem A., Leida J., Ruan Y. Orbifolds and stringy topology. Cambridge Tracts in Mathematics, 171. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
4. Blumenthal R.A., Hebda J.J. Ehresmann connection for foliations // Indiana Univ. Math. J. 1984. V. 33. P. 597–611.
5. Жукова Н.И. О некоторых классах почти произведений. Дисс... канд. физ.-мат. наук. Горький, 1976.
6. Шапиро Я.Л. О приводимых римановых многообразиях в целом // Изв. вузов. Матем. 1972. № 6. С. 78–85.
7. Kashiwabara S. The decomposition of differentiable manifold and its applications // Tohoku Math. I. 1959. V. 11. № 1. P. 43–53.
8. Yoo Hwal Lan. Existence of complete metrics of Riemannian foliation // Math. J. Toyama Univ. 1992. V. 15. P. 35–38.
9. Blumenthal R.A., Hebda J.J. De Rham decomposition theorems for foliated manifolds // Ann. Inst. Fourier. 1983. V. 33. № 2. P. 183–198.
10. Epstein D.B.A. Foliations with all leaves compact // Ann. Inst. Fourier. 1976. V. 26. № 1. P. 265–282.
11. Жукова Н.И. Глобальные аттракторы полных конформных слоений // Матем. сб. 2012. Т. 203. № 3. С. 79–106.
12. Zhukova N.I. On the stability of leaves of Riemannian foliations // Annals of Global Analysis and Geometry. 1987. V. 5. № 3. P. 261–271.

GENERALIZED SUSPENDED FOLIATIONS

N.I. Zhukova, G.V. Chubarov

The notion of generalized suspended foliations is introduced. An interpretation of holonomy groups of these foliations is given. Their relation to integrable Ehresmann connections is found. The generalized suspended foliation is characterized by the existence of a special complete Riemannian metric with respect to which the foliation is totally geodesic. A criterion of stability of leaves in the sense of Ehresmann and Reeb is proved.

Keywords: generalized suspended foliation, orbifold, locally stable leaf, holonomy group.