ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

с элементами аналитической геометрии

Учебное пособие

Второе издание, дополненное

Издательский дом ГУ ВШЭ
Москва 2007

УДК 512.64/075
ББК 22.143
Б91

*Рекомендовано редакционно-издательским советом
Государственного университета — Высшей школы экономики*

Р е ц е н з е н т
кандидат экономических наук, профессор *Э.Б. Ершов*

Бурмистрова, Е. Б.
Б91 Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: учеб. пособие / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов ; Гос. ун-т — Высшая школа экономики. — 2-е изд., доп. — М. : Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. — 220 с. — 2000 экз. — ISBN 978-5-7598-0308-9 (в обл.).

В учебном пособии в сжатой форме изложены основы линейной алгебры. Оно может быть использовано при различной конфигурации соответствующего учебного курса, в том числе краткого курса “Высшая математика”. Помимо иллюстрирующих основной материал примеров, пособие содержит варианты экзаменационных задач.

Для студентов и преподавателей математических дисциплин экономических и технических учебных заведений.

УДК 512.64(075)
ББК 22.143

ISBN 978-5-7598-0308-9

Оглавление

Предисловие

Линейная алгебра — это теория алгебраических структур частного вида, а именно линейных пространств и линейных отображений.

Интенсивное развитие этой теории происходило в XIX в. и связано с именами Г. Крамера (1704—1752), Ж.-Л. Лагранжа (1736—1813), К.-Ф. Гаусса (1777—1855), Г. Грассмана (1809—1877), Д. Сильвестра (1814—1898), А. Кэли (1821—1865), У. Гамильтона (1805—1865), Дж. Буля (1815—1864), К. Жордана (1832—1922). К началу XX в. создание аппарата линейной алгебры, по существу, завершено.

В XX в. сфера применения линейной алгебры существенно расширилась. Линейная алгебра бесконечномерных линейных пространств превратилась в современной физике в аппарат, используемый для формулировки фундаментальных законов природы. Линейная алгебра служит основой множества методов вычислительной математики, являясь в этом смысле чисто прикладной наукой. Конечно, в кратком пособии, предназначенном для ознакомления с предметом, невозможно сколько-нибудь подробно остановиться, например, на теории вычислительных аспектов линейной алгебры.

Это пособие написано на основе лекций по линейной алгебре, которые авторы читали в течение ряда лет для студентов различных специальностей Государственного университета — Высшей школы экономики (ГУ ВШЭ) и Московского автомобильно-дорожного института (МАДИ). Читали в различных условиях: как отдельный курс и в составе курса “Высшая математика”, а также как курс линейной алгебры, объединенный с аналитической геометрией. Менялись объем и состав курса, предварительная подготовка слушателей.

Минимальный курс линейной алгебры соответствует первым шести главам пособия. Остальные главы составляют его возможное расширение. В полном объеме настоящее пособие соответствует программе курса линейной алгебры для студентов ГУ ВШЭ, обучающихся по специальности “Экономика”. Оно не может заменить существующие полные руководства по линейной алгебре, созданные, как правило, на основе курсов для студентов физико-математических специальностей университетов и педагогических вузов, и не претендует на это.

Одна из глав пособия называется “Элементы аналитической геометрии”. Ее включение в книгу, посвященную в основном линейной алгебре, объясняется прежде всего тем, что не во всех вузах есть отдельный курс аналитической геометрии, а наиболее близким ей по духу и содержанию среди преподаваемых дисциплин, бесспорно, является курс линейной алгебры. Кроме того, реализация основных моделей линейной алгебры в случаях прямой, плоскости и обычного трехмерного пространства служит естественной иллюстрацией общих конструкций. Большая часть материала этой главы должна быть хорошо знакома читателям, изучавшим школьную геометрию по учебнику А.В. Погорелова. Здесь кроме векторной алгебры речь идет о линейных объектах — прямых и плоскостях. Исследование кривых второго порядка средствами линейной алгебры отнесено в одно из дополнений к основным двенадцати главам. Все сведения о кривых второго порядка приводятся без доказательства.

В первых двух главах пособия, в которых приводятся начальные сведения о системах линейных уравнений и определителях матриц, мы придерживаемся подхода Л.А. Скорнякова [8][1]. Отличительная черта этого подхода — центральная роль элементарных преобразований матриц. В то же время мы не поддерживаем принятую в пособии [8] установку на изложение учения о системах линейных уравнений без использования понятия линейной зависимости.

Отметим одно из ограничений материала пособия, имеющее принципиальное значение, — в нем даже не упоминаются комплексные числа. Соответственно нет речи о жордановой форме матриц. Необходимые для теории дифференциальных уравнений сведения о комплексных числах зачастую приводят в рамках соответствующего курса (в ГУ ВШЭ это “Дифференциальные и разностные уравнения”).

[1]Одному из авторов, С.Г. Лобанову, такой подход знаком со студенческих лет по лекциям Л.А. Скорнякова.

При подготовке нового издания были учтены некоторые пожелания со стороны других преподаваемых в ГУ ВШЭ дисциплин. В частности, в интересах курса “Методы оптимальных решений” кроме критерия знакоопределенности квадратичных форм теперь рассматривается критерий полуопределенности квадратичных форм. Новое добавление “Неотрицательные матрицы” содержит математические основы теории балансовых моделей Леонтьева, используемых в различных разделах экономической теории.

Материал основных глав пособия расширен незначительно, причем не в виде новых сведений, поскольку времени на изучение курса больше не стало, а за счет дополнительных разъяснений прежнего материала, преимущественно в виде примеров. Новый раздел последней главы содержит правила построения изображений пространственных фигур. Для обоснования этих правил приводится теорема Польке — Шварца.

Более двадцати задач пополнили список экзаменационных задач.

Глава 1

Преобразования матриц и системы линейных уравнений

1.1. Схема метода Гаусса

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ множество всех строк из n действительных чисел, т.е. $\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \}$. В частности, при $n = 1$ получим $\mathbb{R}^1$ — множество всех вещественных чисел, при $n = 2$ получим $\mathbb{R}^2$ — множество всех пар вещественных чисел.

Строки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ считаются *равными*, если $a_i = b_i$ для всех i, т.е. равны все их *компоненты*.

Определим на множестве $\mathbb{R}^n$ операции сложения строк и умножения строки на действительное число по следующим правилам:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Строка, состоящая из одних нулей, называется *нулевой* и обозначается через 0. Легко проверяется справедливость следующих свойств операций над строками:

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $a + 0 = a$;
4) уравнение $a + x = 0$ разрешимо для любого a;

5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
6) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
7) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
8) $1a = a$.

Здесь латинские буквы означают произвольные строки из $\mathbb{R}^n$, греческие — произвольные вещественные числа. Знак “+” в левой части равенства 6 означает сложение чисел, а в правой части — сложение строк. В равенстве 7 в выражении $(\lambda\mu)$ — обычное умножение чисел.

Докажем, например, равенство $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$. С этой целью заметим, что i-ми компонентами строк, стоящих в левой и правой частях этого равенства, являются $\lambda(a_i + b_i)$ и $\lambda a_i + \lambda b_i$ соответственно, и их совпадение вытекает из справедливости закона дистрибутивности для действительных чисел.

Матрицей размера $m \times n$ называется таблица, составленная из m записанных одна под другой n-мерных строк

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частности, при $m = 1$ получается матрица-строка, при $n = 1$ — матрица-столбец.

В случае $m = n$ матрица называется *квадратной матрицей порядка* n. Матрица, состоящая из нулевых строк, называется *нулевой* и обозначается через O, а матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной*. Подчеркнем, что для каждого числа n существует своя единичная матрица, а для каждого размера $m \times n$ — своя нулевая матрица. Две матрицы считаются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и их элементы, стоящие на соответствующих местах, совпадают.

В дальнейшем элементы матрицы, обозначенной некоторой большой буквой (скажем, A), будем, как правило, без специальных оговорок обозначать соответствующей малой буквой с индексами (в нашем случае a_{ij}), обозначающими номер строки и столбца соответственно. Строку матрицы с номером i будем часто обозначать через a_i, а столбец с номером j — через $A^{(j)}$.

Любая система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

однозначно определяется матрицей

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

которая называется *расширенной матрицей системы.* Матрица, стоящая левее вертикальной черты, называется *матрицей системы.*

Строка $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ считается *решением* выписанной выше системы, если для всех i справедливы числовые равенства $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Решить систему — значит определить множество всех ее решений. Если множество решений пусто, то система уравнений называется *несовместной.*

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если всякое решение первой системы является решением второй системы, и наоборот. Поэтому вместо данной системы можно решать ей эквивалентную.

Элементарными преобразованиями будем называть следующие преобразования матриц.

I. Перемена местами двух строк матрицы.
II. Прибавление к какой-либо строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое число.
III. Умножение некоторой строки на отличное от нуля число.

С помощью элементарных преобразований, как будет показано далее, могут быть решены многие задачи линейной алгебры. Укажем прежде всего на знаменитый метод решения произвольных систем линейных уравнений — метод Гаусса.

Схема метода Гаусса

1.2. Обоснование метода Гаусса

Доказательство многих теорем курса основано на применении метода (принципа) *математической индукции.* Приведем схему этого метода.

Пусть $\mathbb{N}$ — *множество всех натуральных чисел* $1, 2, 3, \dots$*;* M — *некоторое его подмножество, о котором известно, что* $1 \in M$ *и если* $m \in M$*, то* $m + 1 \in M$*. Тогда* $M = \mathbb{N}$.

При некоторых подходах к построению арифметики метод математической индукции является теоремой, при других подходах это — аксиома. Мы не будем приближаться к основаниям арифметики, выяснять, в силу чего истинна схема метода математической индукции.

Пусть m — натуральное число, входящее в формулировку некоторой теоремы. Если теорема верна при $m = 1$ и из справедливости теоремы для некоторого m всегда следует ее справедливость для $(m+1)$, то теорема верна для всех натуральных чисел. Именно в такой форме, как правило, применяется метод математической индукции. Здесь $M = \{m \in \mathbb{N} : \text{для } m \text{ теорема верна}\}$.

Теорема 1 (об обратимости элементарных преобразований). *Если матрица* A' *получается из матрицы* A *при помощи конечного числа элементарных преобразований, то и наоборот, матрицу* A

можно получить из матрицы A' при помощи конечного числа элементарных преобразований.

Доказательство. Пусть t — число элементарных преобразований, примененных к A при переходе к A'. Проведем доказательство индукцией по t.

Пусть $t = 1$, т.е. проделано только одно преобразование.

Если это преобразование I типа, т.е. переставлены две строки, то, переставляя эти строки еще раз, придем от A' к A.

Если это преобразование II типа, то

$$(i\text{-я строка } A') = (i\text{-я строка } A) + \lambda(j\text{-я строка } A),$$

и тогда

$$(i\text{-я строка } A) = (i\text{-я строка } A') + (-\lambda)(j\text{-я строка } A').$$

Если это преобразование III типа, то умножением на обратное число можно перейти от A' к A.

Пусть теперь известно, что теорема справедлива для некоторого $t \geq 1$, а от A к A' можно перейти за $(t+1)$ элементарных преобразований.

Обозначим через C матрицу, получаемую из A после первого преобразования. В силу индуктивного предположения, используя элементарные преобразования, можно перейти от A' к C, а как установлено в начале доказательства, точно так же можно перейти и от C к A.

$$A \xleftrightarrow[\text{случай } t=1]{\text{первое преобразование}} C \xleftrightarrow[\text{по предположению индукции}]{\text{последние } t \text{ преобразований}} A'$$

Таким образом, применение элементарных преобразований позволяет перейти от A' к A, что завершает доказательство. $\square$

Теорема 2 (об эквивалентности систем линейных уравнений). *Пусть $\bar{A}$ и $\bar{A}'$ — расширенные матрицы систем линейных уравнений. Если матрицу $\bar{A}'$ можно получить из матрицы $\bar{A}$ при помощи конечного числа элементарных преобразований, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что всякое решение системы с расширенной матрицей $\bar{A}$ является решением системы с расширенной матрицей $\bar{A}'$, так как в силу теоремы 1 будет верно и обратное.

Пусть t — число элементарных преобразований, примененных к $\bar{A}$ при переходе к $\bar{A}'$.

При $t = 1$, если это преобразование I типа, то в соответствующей системе только поменяются местами два уравнения. Конечно, старые решения по-прежнему будут им удовлетворять. При элементарных преобразованиях II типа к i-й строке прибавляется j-я строка, умноженная на λ. Следовательно, i-я строка матрицы $\bar{A}'$ имеет вид $(a_{i1} + \lambda a_{j1}, \ldots, a_{in} + \lambda a_{jn}, b_i + \lambda b_j)$. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — решение системы с расширенной матрицей $\bar{A}$. Будет ли оно решением системы с расширенной матрицей $\bar{A}'$? Сомнение может вызвать только i-е уравнение этой системы. Но $(a_{i1} + \lambda a_{j1})\alpha_1 + \cdots + (a_{in} + \lambda a_{jn})\alpha_n = (a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n) + \lambda(a_{j1}\alpha_1 + \cdots + a_{jn}\alpha_n) = b_i + \lambda b_j$.

Случай преобразования III типа рассматривается аналогично.

Завершение доказательства теоремы 2 можно провести, как и при доказательстве теоремы 1. $\square$

1.3. Приведение матрицы к ступенчатому виду

Упрощенная матрица в схеме метода Гаусса — это матрица, многие элементы которой равны нулю.

Ступенчатой называется матрица, обладающая следующими свойствами:

1) если i-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая;
2) если первые ненулевые элементы i-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами k_i и k_{i+1} соответственно, то $k_i < k_{i+1}$.

Наглядно эти свойства означают, что ниже нулевой строки могут располагаться лишь нулевые строки, а все элементы, располагающиеся влево и вниз от первого ненулевого элемента какой-либо строки, являются нулями. Происхождение названия нетрудно объяснить, рассматривая, например, ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 2 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{array}{l} k_1 = 3 \\ k_2 = 5 \\ k_3 = 6 \\ k_4 = 7 \end{array}.$$

Теорема 3 (о приведении матрицы к ступенчатому виду). *Всякую матрицу конечным числом элементарных преобразований I и II типа можно превратить в ступенчатую матрицу.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу строк матрицы, т.е. здесь m из принципа математической индукции — число строк матрицы.

Если имеется всего одна строка ($m = 1$), то матрица уже ступенчатая, ибо оба условия, входящие в определение ступенчатой матрицы, выполнены тривиальным образом ввиду отсутствия второй строки.

Пусть теперь известно, что теорема верна для матриц из m строк, матрица A содержит $(m+1)$ строку.

Если $A = O$, то она ступенчатая. Если A ненулевая, то в ней есть ненулевые элементы. Выберем среди них элемент, располагающийся в столбце с наименьшим номером, скажем, с номером k_1. Применив преобразование I типа, перенесем строку с этим элементом на первое место. Тогда матрица примет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{2k_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{m+1,k_1} & \dots \end{pmatrix},$$

причем $b_{1k_1} \neq 0$. Теперь будем применять преобразования II типа: ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-b_{2k_1}/b_{1k_1}$, к третьей строке — первую, умноженную на $-b_{3k_1}/b_{1k_1}$, и т.д. После применения m таких элементарных преобразований добьемся того, что в k_1-м столбце всюду, кроме первой строки, будут нули:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \cdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \boxed{D} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Отбросим первую строку. Оставшаяся матрица имеет m строк. По индуктивному предположению ее можно привести к ступенчатому виду $G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \boxed{S} \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$. Но осуществляя элементарные преобразования уменьшенной матрицы, можно считать, что мы делаем элементарные преобразования матрицы C, не использующие первой строки. Таким образом, мы получим матрицу $H = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \cdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \boxed{S} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}$, которая, как нетрудно проверить, является ступенчатой матрицей. □

1.4. Решение систем линейных уравнений со ступенчатой расширенной матрицей системы

Из теорем 2, 3 следует, что для нахождения решений любой системы линейных уравнений достаточно уметь находить решения систем линейных уравнений со ступенчатой матрицей системы.

Теорема 4 (о системах уравнений со ступенчатой расширенной матрицей системы). *Пусть r — число ненулевых строк, а $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ — номера первых ненулевых элементов строк расширенной матрицы $\bar{A}$ системы линейных уравнений относительно n неизвестных, приведенной к ступенчатому виду. Тогда:*

1) *если $k_r = n + 1$, то система решений не имеет;*
2) *если $k_r \neq n + 1$, то:*
   а) *если $r = n$, то система имеет единственное решение,*
   б) *если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений. Неизвестные $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ (главные неизвестные) однозначно выражаются через остальные (свободные) неизвестные, которые могут принимать произвольные значения.*

Доказательство. В случае $k_r = n+1$ система содержит уравнение $0x_1 + \dots + 0x_n = b_r$, где $b_r \neq 0$, которое не имеет решений.

Если $k_r \leq n,\ r = n$, то $k_1 = 1, k_2 = 2, \dots, k_n = n$ и система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

причем $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ отличны от нуля. Поскольку $a_{nn} \neq 0$, из последнего уравнения однозначно определяется x_n. После этого предпоследнее уравнение позволяет однозначно определить x_{n-1} и т.д. Таким образом, в данном случае система имеет единственное решение.

Предположим теперь, что есть свободные неизвестные. Обозначим через L_i сумму свободных неизвестных, умноженных на стоящие перед ними коэффициенты i-го уравнения, и, перенося свободные переменные в правую часть, придем к системе

$$\begin{cases} a_{1,k_1}x_{k_1} + a_{1,k_2}x_{k_2} + \dots + a_{1,k_r}x_{k_r} = b_1 - L_1 \\ \qquad a_{2,k_2}x_{k_2} + \dots + a_{2,k_r}x_{k_r} = b_2 - L_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{r,k_r}x_{k_r} = b_r - L_r \end{cases},$$

где коэффициенты $a_{1,k_1}, a_{2,k_2}, \dots, a_{r,k_r}$ отличны от нуля.

Как и выше, мы можем последовательно определить значения неизвестных $x_{k_r}, \dots, x_{k_1}$, если придадим свободным неизвестным какие-либо определенные значения. При этом главные неизвестные определяются однозначно. Придавая свободным неизвестным всевозможные значения, мы найдем все решения данной системы. $\square$

В общем случае, когда расширенная матрица системы не обязательно ступенчатая, будем говорить, что некоторые различные неизвестные $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ из множества всех неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ *можно объявить главными*, если при любом задании остальных неизвестных значения этих неизвестных определяются однозначно. Про эти остальные неизвестные будем говорить, что их *можно объявить свободными*.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -2\,. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями приведем ее к ступенчатому виду. Первую ступеньку получим в результате двух преобразований II типа: $\bar{a}_2' = \bar{a}_2 + \left(-\frac{3}{2}\right)\bar{a}_1$, $\bar{a}_3' = \bar{a}_3 + 2\bar{a}_1$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ -4 & 3 & 7 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

Следующая ступенька образуется в результате преобразования $\bar{a}_3'' = \bar{a}_3' + \left(-\frac{2}{11}\right)\bar{a}_2'$. После этого матрица станет ступенчатой и решение соответствующей системы линейных уравнений легко найти, если рассматривать уравнения снизу вверх.

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{56}{11} & \frac{56}{11} \end{array}\right) \to \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ \dfrac{11}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = 5 \\ \dfrac{56}{11}x_3 = \dfrac{56}{11} \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1\,. \end{cases}$$

Если в исходной системе оставить только два первых уравнения

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11\,, \end{cases}$$

то эквивалентная ступенчатая система будет иметь вид

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ \dfrac{11}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = 5\,. \end{cases}$$

Здесь x_1, x_2 — главные неизвестные, x_3 — свободное неизвестное, а общее решение, т.е. выражение главных неизвестных через свободные,

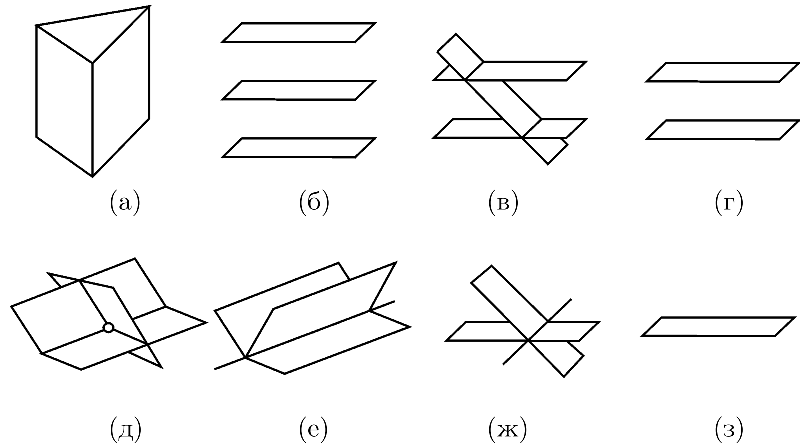
$$x_1 = \frac{27}{11} + \frac{6}{11}x_3$$
$$x_2 = \frac{10}{11} + \frac{1}{11}x_3\,.$$

Наконец, система, состоящая из одного первого уравнения, — ступенчатая. Главным неизвестным можно объявить, например, x_1, свободными неизвестными — x_2, x_3. При этом общее решение будет иметь вид

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$

1.5. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений в случае двух или трех неизвестных

Если каждое решение линейного уравнения относительно двух неизвестных $ax + by + c = 0$, в котором коэффициенты при неизвестных не равны нулю одновременно, изображать точкой плоскости с координатами (x, y), то множество всех таких точек образует некоторую прямую (см. с. 115 настоящего пособия). Поэтому множеству решений системы из двух таких уравнений соответствует множество точек пересечения двух прямых. Система несовместна, если прямые параллельны; имеет единственное решение, если прямые пересекаются; имеет бесконечное множество решений, если прямые совпадают.



Множество точек пространства, соответствующих решениям линейного уравнения относительно трех неизвестных $ax+by+cz+d = 0$, в

котором коэффициенты при неизвестных не равны нулю одновременно, является некоторой плоскостью (см. с. 122). Система из трех таких уравнений определяет множество точек пересечения этих плоскостей. Возможные при этом случаи изображены на предыдущем рисунке.

Во всех случаях рассматриваются три плоскости, только в случаях (г) и (ж) две из трех плоскостей совпадают, в случае (з) совпадают все три плоскости.

1.6. Ненулевые решения однородной системы уравнений

Система уравнений называется *однородной*, если все ее правые части равны нулю. Однородная система всегда имеет решение, например, нулевую строку. Поэтому интересно выяснить, когда имеются и ненулевые решения.

Теорема 5 (о ненулевых решениях однородной системы уравнений). *Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то существуют ненулевые решения.*

Доказательство. Приведем данную однородную систему к ступенчатому виду. Разумеется, она останется однородной. Ясно, что число главных неизвестных не может превысить числа строк. Следовательно, существуют свободные неизвестные, что обеспечивает существование ненулевых решений. □

Глава 2

Определитель

2.1. Определитель и элементарные преобразования

Отображение F множества всех квадратных матриц порядка n в множество действительных чисел называется *определителем*, если оно удовлетворяет следующим условиям (определяющие свойства определителя):

1) если матрица A имеет две одинаковые строки, то определитель равен нулю: $F(A) = 0$;

2) если некоторая строка матрицы представлена в виде суммы двух строк, то определитель этой матрицы равен сумме определителей двух матриц, полученных из данной заменой строки, являющейся суммой, ее слагаемыми:

$$F\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i' + a_i'' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i'' \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix};$$

3) общий множитель элементов некоторой строки можно выносить

за знак определителя

$$F\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda F\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix};$$

4) определитель единичной матрицы равен единице

$$F\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Подчеркнем, что вопрос о существовании и единственности определителя пока остается открытым. Однако всякое отображение F, удовлетворяющее условиям 1—4, должно обладать также некоторыми другими свойствами.

Теорема 6 (о свойствах определителя). *Всякое отображение F, удовлетворяющее условиям* 1—4*, должно обладать также следующими свойствами:*

5) *если матрица A содержит нулевую строку, то $F(A) = 0$;*

6) *если от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью одного элементарного преобразования I типа, то $F(B) = -F(A)$;*

7) *если от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью одного элементарного преобразования II типа, то $F(B) = F(A)$;*

8) *если S — ступенчатая матрица порядка n, то*

$$F(S) = s_{11} \cdots s_{nn}{}^{1}.$$

[1] Напомним, что в соответствии с нашим соглашением через s_{ij} обозначается элемент матрицы S, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Доказательство.

5) Учитывая свойство 3 и то, что $(0,0,\dots,0) = 0\cdot(0,0,\dots,0)$, имеем $F(A) = 0\cdot F(A) = 0$.

6) Предположим, что при переходе от A к B переставлены i-я и j-я строки. Рассмотрим вспомогательную матрицу C, в которой в i-й и в j-й строках стоит сумма i-й и j-й строк матрицы A, а остальные те же, что и в матрице A. Тогда по условию 1 для такой матрицы $F(C) = 0$. Воспользовавшись условием 2, напишем

$$0 = F(C) = F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Во вновь полученных матрицах j-е строки представлены в виде суммы двух строк. Можно еще раз воспользоваться условием 2:

$$0 = F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Отсюда с помощью условия 1 получаем $0 = F(A) + F(B)$. Следовательно, $F(A) = -F(B)$.

7) Допустим, что матрица B получена из A прибавлением к i-й строке матрицы A ее j-й строки, умноженной на λ. Используя условия 2 и 3, получаем

$$F(B) = F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = F(A) + \lambda F\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица содержит две одинаковые строки. Значит, по условию 1 последнее слагаемое обращается в нуль, откуда $F(B) = F(A)$.

8) Пусть S — ступенчатая матрица. Если она содержит нулевую строку, то, с одной стороны, $F(S) = 0$ по свойству 5, а с другой стороны, хотя бы одно из чисел $s_{11}, s_{22}, \dots, s_{nn}$ равно нулю, чем и доказывается справедливость свойства 8 в рассматриваемом случае. При отсутствии в матрице S нулевых строк она имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

где $s_{11}, s_{22}, \dots, s_{nn} \neq 0$. Прибавив к первой строке матрицы S ее последнюю строку, умноженную на $-s_{1n}/s_{nn}$, ко второй — последнюю строку, умноженную на $-s_{2n}/s_{nn}$, и т.д., добьемся того, что все элементы последнего столбца, кроме s_{nn}, обратятся в нуль. При этом элементы остальных столбцов останутся без изменения. Далее, прибавив к первой, второй и последующим строкам получившейся матрицы ее предпоследнюю строку, умноженную на подходящие числа, превратим в нули все элементы предпоследнего столбца, кроме $s_{n-1,n-1}$. Аналогично поступая с третьим от конца столбцом и т.д., придем к матрице

$$S' = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Используя свойства 7, 3 и 4, получаем

$$F(S) = F(S') = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn}F(E) = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn}. \quad \square$$

Теорема 7 (о единственности определителя). *Существует не более одной функции, удовлетворяющей условиям* 1—4.

Доказательство. Предположим, что есть две такие функции F и G. Надо доказать, что $F = G$, т.е. установить, что $F(A) = G(A)$ для любой матрицы A. В силу теоремы 3 матрицу A можно привести к ступенчатому виду S конечным числом элементарных преобразований I и II типа. Допустим, что при этом использовано k элементарных преобразований I типа. Ввиду свойств 6, 7, 8

$$F(A) = (-1)^k F(S) = (-1)^k s_{11} s_{22} \cdots s_{nn}.$$

Поскольку те же самые соображения справедливы и для функции G, а матрица A была приведена к ступенчатому виду независимо от функции, то

$$G(A) = (-1)^k G(S) = (-1)^k s_{11} s_{22} \cdots s_{nn},$$

т.е. $F(A) = G(A)$. $\square$

2.2. Построение определителя разложением по столбцу

Теорема 8 (о существовании определителя). *Для всякого натурального числа n существует функция, определенная на множестве квадратных матриц порядка n, принимающая действительные значения и удовлетворяющая условиям* 1—4.

Доказательство. Применим индукцию по n.

При $n = 1$ положим $F((a_{11})) = a_{11}$. Очевидно, что свойства 1—4 в этом случае выполняются.

При $n > 1$ предположим, что для всех меньших порядков матриц теорема справедлива.

Возьмем произвольную матрицу порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу M_{ij}, полученную из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, назовем *подматрицей* матрицы A. В силу индуктивного предположения для каждой из этих подматриц определено число $F(M_{ij})$, которое называется *дополнительным минором* элемента a_{ij}.

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} F(M_{ij})$ назовем *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} в матрице A. Положим

$$F_j(A) = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}$$

(пока можно ожидать, что $F_1, F_2, \dots, F_n$ — различные функции). Теперь зафиксируем j (т.е. номер столбца) и положим $F = F_j$. Убедимся, что функция F удовлетворяет условиям 1—4.

Условие 1. Пусть s-я и t-я строки матрицы A совпадают. Тогда во всех подматрицах M_{rj}, кроме M_{sj} и M_{tj}, встречаются одинаковые строки. Поэтому, учитывая индуктивное предположение, имеем

$$F(A) = a_{sj} A_{sj} + a_{tj} A_{tj} = a_{sj} (-1)^{s+j} F(M_{sj}) + a_{tj} (-1)^{t+j} F(M_{tj}).$$

Допустим для определенности, что $s < t$, тогда t-я строка матрицы A (с выброшенной координатой a_{tj}), равная ее s-й строке (с выброшенной координатой a_{sj}), в матрице M_{sj} располагается на $(t-1)$-м месте. Та же самая строка встречается в матрице M_{tj}, но располагается на s-м месте. Все остальные строки матриц M_{sj} и M_{tj} одни и те же и располагаются в одном и том же порядке

$$M_{sj} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \\ \vdots \\ a_t \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad M_{tj} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы матрицу M_{tj} превратить в матрицу M_{sj}, достаточно передвинуть ее s-ю строку на $(t-1)$-е место, не меняя взаимного расположения остальных строк. Для этого надо $(t-1-s)$ раз менять местами соседние строки матрицы M_{tj}, перемещая каждый раз остатки строки a_s на одно место вниз. В силу свойства 6

$$F(M_{sj}) = (-1)^{t-1-s} F(M_{tj}) \ ,$$

поэтому $F(A) = a_{sj} \left[(-1)^{s+j+t-1-s} F(M_{tj}) + (-1)^{t+j} F(M_{tj}) \right]$. Отсюда

$$F(A) = a_{sj} (-1)^{t+j} \left(-F(M_{tj}) + F(M_{tj}) \right) = 0 \ .$$

Литература

1. **Беклемишев Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
2. **Бескин Н.М.** Изображения пространственных фигур. М.: Наука, 1971.
3. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1981.
4. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.
5. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
6. **Погорелов А.В.** Геометрия. М.: Наука, 1983.
7. **Роджерс Д., Адамс Дж.** Математические основы машинной графики. М.: Машиностроение, 1980.
8. **Скорняков Л.А.** Элементы линейной алгебры: Учеб. пособие. М.: Наука, 1980.

Предметный указатель

Учебное издание

Бурмистрова Елена Борисовна
Лобанов Сергей Григорьевич

Линейная алгебра
с элементами аналитической геометрии

Второе издание, дополненное

Зав. редакцией *О.А. Шестопалова*
Редактор *Е.А. Рязанцева*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Корректор *Е.Е. Андреева*

Оригинал-макет подготовлен С.Г. Лобановым с использованием системы MikTEX и кириллических шрифтов семейства LH

Подписано в печать 26.02.2007. Формат 60 × 88 1/16
Усл. печ. л. 13,34. Уч.-изд. л. 9,46
Тираж 2000 экз. Заказ № . Изд. № 396

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел./факс: (495) 772-95-71