федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Прикладная математика-1»

М.М.Деркач, А.М.Филимонов, Д.А.Филимонов

МЕТОД БЕГУЩИХ ВОЛН

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве методических указаний для
студентов, обучающихся по специальности
«Прикладная математика и информатика»

Москва – 2013

УДК 517.95
Д36

Деркач М.М., Филимонов А.М., Филимонов Д.А. Метод бегущих волн: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Уравнения математической физики». — М.: МИИТ, 2013. — 38 с.

В настоящем выпуске помещены методические указания к решению задач по разделу «Метод бегущих волн» дисциплины «Уравнения математической физики». В первой части настоящих методических указаний метод бегущих волн рассматривается применительно к одномерному волновому уравнению. Во второй части рассматриваются гиперболические системы довольно общего вида, поскольку метод бегущих волн можно с успехом распространить и на гиперболические системы уравнений произвольного порядка с несколькими независимыми переменными. В случае волнового уравнения, решения вида $q(x \pm at)$ описывают все множество решений.В общем случае аналогичные решения называются плоскими волнами. Они, хотя и не охватывают все решения, но, тем не менее, так же представляют значительный интерес. В частности, именно такие решения обычно используются, например, при анализе системы Максвелла. Кроме того, упомянутые решения используются при изучении так называемой дисперсии волн, которой посвящена третья часть настоящих методических указаний.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика».

Содержание

Введение 4

1 Метод бегущих волн для волнового уравнения **4**

1.1 Примеры и задачи для самостоятельного решения 5

1.2 Пример использования метода бегущих волн для нелинейных уравнений с частными производными. 19

1.3 Варианты заданий для самостоятельной работы . 20

2 Метод бегущих волн для уравнений и систем произвольного порядка с несколькими пространственными переменными. **22**

3 Дисперсия волн. **30**

3.1 Примеры. 33

Список литературы 37

Введение

В этом выпуске методических указаний рассматривается методика решения задач для одномерного волнового уравнения, при которой решение получается на основе представления общего решения одномерного волнового уравнения в виде суммы прямой и обратной волн. Таким методом наиболее естественно можно решать задачи, возникающие при изучении колебаний в неограниченных средах. Разбираемые в разделе 1 задачи взяты в основном из известных задачников [1] и [2]. Задачи разделов 2 и 3 являются оригинальными. Теоретический материал по этому разделу можно найти, например, в [3], [4] и [5].

1 Метод бегущих волн для волнового уравнения

Напомним, что общее решение одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1}$$

может быть представлено в виде

$$u(x,t) = q(x+at) + g(x-at), \tag{2}$$

где q и g — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Для однозначного определения этих функций необходимо задавать дополнительные условия, возникающие из физической постановки задачи. Физическая интерпретация как самого уравнения (1), так и дополнительных условий подробно изложена в [4] и [5]; ее рекомендуется повторить перед началом решения задач. Заметим также, что иногда удобно в качестве решений (1) рассматривать и не гладкие функции. Тогда решение (1) следует понимать в обобщенном смысле (см. по этому поводу, например, [6]). Если возникнет необходимость, то мы будем это делать без специальных оговорок. Отметим, наконец, что изложение материала в настоящем выпуске методических указаний не носит замкнутого характера, а предполагает одновременное использование перечисленных учебников.

1.1 Примеры и задачи для самостоятельного решения

Пример 1. Найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0$, $-\infty < x < +\infty$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad u_t(x,0) = \beta(x), \tag{3}$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — некоторые заданные функции. Эта задача называется начальной задачей или задачей Коши.

Решение. Допустим, что $u(x,t)$ — решение поставленной задачи. Тогда оно должно иметь вид (2) при некоторых функциях q и g. Определим q и g так, чтобы выполнялись условия (3)

$$u(x,0) = q(x) + g(x) = \alpha(x) \tag{4}$$

$$u_t(x,0) = aq'(x) - ag'(x) = \beta(x). \tag{5}$$

Интегрируя (5), получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x} u_t(x,0)dx = a\left(q(x) - g(x)\right) = \int\limits_{x_0}^{x} \beta(x)dx + C, \tag{6}$$

где x_0 и C — постоянные.

Тогда из (4) и (6) получаем

$$q(x) = \frac{1}{2}\alpha(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \beta(x)dx + \frac{C}{2} \tag{7}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\alpha(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \beta(x)dx - \frac{C}{2}. \tag{8}$$

Подставляя найденные выражения для функций q и g в (2), получаем выражение

$$u(x,t) = \frac{\alpha(x+at)+\alpha(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \beta(z)dz, \qquad (9)$$

дающее решение поставленной задачи и называемое формулой Д'Аламбера. Заметим, что для удобства использования этой формулы переменную интегрирования в (9) мы обозначили другой буквой. Ясно, что если $\alpha \in C^2\left(\mathbb{R}^1\right)$, $\beta \in C^1\left(\mathbb{R}^1\right)$, то подставив (9) в (1), получим решение уравнения. Если бы $\tilde{u}(x,t)$ было бы другим решением нашей задачи, то, как следует из приведенных рассуждений, оно также бы выражалось формулой (9) и потому совпадало бы с $u(x,t)$. Таким образом, решение поставленной задачи существует, единственно и выражается формулой (9). При этом можно доказать, что если в формуле (9) функции α и β не гладкие, то эта формула также будет давать решение нашей задачи, но уже понимаемое в обобщенном смысле. В дальнейшем мы не раз будем этим пользоваться.

Заметим также, что если начальные данные α и β заданы не на всей оси x, а на луче $x \geqslant 0$ (или $x \leqslant 0$), то по формуле (9) решение $u(x,t)$ однозначно определится начальными данными лишь в области $t \geqslant 0$, $x \leqslant at$ (или $t \leqslant 0$, $x \leqslant -at$).

Пример 2. Найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0$, $-\infty < x < +\infty$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = b\sin x, \quad u_t(x,0) = ab\cos x,$$

где b — некоторая константа, a — константа в уравнении (1).

Решение. Воспользовавшись формулой (9), получаем

$$u(x,t) = \frac{b\sin(x+at) + b\sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} ab\cos z dz =$$

$$= \frac{b}{2}\sin(x+at) + \frac{b}{2}\sin(x-at) + \frac{b}{2}\sin z\Big|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= \frac{b}{2}\sin(x+at) + \frac{b}{2}\sin(x-at) +$$

$$+ \frac{b}{2}\sin(x+at) - \frac{b}{2}\sin(x-at) = b\sin(x+at).$$

Задача 1. Нарисовать графики решения начальной задачи для уравнения (1) при $t = 0;\ 0,25;\ 0,5;\ 0,75;\ 1;\ 1,25;\ a = 1;\ \beta(x) \equiv 0$, а Функция $\alpha(x)$ имеет вид

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ x+1, & -1 < x \leqslant 0, \\ -x+1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться формулой (9).

Задача 2. Нарисовать графики решения начальной задачи для уравнения (1) при $t = 0;\ 0,25;\ 0,5;\ 0,75;\ 1;\ 1,05;\ a = 1;\ \alpha(x) \equiv 0$; функция $\beta(x)$ имеет вид

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x. \end{cases}$$

Указание. Обозначим через $B(x)$ первообразную для $\beta(x)$ такую, что $B(0) = 0$. Тогда ясно, что

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Задача 3. Доказать, что решение $u(x,t)$ начальной задачи в случае, когда начальные функции α и β являются нечетными, удовлетворяет условию $u(0,t) = 0$.

Задача 4. Доказать что решение $u(x,t)$ начальной задачи в случае, когда начальные функции α и β являются четными, удовлетворяет условию $u_x(0,t) = 0$.

Задача 5. Пользуясь результатом задачи 3, найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0, x \geqslant 0$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = xe^{-x} (x \geqslant 0), \quad u_x(x,0) = 0 (x \geqslant 0), \tag{10}$$

$$u(0,t) = 0. \tag{11}$$

Указание. Продолжить начальные условия (10) нечетным образом и воспользоваться формулой (9).

Ответ.

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at)e^{-(x+at)} + \frac{1}{2}(x-at)e^{-(x-at)}, & x \geqslant at, \\ \frac{1}{2}(x+at)e^{-(x+at)} + \frac{1}{2}(x-at)e^{x-at}, & x < at. \end{cases}$$

Задача 6. Нарисовать графики решения $u(x,t)$ смешанной задачи для уравнения (1) при $t = 0;\ 0,25;\ 0,5;\ 0,75;\ 1;\ 1,05;$ $a = 1$; $\beta(x) \equiv 0$, $u(0,t) = 0$; а функция $\alpha(x)$ имеет вид

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2, \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться результатами задачи 3 и нарисовать вспомогательный чертеж на плоскости x, t, проведя через точки $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(0, 2)$ характеристики.

Задача 7. Нарисовать графики решения $u(x, t)$ смешанной задачи для уравнения (1) при $t = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25$; $a = 1$; $\beta(x) \equiv 0$, $u_x(0, t) = 0$, а функция $\alpha(x)$ имеет тот же вид, что и в задаче 8.

Пример 3. Найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0\,(x > 0), \quad , u_t(x, 0) = 0\,(x > 0), \tag{12}$$

$$u(0, t) = b\sin(\omega t) \quad (b = \text{const},\ \omega = \text{const}). \tag{13}$$

Решение. Формула (9) однозначно определяет решение $u(x, t) \equiv 0$ при $t \geqslant 0, x > at$ (см. замечание к задаче 1). Следовательно, остается найти решение нашей задачи в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant at$. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, t) = q(x + at) + g(x - at), \tag{14}$$

где q и g — произвольные функции. Из (14) видно, что функция q постоянна на линиях $x+at = \text{const}$, а g — постоянна на линиях $x - at = \text{const}$. Введем новые независимые переменные ξ и η по формулам

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at.$$

Поскольку в области $t \geqslant 0$, $x > at$ наше решение $u(x, t) \equiv 0$, то в этой области

$$u(x, t) = q(x + at) + g(x - at) = q(\xi) + g(\eta) \equiv 0.$$

Значит

$$q(\xi) \equiv -g(\eta).$$

Но равенство в области функций двух независимых переменных возможно лишь в случае, когда каждая из них есть константа:

$$q(\xi) \equiv C, \quad g(\eta) \equiv -C \quad (C = \mathrm{const}). \tag{15}$$

Итак, в области $t \geqslant 0$, $x > at$, функция $q \equiv C$. Но на линиях $x + at = \mathrm{const}$ функция $q(x + at)$ постоянна (рекомендуется сделать чертеж в плоскости x, t). Тогда и в области $0 \leqslant x \leqslant at$ функция $q(x+at) \equiv C$, так как каждая из линий $x+at = \mathrm{const}$, проходящая через области $0 \leqslant x \leqslant at$, проходит и через область $x \geqslant at$. Из (15) следует также, что в области $x > at$ функция $g \equiv -C$. На линиях $x-at = \mathrm{const}$ функция $g(x-at)$ постоянна, но те из линий вида $x - at = \mathrm{const}$, которые проходят через область $x > at$, не попадают в область $0 \leqslant x \leqslant at$. Поэтому мы пока ничего не можем сказать о функции g в области $0 \leqslant x \leqslant at$. Итак, в области $0 \leqslant x \leqslant at$ решение нашей задачи имеет вид

$$u(x, t) = C + g(x - at). \tag{16}$$

Кроме того, должно выполняться условие (13). Подставим $x = 0$ в (16) и воспользуемся (13)

$$c + g(x - at) = b \sin \omega t \, (x = 0). \tag{17}$$

Обозначая $z = -at$, из (17) получаем

$$g(z) = b \sin \left(-\frac{\omega}{a} z \right) - C$$

поэтому

$$g(x - at) = -b \sin \left(\frac{\omega}{a} (x - at) \right) - C,$$

так что

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > at, \\ b\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{a}x\right), & 0 \leqslant x \leqslant at. \end{cases} \tag{18}$$

Замечание. Построенное решение (18) является всюду непрерывным, но не дифференцируемым на линии $x = at$. Приведенную методику можно распространить и на случай, когда $g(x - at)$ — разрывная функция. Так будет, например, в случае краевого условия вида $u(0,t) = b\cos\omega t$. При этом решение $u(x,t)$ также будет разрывным на линии $x = at$. Поэтому во всей области $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ оно, вообще говоря, является обобщенным решением, «склеенным» из двух гладких функций. Аналогичные решения строятся и в задачах 1, 2, 6, 7. Подробнее об этом можно прочитать в [6].

Задача 8. Найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x < +\infty$ удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = xe^{-x}\,(x > 0), \quad u_t(x,0) = 0\,(x > 0),$$
$$u(0,t) = b\sin\omega t.$$

Указание. Следует искать решение $u(x,t)$ в виде суммы двух функций $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, каждая из которых удовлетворяет уравнению (1), причем

$$v(x,0) = xe^{-x}\,(x > 0), \quad v_t(x,0) = 0\,(x > 0), \quad v(0,t) = 0;$$
$$w(x,0) = 0\,(x > 0),\ w_t(x,0) = 0\,(x > 0),\ w(0,t) = b\sin\omega t.$$

Задача 9. Найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x < +\infty$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = \sin x\,(x > 0), \quad u_t(x,0) = a\cos x\,(x > 0), \tag{19}$$
$$u_x(0,t) - \alpha u(0,t) = 0\,(t \geqslant 0, \alpha \geqslant 0). \tag{20}$$

Замечание. Физически условие (20) означает условие упругого закрепления конца полубесконечного стержня, если уравнение (1) является моделью продольных колебаний такого стержня. Если $\alpha \to 0$, то это условие переходит в условие свободного конца, а если $\alpha \to +\infty$, то в условие жестко закрепленного конца.

Указание. Решение в области $t \geqslant 0, x > at$, как и в примере 3, определяется начальными условиями (19) и имеет вид

$$u(x,t) = \sin(x+at) + C. \tag{21}$$

Аналогично задаче 10 решение в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant at$ ищем в виде

$$u(x,t) = \sin(x+at) + g(x-at) + C. \tag{22}$$

Для определения функции $g(x-at)$ в области $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant at$ воспользуемся краевым условием (20) и условием непрерывной склейки (21) и (22) вдоль линии $x = at$

$$\cos(at) + g'(-at) - \alpha\left(\sin(at) - g(-at) + C\right), \tag{23}$$

$$g(0) = C. \tag{24}$$

Обозначив $z = -at$, из (23) получим дифференциальное уравнение первого порядка для функции $g(z)$ с начальным условием (24). Решив это уравнение, получим вид функции $g(z)$.

Ответ:

$$u(x,t) = \begin{cases} \sin(x+at), & at < x, \\ \sin(x+at) + & \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\left(\cos(x-at) - e^{\alpha(x-at)}\right) - \\ & -\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}\sin(x-at),\ 0 \leqslant x \leqslant at. \end{cases}$$

Задача 10. Найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0$,

$0 \leqslant x < +\infty$, удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = 0\,(x \geqslant 0),\ \ u_t(x,0) = 0\,(x > 0), \tag{25}$$

$$mu_t(0,0) = p,\ \ mu_{tt}(0,t) - ku_x(0,t) = 0\ (p,\ m,\ k = \text{const}). \tag{26}$$

Замечание. Физически условия (26) означают, что на конце стержня находятся сосредоточенная масса m, которой в начальный момент времени сообщается импульс p. Второе из условий (26) есть просто закон Ньютона для движения этой сосредоточенной массы.

Указание. Аналогично примеру 3 решение ищется в виде

$$u(x,t) = \begin{cases} 0,\ at < x \\ g(x-at),\ 0 \leqslant x \leqslant at. \end{cases}$$

Поэтому при $x = 0$ в силу (26) получаем

$$mg''(x-at)(-a)^2 - kg'(x-at) = 0 \quad (x = 0). \tag{27}$$

$$mg'(x-at) = p \quad (x = 0,\, t = 0). \tag{28}$$

Кроме того, поскольку мы, как обычно, ищем непрерывное решение $u(x,t)$, то условие его непрерывности на линии $x = at$ дает

$$g(0) = 0. \tag{29}$$

Обозначая $z = -at$ и решая дифференциальное уравнение (27) с начальными условиями(28), (29), получаем искомый вид функции $g(z)$.

Ответ.

$$u(x,t) = \begin{cases} 0,\ at < x, \\ \frac{ap}{k}\left(1 - e^{\frac{k}{ma}(x-at)}\right),\ 0 \leqslant x \leqslant at. \end{cases}$$

Пример 4 (Эффект Допплера). Найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0$, $-\infty < x < +\infty$, удовлетворяющее условиям

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty),\\
&u_t(x,0) = 0 \; x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
u(v_0 t,\, t) = b \sin \omega t \; (t \geqslant 0;\, 0 \leqslant v_0 < a;\, b,\, \omega = \mathrm{const}). \tag{31}
$$

Замечание. Уравнение (1) может служить моделью плоских колебаний газа в длинной тонкой трубке. Условие (31) означает, что вдоль трубки с постоянной скоростью v_0 движется источник колебаний с амплитудой b и частотой ω; требуется описать колебания газа впереди и позади источника.

Решение. Рассмотрим области $at < x$, $v_0 t \leqslant x \leqslant at$, $-at \leqslant x \leqslant v_0 t$, $x < -at$ и проведем рассуждения, аналогичные рассуждениям в решении примера 3.

В областях $at < x$ и $x < -at$ решение будет определяться только начальными данными и поэтому в этих областях $u(x,t) = 0$. В области $v_0 t \leqslant x \leqslant at$ решение следует искать в виде

$$
u(x,t) = g(x - at)
$$

(аналогично задаче 10). Из условия непрерывной склейки решения вдоль прямой $x = at$ следует, что $g(0) = 0$, а из условия (31) получаем

$$
g(v_0 t - at) = b \sin \omega t. \tag{32}
$$

Обозначая $z = (v_0 - a)t$, из (32) имеем

$$
g(z) = b \sin \left(\omega \frac{z}{v_0 - a} \right),
$$

так что

$$
g(x - at) = b \sin \left(\frac{\omega}{1 - v_0/a} \left(t - \frac{x}{a} \right) \right)
$$

Аналогично в области $-at \leqslant x \leqslant v_0 t$ решение следует искать в виде

$$
u(x,t) = q(x + at).
$$

Из условия непрерывной склейки решения вдоль прямой $x = -at$ следует, что $q(0) = 0$, а из условия (31) получаем

$$q(v_0 t + at) = b \sin \omega t. \tag{33}$$

Обозначая $z = (v_0 + a)t$, из (33) имеем

$$q(z) = b \sin\left(\omega \frac{z}{v_0 + a}\right),$$

так что

$$q(x + at) = b \sin\left(\frac{\omega}{1 + v_0/a}\left(t + \frac{x}{a}\right)\right)$$

Объединяя все полученные результаты, получаем **ответ**

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -at \\ b\sin\left(\frac{\omega}{1+v_0/a}\left(t+\frac{x}{a}\right)\right), & -at \leqslant x \leqslant v_0 t, \\ b\sin\left(\frac{\omega}{1-v_0/a}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right), & v_0 t \leqslant x \leqslant at, \\ 0, & at < x \end{cases}$$

Проанализируем полученный результат с точки зрения физической интерпретации, указанной выше. Зоны $x < -at$ и $x > at$ отвечают тем сечениям газа, до которых еще не успел дойти сигнал от нашего движущегося источника. Зона $v_0 t \leqslant x \leqslant at$ расположена непосредственно впереди движущегося источника, а зона $-at \leqslant x \leqslant v_0 t$ — позади. При каждом фиксированном значении x частота колебаний впереди источника равна $\omega_1 = \omega/(1 - v_0/a)$, а позади источника она равна $\omega_2 = \omega/(1 + v_0/a)$, где ω — частота колебаний источника, v_0 — скорость его движения, a — скорость звука, определяемая свойствами данного газа. Поскольку по условию $0 \leqslant v_0 < a$ (источник движется с дозвуковой скоростью), то $\omega_2 < \omega < \omega_1$, т.е. частота колебаний впереди движущегося источника выше частоты колебаний самого источника, а позади — ниже. Это явление называется эффектом Допплера; каждый может проверить его экспериментально, например, стоя на платформе перед приближением поезда, локомотив которого издает сигнал.

Отметим еще одно обстоятельство. Если рассматривать случай $v_0 \geqslant a$, то описанным методом уже не удастся построить непрерывное решение задачи. Более того, линия $x = v_0 t$ в этом случае будет расположена в области $at < x$. А в этой области решение в соответствии с формулой Д'Аламбера (9) определяется только начальными условиями (30) и потом в ней $u(x,t) = 0$. Таким образом получается, что данные задачи противоречат друг другу. В чем причина этого? Ведь движение со сверхзвуковыми скоростями физически осуществимо. Причина здесь кроется в ограниченной области применимости нашей математической модели в виде уравнения (1). Дело в том, что это уравнение хорошо описывает плоские движения газа со скоростями, достаточно малыми по сравнению со скоростью звука. Если рассматривать движение со скоростями, близкими к скорости звука, или большими ее, то вместо уравнения (1) нужно рассматривать систему квазилинейных уравнений (так называемую систему уравнений газовой динамики). Свойства решений таких систем во многом отличаются от свойств решений линейных уравнений (некоторые сведения о квазилинейных системах можно почерпнуть из [6]). В частности, можно показать, что при движении со сверхзвуковыми скоростями решение будет некоторой разрывной функцией, называемой ударной волной.

Пример 5. Два полуограниченных стержня одинакового сечения S обладающие соответственно плотностями ρ_1 и ρ_2, модулями упругости E_1 и E_2, соединены жестко торцами. Пусть $u(x,t)$ — функция, описывающая продольные колебания левого стержня ($x \leqslant 0$), а $v(x,t)$ — правого ($x \geqslant 0$). Тогда математической моделью данной конструкции может служить система уравнений

$$u_{tt} = a_1^2 u_{xx} \ (x \leqslant 0, \ a_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}), \tag{34}$$

$$v_{tt} = a_2^2 v_{xx} \ (x \geqslant 0, \ a_2 = \sqrt{E_2/\rho_2}). \tag{35}$$

Жесткое соединение стержней в сечении $x = 0$ означает, что перемещения этого сечения $u(0,t)$ и $v(0,t)$ одинаковы:

$$u(0,t) = v(0,t) \tag{36}$$

и что силы, действующие на это сечение также одинаковы:

$$E_1 S u_x(0,t) = E_2 S v_x(0,t). \tag{37}$$

Предположим, что при $t \leqslant 0$ правый стержень покоился ($x \geqslant 0$)

$$v(x,0) = 0 \ (x \geqslant 0), \quad v_t(x,0) = 0 \ (x > 0),$$

а по левому распространялась волна

$$u(x,0) = b\sin(x - a_1 t) \ (b = \mathrm{const}),$$

что соответствует начальным условиям

$$u(x,0) = b\sin x, \ u_t(x,0) = b\cos x \ (x \leqslant 0).$$

Требуется описать колебания стержней при $t > 0$.

Решение. Общие решения уравнений (34) и (35) имеют вид

$$u(x,t) = q_1(x + a_1 t) + g_1(x - a_1 t),$$
$$v(x,t) = q_2(x + a_2 t) + g_2(x - a_2 t).$$

Рассуждая аналогично решению задачи 10, получаем, что

$$g_1(x - a_1 t) = b\sin(x - a_1 t), \ q_2(x + a_2 t) = 0.$$

Поэтому остается найти функции q_1 и g_2.

В силу условий жесткого соединения концов (36) и (37) имеем.

$$q_1(a_1 t) - b\sin(a_1 t) = g_2(-a_2 t), \tag{38}$$

$$E_1 g_1'(a_1 t) + E_1 b\cos(-a_1 t) = E_2 g_2'(-a_2 t). \tag{39}$$

Дифференцируя равенство (38) по t и умножая его на $-E_1$, сложим полученное равенство с соотношением (39), умноженным на a_1, при этом исключится функция $f_1'(a_1 t)$:

$$2bE_1 a_1 \cos a_1 t = (E_2 a_1 + E_1 a_2)\, g_2'(-a_2 t). \tag{40}$$

Обозначая $z = -a_1 t$ из (40) приходим к равенству

$$g_2'(z) = \frac{2bE_1 a_1}{E_2 a_1 + E_1 a_2} \cos\left(\frac{a_1}{a_2} z\right),$$

откуда

$$g_2(z) = \frac{2bE_1 a_1}{E_2 a_1 + E_1 a_2} \sin\left(\frac{a_1}{a_2} z\right) + C,$$

так что

$$g_2(x - at) = \frac{2bE_1 a_1}{E_2 a_1 + E_1 a_2} \sin\left(\frac{a_1}{a_2}(x - a_2 t)\right) + C,\ (0 \leqslant x \leqslant a_2 t).$$

Но из условия склейки при $x = a_2 t$ с решением $v(x,t) \equiv 0$ $(x > a_2 t)$ получаем $g(0) = 0$, так что $C = 0$.

Далее, из (38), введя обозначение $y = a_1 t$, получаем

$$q_1(y) = b\sin y - 2\frac{bE_1 a_2}{E_2 a_1 + E_1 a_2} \sin y + C = \frac{b(E_2 a_1 - E_1 a_2)}{E_2 a_1 + E_1 a_2} \sin y.$$

Таким образом,

$$u(x,t) = b\sin(x - a_1 t),\ x < -a_1 t, \tag{41}$$

$$u(x,t) = b\sin(x - a_1 t) + \frac{b(E_2 a_1 - E_1 a_2)}{E_2 a_1 + E_1 a_2} \sin(x + a_1 t), \tag{42}$$

$$v(x,t) = 0,\ x > a_2 t, \tag{43}$$

$$v(x,t) = \frac{bE_1 a_2}{E_2 a_1 + E_1 a_2} \sin\left(\frac{a_1}{a_2}(x + a_2 t)\right),\ 0 \leqslant x \leqslant a_2 t. \tag{44}$$

С точки зрения физики первое слагаемое в (42) представляет собой падающую волну, а второе — отраженную волну. Формула (44) описывает преломленную волну. Ясно, что если материалы, из которых сделаны стержни, таковы, что $E_2a_1 - E_1a_2 = 0$, то отраженной волны не будет, а будет так называемое называемое преломление без отражения.

Задача 11. Найти решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin x - \cos t,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0(-\infty < x < +\infty).$$

Указание. Воспользоваться формулой запаздывающего потенциала

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} f(z, \tau) dz d\tau.$$

1.2 Пример использования метода бегущих волн для нелинейных уравнений с частными производными.

Заметим, что формула (2) исчерпывает все решения уравнения (1). Однако и для других уравнений, даже нелинейных, часто имеет смысл искать решения в виде бегущих волн. При этом, хотя, конечно, такие специальные решения не исчерпывают всей совокупности решений, они могут иметь важный физический смысл.

Задача 6. Найти решение вида бегущей волны $u(x, t) = g(x - at)$ для уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + uu_x + bu_{xxx} = 0 \ (b = \text{const}), \tag{45}$$

при условиях

$$g(\pm\infty) = g'(\pm\infty) = g''(\pm\infty) = 0. \tag{46}$$

Решение. Подставляя $u = g(x - at)$ в (45), получаем

$$-ag' + gg' + bg''' = 0. \tag{47}$$

Интегрируя (47), с учетом (46) имеем

$$-ag + \frac{1}{2}g^2 + bg'' = 0. \tag{48}$$

Умножая (48) на g' и снова интегрируя, получаем

$$-ag^2 + \frac{1}{3}g^3 + b(g')^2 = 0.$$

Откуда следует

$$\sqrt{3b}g' = g\sqrt{3a - g} \tag{49}$$

Интегрируя (49), получаем **ответ**

$$u(x,t) = g(x - at) = 3a\,\mathrm{ch}^{-2}\sqrt{\frac{a}{4b}}(x - at). \tag{50}$$

Полученное решение (50) носит название солитона, или уединенной волны (рекомендуется сделать чертеж).

1.3 Варианты заданий для самостоятельной работы

В заключение приведем варианты для самостоятельной работы. В этом расчете требуется найти решение уравнения (1) в области $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= 0 \quad (x \geqslant 0),\\
u_t(x,0) &= 0 \quad (x > 0),\\
mu_{tt}(0,t) &= \alpha_1 u_x(0,t) - \alpha_2 u_t(0,t) - \alpha_3 u(0,t),\\
u_t(0,0) &= v_0.
\end{aligned} \tag{51}$$

и дать физическую интерпретацию краевых условий (51).

Варианты заданий

№ варианта	a	m	α_1	α_2	α_3	v_0
1	1/2	4	2	4	3	2
2	1/3	9	4	6	10	0
3	1/4	16	4	8	5	-1
4	1/5	25	9	5	26	0
5	1/6	36	1	6	26	-2
6	1/2	4	2	8	8	0
7	1/3	9	1	9	20	3
8	1/4	16	7	4	20	0
9	1/5	25	7	5	12	-3
10	1/6	36	3	6	40	0
11	1/2	4	6	4	20	0
12	1/3	9	6	6	12	2
13	1/4	16	3	4	40	2
14	1/5	25	11	5	40	-2
15	1/6	36	9	6	16	2
16	1/2	4	3	2	3	1
17	1/3	9	3	9	10	2
18	1/4	16	5	4	5	-2
19	1/5	25	9	5	26	1
20	1/6	36	1	6	26	1

2 Метод бегущих волн для уравнений и систем произвольного порядка с несколькими пространственными переменными.

Метод бегущих волн можно с успехом распространить и на гиперболические системы уравнений произвольного порядка с несколькими независимыми переменными (об общем понятии гиперболичности для систем уравнений произвольного порядка см., например, [6]). В случае волнового уравнения, решения вида $q(x \pm at)$ описывают все множество решений.В общем случае аналогичные решения вида $\vec{\varrho}\psi((\vec{k},\vec{x}) - \omega t)$, называемые плоскими волнами, хотя и не охватывают все решения, но, тем не менее, так же представляют значительный интерес. В частности, именно такие решения обычно используются, например, при анализе системы Максвелла. Кроме того, упомянутые решения используются при изучении так называемой дисперсии волн.

Пусть исходная система линейна и имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu_j} a_{ij}^{\overrightarrow{r}} \frac{\partial^{\mu_j} u_j}{\partial x_0^{r_0} \dots \partial x_n^{r_n}} = 0, \tag{52}$$

причем все коэффициенты $a_{ij}^{\overrightarrow{r}}$ постоянны, а $\mu_j = \mu, \ j = 1, \dots, m$.

Здесь введены обозначения:

$$\overrightarrow{r} = \{r_0, \dots, r_n\}, \ | \overrightarrow{r} | = r_0 + \dots + r_n.$$

Обозначим $x_0 = t$.

Можно попытаться найти частные решения в виде так называемых плоских волн, двигающихся в заданном направлении, характеризуемым вектором $\vec{k}$, т.е. в виде:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\rho}\psi\left(-\omega t + \sum_{h=1}^{n} k_h x_h\right), \tag{53}$$

где $\overrightarrow{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, — неизвестный вектор, ψ — неизвестная функция, ω — неизвестный параметр, а вектор $\overrightarrow{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ задан. Ясно, что если

$$-\omega t + \left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{x}\right) = \mathrm{const}, \tag{54}$$

то и $\overrightarrow{u} = \mathrm{const}$. Поэтому, решения такого вида, сохраняющие постоянные значения на параллельных плоскостях семейства (54), называют плоскими волнами. Вектор $\overrightarrow{k}$ при этом называется волновым вектором.

Подставим (53) в (52) (при $\mu_j = \mu,\ j = 1, \ldots, m$):

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu} a_{ij}^{\overrightarrow{r}} (-\omega)^{r_0} {k_1}^{r_1}, \ldots, {k_n}^{r_n} \rho_j \psi^{(\mu)}\left(-\omega t + \left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{x}\right)\right) = 0, \tag{55}$$

где $i = 1, \ldots, m$.

Если $\psi^{(\mu)} \neq 0$, то из (55) получаем:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu} a_{ij}^{\overrightarrow{r}} (-\omega)^{r_0} {k_1}^{r_1}, \ldots, {k_n}^{r_n} \rho_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{56}$$

Можно рассматривать (56), как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\rho_1, \ldots, \rho_n$ с неизвестным параметром ω. Нетривиальное решение этой системы мы получим, если

$$\Re = \det\left(\sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu} a_{ij}^{\overrightarrow{r}} (-\omega)^{r_0} {k_1}^{r_1}, \ldots, {k_n}^{r_n}\right) = 0, \tag{57}$$

Это уравнение по-существу совпадает с характеристическим уравнением для системы (52). Далее, пользуясь однородностью соответствующей формы $\Re$, можно записать

$$\det\left(\sum_{|\vec{r}|=\mu} a_{ij}^{\vec{r}}\left(-\frac{\omega}{|\vec{k}\,|}\right)^{r_0},\left(\frac{k_1}{|\vec{k}\,|}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{k_n}{|\vec{k}\,|}\right)^{r_n}\right)=0$$

Пусть при некотором $\pm\vec{\varkappa}\quad(|\vec{\varkappa}|=1)$ существует вещественный корень ξ уравнения

$$\Re(-\xi,\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n)=0. \tag{58}$$

В силу однородности формы $\Re$ можно считать, что $\xi\geqslant 0$ и обозначить $\xi=|\vec{W}|$. Тогда существует такой вектор $\vec{\rho}=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$, и такой параметр ω, что при любой достаточно гладкой функции ψ выражение (53) будет решением нашей системы (52) *при заданном векторе* $\vec{k}=(k_1,\ldots,k_n)$.

При этом величина

$$-\frac{|\omega|}{|\vec{k}\,|}=-|\vec{W}| \tag{59}$$

характеризует скорость движения плоской волны (53) в направлении единичного вектора $\vec{\varkappa}$, параллельного волновому вектору $\vec{k}$ удовлетворяющему соотношению (57). Если при $t=0$ задать функцию $s\mapsto\alpha(s)$, т.е.

$$\vec{u}=\vec{\rho}\,\alpha\left(\left(\sum_{h=1}^{n}k_hx_h\right)=s\right)=\vec{\rho}\,\alpha(s)$$

как функцию параметра s (т.е. на семействе плоскостей $(\vec{x},\vec{k}\,)=s$), то каждая «линия» уровня соответствующей поверхности будет двигаться со скоростью (59) в направлении вектора $\vec{\varkappa}$.

Это приведет к сдвигу всей начальной фигуры заданной произвольной формы в направлении вектора $\overrightarrow{\varkappa}$ без искажения этой формы. Обозначим

$$\xi = |\overrightarrow{W}| = \frac{|\omega|}{|\overrightarrow{k}|}$$

Если же ξ — не корень уравнения (58) (для фиксированного единичного вектора $\overrightarrow{\varkappa}$), параллельного заданному вектору $\overrightarrow{k}$ и не обязательно удовлетворяющему (57), то для системы (52) все равно существуют решения в виде плоской волны (53) с произвольным вектором $\overrightarrow{\rho}$ и произвольным параметром ω, однако лишь для функций ψ *специального вида*, а именно для многочленов степени, не превосходящей $(\mu - 1)$, т.е. таких, что $\psi^{(\mu)} = 0$. И в этом случае можно говорить о скорости движения этих плоских волн, которая равна $\frac{|\omega|}{|\overrightarrow{k}|}$.

$$|\overrightarrow{W}| = \frac{|\omega|}{|\overrightarrow{k}|}$$

Однако, поскольку в этом случае величины $|\omega|$ и $|\overrightarrow{k}|$ произвольны, то и модуль скорости движения в направлении $\overrightarrow{\varkappa}$ также произволен.

Итак, вдоль прямой, параллельной заданному вектору $\vec{k}$, может распространяться без искажения начальной формы столько плоских волн, сколько соответствующих действительных корней у характеристического уравнения. Начальная форма этих волн произвольна, а величины скоростей их движения определяются упомянутыми выше корнями характеристического уравнения. Кроме того, вдоль той же прямой могут распространяться и плоские волны специального вида, скорости которых произвольны.

Пусть A_ℓ $(\ell = 0, \ldots ., n)$ — симметрические постоянные матрицы, причём A_0 - положительно определённая матрица. Рассмотрим систему

$$A_0 \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^{n} A_\ell \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial x_\ell} = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}),$$
$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \qquad x = (x_1, \dots, x_n). \tag{60}$$

Такая система допускает упрощение. Положим

$$A_0 = K^2 \qquad (K = K^*,\ (K^{-1})^* = K^{-1})$$

и сделаем замену неизвестных функций

$$\overrightarrow{z} = K\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = K^{-1}\overrightarrow{z}.$$

Поскольку

$$B_\ell^* = (K^{-1}A_\ell K^{-1})^* = (K^{-1})^* A_\ell^* (K^{-1})^* = K^{-1}A_\ell K^{-1} = B_\ell,$$

то система (60) преобразуется к виду, называемому каноническим:

$$E \frac{\partial \overrightarrow{z}}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^{N} B_\ell \frac{\partial \overrightarrow{z}}{\partial x_\ell} = \overrightarrow{g}(t, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}). \tag{61}$$

Для системы (61) запишем характеристическое уравнение

$$\Re(\nu_0, \dots, \nu_n) = \det\left(E\nu_0 + \sum_\ell B_\ell \nu_\ell\right) = 0$$

Так как при любом вещественном наборе $\nu_0, \dots, \nu_n$ матрица

$$\sum_{s=1}^{N} \nu_\ell B_\ell$$

симметрична, то все собственные значения этой матрицы, равные $-\nu_0$, будут вещественными. Это означает гиперболичность (в общем случае) системы (61) (как и системы (60)).

Примечание. В случае одной пространственной переменной система может остаться гиперболической и в случае несимметричных матриц $A_0,\ A_1$, если матрица $A_0^{-1}A_1$ имеет только вещественные собственные значения и диагонализируема.

Оказывается, что в общем случае дополнительные требования симметричности или диагонализируемости обеспечивают возможность разрешимости соответствующей задачи Коши.

Пример 1. Привести систему

$$\begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

к каноническому виду и найти решение в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси x_1. Найти скорости возможных плоских волн, распространяющихся вдоль прямой, параллельной вектору $\{8;32\} = \overrightarrow{k}$.

Решение. Собственные значения матрицы $A_0 : \lambda_1 = 32, \lambda_2 = 2$. Ортогональная матрица перехода P и её обратная P^{-1} имеют вид

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В базисе из собственных векторов матрица $\sqrt{A_0}$ имеет вид

$$\sqrt{A_0} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому, в исходном базисе матрицы $K = \sqrt{A_0}$ и K^{-1} имеют вид

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad K^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{16} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Таким образом, в канонической форме, после замены $\overrightarrow{u} = K^{-1}\overrightarrow{z}$, исходная система принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ищем решение в виде плоской волны $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{\rho}\psi((\overrightarrow{k}, \overrightarrow{x}) - \omega t)$. Характеристическое уравнение в данном случае имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} k_1 + \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} k_2 = 0,$$

где k_1, k_2 — координаты вектора $\overrightarrow{k}$. Подставляя $\overrightarrow{k} = \{8; 32\}$ в характеристическое уравнение, находим $\omega = 1 \pm \sqrt{2}$. Поэтому в направлении вектора $\overrightarrow{k}$ может распространяться плоская волна со скоростью, соответствующей значению $\omega > 0$, т.е.

$$|\overrightarrow{W}| = \frac{\omega}{|\overrightarrow{k}|} = \frac{(1+\sqrt{2})}{8\sqrt{17}}$$

Плоская волна со скоростью, соответствующей отрицательному значению ω, т.е.

$$|\overrightarrow{W}| = \frac{|1-\sqrt{2}|}{8\sqrt{17}}$$

может распространяться вдоль вектора $-\overrightarrow{k} = \{-8, -32\}$. Подставляя $\overrightarrow{k} = \{1, 0\}$ в характеристическое уравнение, найдем скорость плоской волны вдоль положительного направления оси x:

$$|\overrightarrow{W}| = \frac{1}{8}$$

Соответствующий собственный вектор $\overrightarrow{\rho}$ матрицы $(A_1\nu_1 + \ldots + A_n\nu_n)$ имеет вид

$$\overrightarrow{\rho} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому, соответствующее решение в виде плоской волны выглядит так:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \psi \left(x_1 - \frac{1}{8} t \right).$$

Возвращаясь к исходным неизвестным u_1, u_2, получаем:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = b\frac{\sqrt{2}}{16} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \psi \left(x_1 - \frac{1}{8} \right)$$

Заменяя, в силу произвольности, функцию ψ на функцию $\widetilde{\psi}$, получаем окончательно

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \widetilde{\psi}(8x_1 - t).$$

Примечание. В описанной выше ситуации система (60) называется симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу), а её запись в виде (61) - канонической формой записи.

Примечание. Как уже отмечалось выше, в случае одной пространственной переменной система может остаться гиперболической и в случае несимметричных матриц $A_0,\ A_1$, если матрица $A_0^{-1}A_1$ имеет только вещественные собственные значения и диагонализируема. Поэтому исходную систему достаточно умножить слева на A_0^{-1}. В случае нескольких пространственных переменных ситуация несколько иная. Пример

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что сумма матриц с вещественными собственными значениями может иметь комплексные собственные значения.

Поэтому при $n > 1$ простое умножение обеих частей системы на A_0^{-1} может не привести к цели.

3 Дисперсия волн.

Построение частных решений вида

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\rho}\,\psi(-\omega t + \sum_{s=1}^{n} k_s x_s), \tag{62}$$

для уравнений и систем с постоянными коэффициентами можно распространить на системы, содержащие и младшие производные, т.е. на системы вида

$$\sum_j \left(\sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu} a_{ij\mu}^{\overrightarrow{r}} \frac{\partial^{\mu} u_j}{\partial t^{r_0} \ldots \partial x_n^{r_n}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu-1} a_{ij(\mu-1)}^{\overrightarrow{r}} \frac{\partial^{\mu-1} u_j}{\partial t^{r_0} \ldots \partial x_n^{r_n}} + \ldots \right) = 0, \ i = 1, \ldots, m. \tag{63}$$

Для упрощения выкладок ограничимся случаем одного уравнения

$$\sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu} b_{\mu}^{\overrightarrow{r}} \frac{\partial^{\mu} u}{\partial t^{r_0} \ldots \partial x_n^{r_n}} + \sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu-1} b_{(\mu-1)}^{\overrightarrow{r}} \frac{\partial^{\mu-1} u}{\partial t^{r_0} \ldots \partial x_n^{r_n}} + \ldots = 0 \tag{64}$$

Ограничиваясь наиболее интересным для приложений случаем решений, ограниченных во всем $\mathbb{R}^n(\vec{x}) \times \mathbb{R}^1(t)$, будем искать решения специального вида

$$u = e^{i((\overrightarrow{k}, \overrightarrow{x}) - \omega t)}. \tag{65}$$

Такое решение (65) — это плоская волна специального гармонического вида, распространяющаяся со скоростью $\overrightarrow{W}$, где вектор $\overrightarrow{W}$ параллелен вектору $\overrightarrow{k}$, а

$$|\overrightarrow{W}| = \frac{|\omega|}{|\overrightarrow{k}|}$$

Подставив (65) в (64), получим

$$\sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu} b_{\mu}^{\overrightarrow{r}}(-\omega)^{r_0} {k_1}^{r_1} \ldots {k_n}^{r_n} + \\ + \sum_{|\overrightarrow{r}|=\mu-1} b_{\mu-1}^{\overrightarrow{r}}(-\omega)^{r_0} {k_1}^{r_1} \ldots {k_n}^{r_n} + \ldots = 0.$$

Таким образом, мы получаем некоторую связь между ω и $\overrightarrow{k}$, при которой возможно существование решений специального вида (65). Эта связь называется дисперсионным соотношением.

Формально это соотношение можно получить и так. Запишем левую часть в (64) в виде полинома P от символов $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, т.е. в виде

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0.$$

Тогда, произведя замену

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega; \qquad \frac{\partial}{\partial x_s} \leftrightarrow ik_s, \tag{66}$$

получим соотношение между $\omega, k_1, \ldots, k_n$

$$\mathfrak{P}(-i\omega, ik_1, \ldots, ik_n) = 0 \tag{67}$$

Левая часть (67), как функция от $\omega, k_1, \ldots, k_n$, называется символом дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения (64).

Для интерпретации физического смысла дисперсионного соотношения изложим некоторые неформальные соображения о скорости распространения сигналов, причем для простоты ограничимся одномерным случаем.

Пусть у нас имеется некоторая одномерная сплошная среда, характеризуемая дисперсионным соотношением $\omega = \omega(k)$.

Если начальные условия имеют вид Ce^{ikx} ($C = \text{const}$, $k = \text{const}$), то такая волна распространяется как $Ce^{i(kx-\omega t)}$ со скоростью $|\omega/k|$, где $\omega = \omega(k)$. Пусть теперь начальное условие имеет вид «амплитудно - модулированной» монохроматической волны, т.е.

$$\beta(x)e^{ik_0x}, \tag{68}$$

где $\beta(x)$ имеет вид локального горба, не сильно отличающегося от некоторой константы (так называемый «волновой пакет»). Тогда, воспользовавшись преобразованием Фурье, можно записать

$$\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} B(k)e^{ikx}dk, \qquad B(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x)e^{-ikx}dx.$$

Поэтому начальное состояние (68) будет распространяться как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} B(k)e^{i((k_0+k)x-\omega(k_0+k)t)}dk =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} B(k)e^{i((k_0+k)x-(\omega_0+\omega'_k k+\dots)t)}dk \cong$$
$$\cong e^{i(k_0x+\omega_0t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} B(k)e^{ik(x-\omega'_k t)}dk =$$
$$= e^{i(kx_0-\omega_0t)}\beta(\widehat{x}) = e^{i(k_0x+\omega_0t)}\beta(x-\omega'_k t)$$

Здесь $e^{i(k_0x+\omega_0t)}$ играет роль «несущей» гармоники, а $\beta(x - \omega'_k t)$ — роль «амплитудной модуляции»; ω'_k называется групповой скоростью. Именно с этой скоростью и будет распространяться горб начального состояния $\beta(x)$, однако, это будет происходить лишь в течение ограниченного времени. Затем (из-за приближенного равенства) начнется искажение формы.

Аналогично, в многомерном случае, групповой скоростью называется вектор $\overrightarrow{\nabla\omega}$. Введенная ранее величина скорости $|\omega|/|\overrightarrow{k}|$ называется фазовой скоростью.

Пусть теперь начальные условия (при $t = 0$) не имеют специального вида (68). Тогда разложим их в интеграл Фурье по функциям $\exp(i(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{x}))$. Если фазовая скорость, т.е. величина $|\omega|/|\overrightarrow{k}|$ зависит от $|\overrightarrow{k}|$, то мы получим, что отдельные слагаемые этого разложения будут двигаться с различными фазовыми скоростями $|\omega|/|\overrightarrow{k}|$. Начальная форма сигнала в этом случае исказится. В физике это явление называется дисперсией волн.

Примечание. Все приведенные рассуждения естественно обобщаются на случай уравнений (64) и систем (63) с комплексными коэффициентами при *младших* производных.

3.1 Примеры.

Пример 1. Волновое уравнение.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, a > o.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(-\xi)^2 - a^2\varkappa^2 = 0, |\varkappa| = 1$$

Поэтому $\xi = a|\varkappa|$. Таким образом, для $\forall\varkappa$ ($|\varkappa| = 1$) $\exists W_1 = a\varkappa, W_2 = -a\varkappa$ так, что возможны решения произвольной начальной формы

$$\psi_1(x - at), \quad \psi_2(x + at),$$

не искажающиеся со временем и распространяющиеся со скоростью a в направлении $\varkappa = 1$ и $\varkappa = -1$.

Кроме того, возможны решения специального вида

$$x - bt, \tag{69}$$

распространяющиеся с произвольными скоростями «b». С точки зрения дисперсионного соотношения приходим к тому же самому результату. Дисперсионное соотношение в этом случае имеет вид

$$-\omega^2 + a^2k^2 = 0.$$

Поэтому

$$\omega = \pm ak. \tag{70}$$

Значит, существуют решения вида

$$e^{i(kx-\omega t)},$$

скорость распространения которых, в силу (70), равна

$$|W| = a.$$

Поскольку величина фазовой скорости $\omega/|k|$ не зависит от k, то явление *дисперсии волн отсутствует.*

Пример 2. Уравнение Клейна-Гордона

$$u_{tt} - a^2u_{xx} + \eta^2u = 0.$$

В отличие от примера 1, здесь нет решений типа (62). Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = a^2k^2 + \eta^2.$$

Поэтому (вместо решений типа (69)) для (66) существуют решения специального вида

$$e^{i(kx-\omega t)},$$

скорость распространения которых определяется величиной

$$\omega'_k = \frac{d}{dk}\sqrt{a^2k^2+\eta^2},$$

которая зависит от k. В этом случае *есть дисперсия* волн.

Пример 3. Система телеграфных уравнений.

Пусть $I(x,t)$ ток, $U(x,t)$ напряжение в длинной линии. Запишем баланс для падения напряжения на участке длинной линии от x до $x+h$.

$$U(x,t) - U(x+h,t) = \int\limits_x^{x+\Delta x} RI(x,t)dx + \int\limits_x^{x+h} L\frac{\partial I}{\partial t}dx$$

Запишем баланс для изменения заряда на участке этой длинной линии от x до $x+h$ за время от t до $t+\tau$.

$$\int\limits_t^{t+\tau} (I(x,t) - I(x+h,t))dt =$$

$$\int\limits_x^{x+h} (CU(x,t+\tau) - CU(x,t))dx + \int\limits_x^{x+h}\int_t^{t+\tau} GU dxdt$$

Преобразуем эту пару уравнений так:

$$-\int\limits_x^{x+h} U'_x dx = \int_x^{x+h} RIdx + \int\limits_x^{x+h} LI'_t dx - \int\limits_t^{t+\tau}\int_x^{x+h} I'_x dx =$$

$$\int\limits_x^{x+h}\int\limits_t^{t+\tau} CU'_t dtdx + \int\limits_x^{x+h}\int\limits_t^{t+\tau} GU dxdt$$

Ввиду произвольности h и τ, из этих уравнений получаем систему

$$\begin{cases} LI'_t + U'_x + RI = 0 \\ CU'_t + I'_x + GU = 0 \end{cases}$$

Исключив из этой системы, например, I, получаем так называемое телеграфное уравнение относительно напряжения U:

$$LCU_{tt} - U_{xx} + (RC + LG)U_t + RGU = 0$$

После переобозначений коэффициентов

$$LC = a,\ (RC + LG) = 2b,\ RG = r,$$

получаем

$$aU_{tt} - U_{xx} + 2bU_t + rU = 0$$

Вводя новую функцию

$$U = e^{-\frac{b}{a}t}u,$$

получаем уравнение

$$au_{tt} - u_{xx} + \frac{ra - b^2}{a}u = 0$$

Возвращаясь к старым обозначениям, получим

$$u_{tt} - \frac{1}{LC}u_{xx} + \frac{(RC - LG)^2}{(2LC)^2}u = 0$$

Мы видим, что при условии

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

полученное уравнение не будет обладать свойством дисперсии. В этом случае, возвращаясь к исходной функции, получаем общее решение этого уравнения в виде

$$U(x,t) = e^{-\frac{RC+LG}{2LC}t}\left(\psi_1\left(x - \frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + \psi_2\left(x + \frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right).$$

В этом случае сигнал будет распространяться хотя и с затуханием, но без искажения формы, что имеет важное значение в теории связи.

Список литературы

[1] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1972.

[2] Владимиров В.С., Михайлов В.П., Вашарин А.А. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1982.

[3] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Наука, 1961.

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.

[5] Араманович А.Д., Левин В.И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1969.

[6] Курант Р., Уравнения с частными производными. —М.: Мир, 1964.

Учебно-методическое издание

Деркач Мария Михайловна
Филимонов Андрей Матвеевич
Филимонов Дмитрий Андреевич

Метод бегущих волн

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Уравнения математической физики»

Подписано в печать	Формат 60x84/16	Тираж 100 экз.
Усл.-печ. л. -	Заказ №	Изд. № 142—13

УПЦ ГИ МИИТ, 127994, Москва, ул.Образцова, д.9, стр.9