МОЛОДЕЖНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НАУКА - 2012

УДК 519.719.2
ББК 22.15

Сборник подготовлен по материалам, предоставленным авторами в электронном виде, и сохраняет авторскую редакцию. За содержание и оригинальность полученных материалов ответственность несут авторы и их научные руководители

Ответственный за выпуск

Сухарев Л.А., председатель оргкомитета конференции, проректор по учебной части ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева»

Рецензенты:

Никонов В.И., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет имени Н.П.Огарева»

Кормилицына Т.В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и вычислительной техники ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева»

Конференция проведена при поддержке проекта «Построение гомотопически устойчивого аналога симплициального объекта» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013гг.» Государственный контракт № П1226 от 07 июня 2010 г.

Молодежная математическая наука–2012. Сборник материалов всероссийской с международным участием молодежной научно-практической конференции «Молодежная математическая наука–2012»: 26-27 апреля 2012 – Мордовский гос. пед. ин-т. – Саранск, 2012 – 278 с.

УДК 519.719.2
ББК 22.15

ISBN 978-5-8156-0461-2

В сборник вошли доклады и научные статьи студентов-участников конференции из различных регионов России, а также стран ближнего зарубежья, посвященные различным разделам математики, математического моделирования, а также методики преподавания математики. Представленные работы способствуют развитию научной мобильности молодых исследователей-математиков, а также апробации проведенных ими научных разработок и изысканий.

ISBN 978-5-8156-0461-2

О прошедшей конференции

В современном российском обществе остро стоит проблема закрепления молодых специалистов в профессиональной области деятельности. Математическая наука в России особенно остро ощущает дефицит молодых ученых, готовых продолжать свои исследования в вузах и научно-исследовательских центрах. Увеличение среднего возраста преподавателей математических дисциплин в отечественной высшей школе является одной из важнейших проблем, стоящих перед руководителями системы высшего профессионального образования.

Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013», в рамках одного из проектов которой была организована данная конференция, является одним из путей решения данной проблемы. Участниками конференции стали более 100 человек из 17 различных регионов России, Украины, Белоруссии, Туркмении и Швеции, что позволило конференции приобрести статус всероссийской с международным участием. Помимо пленарных докладов была организована работа 4 секций, отражающих различные направления развития современной математичсекой науки.

Целями данной конференции, помимо апробации полученных результатов, являлось и стремление объединить различные направления молодежной математической науки в различных регионах, способствовать закреплению участников в системе высшей школы.

Оргкомитет конференции благодарит всех участников за участие и надеется что участие в данной конференции станет хорошей традицией для молодых ученых, а со временем, и для их учеников.

Оргкомитет конференции

СЕКЦИЯ 3. КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

1. Уайтхед, Дж. Основания дифференциальной геометрии. / О. Веблен, Дж. Уайтхебд - М.: ИЛ, 1949. – 210 с.
2. Егоров, Д. Ф. Работы по дифференциальной геометрии. /Д.Ф. Егоров - М.: Наука, 1970 – 140 с.
3. Погорелов, А. И. Дифференциальная геометрия. / А.И.Погорелов - М.: Наука, 1974 – 100 с.
4. Розендорн, Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии. / Э.Р. Розендорн - М.: Наука, 1971 – 110 с.
5. Шарипов Р. А. Курс дифференциальной геометрии / Р.А. Шарипов - БашГУ, Уфа, 1996 – 140 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК ИНСТРУМЕНТ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. А. Ермолина, Е. В. Макарская

Московский Государственный Университет Экономики, Статистики и Информатики (МЭСИ)

Рассмотрим применение методов теории линейных дифференциальных уравнений к исследованию известных макроэкономических динамических моделей, где независимой переменой является t. Такие модели достаточно эффективны при исследовании эволюции экономических систем на длительных интервалах времени, эти системы являются предметом исследования экономической динамики.

Экономическая система – это совокупность национальных хозяйственных единиц, т.е. предприятий, организаций, объединенных производственно-технологическими и организационно-хозяйственными связями.

Система называется динамической, если в ее состав входит хотя бы один динамический элемент.

Выход динамического элемента в любой момент времени t зависит от значений входов и выходов в прошлые моменты времени t-1, t-2 и т.д.

Рассмотрим экономические динамические системы как линейные с непрерывным временем. Линейный динамический элемент n-го порядка задается следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)} \qquad (1)$$

Наиболее часто на практике применяются элементы нулевого (мультипликатор, акселератор), первого (инерционное звено) и второго порядка.

Изучение динамических процессов связано с переходом экономической системы из одного состояния равновесия в другое. Если время перехода на новое состояние равновесия велико, то само понятие экономического равновесия теряет смысл, в этом случае надо изучать процессы непрерывного изменения экономики в динамике. Математическим инструментом для этого служит теория дифференциальных уравнений (ДУ).

Экономика в форме динамической модели Кейнса

В модели Кейнса предполагается, что ВВП y(t+1) следующего года равен совокупному спросу текущего года, а совокупный спрос, состоящий из спроса на потребительские (C) и инвестиционные (I) товары, зависит только от ВВП текущего года:

$$y(t+1)=C[y(t)]+I(t) \qquad (2)$$

При линейной зависимости спроса на потребительские товары от ВВП и примерном постоянстве спроса на инвестиционные товары приходим к соотношению

$$y(t+1)=C+c\,y(t)+I, \qquad (3)$$

где C – минимальный объем фонда потребления, не изменяющийся при росте национального дохода;

c $(0<c<1)$ – склонность к потреблению.

Соотношение, действующее при дискретности времени в один год, при дискретности Δt, примет форму:

$$y(t+\Delta t)-y(t)=[C-(1-c)y(t)+I]\Delta t, \qquad (4)$$

где (1-с) – склонность к накоплению.

Однако для анализа динамики лучше использовать непрерывное время. В этом случае используют формальную запись модели в виде дифференциального уравнения.

Проведем анализ динамики перехода к равновесному состоянию национального дохода используя модель в форме дифференциального уравнения, используя непрерывное время.

Путем преобразования при $\Delta t \to 0$ приходим к уравнению:

$$\frac{1}{1-c}\frac{dy}{dt}+y=\frac{C+I}{1-c} \qquad (5)$$

Как известно, в качестве общего решения неоднородного ДУ есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного ДУ:

$$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.} \qquad (6)$$

В качестве частного решения последнего уравнения возьмем так называемое равновесное (стационарное) решение

$$y_E=\frac{C+I}{1-c}. \qquad (7)$$

Рассмотрим однородное ДУ

$$\frac{1}{1-c}\frac{dy}{dt}+y=0. \qquad (8)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y}=-(1-c)\,dt. \qquad (9)$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получаем:

$$\ln|y|=-(1-c)t+\ln c_0,\ \text{где}\ c_0>0, \qquad (10)$$

$$y_{о.о.}=c_0\,e^{-(1-c)t} \qquad (11)$$

$$y_{о.н.}=c_0\,e^{-(1-c)t}+\frac{C+I}{1-c}. \qquad (12)$$

Если спрос на инвестиционные товары изменился с величины I_0 до I, $I>I_0$, то в экономике будет происходить переходный процесс от значения ВВП $y_0=\frac{C+I_0}{1-c}$ до значения y_E, при этом

$$y(t)=y_E+(y_0-y_E)e^{-t(1-c)}. \qquad (13)$$

Как видно из данного выражения, каково бы ни было значение y_0 национального дохода в начальный период времени, через некоторое время его значение становится близким к значению в состоянии равновесия y_E. Скорость перехода к равновесному состоянию определяется коэффициентом склонности к сбережению $1-c$. Чем больше значение этого коэффициента, тем быстрее значение национального дохода приближается к равновесному.

Если в начальный момент времени $y_0 > y_E$, то в последующие моменты времени значение национального дохода остается больше равновесного на всем интервале времени, с постоянным уровнем инвестиций.

Если в начальный момент времени $y_0 < y_E$, то в последующие моменты времени значение национального дохода остается меньше равновесного на всем интервале времени, с постоянным уровнем инвестиций.

Экономика в форме модели самуэльсона-хикса как линейное динамическое звено второго порядка.

Введем в динамическую модель Кейнса акселератор.

Акселератор – дифференцирующее звено нулевого порядка, выход которого пропорционален скорости входа[1]. Современный экономический словарь дает следующее определение: «отношение прироста индуцированных подъемом производства инвестиций к вызвавшему его относительному приросту объема производства»[2].

Инвестиции могут быть представлены как:

$$I=r\frac{dY}{dt} \qquad (14),$$

r – коэффициент акселерации, прирост потребности в инвестициях при увеличении ВВП на единицу, 0<r<1.

$$I(t)=r[y(t)-y(t-1)]+I \qquad (15)$$

Подставим полученное выражение динамическую модель Кейнса:

$$y(t+1)=\underline{C}+cy(t)+r[y(t)-y(t-1)]+I \qquad (16)$$

Далее преобразуем:

$$y(t+1)-2y(t)+y(t-1)=\underline{C}+cy(t)+ry(t)-ry(t-1)+I-y(t)-y(t)+y(t+1)=$$
$$=\underline{C}+I-(1-c)y(t)-(1-r)[y(t)-y(t-1)]$$

(17)

Перейдем к непрерывному времени $\Delta t \to 0$:

$$\frac{1}{1-c}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1-r}{1-c}\cdot\frac{dy}{dt}+y=\frac{I+\underline{C}}{1-c} \qquad (18)$$

Получено линейное неоднородное уравнение второго порядка. Общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений.

Найдем общее решение линейного однородного уравнения:

$$\frac{1}{1-c}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1-r}{1-c}\cdot\frac{dy}{dt}+y=0 \qquad (19)$$

Для этого необходимо сделать замену $y=e^{\lambda t}$. Тогда получим:

$$\frac{1}{1-c}\lambda^2+\frac{1-r}{1-c}\lambda+1=0 \qquad (20)$$

Общее решение однородного уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$:

$$y_{о.о.}=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t} \qquad (21)$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$y_{ч.н.}=\frac{I+\underline{C}}{1-c} \qquad (22)$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{о.н.}=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\frac{I+\underline{C}}{1-c} \qquad (23)$$

Частное стационарное решение в этом случае совпадает с решением в модели Кейнса:

$$y_E=\frac{I+\underline{C}}{1-c} \qquad (24)$$

Если рассмотреть небольшие отклонения от точки равновесия, вызванные некоторым внешним воздействием, то можно обнаружить, что система не всегда будет устойчивой. Экономика, описываемая моделью Самуэльсона-Хикса, устойчива при $0<r<1$ и неустойчива при $r\geq 1$.

Литература

1. Колемаев, В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 061800 «Математические методы в экономике» / В.А. Колемаев – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295 с.
2. Райзберг, Б.А. Современный экономический словарь. / Б.А.Райзберг, Л.Ш. Лозовский, Е.Б. Стародубцева – М.:ИНФРА-М, 2008. – 512 с.

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А.О. Желдашева, Д.Х. Топалова
Кабардино-Балкарский государственный Университет им. Х.Б. Бербекова, г. Нальчик

Рассмотрим смешанное уравнение

$$u_{xx}-\frac{1-sign(t)}{2}u_{tt}-\frac{1+sign(t)}{2}u_t=0, \qquad (1)$$

в конечной односвязной области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J$, где Ω_1 – область ограниченная отрезками AB, BC, CO и OA прямых $x=\ell$, $t=T$, $x=0$, $t=0$ соответственно; Ω_2 – характеристический треугольник ограниченный отрезком $OA=\overline{J}$ оси абсцисс и двумя характеристиками $AD: x-t=\ell$, $OD: x+t=0$ уравнения (1) выходящими из точек A,O и пересекающимися в точке $D\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.