СУБОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ, ЛИНЕАРИЗУЕМЫЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

В.Н. Афанасьев, П.В. Орлов
МИЭМ, Москва
afanval@mail.ru

Введение

В данной работе разрабатывается метод синтеза гарантированного управления нелинейной системой [1], подвергающейся внешним возмущениям. Основы метода линеаризации нелинейной системы обратной связью изложены в [2]. Предложено производить синтез управляющих воздействий на модели исходной системы при ее линеаризации обратной связью. При этом существенно изменяется и вид исходного функционала качества. Проведено математическое моделирование системы управления нелинейным объектом (синхронный генератор [3]).

1. Нелинейная система, линеаризуемая обратной связью

Рассмотрим нелинейную стационарную системы, у которой m входов и n состояний:

$$\frac{d}{dt}x = f(x) + g(x)u + h(x)w,\ x(0) = x_0\ , \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$, $f(0) = 0$ и $f, g_1, ..., g_m$ гладкие (C^∞) векторные поля, определённые на открытом множестве U_x, содержащем начало.

Задан функционал качества

$$J(x,u,w) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^T \left\{ y^T(t)Q(x)\,y(t) + u^T(t)R(x)u(t) - w^T(t)P(x)w(t) \right\} dt. \tag{2}$$

Предположим, что система (1) линеаризуема на U_x, т.е. существует координатное преобразование (диффеоморфизм) $z = \Phi(x)$, определённое на U_x, и пара функций обратной связи $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, также определённых на U_x, такие что $\beta(x)$ невырожденная для любого $x \in U_x$ и

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}(f(x) + g(x)\alpha(x))\right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = A_0 z,\ \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}(g(x)\beta(x))\right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = B_0, \tag{3}$$

где

$$A_0 = diag\ \ (A_1, ..., A_m),\ \ B_0 = diag\ \ (b_1, ..., b_m),\ \ A_i \in R^{d_i \times d_i},\ b_i \in R^{d_i \times 1},$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \text{где } i = 1,...,m, \text{ и } \sum_{i=1}^{m} d_i = n. \tag{4}$$

В этом случае, применив закон обратной связи

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \tag{5}$$

к системе (1), где $v = (v_1,...,v_m)$ это новый вектор входа, совместно с преобразованием координат $z = \Phi(x)$, получим:

$$\frac{d}{dt} z = A_0 z + B_0 v,\ z(0) = x_0. \tag{6}$$

При этом функционал качества (2) принимает вид

$$\tilde{J}(z,v,w) = \frac{1}{2} z^T F(z) z + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \left\{ z^T Q(z) z + v^T R(z) v + 2 z^T N(z) v - w^T P w \right\} dt. \tag{7}$$

При применении к функционалу качества (7) диффеоморфизма $z = \Phi(x)$ и закона (5) будем иметь

$$\tilde{J}(z,v) = \frac{1}{2} (\Phi^{-1}(z))^T F \Phi^{-1}(z) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \Big\{ (\Phi^{-1}(z))^T Q \Phi^{-1}(z) +$$

$$+ (\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z))v)^T R(\alpha(\Phi^{-1}(z)) + \beta(\Phi^{-1}(z))v) - w^T P w \Big\} dt,$$

где $\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_1(\Phi^{-1}(z))}{n \cdot z_1} & \cdots & \dfrac{\alpha_1(\Phi^{-1}(z))}{n \cdot z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\alpha_m(\Phi^{-1}(z))}{n \cdot z_1} & \cdots & \dfrac{\alpha_m(\Phi^{-1}(z))}{n \cdot z_n} \end{bmatrix} = \theta(z),\ diag\left(\dfrac{\Phi_1^{-1}(z)}{z_1},...,\dfrac{\Phi_n^{-1}(z)}{z_n} \right) = \zeta(z),$

$\zeta(z) F \zeta(z) = F(z),\ \zeta(z) Q \zeta(z) + \theta(z)^T R \theta(z) = Q(z),\ \theta(z)^T R \beta(\Phi^{-1}(z)) = N(z),$

$\beta(\Phi^{-1}(z))^T R \beta(\Phi^{-1}(z)) = R(z).$

1. Математическая модель генератора

Динамика синхронного генератора в установившемся режиме может быть задана динамической системой вида [2]

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i + \sum_{j=1}^{k} h_j(x) w_j,\quad x(0) = x_0, \tag{7}$$

где

$$f(x)=\begin{bmatrix} x_2 \\ -p\left[(1+x_3)\sin(x_1+d)-\sin d\right]-qx_2 \\ -rx_3+s\left[\cos(x_1+d)-\cos d\right] \end{bmatrix},\quad g(x)=h(x)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \qquad (8)$$

где p,q,r,s,d - действительные параметры. Координатное преобразование для (7) будет иметь вид $z=\Phi(x)$, где

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -p\left[(1+x_3)\sin(x_1+d)-\sin d\right]-qx_2 \end{bmatrix},$$

совместно с функциями обратной связи

$$\alpha(x)=\frac{-px_2(1+x_3)\cos(x_1+d)-pq\sin d+q^2x_2}{p\sin(x_1+d)}+ \quad \beta(x)=-\frac{1}{p\sin(x_1+d)},$$
$$+q(1+x_3)+rx_3-s\left[\cos(x_1+d)-\cos d\right],$$

при этом матрицы A_0, B_0, $D(z)$ будут иметь вид:

$$A_0=A_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ B_0=b_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ D(z)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot h(x)\right]_{x=\Phi^{-1}(z)}=\begin{bmatrix}0\\0\\-p\sin(z_1+d)\end{bmatrix},$$

для всех $x\in U_x=\{x:0<x_1+d<\pi\}$. В этом случае,
$U_z=\Phi(U_x)=\{x:0<z_1+d<\pi\}$.

Моделирование произведено при параметрах объекта

$$p=136.0544,\ q=4,\ r=0.4091,\ s=0.2576,\ d=\pi/4;$$

начальных условиях $x(0)=\begin{pmatrix}1 & 18 & -9\end{pmatrix}^T$; и весовых матрицах функционала (2)
$Q=diag\ (|x_1(0)|,|x_2(0)|,|x_3(0)|),\ R=0.0001,\ P=1000.$

В качестве помехи w использовался белый шум интенсивности $W=1$.

2. Результаты моделирования

Отметим, что при отсутствии управления система неустойчива. На рис. 1-3 представлены переходные процессы в системе при наличие управляющих сигналов.

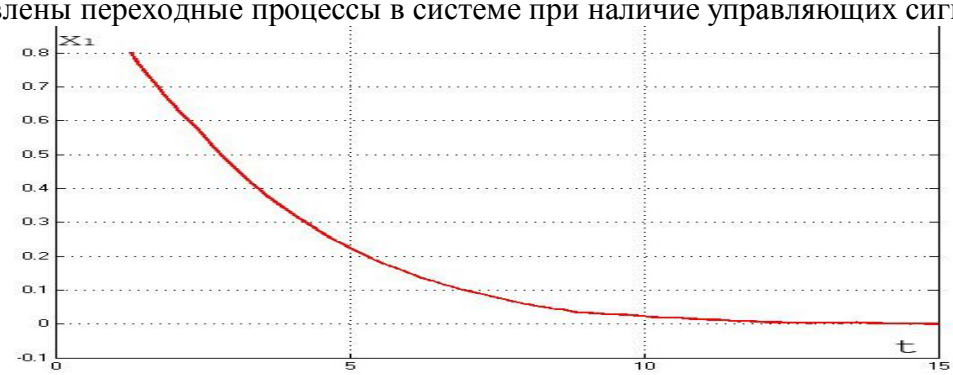

Рис. 1. График состояния x_1 при управляющем воздействии

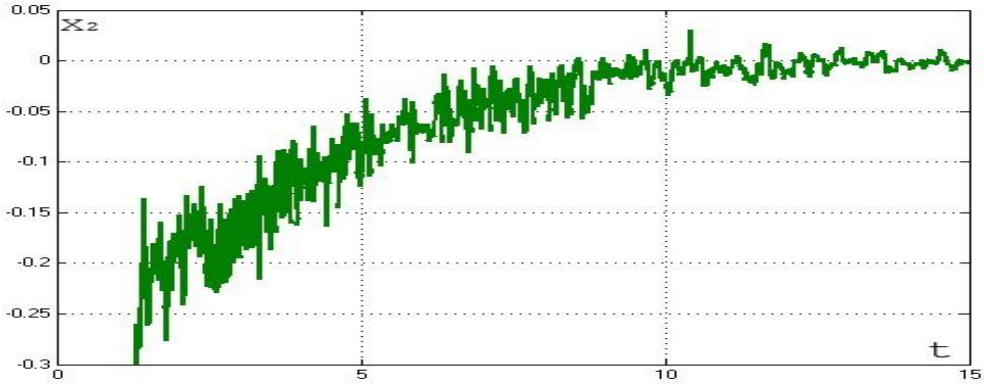

Рис. 2. График состояния x_2 при управляющем воздействии

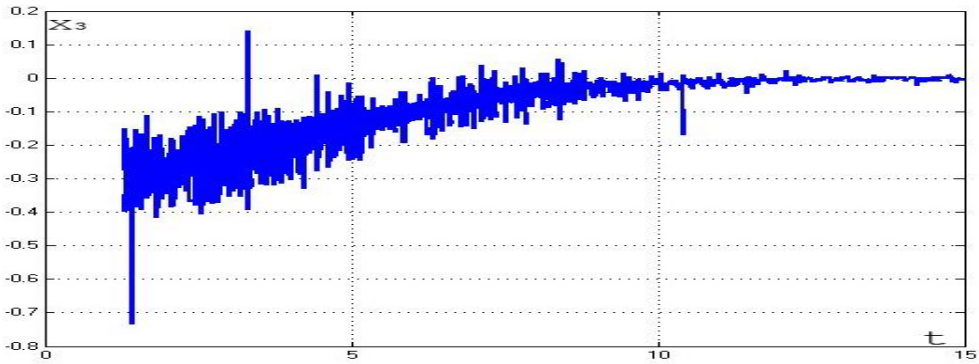

Рис. 3. График состояния x_3 при управляющем воздействии

Графики (Рис. 1, 2, 3) говорят об успешной стабилизации объекта при управляющем воздействии.

Проведённое исследование изменения функционала качества при линеаризации динамической системы говорит о том, что линейная модель системы, полученной в результате преобразования координат совместно с законом обратной связи, влечёт за собой нелинейность этого функционала. Следовательно, дальнейшее исследование может быть сформулировано в виде задачи линеаризации квадратичного функционала качества с весовыми матрицами, зависящими от состояния.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 10-08-00677.

Литература

1.Афанасьев В.Н. Концепция гарантированного управления в задачах управления неопределенными объектами. Известия РАН. ТиСУ. №1, 2010.

2.Alberto Isidory. Nonlinear Control Systems. Springer. London. 3rd edition. 1995.

3.Fontenla F., Haimovich H., Kofman. E., Seron. M. Control design with guaranteed ultimate bound for feedback linearizable systems. – Proceeding of the 17th World Congress IFAC, Seoul, Korea, 2008.