ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 22 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2015

# Шестнадцатый Всероссийский симпозиум

## *по прикладной и промышленной математике*

*(осенняя открытая сессия)*

**27 сентября — 4 октября 2015 г.**
**г. Сочи-Дагомыс**

Научные доклады
Часть I

Под редакцией *И. А. Соколова*,
*А. Р. Симоняна*, *В. И. Хохлова*

МОСКВА • «ОПиПМ» • 2015

# XVI ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ
## (осенняя открытая сессия)

### ОРГАНИЗАТОРЫ И СПОНСОРЫ СИМПОЗИУМА

- Управление по науке и образованию Администрации г. Сочи
- Сочинский государственный университет, в т. ч. факультет информационных технологий и математики
- Сочинский научно-исследовательский центр РАН *
- Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
- Академия криптографии Российской Федерации
- Ред. журнала «Информатика и ее применения»,
- Ред. журнала «Обозрение прикладной и промышленной математики» (ОПиПМ),
- Ред. журнала «Прикладная информатика»,
- Ред. журнала «Теория вероятностей и ее применения» (Научное издательство ТВП)
- Российский Фонд фундаментальных исследований

* В стадии согласования.

**Объединенный Оргкомитет**

Академик И. А. Соколов (председатель),
академик В. А. Бабешко, академик А. А. Боровков, академик $\boxed{\text{С. С. Григорян}}$,
академик А. Б. Жижченко, академик И. А. Ибрагимов, академик Б. С. Кашин,
академик В. И. Колесников, академик А. Б. Куржанский, академик В. П. Маслов,
академик А. Н. Ширяев, академик В. П. Шорин, член-корр. Д. А. Губайдуллин,
член-корр. С. В. Кисляков, член-корр. В. А. Сойфер, член-корр. А. Ф. Титов,
Л. Ф. Вьюненко, А. М. Зубков, В. Ф. Колчин, О. Н. Медведева, Г. М. Романова,
Г. А. Свиридюк, А. Р. Симонян, Г. А. Симонян,
В. И. Хохлов, А. Л. Шестаков, С. Я. Шоргин.

**Оргбюро Всероссийских симпозиумов по прикладной и промышленной математике**

Академик И А. Соколов (председатель),
В. Ф. Колчин (зам. председателя), В. И. Хохлов (зам. председателя),
В. И. Астафьев, Г. И. Белявский, Л. И. Герасимова (секретарь), В. В. Мазалов,
А. Р. Симонян

**Локальный Оргкомитет**

А. Р. Симонян (председатель), Е. И. Улитина (ученый секретарь),
С. А. Киян, И. Л. Макарова, С. Ж. Симаварян, М. А. Сунцова, О. А. Шуляк

**НАУЧНАЯ ПРОГРАММА СИМПОЗИУМА** (список минисимпозиумов) опубликована на с. 433.

**СЕССИЯ ПОСВЯЩЕНА XXV-летию Научного издательства «ТВП»**

# XVI ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ
## (осенняя открытая сессия)

СОДЕРЖАНИЕ

воохранения, причем наиболее сильно с притоком населения коррелированно именно количество учреждений здравоохранения. Безусловно, исследования в этом направление могут быть дополнены и продолжены.

Моделирование величины притока населения в регион проводилось в два этапа. На первом этапе при помощи модели бинарного выбора оценивалась вероятность притока населения (1 — наблюдается приток населения, 0 — наблюдается отток). Изучение предельных эффектов позволило сравнить силу влияния факторов на наличие положительного притока. Так, высокий отрицательный предельный эффект показал фактор стоимости бензина.

| Реал \ Выч | 0 | 1 | Сумма |
|---|---|---|---|
| 0 | 33 | 2 | 35 |
| 1 | 9 | 9 | 18 |
| Сумма | 42 | 11 | 53 |

Приведем пример таблицы попаданий и промахов модели бинарного выбора по 7 факторам. Точность угадывания составляет 79,2%.

На втором этапе моделируется собственно величина притока населения. При этом целесообразно строить как модели для прогнозирования величины притока любого знака, так и модели для наиболее вероятного знака притока населения по соответствующей части выборочной совокупности. Модели множественной линейной регрессии оказались в этих случаях недостаточно точными. Преобразуя исходные статистические данные, удается значительно повысить их предсказательную силу. В качестве примера представлена модель $y = a_0+a_1x_1^2+a_2/x_2+a_3x_3^2+a_4\mathrm{Ln}\,(x_4)+a_5x_5^{3/2}+a_6x_6^3+a_7x_7$, для которой коэффициент детерминации $R^2 = 0,802$ . Для линейной модели с теми же переменными значение коэффициента корреляции равно 0,582. Проверка моделей для регионов, не вошедших в обучающую выборку, подтвердила более высокую надежность нелинейной модели.

**Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, С. В. Курочкин** (Москва, ЦЭМИ РАН, ВЦ РАН). **О вероятности разорения в модели с диффузионным возмущением процесса риска и инвестированием капитала в рисковый актив.**

Рассматривается модель коллективного риска, в которой динамика капитала $X_t$ страховой компании описывается уравнением

$$X_t = u + ct + \int_0^t [\alpha(\mu - r) + r]X_s ds + \sigma \int_0^t \alpha X_s dw_s + \sigma_1 \int_0^t dw_s^1 - Y_t, \quad t \geqslant 0. \qquad (1)$$

Здесь $u$ — начальный капитал, $0 < c$ — скорость поступления страховых премий, $Y_t$ — процесс агрегированных страховых выплат, предполагаемый составным пуассоновским с интенсивностью $\lambda > 0$ и функцией $F(z)$ распределения скачков, определяющих размеры выплат, $F(0) = 0$. Число $\alpha$ определяет долю текущего капитала в каждый момент времени, вкладываемого в рисковый актив (акции), цена $S_t$ которого моделируется геометрическим броуновским движением

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dw_t), \quad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

где $\mu$ — ожидаемая доходность акции, $0 < \sigma$ — ее волатильность, $w_t$ — стандартный винеровский процесс, не зависящий от процесса $Y_t$ ; оставшаяся доля капитала инвестируется в безрисковый актив (банковский счет) при процентной ставке $r \geqslant 0$. Предпоследнее слагаемое в (1) (в котором $\sigma_1 > 0$, $w_t^1$ — стандартный винеровский процесс), добавляющее диффузионное возмущение в систему, можно рассматривать или как дополнительную неопределенность, являющуюся следствием влияния экономической среды, или как составляющую процесса страховых премий, позволяющую (при некоторых естественных предположениях) представить этот процесс как случайный. В случае $\alpha = r = 0$ (т. е. при отсутствии инвестиций) соотношение (1) описывает динамику капитала в классической модели риска с диффузионным возмущением (см., например, [1]):

$$R_t = u + ct - Y_t + \sigma_1 w_t^1, \quad t \geqslant 0. \qquad (3)$$

Предполагается, что процессы $w_t^1$ и $Y_t$ также независимы, и, кроме того, в модели (1) $E(dw_s dw_s^1) = \rho ds$ для некоторого коэффициента корреляции $\rho$.

Обозначим $\tau = \inf\{t : X_t < 0\}$ — момент разорения; тогда $\psi(u) = \mathbf{P}(\tau < \infty)$ — вероятность разорения в течение бесконечного промежутка времени, а $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$ — вероятность неразорения (ВНР). Вероятность разорения для модели (1) при $\alpha = 0$ и $r > 0$ (инвестиции только в безрисковый актив) изучалась в [2].

Всюду далее предполагается, что страховые требования имеют экспоненциальное распределение:

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \quad m > 0, \quad x \geqslant 0. \tag{4}$$

Тогда, в частности, для модели без инвестиций (3) при выполнении условия положительности «нагрузки безопасности», т.е. при $c > \lambda m$, ВНР имеет вид: $\varphi(u) = 1 - C_1 e^{\theta_+ u} - C_2 e^{\theta_- u}$, где $\theta_\pm = -\left[\frac{1}{2m} + \frac{c}{\sigma_1^2}\right] \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2m} + \frac{c}{\sigma_1^2}\right)^2 - \frac{2}{\sigma_1^2}\left(\frac{c}{m} - \lambda\right)} < 0$, $C_1 = \theta_-(\theta_- + 2c/\sigma_1^2)m/(\theta_+ - \theta_-)$, $C_2 = 1 - C_1$. Эта функция является точным решением приведенной ниже задачи (5)–(9) в вырожденном случае — при $\alpha = r = 0$.

Далее приводятся результаты исследования ВНР в модели (1) при выполнении (4), когда ВНР оказывается решением следующей сингулярной задачи с ограничениями для интегродифференциального уравнения (ИДУ) второго порядка:

$$\frac{1}{2}(b^2u^2 + 2\rho b\sigma_1 u + \sigma_1^2)\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda(J_m\varphi)(u) = 0, \ 0 < u < \infty, \tag{5}$$

$$\varphi(+0) = 0, \tag{6}$$

$$(\sigma_1^2/2)\varphi''(+0) + c\varphi'(+0) = 0, \tag{7}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{8}$$

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to\infty} \varphi'(u) = 0. \tag{9}$$

Здесь введены обозначения:

$$a = \alpha(\mu - r) + r, \quad b = \alpha\sigma, \tag{10}$$

$$(J_m\varphi)(u) = \frac{1}{m}\int_0^u \varphi(u - x)\exp(-x/m)dx,$$

где $J_m$ — вольтерров интегральный оператор, $J_m : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$, $C[0,\infty)$ — пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций.

ИДУ (5) формально может быть получено с использованием понятия инфинитезимального оператора однородного марковского процесса (1). Обычно в подобных задачах делаются попытки проводить доказательство гладкости ВНР для правомерности выводов относительно ее поведения, сделанных на основе изучения семейства решений уравнения и выделения из него единственного решения с использованием дополнительных ограничений и условий (см., например, [2]; для классической модели Крамера–Лундберга с инвестициями, т.е. для модели (1) при $\sigma_1 = 0$, см. [3]). При таком подходе эти дополнительные условия для решения, определяющего ВНР (например, предельное условие на бесконечности вида (9)), также требуют доказательства с изучением вероятностного поведения самого случайного процесса (см, например, [4]).

Здесь применяется другой подход, основанный на принципе достаточности, предложенном в [5] и развитом в [6]. При таком подходе доказывается, что если гладкое (в данном случае — дважды непрерывно дифференцируемое) решение соответствующим образом поставленной задачи для ИДУ существует, то это решение определяет ВНР в исходной задаче; при этом не требуется ни доказательства дифференцируемости, ни отдельного обоснования условий. Используя тот факт, что доказательство утверждения «теоремы достаточности», приведенное в [6], легко переносится на рассматриваемый здесь случай, остается свести задачу исследования ВНР в модели (1) к задаче исследования существования и свойств решения задачи (5)–(9).

Отметим здесь только, что условие (6) является следствием наличия аддитивной диффузионной составляющей в (1): разорение неминуемо в нулевом состоянии. Следствием этого факта и самого ИДУ является условие (7).

Упрощающим обстоятельством для моделей с экспоненциальными распределениями является тот факт, что исходные задачи для ИДУ сводятся к эквивалентным задачам для ОДУ более высоких порядков. Для изучения модели Крамера-Лундберга с инвестициями этот подход был применен нами в [7]; см. также [8], где, кроме того, приведены результаты исследования модели со стохастическими премиями.

**Теорема.** *Пусть в ИДУ* (5) *все параметры фиксированы, причем* $a$, $b$, $c$, $m$, $\lambda$, $\sigma_1$ *— положительные числа,* $|\rho| < 1$, *и выполняется условие «надежности портфеля активов»:* $2a/b^2 > 1$, *где* $a$, $b$ *определены в* (10). *Тогда:*

1) *решение* $\varphi(u)$ *сингулярной задачи с ограничениями* (5)–(9) *существует и единственно;*

2) *указанное решение определяет ВНР для процесса* (1) *и является неубывающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией;*

3) *при больших* $u$ *решение* $\varphi(u)$ *представимо в виде*

$$\varphi(u) = 1 - K\, u^{1-2a/b^2}\,[1 + o(1)], \tag{11}$$

*где* $0 < K$ *— постоянная (значение* $K$, *вообще говоря, не может быть найдено методами локального анализа).*

Заметим, что представление на бесконечности (11) для ВНР имеет также место в других моделях с инвестициями: в классической модели и ее модификации со стохастическими премиями (с экспоненциальными распределениями; см., например, [4], [7], [8]), а также в чисто диффузионной модели [9].

Работа Т. А. Белкиной поддержана РФФИ (код проекта 13-01-00784-а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Dufresne F., Gerber H. U.* Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. — Insurance: Mathematics and Economics, 1991, v. 10, p. 51–59.
2. *Wang G.* A decomposition of the ruin probability for the risk process perturbed by diffusion. — Insurance: Mathematics and Economics, 2001, v. 28, p. 49–59.
3. *Wang G., Wu R.* Distributions for the risk process with a stochastic return on investments. — Stoch. Proc. and Appl., 2001, v. 9, p. 329–341.
4. *Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous. — Finance Stochast., 2002, v. 6 (2), p. 227–235.
5. *Paulsen J., Gjessing H. K.* Ruin theory with stochastic return on investments. — Adv. Appl. Probab., 1997, v. 29 (4), p. 965–985.
6. *Belkina T. A.* Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability. — Markov Processes and Related Fields, 2014, v. 20, p. 505–525.
7. *Belkina T., Konyukhova N., Kurochkin S.* Singular problems for integro-differential equations in dynamic insurance models. — Differential and Difference Equations with Applications/Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2013, v. 47, p. 27–44.
8. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.* Сингулярные начальные и краевые задачи для интегродифференциальных уравнений в динамических моделях страхования с учетом инвестиций. — Современная математика. Фундаментальные направления, 2014, т. 53, с. 5–29.
9. *Norberg R.* Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type. — Stoch. Proc. and Appl., 1999, v. 81, p. 255–269.