



5. Предлагаемый метод построения математических моделей связанных движений в системах с несколькими степенями свободы может рассматриваться как развитие энергетического метода приближенного определения частот собственных колебаний, отличающееся возможностями получения точных, а не приближенных результатов.

Авторы статьи выражают благодарность аспиранту Научно-образовательного центра ИргГУПС Д. Х. Нгуену за участие в совместной работе и проведение вычислительного эксперимента.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вибрации в технике : справочник. В 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. М. : Машиностроение. 1978. 352 с.
2. Ден-Гартог Д.П. Механические колебания. М. : Физматгиз, 1960. 574 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Теория колебаний в инженерном деле / пер. с англ. Л.Г. Корнейчука ; под. ред. Э.И. Григолюка. М. : Машиностроение, 1985. 472 с.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний. М. : Наука, 1968. 650 с.
5. Вибрации в технике : справочник. В 6 т. Т.5. Измерения и испытания / под ред. М.Д. Генкина. М. : Машиностроение. 1981. 496 с.
6. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания : справочник. В 3 т. Т. 1. М. : Машиностроение, 1968. 567 с.
7. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М. : Наука, 1972. 466 с.
8. Елисеев С.В., Резник Ю.И., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск : ИГУ, 2008. 523 с.
9. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Каимов Е.В. К вопросу о теории рычажных связей в динамике механических колебательных систем // Вестник ИрГТУ. 2015. № 12 (107). С. 30-40
10. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Нгуен Д.Х., Цыган В.В. О связях между координатами движения в механических колебательных системах с рычажными устройствами // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 2 (26). С. 7-13.
11. Соотношения координат движения элементов механических колебательных систем как форма проявления рычажных связей / С.В. Белокобыльский и др. // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 3 (27). С. 8-14.

УДК 519.624.3

к. т. н., научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова, СО РАН, тел. (3952) 453-045, e-mail: tz@icc.ru

Аникин Антон Сергеевич, программист, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова, СО РАН, тел. (3952) 453-545, e-mail: anton.anikin@gmail.com

Финкельштейн Евгения Александровна, программист, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова, СО РАН, тел. (3952) 453-045, e-mail: evgeniya.finkelstein@gmail.com

Бекларян Армен Левонович, преподаватель, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», тел. (495) 443-1602, e-mail: abeklaryan@hse.ru

Белоусов Федор Анатольевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Центральный экономико-математический институт РАН, тел. (499) 724-1659, e-mail: sky_tt@list.ru

ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

T. S. Zarodnyuk, A. S. Anikin, E. A. Finkelshtein, A. L. Beklaryan, F. A. Belousov

THE TECHNOLOGY FOR SOLVING THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR SYSTEMS OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF POINTWISE TYPE

Аннотация. Рассматривается класс нелинейных функционально-дифференциальных уравнений, включающий уравнения с отклоняющимся аргументом различных видов – с запаздыванием и опережением, а также сочетающих оба данных элемента.

Предлагаемая технология исследования краевых задач основана на методе Рунге и сплайн-коллокационных подходах. Для решения задач рассматриваемого класса траектории системы дискретизируются на сетке с постоянным шагом и формулируется обобщенный функционал невязки, включающий как взвешенные невязки исходного дифференциального уравнения, так и невязки краевых условий.

В работе рассматривается небольшая коллекция тестовых задач, сформированная по традиционной методике, и результаты вычислительных экспериментов, выполненных для всех задач из сформированной коллекции.

Ключевые слова: краевая задача, функционально-дифференциальное уравнение точечного типа, программный комплекс.

Abstract. A class of nonlinear functional-differential equations, including equations with deviating argument of various types with time-lag and advance, as well as combine both of these elements is considered.

The proposed technology for solving boundary value problems is based on the Ritz method and spline collocation approaches. To solve the problem we discretized system trajectories on the grid with a constant step and formulate the generalized residual functional, including both weighted residuals of the original differential equation and residuals of boundary conditions.

The report examines a small collection of test problems designed with traditional technique. The results of computational experiments are carried out for all the problems from the test collection.

Keywords: boundary value problem, functional differential equation of pointwise type, software.

Введение

Функционально-дифференциальные уравнения точечного типа (ФДУТТ), являясь регулярным расширением класса обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), включают как частные случаи, дифференциальные уравнения с «запаздыванием» и «опережением», так и другие, более сложные варианты динамических систем с отклоняющимся аргументом. Интерес к таким моделям существенно возрос в последние годы в связи с требованиями приложений: с применением ФДУТТ моделируются многие процессы в экономике, технике, биологии, социологии, медицине и других научно-технических областях. Для систем такого типа разработана глубокая качественная теория, аналитически исследован ряд прикладных моделей: задача о распространении бегущих волн в однородном бесконечно длинном упругом стержне, краевая задача Эйлера – Лагранжа для задачи вариационного исчисления и другие (см., напр., [1]). Однако проблема создания надежных численных методов для решения систем ФДУТТ в общей постановке пока остается открытой.

В основе одного из важнейших современных подходов к исследованию систем с функционально-дифференциальными операторами лежит трактовка Н. Н. Красовским решения уравнения с запаздывающим аргументом как интегральной линии в расширенном фазовом пространстве функций. Движение в этом фазовом пространстве в каждый момент времени задается куском траектории, зависящим от интегральной линии в стандартном конечномерном расширенном фазовом пространстве. На этом пути получены теоремы существования и единственности решения для начальной задачи, описана структура пространства решений линейных уравнений, исследованы ограниченные и периодические решения и т. д. Вместе с тем указанный подход неприменим к опережающе-запаздывающим уравнениям (функционально-дифференциальным уравнениям точечного типа), которые, в частности, возникают как уравнения Эйлера – Лагранжа для задачи оптимального управления с запаздывающим аргу-

ментом. При исследовании дифференциальных уравнений такого типа известны два диаметрально противоположных подхода.

В первом случае такие уравнения рассматриваются как принципиально новый класс по отношению к классу обыкновенных дифференциальных уравнений. Для них исследуют все многообразие новых свойств, которым удовлетворяют решения подобных уравнений.

Во втором случае такие уравнения рассматриваются как расширение класса обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот подход основан на изучении ряда характеристик, т. к. для уравнений опережающе-запаздывающего типа нарушаются известные свойства обыкновенных дифференциальных уравнений. К таким свойствам относятся: существование и единственность решения в заданном классе функций; непрерывная зависимость решения от начальных и краевых условий; точечная полнота решений; n -параметричность пространства решений; «гладкость» решения; свойство «грубости» уравнения и т. д. Для уравнений опережающе-запаздывающего типа получены неулучшаемые условия, при которых возможно расширение рассматриваемого класса задач [1].

В данной работе предложен подход к исследованию класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений, включающего уравнения с отклоняющимся аргументом различных видов – с запаздыванием и опережением, а также сочетающих оба данных элемента (см., напр., [2, 3]).

1. Постановка начально-краевой задачи

Рассматривается основная начально-краевая задача

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), t \in B, \quad (1)$$

с краевым условием

$$\dot{x} = \phi(t), t \notin B, \quad (2)$$

и начальным условием

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \bar{x} \in R^n, \bar{t} \in R. \quad (3)$$



Здесь $B = [t_0, t_1]$; $R = [t_0, +\infty]$, а функции $q_j(t)$, $j = \overline{1, s}$, являются гомеоморфизмами прямой, сохраняющими ориентацию. В ситуации общего положения, когда отклонения аргумента произвольны, мы имеем задачу с нелокальными начальными краевыми условиями.

Все возникающие особенности для ФДУТТ являются следствием потери константой Липшица тех функций, которые она выполняет для ОДУ.

2. Существование и единственность решения

Пусть L – константа Липшица для правой части $f(\cdot)$ ФДУТТ (1),

$$h_i = \max_{t \in R} |q_i(t)|, \quad i = \overline{1, \dots, s}.$$

Для $\delta > 0$ определим неравенство

$$L \sum_{i=1}^s e^{\delta |h_i|} < \delta. \quad (4)$$

Очевидно, что для ОДУ выполняются условия $h_i = 0$, $i = \overline{1, \dots, s}$, для таких уравнений найдется $\bar{\delta} > 0$ такое, что для всех $\delta \in (\bar{\delta}, +\infty)$ неравенство (4) выполняется.

Если уравнение не является ОДУ, то неравенство (4) либо не имеет ни одного решения относительно $\delta > 0$, либо найдутся $\delta_2 > \delta_1 > 0$ такие, что для любого $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$ неравенство (4) выполняется.

Теорема [1]. Если при каком-либо $\delta > 0$ выполняется неравенство (4), то для основной начально-краевой задачи (1) – (3) существует решение, асимптотическое поведение которого мажорируется сверху экспоненциальной функцией $e^{\delta |t|}$. Такое решение единственное.

Следствие. В условиях теоремы для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ решение существует в классе функций, асимптотически мажорируемых экспоненциальной функцией $e^{(\delta_1 + \varepsilon)|t|}$, и оно единственное в классе функций, асимптотически мажорируемых экспоненциальной функцией $e^{(\delta_2 - \varepsilon)|t|}$.

В силу приведенной теоремы, если ограничиться решениями с асимптотическим поведением, указанным в теореме, то для них выполняются все свойства решений ОДУ: существование и единственность начально-краевой задачи; непрерывная зависимость решения от начально-краевых условий; n -параметричность пространства решений; точечная полнота решений; задание движения вдоль решений как гомеоморфизма фазового

пространства; свойство «грубости» уравнения как непрерывная зависимость решения от ее правой части.

В работе предлагается сведение представленной начально-краевой задачи к задаче оптимизации с целью дальнейшего ее исследования путем применения разработанной вычислительной технологии.

3. Постановка задачи оптимизации

Динамика системы на основном интервале определения независимой переменной $t \in [t_0, t_1]$ описывается уравнениями

$$0 = F_i(x(g(t)), \dot{x}(g(t))), \quad i = \overline{1, \dim_n},$$

где $F_i : R^{\dim_n} \times R^{\dim_n} \rightarrow R^1$. На расширенном интервале изменения независимой переменной $t \in [t_N, t_K]$, $t_N \leq t_0$, $t_K \geq t_1$, за пределами основного интервала, доопределяются значения производных фазовых переменных $\dot{x}_i^L = h_i^L(t)$, $t \in [t_N, t_0]$, $i = \overline{1, \dim_n}$ и $\dot{x}_i^R = h_i^R(t)$, $t \in [t_1, t_K]$, $i = \overline{1, \dim_n}$. Фазовые переменные на расширенном интервале времени должны удовлетворять ограничениям $x_l \leq x(g(t)) \leq x_g$, x_l^i , x_g^i , $i = \overline{1, \dim_s}$. Функции гомеоморфизмов $g_i(s)$, $i = \overline{1, \dim_s}$ задаются на интервале $s \in [0, 1]$ и должны удовлетворять условиям монотонности

$$\frac{dg}{ds} > 0, \quad i = \overline{1, \dim_s}.$$

Краевые условия задаются функционалами $K_j(x(g(\tau_j)), \dot{x}(g(\tau_j))) = 0$, $j = \overline{1, \dim_l}$, $\tau_j \in [t_0, t_1]$. Таким образом, размерности задачи определяются целочисленными переменными \dim_n , \dim_s , \dim_r , \dim_l . Все элементы математической постановки задачи должны удовлетворять соответствующим естественным ограничениям гладкости и непротиворечивости.

Для решения поставленной задачи формируется свертка функционалов невязок вида

$$I(x(t)) = \sum_{i=1}^{\dim_n} v_i^N \int_{t_N}^{t_0} [\dot{x}_i(g(t)) - h_i^L(t)]^2 dt + \sum_{i=1}^{\dim_n} v_i^K \int_{t_1}^{t_K} [\dot{x}_i(g(t)) - h_i^R(t)]^2 dt + \sum_{j=1}^{\dim_l} v_j^K K_j^2(x(g(\tau_j)), \dot{x}(g(\tau_j))) +$$



$$+ K_0(x(g(\tau_0)), \dot{x}(g(\tau_0))),$$

где $v_i^N, i = \overline{1, \dim_n}$ и $v_j^K, j = \overline{1, \dim_l}$ – весовые коэффициенты для невязок и краевых условий.

4. Вычислительная технология исследования нелинейных систем ФДУТТ

Предлагаемая технология исследования краевых задач основана на методе Ритца и сплайн-коллокационных подходах. Для решения задач рассматриваемого класса траектории системы дискретизируются на сетке с постоянным шагом и формулируется обобщенный функционал невязки, включающий как взвешенные невязки исходного дифференциального уравнения, так и невязки краевых условий. Для оценки производных от искомым траекторий системы используется методика «сплайн-дифференцирования», основанная на двух методах сплайн-аппроксимации: с помощью кубических натуральных сплайнов и с применением специального типа сплайнов, вторые производные которых на краях также управляются с помощью оптимизируемых параметров.

Для решения поставленных конечномерных задач оптимизации, в общем случае невыпуклых и овражных, реализован набор алгоритмов локальной оптимизации (квазиньютоновский метод BFGS, два варианта метода Пауэлла, метод Барзилаи – Борвейна, вариант метода доверительных областей, стохастические методы поиска в подпространствах размерности 3, 4 и 5 [4–6]) и алгоритмов глобальной оптимизации (метод случайного мултистарта, метод криволинейного поиска, туннельный метод, метод «парабол» и другие [7–10]). Предложенная технология включает алгоритм последовательного повышения точности аппроксимации – путем кратного увеличения числа узлов сетки дискретизации (см., напр., [11]), алгоритмы разностной оценки производных функционала – от первой до шестой степени точности включительно, методику последовательного повышения точности сплайн-дифференцирования.

Соответствующий программный комплекс OPTCON-F реализован на языке C под управлением операционных систем OS Windows, OS Linux и Mac OS с использованием компиляторов BCC 5.5 и GCC и предназначен для численного решения краевых задач, задач параметрической идентификации и оптимального управления для динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями точечного типа.

Основными режимами работы ПК являются диалоговый, пакетный и автоматизированный. В пакетном режиме процесс вычислений производится без участия пользователя, который заранее

сформировал для ПК как программную постановку задачи, так и набор инструкций для выполнения; результаты вычислений при этом периодически фиксируются в выходных файлах, а сам процесс вычислений отражается в файле протокола. Диалоговый режим полностью перекладывает задачу управления вычислениями на пользователя. Автоматизированный режим, реализуемый средствами диалоговой системы и макроинтерпретатора, представляет собой сочетание двух упомянутых режимов работы, при котором часть функций выполняется в диалоге, а часть автоматически, используя подготовленные заранее сценарии расчетов.

Вспомогательные режимы предназначены для обеспечения доступа пользователя к параметрам алгоритмов, для включения/выключения оптимизации границ (вторых производных) аппроксимирующих сплайнов, для автоматического выполнения предварительно сформированных сценариев расчетов, используются в пакетном и автоматизированном режимах (режим макроинтерпретатора).

5. Алгоритмы оптимизации, составляющие основу ПК OPTCON-F

Алгоритмическое наполнение комплекса включает набор алгоритмов локальной (унимодальной) и глобальной (нелокальной) оптимизации. Алгоритмы делятся (условно) также на основные алгоритмы (спуск с любого начального приближения) и алгоритмы-«доводчики» (уточнение экстремума). Длительность работы алгоритма ограничивается либо указанным числом итераций, либо достижением одного из критериев окончания – минимум нормы градиента для текущей точки меньше заданной пороговой величины, или алгоритм (при заданных величинах алгоритмических параметров) не может найти лучшего приближения.

Среди локальных алгоритмов, вошедших в ПК OPTCON-F: 1) партан-метод; 2) классический метод Пауэлла-Брента; 3) градиентный метод доверительных интервалов; 4) метод Барзилаи-Борвейна; 5) метод Ньютона с разностной оценкой матрицы – гессиана; 6) обобщенный квазиньютоновский метод; 7) прямо-двойственный метод градиентного спуска; 8) дифференциальный метод оптимизации Эйлера 2-го порядка; 9) Дифференциальный метод оптимизации Адамса 4-го порядка и другие.

В качестве алгоритмов «доводчиков» выступают: 1) адаптивная модификация метода Хука-Дживса; 2) стохастические поисковые методы в случайных подпространствах указанной (2, 3, 4



или 5) размерности; 3) локальная версия метода криволинейного поиска.

Нелокальные алгоритмы, составляющие основу ПК: 1) «метод парабол» – комбинация покоординатного спуска с периодическим мультистартом и нелокальным одномерным поиском по алгоритму «парабол»; 2) нелокальный метод криволинейного поиска; 3) метод Лууса – Яколы; 4) метод «леса» – многовариантный адаптивный метод случайного мультистарта и другие.

Представим детальнее один из разработанных алгоритмов нелокального поиска, опирающийся на построение кубических вариаций управляющих функций. Данная вычислительная технология опирается на построение вспомогательных управляющих воздействий с помощью алгоритмов генерации случайных релейных, кусочнолинейных и сплайн-функций случайных вспомогательных управлений.

5.1. Алгоритм криволинейного поиска (кубические вариации управления)

0. Задаются алгоритмические параметры:

N_C – число итераций метода криволинейного поиска; N_P – стартовое число проб одномерного поиска.

1. Выбирается начальное управление $u^0(t) \in U, t \in T = [t_0, t_1]$.

2. Вычисляется значение функционала $I(u^0)$, выбираемое на данном этапе в качестве рекордного $I_{rec} = I(u^0), u_{rec}(t) = u^0(t)$.

На k -й итерации ($k \geq 0$).

3. Для всех $i = \overline{1,3}$.

3.1. Генерируется псевдослучайное вспомогательное управление $\bar{u}^i = \bar{u}^i(t) \in U, t \in T = [t_0, t_1]$.

3.2. Если $I(\bar{u}^i) < I_{rec}$, то $I_{rec} = I(\bar{u}^i)$ и $u_{rec}(t) = \bar{u}^i(t)$.

Переход на шаг 8.

4. Формируется управление:

$$u^k(\alpha, t) = \alpha^3 \times \left(\frac{-\bar{u}^1(t) - 3\bar{u}^2(t) + \bar{u}^3(t)}{6} + 0.5 \cdot u_{rec}(t) \right) + \alpha^2 \left(\frac{\bar{u}^1(t) + \bar{u}^2(t)}{2} - u_{rec}(t) \right) +$$

$$+ \alpha \left(\frac{-2\bar{u}^1(t) + 6\bar{u}^2(t) - \bar{u}^3(t)}{6} - 0.5 \cdot u_{rec}(t) \right) + u_{rec}(t),$$

такое, что $u^3(0, t) = u_{rec}, u^3(-1, t) = \bar{u}^1, u^3(1, t) = \bar{u}^2, u^3(2, t) = \bar{u}^3$.

5. $u^3(\alpha, t)$ проецируется на допустимую область:

5.1. Если $u^3(\alpha, t) < \underline{u}$, полагается

$$u^3(\alpha, t) = \underline{u}, t \in T = [t_0, t_1].$$

5.2. Если $u^3(\alpha, t) > \bar{u}$, полагается

$$u^3(\alpha, t) = \bar{u}, t \in T = [t_0, t_1].$$

6. Решается задача $\min_{\alpha \in [-1, 2]} I(u^3(\alpha, t))$.

7. Если $I(u^3(\alpha^*, t)) < I_{rec}$, то

$$I_{rec} = I(u^3(\alpha^*, t)) \text{ и } u_{rec} = u^3(\alpha^*, t).$$

8. Запоминаем I_{rec} и $u_{rec}(t)$.

Итерация завершена.

Реализованы также другие варианты алгоритма, опирающиеся на построение линейных и квадратичных вариаций управления (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Модификации алгоритма криволинейного поиска (КП)

Алгоритм КП	Вариант 1 (линейные вариации управления)	Вариант 2 (квадратичные вариации управления)	Вариант 3 (кубические вариации управления)
Алгоритм генерации управлений			
Алгоритм 1 (релейные функции)	+	+	+
Алгоритм 2 (сплайн-функции)	+	+	+
Алгоритм 3 (кусочнолинейные функции)	+	+	+

Вариации управления:

1) линейная вариация управления ($k = 1$)

$$u^k(\alpha, t) = \alpha(\bar{u}^1(t) - u_{rec}(t)) + u_{rec}(t), \alpha \in [0, 1];$$



2) квадратичная вариация управления ($k = 2$)

$$u^k(\alpha, t) = \alpha^2 \left(\frac{\bar{u}^1(t) + \bar{u}^2(t)}{2} - u_{rec}(t) \right) + \alpha \frac{\bar{u}^2(t) - \bar{u}^1(t)}{2} + u_{rec}(t), \alpha \in [-1, 1].$$

3) кубическая вариация управления (шаг 4), проецируются на допустимый параллелепипед (если $u^k(\alpha, t) < \underline{u}$, то $u^k(\alpha, t) = \underline{u}$; если $u^k(\alpha, t) > \bar{u}$, то $u^k(\alpha, t) = \bar{u}$, $t \in T = [t_0, t_1]$).

На 6-м шаге осуществляется поиск минимума целевой функции вдоль «кривых» на множестве достижимости с помощью алгоритма глобального одномерного поиска (комбинации золотого сечения и параболической интерполяции). Локальный спуск и глобальный поиск осуществляется на каждой итерации. С ростом числа итераций алгоритма генерируемые кривые все плотнее покрывают покрытие множества достижимости. В качестве примера приведем 3 задачи из тестовой коллекции задач оптимального управления [12]. На рис. 1–3 отражена динамика покрытия множества достижимости кривыми, на рис. 4 – оптимальные траектории и управление в тестовых задачах 01–03. Для расчетов использована модификация алгоритма КП с кубическими вариациями управления (вариант 3) и построением стартовых и вспомогательных управлений в виде релейных функций (табл. 1).

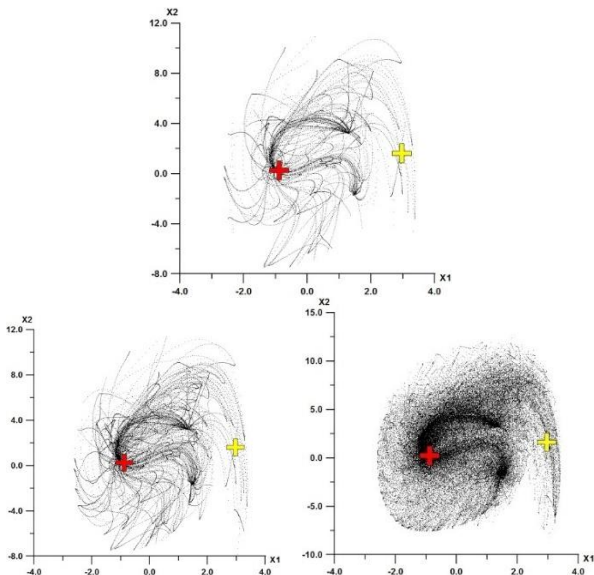


Рис. 1. Покрытие кривыми множества достижимости в тестовой задаче 01 (50, 100, 1000 итераций алгоритма КП)

Тестовая задача 01.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_1^3 + u,$$

$$x^0 = (1.5, -1.5), \quad x^1 = (0, 0), \quad u \in [-10, 10],$$

$$I(u) = 0.5 \int_{t_0}^{1.5} u^2 dt \rightarrow \min.$$

Решение получено за 8 сек процессорного времени и 30652 задачи Коши, минимальное значение функционала $I^* = 3,19404$.

Тестовая задача 02.

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = -\cos x_1 - t^2 u,$$

$$x^0 = (0, 0), \quad t \in [0, 1], \quad u \in [-20, 20],$$

$$I(u) = x_2(t_1) \rightarrow \min.$$

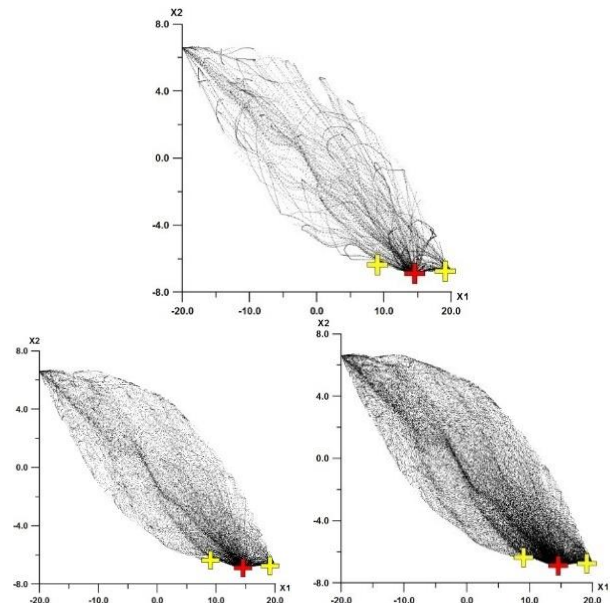


Рис. 2. Покрытие кривыми множества достижимости в тестовой задаче 02 (50, 100, 1000 итераций алгоритма КП)

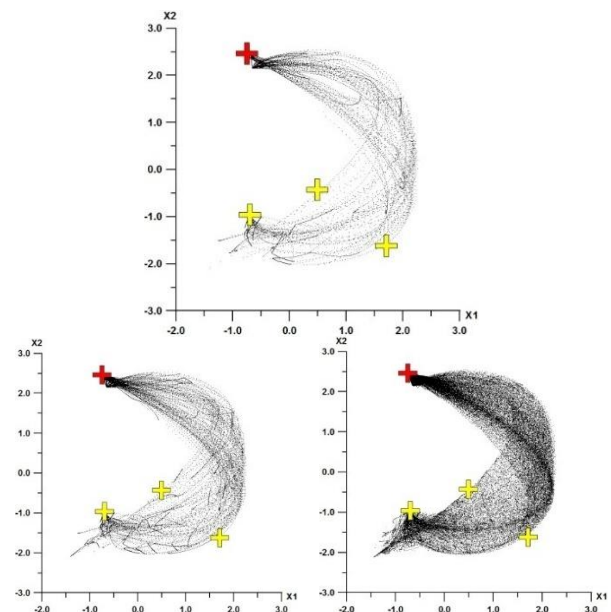


Рис. 3. Покрытие кривыми множества достижимости в тестовой задаче 03 (50, 100, 1000 итераций алгоритма КП)



Минимальное значение функционала $I^* = -6,85258$ получено за 4 сек процессорного времени и 29104 задачи Коши.

Тестовая задача 03.

$$\dot{x}_1 = 1 - x_2^2 + 0,5x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 u, \quad x^0 = (0,5; -0,2),$$

$$u \in [-2; 2], \quad t \in [0; 1,7],$$

$$I(u) = x_1 - x_2 + x_1 x_2 \rightarrow \min.$$

Решение получено за 37 сек процессорного времени и 57329 задачи Коши, минимальное значение функционала $I^* = -5,06113$.

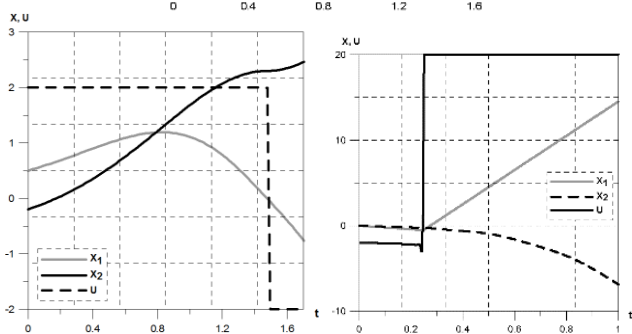
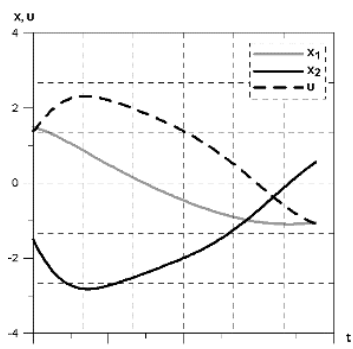


Рис. 4. Оптимальные траектории и управление в тестовых задачах 01–03

6. Результаты вычислительных экспериментов

В работе представлен фрагмент проведенных вычислительных экспериментов по исследованию краевых задач для систем ФДУТТ с использованием разработанной вычислительной технологии. Помимо анализа устойчивости предлагаемых численных решений относительно начально-краевых условий, изучены также их магистральные свойства, в частности исследованы качественные свойства мажоранты таких решений.

6.1. Тестовая задача 04

Начально-краевая тестовая задача 04 формулируется следующим образом:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{2} x_1(t-1) - \frac{1}{2} x_1(t \cdot t), \quad t \in [0, 2],$$

$$\dot{x}_1(t) = \cos(t), \quad \dot{x}_2(t) = \sin(t), \quad t \in [-1, 0],$$

$$\dot{x}_1(t) = \cos(t), \quad \dot{x}_2(t) = \sin(t), \quad t \in [2, 4],$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

Графики решения данной тестовой задачи представлены на рис. 5.

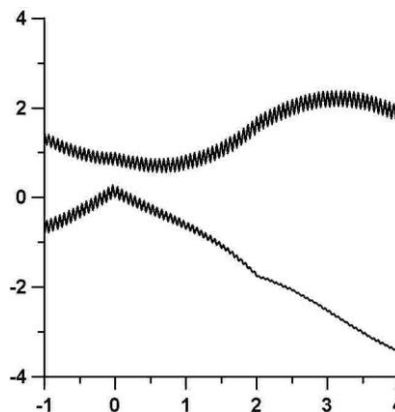


Рис. 5. Траектории системы в тестовой задаче 04

6.2. Тестовая задача 05

Динамический процесс в тестовой задаче 02 описывается следующей системой дифференциальных уравнений с запаздывающими и опережающими компонентами:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t-1) - x_1(t+1), \quad t \in [0, 2],$$

$$\dot{x}_1(t) = 0, \quad \dot{x}_2(t) = 1, \quad t \in [-1, 0],$$

$$\dot{x}_1(t) = 0, \quad \dot{x}_2(t) = 1, \quad t \in [2, 3]$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2.$$

Результаты численного решения тестовой задачи 05 представлены на рис. 6.

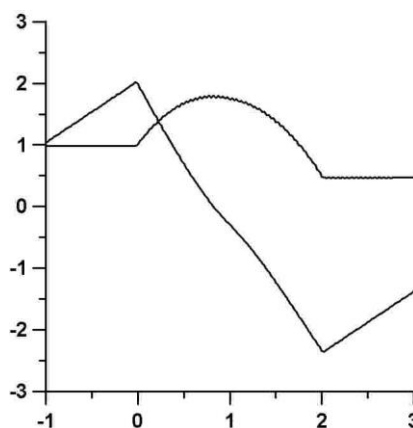


Рис. 6. Траектории системы в тестовой задаче 05

6.3. Тестовая задача 06

Рассмотрим краевую задачу в следующей постановке:

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t-1) - x_1(t+1), \quad t \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \cos(t), \quad \dot{x}_2(t) = \sin(t), \quad t \in [-1, 0], \\ \dot{x}_1(t) &= \cos(t), \quad \dot{x}_2(t) = \sin(t), \quad t \in [1, 2], \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Графики решения задачи 06 приведены на рис. 7.

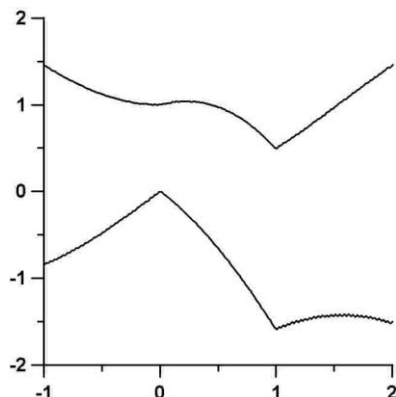


Рис. 7. Траектории системы в тестовой задаче 06

Заключение

Результаты вычислительных экспериментов для ФДУТТ с «запаздыванием», с «опережением», а также содержащих одновременно как запаздывающие, так и опережающие компоненты в правых частях, позволяют убедиться в работоспособности предложенной технологии исследования задач рассматриваемого типа. В дальнейшем планируется развитие представленных идей в направлении решения задач оптимального управления для систем с дифференциальной связью типа ФДУТТ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-37-20265-мол_а_вед.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс, 2007. 288 с.
2. Бекларян Л.А. Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной группой гомеоморфизмов R , порожденной функциями отклонения // ДАН СССР. 1991. Т. 317, № 6. С. 1289–1294.
3. A.L. Beklaryan. On the Existence of Solutions of the First Boundary Value Problem for Elliptic Equations on Unbounded Domains // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2013. Vol. 88. No.4. P. 499–522.
4. A. Anikin, A. Gornov. An Implementation of Newton's Method for Keating's Potential Optimization Problems // Studia Informatica Universalis. 2011. Vol. 9, No.3. P. 11–20.
5. Аникин А. et al. High-Dimensional Undetermined Linear Systems: Numerical Methods and Modeling Assumptions // Информационные технологии и системы 2015 : материалы 39 междисциплинарных конф. Сочи, 7–11 сент. 2015 г. Сочи, 2015. С. 82–94.
6. A.Yu. Gornov, E.A. Finkelshtein. Algorithm for Piecewise-linear Approximation of the Reachable set Boundary // Automation and Remote Control, March 2015, Volume 76, Issue 3. P. 385–393.
7. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S. Tunneling Algorithm for Solving Nonconvex Optimal Control Problems // Optimization, Simulation, and Control, Ser. Springer Optimization and Its Applications. 2013. Vol. 76. P. 289–299.
8. Gornov A.Yu., Tyatyushkin A.I., Finkelstein E.A. Numerical Methods for Solving Applied Optimal Control Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. Vol. 53. No. 12. P. 1825–1838.
9. Зароднюк Т.С. Алгоритм численного решения многоэкстремальных задач оптимального управления с параллелепипедными ограничениями // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 2. С. 46–54.
10. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Finkelshtein E.A., Anikin A.S. The Method of Uniform Monotonous Approximation of the Reachable Set Border for a Controllable System // J Glob Optim, 2015 (online first) DOI :10.1007/s10898-015-0346-8.
11. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск : Наука, 2009. 278 с.
12. Collection of Test Multiextremal Optimal Control Problems / A.Y. Gornov, T.S. Zarodnyuk, T.I. Madzhara, A.V. Daneyeva, I.A.A Veyalko / Optimization, Simulation and Control, Springer Optimization and Its Applications. 2013. Vol. 76. PP. 257–274.