

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 17, № 1



2015

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

ТОМ 17, № 1

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Главный редактор

В. Ф. Тишкин

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Заместитель главного редактора

Н. Д. Кузьмичев

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Ответственный секретарь

П. А. Шаманаев

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Редакционная коллегия

А. С. Андреев

Ш. А. Алимов

А. М. Ахтямов

Ш. А. Аюпов

И. В. Бойков

П. А. Вельмисов

В. К. Горбунов

В. З. Гринес

Ю. Н. Дерюгин

А. П. Жабко

В. И. Жегалов

Т. Ш. Кальменов

А. М. Камачкин

Е. Б. Кузнецов

В. Н. Кризский

Б. В. Логинов

Anca Veronica Ion

С. И. Мартынов

П. П. Матус

О. В. Починка

В. П. Радченко

И. П. Рязанцева

М. С. Салахитдинов

С. И. Спивак

М. Т. Терехин

Редакционный совет

Н. Д. Морозкин

Башкирский государственный
университет

П. В. Сенин

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Л. А. Сухарев

Средне-Волжское
математическое общество

Н. Г. Ярушкина

Ульяновский государственный
технический университет

САРАНСК

2015

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 17, № 1

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов

Исследование динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»	8
1. Введение	8
2. Постановка задачи	9
3. Решение аэрогидродинамической части задачи	10
4. Исследование динамики пластин	16
5. Численный эксперимент в задаче о динамике упругих пластин	18
6. Заключение	20

О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов

Математическое моделирование процесса теплопереноса в длинном цилиндрическом канале	22
1. Введение	22
2. Вывод основных уравнений	23
3. Построение функции распределения	25
4. Вычисление потока тепла в канале	27
5. Заключение	28

В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка

Топологическая классификация полупрямых произведений DA-диффеоморфизма тора и грубого преобразования окружности ..	30
1. Введение	30
2. Гиперболические автоморфизмы двумерного тора	31
3. Конструкция DA-диффеоморфизмов	32
4. Грубые преобразования окружности	33
5. Формулировка результатов	34

Е. Я. Гуревич, С. Х. Зинина

О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локально прямыми произведениями	37
1. Введение и формулировка результатов	37
2. Модельные диффеоморфизмы, являющиеся локально прямыми произведениями на торе и бутылке Клейна	40
2.1. Топологическая классификация А.Г. Майера диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности	40
2.2. Модельные представители классов топологической сопряженности диффеоморфизмов из $MS(S^1)$	41
2.3. Определение модельных диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$	41
2.4. Топологическая классификация модельных диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$	42
3. Топология многообразий, допускающих диффеоморфизмы из класса $G(M^2)$	42
4. Топологическая классификация диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$	44

4.1. Оснащенный граф диффеоморфизма	44
4.2. Доказательство теоремы 1.2.	45

**Р. В. Жалнин, А. В. Максимкин, В. Ф. Масягин, А. И. Пантюшин,
Е. Е. Пескова, В. Д. Сальников, В. Ф. Тишкин**

Исследование порядка точности неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения задач газовой динамики	48
1. Введение	48
2. Неявная схема для разрывного метода Галеркина	49
3. Результаты расчетов	50

Е. В. Жужома, В. С. Медведев, Н. А. Тарасова

Непрерывные потоки Морса-Смейла на проективно-подобных многообразиях	55
--	----

В. Е. Круглов, О. В. Починка

Многоцветный граф как полный топологический инвариант потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях	65
1. Введение	65
2. Формулировка результатов	68

Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов

О модификации наилучшего параметра продолжения решения	71
1. Введение	71
2. Постановка задачи	72
3. Параметризация и продолжение решения по параметру	73
4. Численные результаты	77
5. Заключение	79

А. С. Ларионов, П. М. Симонов

О нелинейных задачах для функционально-дифференциального уравнения	82
1. Введение	82
2. Основные теоремы	83

Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов

Сеточные аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлениями в коэффициентах при старших производных	89
1. Введение	89
2. Постановка задач и их корректность	90
3. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций	95
4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию	98

5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций 99

Е. В. Никишин, С. М. Мурюмин, Е. Е. Пескова

- Искажения, возникающие при восстановлении высокочастотных оптических импульсов фотоприемником, изготовленном на основе кристаллического кремния, легированного индием 105

И. П. Рязанцева

- Регуляризованный непрерывный метод второго порядка для аккретивных включений 111

1. Основные предположения, вспомогательные утверждения и постановка задачи 111
2. Непрерывный метод регуляризации второго порядка 112

Д. В. Пашуткин

- Асимптотическое равновесие и ограниченность решений нелинейных дифференциальных уравнений 120

1. Введение 120
2. Равномерная ограниченность решений 124
3. Асимптотическое равновесие 126

Т. К. Юлдашев, О. В. Новоселов

- Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром 128

1. Постановка задачи 128
2. Сведение задачу (1.1) – (1.3) к интегральному уравнению 129
3. Теорема об однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3) 131
4. Заключение 132

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Р. К. Галимова, З. Я. Якупов

- Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами 135

1. Введение 135
2. Численные методы 136
3. Результаты моделирования 137
4. Выводы 137

А. В. Зубов, А. Ф. Зубова, О. А. Пустовалова

- Условия существования интегралов системы уравнений движения 140
-

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневожского математического общества»	145
Правила верстки рукописей в системе LaTeX	147
Алфавитный указатель	149

ОТ РЕДАКЦИИ

В настоящем номере публикуются работы ученых, которые являются постоянными участниками научных конференций по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании, а так же международных математических школ-семинаров имени Е.В. Воскресенского, проводимых национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П.Огарёва и Средневолжским математическим обществом.

Номер выходит к началу XII научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых, которая пройдет в г. Саранске с 28 по 30 августа 2015 года. Конференция проводится при поддержке РФФИ, грант № 15-01-20610. Все статьи имеют положительные рецензии, а сам журнал доступен в сети Internet на сайте Elibrary.ru. Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 533.6.013.4

Исследование динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»

© А. В. Анкилов¹, П. А. Вельмисов²

Аннотация. В статье предложена математическая модель динамической системы, состоящей из n упругих пластин типа «тандем», обтекаемых дозвуковым потоком газа (жидкости). Аэрогидродинамические воздействия на пластины определяются из асимптотических уравнений движения жидкости или газа в модели идеальной несжимаемой среды. Поведение упругого материала описывается линейной моделью. Для решения задачи используется подход, основанный на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, при этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы пластин. При подстановке выражения для давления в уравнения колебаний пластин решение задачи сводится к исследованию системы связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций деформаций. На основе метода Бубнова-Галеркина создан программный продукт, позволяющий находить решение этой системы уравнений и производить исследование динамики системы пластин. Программа позволяет строить графики колебаний, на основании которых можно судить об амплитуде и частоте колебаний и делать вывод об их устойчивости. На основе численного эксперимента проводится анализ зависимости характера колебаний упругих пластин от параметров механической системы.

Ключевые слова: аэроупругость, динамика, упругая пластина, система типа «тандем», деформация, обтекание, дозвуковой поток.

1. Введение

При проектировании различных конструкций, устройств, приборов, аппаратов, систем и т. д., находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа), необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики и устойчивости упругих элементов, требуемой для их качественного функционирования и надёжности эксплуатации. Воздействие потока может приводить к эффектам, являющимся причиной нарушения функциональных свойств элементов, вплоть до их разрушения (например, приводить к состоянию неустойчивости вследствие увеличения амплитуды или ускорения колебаний до критически допустимых значений). Такая проблема, когда неустойчивость является негативным явлением, возникает, например, при проектировании составных частей летательных и подводных аппаратов. Аналогичная проблема возникает при исследовании течений в проточных каналах, трубопроводах различного назначения, содержащих упругие элементы.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности,

¹ Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

² Зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например [4]).

В настоящее время механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа и аэрогидроупругость представляют собой хорошо развитые разделы механики сплошной среды. Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [1, 5, 11], так и зарубежные [9, 10, 12] исследования). Большинство работ посвящено исследованию флаттера пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке, и только небольшая часть работ посвящена обтеканию пластин и оболочек дозвуковым потоком газа, что указывает на сложность исследования динамики упругих тел при указанном режиме обтекания и требует более пристального и глубокого внимания к этим задачам.

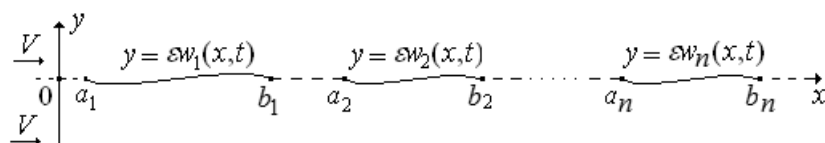
В статье рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях системы n упругих пластин типа «тандем» (расположенных последовательно друг за другом вдоль одной линии) при дозвуковом обтекании их потоком идеальной несжимаемой среды (жидкости или газа). Работа является продолжением исследований устойчивости деформируемых пластин, находящихся в потоке газа или жидкости [3]. В частности, проведено обобщение результатов работы [2] (случай двух пластин) на случай произвольного количества пластин. На основе метода Бубнова-Галеркина создан программный продукт, позволяющий производить исследование динамики системы пластин.

Поведение упругого материала в работе описывается линейной моделью. Для решения связанной задачи аэрогидроупругости используется подход, основанный на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, при этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные прогибы пластин. При подстановке выражения для давления в уравнения колебаний пластин решение задачи сводится к исследованию системы связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций прогибов.

На основе численного эксперимента проводится анализ зависимости характера колебаний упругих пластин как от параметров механической системы, в т.ч. от значения скорости набегающего потока, так и от их взаимного влияния друг на друга. Этот анализ позволяет сделать вывод об устойчивости или неустойчивости колебаний.

2. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях системы n упругих пластин типа «тандем» (расположенных последовательно друг за другом вдоль одной линии) при дозвуковом обтекании их потоком идеального несжимаемого газа. Пусть в состоянии покоя пластинам в физической плоскости xOy соответствуют на оси Ox отрезки $[a_k, b_k]$, $k = 1 \div n$, где $a_{k+1} > b_k$, $k = 1 \div n - 1$ (рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Двустороннее безотрывное обтекание системы n упругих пластин

В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox . Будем предполагать, что прогибы пластин и возмущение однородного потока малы, то есть $\bar{w}_k(x, t) = \varepsilon w_k(x, t)$, $\bar{\phi}(x, y, t) = Vx + \varepsilon\phi(x, y, t)$, $\varepsilon \ll 1$, $k = 1 \div n$. Здесь $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$ и $\bar{\phi}$ — соответственно прогибы пластин и потенциал скорости возмущенного потока газа.

Потенциал ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2 \setminus ([a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n]), \quad (2.1)$$

условию отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_t^2)_\infty = 0 \quad (2.2)$$

и линеаризованным граничным условиям

$$\phi_y^\pm = \dot{w}_k + Vw_k', \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1 \div n, \quad (2.3)$$

где $\phi_y^\pm = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \phi_y(x, y, t)$.

Линеаризуя интеграл Лагранжа-Коши, получим следующее выражение для реакции газа на пластины

$$Q = \rho(\phi_t^+ - \phi_t^-) + \rho V(\phi_x^+ - \phi_x^-).$$

Аэродинамические воздействия на пластины, зависящие от поперечных составляющих их деформаций $w_k(x, t)$, $k = 1 \div n$, выражаются через потенциал скорости $\phi(x, y, t)$ по формулам

$$P_k(x, t) = \rho(\phi_t^+ - \phi_t^-) + \rho V(\phi_x^+ - \phi_x^-), \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1 \div n, \quad y = 0. \quad (2.4)$$

Для примера рассмотрим линейную модель упругого тела:

$$\begin{aligned} M_k \ddot{w}_k(x, t) + D_k w_k''''(x, t) + N_k w_k''(x, t) + \beta_{0k} w_k(x, t) + \\ + \beta_{1k} \dot{w}_k(x, t) + \beta_{2k} \dot{w}_k''''(x, t) = P_k(x, t), \quad k = 1 \div n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка — частные производные по x и t соответственно; ρ — плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке; D_k, M_k — изгибные жесткости и погонные массы упругих пластин; N_k — сжимающие (растягивающие) упругие пластины силы; β_{1k}, β_{2k} — коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования пластин; β_{0k} — коэффициенты жесткости оснований.

3. Решение аэрогидродинамической части задачи

Выражая потенциал $\phi(x, y, t)$ через функции прогиба $w_k(x, t)$, запишем уравнения колебаний пластин (2.4), (2.5) относительно этих функций. С этой целью в области G введем комплексный потенциал $W = f(z, t) = \phi + i\psi$, где $\psi = \psi(x, y, t)$ — функция тока, $z = x + iy$. Для функции скоростей $f_z(z, t) = \phi_x - i\phi_y$ согласно условиям (2.1), (2.3) имеем следующее интегральное представление [8, с.52-54]

$$f_z(z, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{h(z)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - z} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) z^{k-1} \right), \quad (3.1)$$

где $h(z) = (z - a_1)(z - b_1)(z - a_2)(z - b_2) \dots (z - a_{n-1})(z - b_{n-1})(z - a_n)(b_n - z)$, $v_k(\tau, t) = \dot{w}_k(\tau, t) + Vw'_k(\tau, t)$, $k = 1 \div n$; $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$ — действительные функции, определяющие циркуляцию скорости газа вокруг каждой пластины. Ветвь корня в формуле (3.1) фиксирована условием

$$\sqrt{h(z)} = i\sqrt{(x - a_1)(x - b_1)(x - a_2)(x - b_2) \dots (x - a_n)(x - b_n)}, \quad z = x > b_n. \quad (3.2)$$

Разложение функции $f_z(z, t)$ в окрестности $z = \infty$ начинается с члена порядка $1/z^{n+1}$, поэтому общая циркуляция равна нулю. Циркуляция вокруг каждой пластины может отличаться от нуля. Заметим также, что $(\phi_x^2 + \phi_y^2)_\infty = 0$.

Перейдем в (3.1) к пределу при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_1, b_1)$. Согласно условию (3.2) имеем

$$\sqrt{h(z)} = \pm(-1)^k \sqrt{h(x)}, \quad z = x \pm i0, \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1 \div n. \quad (3.3)$$

Применяя формулы Сохоцкого [7] и учитывая (3.3), получим

$$\phi_x^\pm - i\phi_y^\pm = \mp \frac{1}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right) - iv_1(x, t),$$

$$x \in (a_1, b_1),$$

следовательно,

$$\phi_x^+ - \phi_x^- = -\frac{2}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right), \quad (3.4)$$

$$x \in (a_1, b_1).$$

Аналогично, при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_m, b_m)$, находим

$$\phi_x^+ - \phi_x^- = \frac{2(-1)^s}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right), \quad (3.5)$$

$$x \in (a_s, b_s), \quad s = 2 \div n.$$

Для комплексного потенциала имеем следующее выражение

$$W = f(z, t) = \int_{a_1}^z f_z(z, t) dz + C(t), \quad (3.6)$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени, $z \in G$. Так как G — n -связная область, то интеграл, вообще говоря, зависит от линии интегрирования. Следовательно, потенциал ϕ , а значит и аэродинамические воздействия (2.4) однозначно не определяются. Подберем функции $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$ так, чтобы циркуляция вокруг каждой пластины равнялась нулю.

При обходе разреза $[a_s, b_s]$ против часовой стрелки циркуляция $\Gamma_s(t) = \int_{a_s}^{b_s} \phi_x^- dx + \int_{b_s}^{a_s} \phi_x^+ dx = \int_{a_s}^{b_s} (\phi_x^- - \phi_x^+) dx$, $s = 1 \div n$. Воспользовавшись формулами (3.4), (3.5), получим

$$\Gamma_s(t) = \frac{2(-1)^{s+1}}{\pi} \int_{a_s}^{b_s} \frac{1}{\sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right) dx. \quad (3.7)$$

Покажем, что сумма циркуляций равна нулю. Согласно (3.7)

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \Gamma_s(t) = & \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} v_k(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \int_{a_s}^{b_s} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} \right) d\tau + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \int_{a_s}^{b_s} \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

В полуплоскости рассмотрим аналитическую функцию $g_1(z) = 1/\sqrt{h(z)}$. В силу выбора ветви корня (3.2) на границе полуплоскости ($Imz = y = 0$) имеем

$$Re \{g_1(z)\} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup \dots \cup (b_n, +\infty), \\ (-1)^s / \sqrt{h(x)}, & x \in (a_s, b_s), s = 1 \div n. \end{cases}$$

Представим $g_1(z)$ с помощью интеграла Шварца [7]

$$g_1(z) = \frac{1}{\sqrt{h(z)}} = \frac{1}{\pi i} \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-z)}. \quad (3.9)$$

При $z \rightarrow x \in (a_1, b_1)$ получим

$$\frac{1}{\sqrt{h(x)}} = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\pi i}{\sqrt{h(x)}} + \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)} \right).$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)} = 0, \quad x \in (a_1, b_1)$$

или

$$\sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} = 0, \quad \tau \in (a_1, b_1). \quad (3.10)$$

Аналогично при $z \rightarrow x \in (a_s, b_s)$, $s = 2 \div n$, получим

$$\sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} = 0, \quad \tau \in (a_s, b_s). \quad (3.11)$$

Полагая в (3.9) $z = x > b_n$, будем иметь

$$\frac{\pi}{\sqrt{-h(x)}} = \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)}.$$

Умножим на x обе части этого равенства и перейдем к пределу при $x \rightarrow +\infty$. В результате получим

$$\sum_{s=1}^n (-1)^{s+1} \int_{a_s}^{b_s} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} = 0. \quad (3.12)$$

В полуплоскости рассмотрим аналитические функции $g_2(z) = z^k / \sqrt{h(z)}$, $k = 1 \div n - 2$. В силу выбора ветви корня (3.2) на границе полуплоскости ($Im z = y = 0$) имеем

$$Re \{g_2(z)\} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup \dots \cup (b_n, +\infty), \\ (-1)^{s+1} x^k / \sqrt{h(x)}, & x \in (a_s, b_s). \end{cases}$$

Представим $g_2(z)$ с помощью интеграла Шварца [7]

$$g_2(z) = \frac{z^k}{\sqrt{h(z)}} = \frac{1}{\pi i} \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - z)}. \quad (3.13)$$

Полагая в (3.9) $z = x > b_n$, будем иметь

$$\frac{\pi x^k}{\sqrt{-h(x)}} = \sum_{s=1}^n (-1)^s \int_{a_s}^{b_s} \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)}.$$

Умножим на x обе части этого равенства и перейдем к пределу при $x \rightarrow +\infty$. В результате получим

$$\sum_{s=1}^n \int_{a_s}^{b_s} \frac{\tau^k d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} = 0, \quad k = 1 \div n - 2. \quad (3.14)$$

Из равенств (3.10) – (3.12), (3.14) следует, что $\sum_{s=1}^n \Gamma_s(t) = 0$.

Положим $\Gamma_1(t) = 0, \dots, \Gamma_{n-1}(t) = 0$ и найдем функции $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$ как решение системы

$$\int_{a_s}^{b_s} \frac{1}{\sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right) dx = 0, \quad s = 1 \div n - 1. \quad (3.15)$$

Элементы основной матрицы системы (3.15) равны

$$H_{sk} = \int_{a_s}^{b_s} \frac{x^{k-1}}{\sqrt{h(x)}} dx, \quad s, k = 1 \div n - 1.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$\gamma_k(t) = \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{p=1}^n \tilde{H}_{sk} \int_{a_s}^{b_s} dx \int_{a_p}^{b_p} \frac{(-1)^p v_p(\tau, t) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau - x)} d\tau, \quad k = 1 \div n - 1, \quad (3.16)$$

где введено обозначение $\tilde{H} = H^{-1}$. Тогда из равенств $\Gamma_1(t) = 0, \dots, \Gamma_{n-1}(t) = 0$ следует, что $\Gamma_n(t) = -\sum_{s=1}^{n-1} \Gamma_s(t) = 0$. В этом случае интеграл от функции $f_z(z, t)$ по любому замкнутому контуру, принадлежащему области G , равен нулю. Отсюда следует, что значение потенциала W , определяемое формулой (3.6), не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки a_1 и z . Поскольку

$$W = \phi + i\psi = a_0(t) + \frac{a_1(t)}{z} + \dots$$

в окрестности $z = \infty$, то функцию $C(t)$ в (3.6) можно подобрать так, чтобы выполнялось условие $(\phi_t)_\infty = 0$.

Чтобы найти предельные значения $\phi(x, y, t)$ на границе области G , преобразуем каждый из интегралов в правой части формулы (3.1). Интегрируя по частям, получим

$$f_z(z, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{h(z)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) z^{k-1} \right), \quad (3.17)$$

где $\bar{v}_k(\tau, t) = \int_{a_k}^{\tau} v_k(x, t) dx$, $k = 1 \div n$.

Так как $\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = \frac{(\tau - z)h'(\tau) - 2h(\tau)}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}}$, $\left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z = \frac{(\tau - z)h'(z) + 2h(z)}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(z)}}$, то

$$\frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z + \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = \frac{(\tau - z)(h'(\tau) + h'(z)) + 2(h(z) - h(\tau))}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}}.$$

Введем обозначение

$$\theta(z, \tau) = \frac{(\tau - z)(h'(\tau) + h'(z)) + 2(h(z) - h(\tau))}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}}, \quad (3.18)$$

Поэтому, с учетом того, что

$$\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = -\frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z + \theta(z, \tau), \quad (3.19)$$

имеем

$$f_z(z, t) = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z d\tau + \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t) \theta(z, \tau)}{\sqrt{h(z)}} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) z^{k-1} \right). \quad (3.20)$$

Подставляя (3.20) в (3.6), получим

$$W = \phi + i\psi = \frac{\sqrt{h(z)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_1}^z \frac{\theta(z, \tau)}{\sqrt{h(z)}} dz + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \int_{a_1}^z \frac{z^{k-1} dz}{\sqrt{h(z)}} + C(t). \quad (3.21)$$

Отсюда при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_1, b_1)$, находим

$$\phi^{\pm} + i\psi^{\pm} = \frac{\mp \sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\pm \pi i \frac{\bar{v}_1(x, t)}{\sqrt{h(x)}} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\mp \sqrt{h(x)}} dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \int_{a_1}^x \frac{x^{k-1} dx}{\mp \sqrt{h(x)}} + C(t),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \phi^+ - \phi^- &= \frac{2\sqrt{h(x)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \int_{a_1}^x \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}}, \quad x \in (a_1, b_1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Аналогичным образом, сначала интегрируя (3.20) от a_s до z , затем переходя к пределу при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_s, b_s)$, $s = 2 \div n$, будем иметь

$$\begin{aligned} \phi^+ - \phi^- &= \frac{2(-1)^{s+1} \sqrt{h(x)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\bar{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \\ &+ \frac{2(-1)^{s+1}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \bar{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_m}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx - \frac{2(-1)^{s+1}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) \int_{a_m}^x \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}}, \quad x \in (a_s, b_s). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Согласно формулам (3.4), (3.5), (3.22), (3.23) аэродинамические воздействия (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} P_s(x, t) &= \frac{2\rho(-1)^{s+1} \sqrt{h(x)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \\ &+ \frac{2\rho(-1)^{s+1}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \tilde{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_m}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx - \frac{2\rho(-1)^{s+1}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \dot{\gamma}_k(t) \int_{a_m}^x \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}} + \\ &+ \frac{2\rho V(-1)^s}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right), \quad x \in (a_s, b_s), \quad s = 1 \div n. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В (3.24) $\tilde{v}_k(\tau, t) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} = \int_{a_k}^{\tau} (\ddot{w}_k(x, t) + V \dot{w}'_k(x, t)) dx$, $\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)$ определяются равенствами (3.16), $\theta(z, \tau)$ определяется равенством (3.18).

Таким образом, учитывая (2.5), получили связанную систему уравнений относительно функций прогиба $w_1(x, t), \dots, w_n(x, t)$:

$$\begin{aligned} M_i \ddot{w}_i(x, t) + D_i w_i''''(x, t) + N_i w_i''(x, t) + \beta_{0i} w_i(x, t) + \\ + \beta_{1i} \dot{w}_i(x, t) + \beta_{2i} \dot{w}_i''''(x, t) &= \frac{2\rho(-1)^{i+1} \sqrt{h(x)}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{v}_k(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \\ &+ \frac{2\rho(-1)^{i+1}}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \tilde{v}_k(\tau, t) d\tau \int_{a_i}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx - \frac{2\rho(-1)^{i+1}}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \dot{\gamma}_k(t) \int_{a_i}^x \frac{x^{k-1} dx}{\sqrt{h(x)}} + \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$+ \frac{2\rho V(-1)^i}{\pi\sqrt{h(x)}} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{v_k(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(t) x^{k-1} \right), \quad x \in (a_i, b_i), \quad i = 1 \div n.$$

Система (3.25) получена при любых способах закреплений концов упругих пластин. Пусть концы пластин закреплены жестко или шарнирно, тогда граничные условия для $w_i(x, t)$ имеют вид

$$w_i(x, t) = w'_i(x, t) = 0, \quad w_i(x, t) = w''_i(x, t) = 0; \quad x = a_i, \quad x = b_i, \quad i = 1 \div n. \quad (3.26)$$

4. Исследование динамики пластин

Решение системы уравнений (3.25) будем искать методом Галеркина, подчинив каждую искомую функцию $w_i(x, t)$, $i = 1 \div n$ краевым условиям (3.26). Зададим также начальные условия

$$w_i(x, 0) = f_{1i}(x), \quad \dot{w}_i(x, 0) = f_{2i}(x), \quad x \in [a_i, b_i], \quad i = 1 \div n, \quad (4.1)$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями.

Согласно методу Галеркина каждую неизвестную функцию системы уравнений (3.25) будем искать в виде

$$w_i(x, t) = \sum_{j=1}^m c_{ij}(t) g_{ij}(x), \quad (4.2)$$

где $g_{ij}(x)$, $x \in [a_i, b_i]$ — базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные краевые условия, а функции $c_{ij}(t)$, $t \geq 0$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения ко всем базисным функциям.

В качестве базисных возьмем функции

$$g_{ij}(x) = A_{ij} \cos \gamma_{ij}(x - a_i) + B_{ij} \sin \gamma_{ij}(x - a_i) + C_{ij} \operatorname{ch} \gamma_{ij}(x - a_i) + D_{ij} \operatorname{sh} \gamma_{ij}(x - a_i), \quad (4.3)$$

$$i = 1 \div n, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициенты $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$ и параметр γ_{ij} выберем так, чтобы на каждом из концов отрезка $[a_i, b_i]$, в соответствии с (3.26), выполнялось одно из следующих условий:

$$1) g_{ij}(x) = g'_{ij}(x) = 0; \quad 2) g_{ij}(x) = g''_{ij}(x) = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

Тогда функции $w_i(x, t)$ вида (4.2) будут удовлетворять условиям (3.26). Заметим, что γ_{ij} и $g_{ij}(x)$ — собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$g_i^{IV}(x) = \gamma_i^4 g_i(x) \quad (4.5)$$

с граничными условиями (4.4). Задача (4.5), (4.4) — самосопряженная и полностью определенная, следовательно, система функций $\{g_{ij}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ ортогональна на $[a_i, b_i]$ [6], т.е. справедливы равенства

$$\int_{a_i}^{b_i} g_{ik}(x) g_{is}(x) dx = \begin{cases} \Delta_{ik}, & k = s; \\ 0, & k \neq s, \end{cases} \quad \int_{a_i}^{b_i} g_{ik}^{(4)}(x) g_{is}(x) dx = \begin{cases} \gamma_{ik}^4 \Delta_{ik}, & k = s; \\ 0, & k \neq s, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$i = 1, \div n, \quad k, s = 1 \div m.$$

Условия ортогональности невязок i -го уравнения системы (3.25) к базисным функциям $\{g_{is}(x)\}_{s=1}^m$ позволяют записать систему уравнений для $c_{is}(t)$:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (A_{ikjs} \ddot{c}_{kj}(t) + B_{ikjs} \dot{c}_{kj}(t) + C_{ikjs} c_{kj}(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} A_{ikjs} &= \delta_{ik} \delta_{js} \Delta_{ik} M_i + \frac{2\rho(-1)^{i+k}}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{a_k}^{\tau} g_{kj}(x) dx \right) \left[\frac{\sqrt{h(x)}}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)} - \int_{a_i}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx \right] \times \\ &\times g_{is}(x) d\tau - \frac{2\rho(-1)^{i+k}}{\pi} \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\tilde{H}_{dp} \int_{a_d}^{b_d} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g_{kj}(\tau) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau-x)} d\tau \right) \cdot \int_{a_i}^{b_i} g_{is}(x) \left(\int_{a_i}^x \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{h(x)}} \right) dx; \\ B_{ikjs} &= \delta_{ik} \delta_{js} \Delta_{ik} (\beta_{2i} \gamma_{ik}^4 + \beta_{1i}) + \\ &+ \frac{2\rho V(-1)^{i+k}}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{a_k}^{b_k} g_{kj}(\tau) g_{is}(x) \left(\frac{h(x) + h(\tau)}{\sqrt{h(x)} \sqrt{h(\tau)} (\tau-x)} - \int_{a_i}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx \right) d\tau - \\ &- \frac{2\rho V(-1)^{i+k}}{\pi} \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\tilde{H}_{dp} \int_{a_d}^{b_d} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g'_{kj}(\tau) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau-x)} d\tau \right) \cdot \int_{a_i}^{b_i} g_{is}(x) \left(\int_{a_i}^x \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt{h(x)}} \right) dx + \\ &- \frac{2\rho V(-1)^{i+k}}{\pi} \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\tilde{H}_{dp} \int_{a_d}^{b_d} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g_{kj}(\tau) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau-x)} d\tau \right) \cdot \int_{a_i}^{b_i} \frac{x^{p-1} \cdot g_{is}(x)}{\sqrt{h(x)}} dx; \\ C_{ikjs} &= \delta_{ik} \delta_{js} \Delta_{ik} (D_i \gamma_{ik}^4 + \beta_{0i}) + \delta_{ik} N_i \int_{b_i}^{c_i} g''_{kj}(x) g''_{is}(x) dx + \\ &+ \frac{2\rho V^2(-1)^{i+k}}{\pi} \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g'_{kj}(\tau) \cdot g_{is}(x) \sqrt{h(\tau)}}{\tau-x \sqrt{h(x)}} d\tau - \\ &- \frac{2\rho V^2(-1)^{i+k}}{\pi} \sum_{d=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\tilde{H}_{dp} \int_{a_d}^{b_d} dx \int_{a_k}^{b_k} \frac{g'_{kj}(\tau) \sqrt{h(\tau)}}{\sqrt{h(x)}(\tau-x)} d\tau \right) \cdot \int_{a_i}^{b_i} \frac{x^{p-1} \cdot g_{is}(x)}{\sqrt{h(x)}} dx, \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Получили систему $m \cdot n$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения $m \cdot n$ неизвестных функций.

Условия ортогональности невязки начальных условий (4.1) к базисным функциям позволяют найти начальные условия $c_{kj}(0)$, $c'_{kj}(0)$:

$$c_{kj}(0) = \frac{1}{\Delta_{kj}} \int_{a_k}^{b_k} f_{1k}(x) g_{kj}(x) dx, \quad c'_{kj}(0) = \frac{1}{\Delta_{kj}} \int_{a_k}^{b_k} f_{2k}(x) g_{kj}(x) dx, \quad k = 1 \div n, \quad j = 1 \div m. \quad (4.8)$$

Таким образом, получили задачу Коши для системы уравнений (4.7) с начальными условиями (4.8), на основе решения которой можно проводить исследование динамики для конкретных значений параметров механической системы.

5. Численный эксперимент в задаче о динамике упругих пластин

На основе решения задачи Коши (4.7), (4.8) проведен численный эксперимент по исследованию динамики пластин при различных параметрах механической системы. Рассмотрим пример одной такой системы. В потоке находятся две пластины ($n = 2$). Рабочая среда — воздух ($\rho = 1$), пластины изготовлены из алюминия (модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10}$, линейная плотность $\rho_{pl} = 8480$).

Возьмем следующие параметры механической системы: $a_1 = 2$; $b_1 = 3$; $a_2 = 7$; $b_2 = 8$; $\beta_{01} = \beta_{02} = 4$; $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0,1$; $N_1 = N_2 = 0$ (все значения приведены в системе СИ).

Пусть концы пластин закреплены жестко, тогда базисные функции (4.3) примут вид

$$g_{ij}(x) = \sin \gamma_{ij}(x - a_i) - \operatorname{sh} \gamma_{ij}(x - a_i) + \frac{\cos \gamma_{ij}(b_i - a_i) - \operatorname{ch} \gamma_{ij}(b_i - a_i)}{\sin \gamma_{ij}(b_i - a_i) + \operatorname{sh} \gamma_{ij}(b_i - a_i)} \times \\ \times (\cos \gamma_{ij}(x - a_i) - \operatorname{ch} \gamma_{ij}(x - a_i)), \quad i = 1 \div n, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

где γ_{ij} являются корнями уравнения

$$\cos \gamma_{ij}(b_i - a_i) \operatorname{ch} \gamma_{ij}(b_i - a_i) = 1.$$

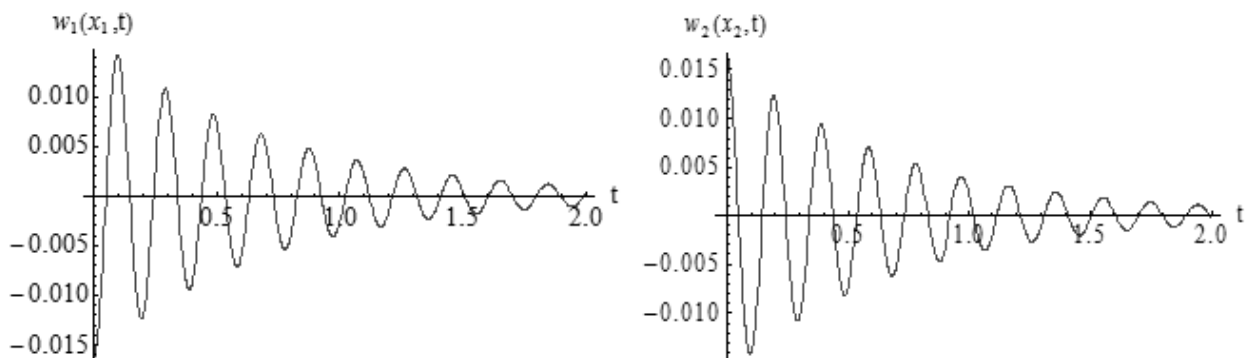
Зададим начальные условия в виде

$$w_1(x, 0) = 0,01 \cdot g_{11}(x), \quad \dot{w}_1(x, 0) = -0,005 \cdot g_{11}(x),$$

$$w_2(x, 0) = -0,01 \cdot g_{21}(x), \quad \dot{w}_2(x, 0) = 0,005 \cdot g_{21}(x).$$

С помощью математической системы Mathematica на отрезке $t \in [0; 10]$ получим графики функций $w_1(x, t) = \sum_{j=1}^4 c_{1j}(t)g_{1j}(x)$ при $x = x_1 = 2,5$ и $w_2(x, t) = \sum_{j=1}^4 c_{2j}(t)g_{2j}(x)$ при $x = x_2 = 7,5$ при различных скоростях набегающего потока для упругих пластин различной толщины (рис. 5.1–5.4).

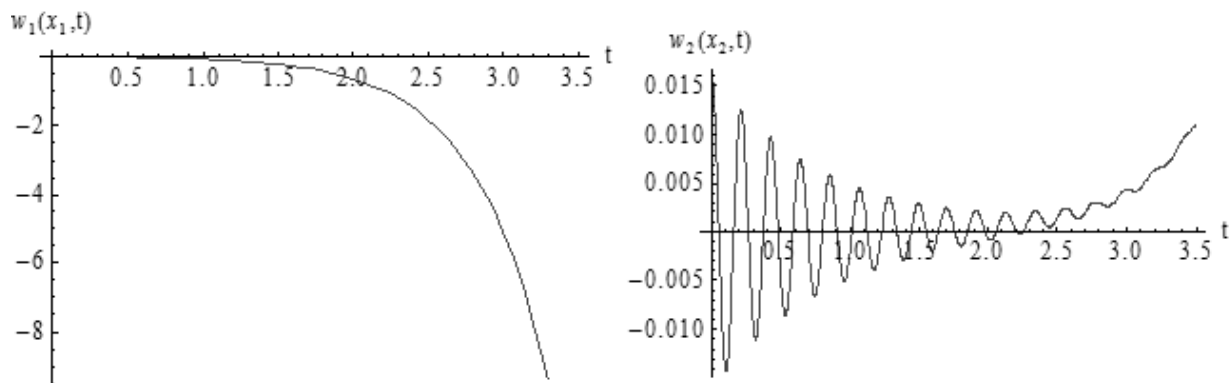
I. $V = 40$; $h_1 = h_2 = h = 0,002$; $D_1 = D_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 51,6$; $M_1 = M_2 = \rho_{pl}h = 17,0$



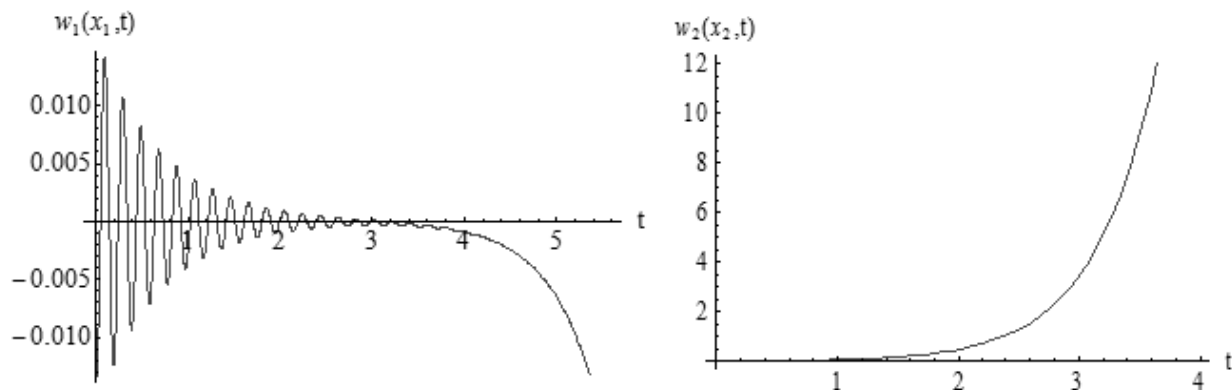
Р и с у н о к 5.1

Деформация пластин в точках $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 7,5$

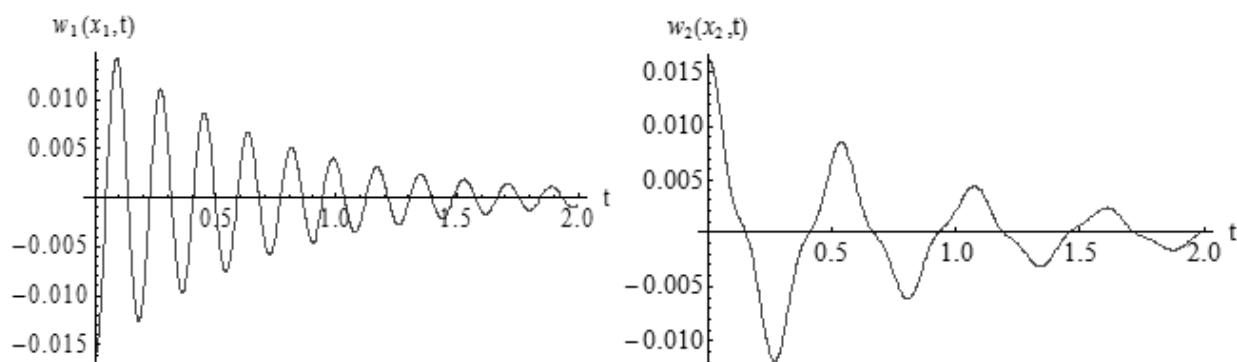
II. $V = 40$; $h_1 = 0,0013$; $h_2 = 0,002$; $D_1 = 14,2$; $D_2 = 51,6$; $M_1 = 11,0$; $M_2 = 17,0$



Р и с у н о к 5.2

Деформация пластин в точках $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 7,5$ III. $V = 40$; $h_1 = 0,002$; $h_2 = 0,0013$; $D_1 = 51,6$; $D_2 = 14,2$; $M_1 = 11,0$; $M_2 = 17,0$ 

Р и с у н о к 5.3

Деформация пластин в точках $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 7,5$ IV. $V = 30$; $h_1 = 0,002$; $h_2 = 0,0013$; $D_1 = 51,6$; $D_2 = 14,2$; $M_1 = 11,0$; $M_2 = 17,0$ 

Р и с у н о к 5.4

Деформация пластин в точках $x_1 = 2,5$ и $x_2 = 7,5$

Анализируя рисунки 5.1–5.3, видим, что при уменьшении толщины пластин колебания могут стать неустойчивыми, причем неустойчивость колебаний хотя бы одной из пластин приводит к неустойчивости всей системы. А из анализа рисунков 5.3, 5.4 следует, что при увеличении скорости набегающего потока колебания так же могут стать неустойчивыми.

6. Заключение

На основе предложенной математической модели динамической системы типа «тандем», состоящей из n упругих пластин, последовательно расположенных друг за другом вдоль одной линии и обтекаемых дозвуковым потоком газа (жидкости), дано решение аэрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. На основе метода Бубнова-Галеркина создан программный продукт, позволяющий находить решение полученной после этого связанной системы интегродифференциальных уравнений для прогибов пластин и производить исследование динамики системы пластин. Программа позволяет строить графики колебаний, на основании которых можно судить об амплитуде и частоте колебаний и делать вывод об их устойчивости. В дальнейшем планируется разработать программный модуль, позволяющий строить области устойчивости на плоскостях изменения двух выбранных параметров механической системы.

Проведенное исследование является фундаментом для решения задач о динамике упругих элементов произвольного количества отдельно расположенных конструкций при обтекании их потоком газа или жидкости, например, о динамике элеронов нескольких крыльев летательных аппаратов, движущихся в следе друг за другом.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 247 с.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Решетников Ю. А., «Математическое моделирование одной динамической системы типа «тандем»», *Журнал Средневолжского математического общества*, **12:3** (2010), 19–28.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
4. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К., «Гидродинамический излучатель», *Патент России №2062662*, 27.06.1996. МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Бюл. №18.
5. Кийко И. А., Показеев В. В., «К постановке задачи о колебаниях и устойчивости полосы в сверхзвуковом потоке газа», *Механика жидкости и газа*, 2009, № 1, 159–166.
6. Коллатц А., *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 504 с.
7. Лаврентьев М. А., *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1973, 736 с.
8. Седов Л. И., *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*, Наука, М., 1980, 448 с.
9. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y., «Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid», *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 7, 2014, № 6, 1133–1148.

10. Kounadis A.N., “Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping”, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **42**:1 (2007), 24–35.
11. Vedeneev V.V., “Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds”, *Journal of Fluids and Structures*, **40** (2013), 366–372.
12. Willems S., Gulhan A. and Esser B., “Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow”, *Progress in Flight Physics*, **5** (2013), 285–308.

Investigation of dynamic of one aeroelastical system of «tandem» species.

© A. V. Ankilov³, P. A. Velmisov⁴

Abstract. The article proposes a mathematical model of the dynamical system consisting of the n elastic plates of «tandem» species flowing along of the subsonic flow of gas (liquid). The aerohydrodynamic impact on the plates is determined from the asymptotic equations of motion of a liquid or gas in the model of an ideal incompressible environment. The behavior of the elastic material is described by a linear model. For solving problem, the approach based on the construction of the solutions of aerohydrodynamic part of the two-dimensional boundary-value problem for Laplace’s equation by methods of complex analysis is used. While the aerohydrodynamic load (pressure of liquid or gas) is defined through the functions describing the unknown deformations of the plates. Under the substitution of the pressure expression in the equation of oscillations of the plates the solution of the problem is reduced to the study of systems of coupled integro-differential equations with partial derivatives for the deformations functions. On the basis of the Bubnov-Galerkin method a software product is created. This product allows to find the solution of system of equations and to produce the investigation of the dynamics of the plates system. The program may to build the oscillations graphics the based on which we can to discuss the amplitude and frequency of oscillations and to make conclusions about their stability. On the basis of the numerical experiment the dependences of the character of the oscillations of elastic plates are analyzed from the parameters of the mechanical system.

Key Words: aerohydroelasticity, dynamic, elastic plate, system of «tandem» species, deformation, flow along the plate, subsonic flow

³ Assistant professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.

⁴ Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

УДК 517.9

Математическое моделирование процесса теплопереноса в длинном цилиндрическом канале

© О. В. Гермидер¹, В. Н. Попов², А. А. Юшканов³

Аннотация. В рамках кинетического подхода решена задача о течении разреженного газа в цилиндрическом канале при наличии продольного градиента температуры. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано кинетическое уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия на стенке канала – модель диффузного отражения. Отклонение состояния газа от равновесного полагается малым. Это позволило рассмотреть решение задачи в линеаризованном виде. Для отыскания линейной поправки к локально-равновесной функции распределения задача сведена к решению линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Решение последнего построено с использованием метода характеристик. С учетом полученного решения, исходя из статистического смысла функции распределения молекул газа по координатам и скоростям, построен профиль вектора потока тепла в канале и вычислен поток тепла через поперечное сечение канала. Проведен численный анализ окончательных выражений. Проведенное сравнение с аналогичными результатами, полученными с использованием метода дискретных ординат, показало, что предложенная в работе процедура решения приводит к корректным результатам в широком диапазоне значений радиуса канала.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, метод характеристик, течение газа в цилиндрическом канале

1. Введение

Исследование внутренних течений представляет собой одну из наиболее важных задач динамики разреженного газа [1]. Для слаборазреженных газов строгое решение этой задачи получается в результате интегрирования кинетического уравнения Больцмана (или системы уравнений Больцмана, если газ состоит из молекул разной природы) при соответствующих граничных и начальных условиях, после чего с помощью квадратур определяют макропараметры газа [2]. Однако, учитывая сложность кинетического уравнения Больцмана, решение задачи для слаборазреженных газов в общем случае может быть получено с использованием численных методов [1]–[3]. В сильно разреженных газах столкновениями молекул между собой можно пренебречь. В этом случае кинетическое уравнение Больцмана переходит в однородное линейное дифференциальное уравнение с частными производными, решение которого может быть получено аналитически [3]. До недавнего времени исследование внутренних течений ограничивалось в основном процессами переноса в каналах, стенки которых образованы бесконечными параллельными плоскостями, что подтверждается большим числом работ на эту тему, список которых можно найти в [1]–[5]. Однако в последнее время в связи с развитием микро и наноразмерных технологий все большее внимания уделяется рассмотрению течений газа в каналах произвольного поперечного сечения. Так, например, в [6] и [7] рассматривалось течение разреженного

¹ Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; o.germider@narfu.ru.

² Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.porov@narfu.ru.

³ Профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет, г. Москва; yushkanov@inbox.ru.

газа соответственно в канале прямоугольного и треугольного сечений, в [8]–[10] – в канале цилиндрического сечения, в [11] – в зазоре между двумя концентрическими цилиндрами, в [12] – в канале эллиптического сечения. Цель представленной работы состоит в применении аналитических методов, разработанных в [13], для решения задачи о течении разреженного газа в канале цилиндрического сечения при наличии продольного градиента температуры. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано линейризованное уравнение Вильямса [14], а в качестве граничного условия – модель диффузного отражения.

2. Вывод основных уравнений

Рассмотрим задачу о переносе тепла в цилиндрическом канале, радиуса R' . Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры dT/dz' (ось Oz' направлена вдоль оси цилиндра). Для нахождения функции распределения молекул газа по координатам и скоростям воспользуемся уравнением Вильямса [14], которое в цилиндрической системе координат записывается в виде [3]

$$v_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho'} + \frac{v_\varphi}{\rho'} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} + \frac{v_\varphi^2}{\rho'} \frac{\partial f}{\partial v_\rho} - \frac{v_\rho v_\varphi}{\rho'} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f). \quad (2.1)$$

Здесь $f = f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$; $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, \mathbf{r}' – размерный радиус-вектор, l_g – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\gamma = 15/8$,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2}{2k_B T_*} \right).$$

Параметры n_* , T_* и \mathbf{u}_* выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений в (2.1) удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии. В качестве граничного условия на стенках канала будем использовать модель диффузного отражения. Будем считать, относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул газа малым. В этом случае задача допускает линеаризацию и решение уравнения (2.1) в объеме газа можно записать в виде [14]

$$f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C) \left[1 + 2C_z U_0 + G_T \left[\left(z - \frac{C_z}{C} \right) \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} C_z \right] \right]. \quad (2.2)$$

Здесь $f(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ – абсолютный максвеллиан, $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m/2k_B T_0$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, n_0 и T_0 – концентрация молекул газа и его температура в некоторой точке, принятой за начало координат, $z = z'/\gamma l_g$, G_T – безразмерный градиент температуры. Функция $f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, определяемая выражением (2.2), является решением уравнения (2.1), однако она не удовлетворяет граничным условиям на стенках канала. Для того чтобы это условие выполнялось, поступим следующим образом. Образум на множестве функций, зависящих модуля молекулярной скорости, скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^{+\infty} \rho(C) f(C) g(C) dC, \quad \rho(C) = C^5 \exp(-C^2).$$

Выберем две ортогональные функции: $e_1(C) = 1$ и $e_2(C) = C - 5/2C$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю введенного выше скалярного произведения) и будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_\infty(\mathbf{r}', \mathbf{v}) \left[1 + G_T C_z \left[Z_1(\rho, c_\perp, \psi) + \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z_2(\rho, c_\perp, \psi) \right] \right]. \quad (2.3)$$

Здесь $\rho = \rho'/\gamma l_g$, $c_\perp^2 = c_\rho^2 + c_\varphi^2$, $c_\rho = C_\rho/C = c_\perp \cos \psi$, $c_\varphi = C_\varphi/C = c_\perp \sin \psi$, $c_\perp = C_z/C = \sin \theta$. При записи (2.3) перешли к сферической системе координат в пространстве скоростей, обозначив через ψ и θ соответственно углы, отсчитываемые от положительных направлений осей C_ρ и C_z . Подставляя (2.3) в (2.1) и линеаризовав функцию $f_* = f_*(n_*, T_*, \mathbf{u}_*)$ относительно абсолютного максвеллиана, как это приведено в [14], приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & C_z \left[C_\rho \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} + \frac{C_\varphi^2}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial C_\rho} - \frac{C_\rho C_\varphi}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial C_\varphi} + C Z_1(\rho, c_\perp, \psi) \right] + \\ & + C_z \left(C - \frac{5}{2C} \right) \left(C_\rho \frac{\partial Z_2}{\partial \rho} + \frac{C_\varphi^2}{\rho} \frac{\partial Z_2}{\partial C_\rho} - \frac{C_\rho C_\varphi}{\rho} \frac{\partial Z_2}{\partial C_\varphi} + C Z_2(\rho, c_\perp, \psi) \right) = \\ & = \frac{C}{2\pi} \int C' C'_z \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') \left[Z_1(\rho, c'_\perp, \psi') + \left(C' - \frac{5}{2C'} \right) Z_2(\rho, c'_\perp, \psi') \right] d^3 \mathbf{C}', \\ & k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + \frac{3}{2} \mathbf{C} \mathbf{C}' + \frac{1}{2} (C^2 - 2)(C'^2 - 2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вычисляя интегралы, входящие в правую часть (2.3), и сокращая обе части полученного равенства на $C C_z$, уравнение (2.3) записываем в виде

$$\begin{aligned} & c_\rho \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} + \frac{c_\varphi^2}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial c_\rho} - \frac{c_\rho c_\varphi}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial c_\varphi} + Z_1(\rho, c_\perp, \psi) + \\ & + \left(C - \frac{5}{2C} \right) \left(c_\rho \frac{\partial Z_2}{\partial \rho} + \frac{c_\varphi^2}{\rho} \frac{\partial Z_2}{\partial c_\rho} - \frac{c_\rho c_\varphi}{\rho} \frac{\partial Z_2}{\partial c_\varphi} + Z_2(\rho, c_\perp, \psi) \right) = \\ & = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Z_1(\rho, c'_\perp, \psi') \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\psi. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Учитывая ортогональность в смысле введенного скалярного произведения функций $e_1(C) = 1$ и $e_2(C) = C - 5/2C$, уравнение (2.5) распадается на два незацепленных уравнения

$$c_\rho \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} + \frac{c_\varphi^2}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial c_\rho} - \frac{c_\rho c_\varphi}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial c_\varphi} + Z_1(\rho, c_\perp, \psi) = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Z_1(\rho, c'_\perp, \psi') \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\psi, \quad (2.6)$$

$$c_\rho \frac{\partial Z_2}{\partial \rho} + \frac{c_\varphi^2}{\rho} \frac{\partial Z_2}{\partial c_\rho} - \frac{c_\rho c_\varphi}{\rho} \frac{\partial Z_2}{\partial c_\varphi} + Z_2(\rho, c_\perp, \psi) = 0. \quad (2.7)$$

Заметим, что для осесимметричных течений уравнения (2.6) и (2.7) могут быть упрощены. Учитывая, что $c_\perp = \sqrt{c_\rho^2 + c_\varphi^2}$, $\operatorname{tg} \psi = c_\varphi/c_\rho$ и дифференцируя записанные выше выражения по c_ρ и c_φ , находим

$$\frac{\partial c_\perp}{\partial c_\rho} = \frac{c_\rho}{c_\perp} = \cos \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c_\rho} = -\frac{\sin \psi}{c_\perp},$$

$$\frac{\partial c_{\perp}}{\partial c_{\varphi}} = \frac{c_{\varphi}}{c_{\perp}} = \sin \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial c_{\varphi}} = \frac{\cos \psi}{c_{\perp}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{c_{\varphi}^2}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial c_{\rho}} - \frac{c_{\rho} c_{\varphi}}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial c_{\varphi}} &= \frac{c_{\perp}^2 \sin^2 \psi}{\rho} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial c_{\perp}} \cos \psi - \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} \frac{\sin \psi}{c_{\perp}} \right) - \\ &- \frac{c_{\perp}^2 \cos \psi \sin \psi}{\rho} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial c_{\perp}} \sin \psi + \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} \frac{\cos \psi}{c_{\perp}} \right) = - \frac{c_{\perp} \sin \psi}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования справедливы и для функции $Z_2(\rho, c_{\perp}, \psi)$. Таким образом, систему уравнений (2.6), (2.7) перепишем в виде

$$c_{\perp} \cos \psi \frac{\partial Z_1}{\partial \rho} - \frac{c_{\perp} \sin \psi}{\rho} \frac{\partial Z_1}{\partial \psi} + Z_1(\rho, c_{\perp}, \psi) = \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Z_1(\rho, c'_{\perp}, \psi') \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\psi, \quad (2.8)$$

$$c_{\perp} \cos \psi \frac{\partial Z_2}{\partial \rho} - \frac{c_{\perp} \sin \psi}{\rho} \frac{\partial Z_2}{\partial \psi} + Z_2(\rho, c_{\perp}, \psi) = 0. \quad (2.9)$$

Учитывая, что

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v})|_S = f(C) \left[1 + 2C_z U_0 + G_T z \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \right],$$

принятую в работе модель граничного условия и способ линеаризации искомого решения, определяемый равенством (2.3), граничные условия для функций $Z_1(\rho, c_{\perp}, \psi)$ и $Z_2(\rho, c_{\perp}, \psi)$ записываются в виде

$$Z_1(R, c_{\perp}, \psi) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}, \quad Z_2(R, c_{\perp}, \psi) = 1, \quad \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (2.10)$$

При записи (2.10) учли, что при отражении молекул газа от внутренней поверхности цилиндра $c_{\rho} = c_{\perp} \cos \psi \leq 0$. Таким образом, нахождение функции распределения молекул газа по координатам и скоростям, определяемой выражением (2.3), сводится к решению системы уравнений (2.8), (2.9) с граничными условиями (2.10).

3. Построение функции распределения

Перед тем как перейти к построению функции распределения вычислим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла $q_z(\rho)$. Исходя из статистического смысла функции распределения [14], с учетом (2.3) находим

$$\begin{aligned} q_z(\rho) &= \frac{\gamma}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_z \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \left[2C_z U_0 + G_T \left[\left(z - \frac{C_z}{C} \right) \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) - \frac{2}{3C_z \sqrt{\pi}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + G_T C_z \left[Z_1(\rho, c_{\perp}, \psi) + \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z_2(\rho, c_{\perp}, \psi) \right] \right] d^3 \mathbf{C} = \\ &= \frac{G_T}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_z^2 \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \left(C - \frac{5}{2C} \right) (Z_2(\rho, c_{\perp}, \psi) - 1) d^3 \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Так как функция $Z_1(\rho, c_\perp, \psi)$ не вносит вклада в поток тепла, то в рассматриваемой задаче можно ограничиться отысканием функции $Z_2(\rho, c_\perp, \psi)$, определяемой уравнением (2.7) с граничным условием (2.10). Решение уравнения (2.7) ищем в виде

$$Z_2(\rho, c_\perp, \psi) = Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1. \quad (3.1)$$

С учетом (3.1) уравнение и граничные условия для нахождения функции $Z(\rho, c_\perp, \psi)$ примут вид

$$c_\perp \cos \psi \frac{\partial Z}{\partial \rho} - \frac{c_\perp \sin \psi}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \psi} + Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1 = 0, \quad (3.2)$$

$$Z(R, c_\perp, \psi) = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.2) с граничным условием (3.3) ищем методом характеристик, развитым в [13]. Система уравнений характеристик уравнения (3.2) имеет вид

$$\frac{d\rho}{c_\perp \cos \psi} = -\frac{\rho d\psi}{c_\perp \sin \psi} = -\frac{dZ}{Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1}. \quad (3.4)$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{d\rho}{c_\perp \cos \psi} = -\frac{\rho d\psi}{c_\perp \sin \psi},$$

находим один первый интеграл системы характеристик (3.4)

$$\rho |\sin \psi| = C_1. \quad (3.5)$$

С учетом (3.5) уравнение

$$\frac{d\rho}{c_\perp \cos \psi} = -\frac{dZ}{Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1}$$

перепишем в виде

$$\pm \frac{\rho d\rho}{c_\perp \sqrt{\rho^2 - C_1^2}} = -\frac{dZ}{Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1}. \quad (3.6)$$

Здесь верхний знак имеет место при $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, нижний – при $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}$. Интегрируя уравнение (3.6), находим другой первый интеграл системы характеристик

$$Z(\rho, c_\perp, \psi) \exp\left(\pm \frac{\sqrt{\rho^2 - C_1^2}}{c_\perp}\right) = C_2. \quad (3.7)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся условиями

$$C_1 = R |\sin \psi_0|, \quad C_2 = \exp\left(\frac{R \cos \psi_0}{c_\perp}\right).$$

Здесь (R, ψ_0) – координаты точки отражения молекулы газа от поверхности цилиндра в плоскости, перпендикулярной его оси. Исключая из (3.5) и (3.7) постоянные интегрирования C_1 и C_2 , приходим к системе уравнений относительно $Z(\rho, c_\perp, \psi)$ и ψ_0

$$\rho |\sin \psi| = R |\sin \psi_0|, \quad (Z(\rho, c_\perp, \psi) + 1) \exp\left(\frac{\rho \cos \psi}{c_\perp}\right) = \exp\left(\frac{R \cos \psi_0}{c_\perp}\right), \quad (3.8)$$

разрешив которую находим

$$Z(\rho, c_\perp, \psi) = \exp\left(-\frac{\rho \cos \psi + \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{c_\perp}\right) - 1. \quad (3.9)$$

Таким образом, решение уравнения (2.7) с граничным условием (2.10) и соответственно искомая функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построены.

4. Вычисление потока тепла в канале

С учетом полученных результатов находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла $q_z(\rho)$ и поток тепла J_Q , через поперечное сечение канала

$$q_z(\rho) = \frac{G_T \gamma}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_z^2 \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) \left(C - \frac{5}{2C}\right) (Z(\rho, c_\perp, \psi) - 1) d^3 \mathbf{C} = \quad (4.1)$$

$$= \frac{G_T \gamma}{\pi^{3/2}} \int_0^{+\infty} \exp(-C^2) C^3 \left(C^2 - \frac{5}{2}\right)^2 dC \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \cdot$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \left[\exp\left(-\frac{\rho \cos \psi + \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\sin \theta}\right) - 1 \right] d\psi =$$

$$= -\frac{3\gamma}{2\sqrt{\pi}} G_T \left[1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \left[\exp\left(-\frac{\rho \cos \psi + \sqrt{R^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\sin \theta}\right) - 1 \right] d\psi \right],$$

$$J_Q = \frac{4}{\gamma R^3} \int_0^R q_z(\rho) \rho d\rho. \quad (4.2)$$

На стенке канала при $\rho = R$ выражение (4.1) принимает вид

$$q_z(\rho) = -\frac{3\gamma}{2\sqrt{\pi}} G_T \left[1 - \frac{3}{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2R \cos \psi}{\sin \theta}\right) d\psi \right], \quad (4.3)$$

Значения $q_z(\rho/R)/G_T$ для канала радиуса $R = 2$, рассчитанные согласно (4.1), приведены в таблице 1. Там же приведены аналогичные значения, полученные в [8] с использованием метода дискретных ординат на основе модели Шахова.

ρ/R	0.00	0.10	0.20	0.50	0.90	0.95	1.00
(4.1)	1.3234	1.3206	1.3118	1.2431	0.9233	0.8231	0.6428
[8]	1.4586	1.4550	1.4410	1.3579	0.9711	0.8536	0.6401

Таблица 1. Значения $q_z(\rho/R)/G_T$ для канала радиуса $R = 2$.

Значения потока тепла J_Q/G_T , рассчитанные согласно (4.2), и аналогичные значения, полученные в [8], приведены в таблице 2.

R'/l_g	0.001	0.01	0.02	0.1	1.0	2.0	10.0
(4.2)	3.3742	3.3086	3.2462	2.9337	1.6188	1.0953	0.2951
[8]	3.3695	3.2848	3.2167	2.8801	1.6745	1.1794	0.3410

Таблица 3. Значения J_Q/G_T при различных значениях $R = R'/l_g$.

Значения $q_z(R)/G_T$, вычисленные согласно (4.3) на стенке канала при различных значениях его радиуса $R = R'/l_g$, и аналогичные значения, полученные в [8], приведены в

таблице 3.

R'/l_g	0.001	0.01	0.02	0.1	1.0	2.0	10.0
(4.3)	0.0013	0.0125	0.0240	0.1061	0.5108	0.6428	0.7653
[8]	0.0013	0.0122	0.0237	0.1022	0.4973	0.6406	0.8215

Таблица 3. Значения $q_z(R)/G_T$ при различных значениях $R = R'/l_g$.

Из приведенных таблиц видно, что полученные в работе результаты хорошо согласуются с аналогичными результатами [8] при $R'/l_g \ll 1$. Отличие соответствующих результатов при $R'/l_g > 1$ обусловлено тем, что при переходе к гидродинамическому пределу уравнение Вильямса приводит к значению числа Прандтля, отличающемуся от соответствующего значения для одноатомного газа [14].

5. Заключение

Итак, в настоящей работе получено аналитическое решение задачи о переносе тепла в цилиндрическом канале при наличии продольного градиента температуры. Для произвольных значений радиуса цилиндра построен профиль вектора потока тепла и вычислен поток тепла через поперечное сечение канала. Проведен численный анализ полученных выражений. Показано, что представленные в работе результаты совпадают с аналогичными результатами, полученными с использованием метода дискретных ординат.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках выполнения Государственного задания «Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач» (проект № 3628).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. М. Шарипов, В. Д. Селезнев, *Движение разреженных газов в каналах и микроканалах*, УрО РАН, Екатеринбург, 2008.
2. Ю. А. Кошмаров, Ю. А. Рыжов, *Прикладная динамика разреженного газа*, Машиностроение, М., 1977.
3. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*, Наука, М., 1967.
4. С.Е. Siewert, “The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems”, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, **54** (2003), 273–303.
5. В. Попов, А. Юшканов, В. Лукашев, *Математическое моделирование процессов переноса в каналах. Монография.*, LAP LAMBERT Academic publishing GmbH & Co, Saarbrucken, Germany, 2014, 116 с.
6. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, “Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**, 2010, 1285–1302.
7. S. Naris, D. Valougeorgis, “Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice”, *European Journal of Mechanics B/ Fluids*, **27** (2008), 810–822.

8. C. E. Siewert, D. Valougeorgis, “An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube”, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), 531–550.
9. P. Taheri, M. Bahrami, “Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels”, *Physical Review*, **86** (2012), 1–9.
10. C. H. Kamphorst, P. Rodrigues, L. B. Barichello, “A Closed-Form Solution of a Kinetic Integral Equation for Rarefied Gas Flow in a Cylindrical Duct”, *Applied Mathematics*, **5** (2014), 1516–1527.
11. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, “Численный анализ винтового течения Куэтта разреженного газа между коаксиальными цилиндрами”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **46**, 2006, 527–535.
12. I. Graur, F. Sharipov, “Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27** (2008), 335–345.
13. Э. В. Завитаев, А. А. Юшканов, “Электрическое поглощение мелкой металлической частицы цилиндрической формы”, *Журнал технической физики*, **75**, 2005, 3–9.
14. А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография*, МГОУ, М., 2004.

Mathematical modeling of the process heat transfer in a long cylindrical channel

© O. V. Germider⁴, V. N. Popov⁵, A. A. Yushkanov⁶

Abstract. Within the framework of the kinetic approach the problem of the flow of rarefied gas in a cylindrical channel with longitudinal temperature gradient is solved. As the basic equation, that describes the kinetics of the process, the Williams kinetic equation, and as a boundary condition on the wall of the channel - a model of diffuse reflection are used. The deviation from the equilibrium state of the gas is assumed small. It allowed to consider the solution of the problem in the linearized form. In order to find a linear correction to the local equilibrium distribution function the problem is reduced to solving a linear homogeneous differential equation of the first order. It's solution is constructed using the method of characteristics. The obtained solution is used to construct the profile of the heat flux vector in the channel and the heat flux through the cross section of the channel. The numerical analysis of the final expressions is done. A comparison with similar results obtained by using the method of discrete ordinates, showed that the procedure proposed in the decision leads to the correct result in a wide range of channel radius.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, method of characteristics, models of boundary conditions

⁴ Post graduate student, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; o.germider@narfu.ru.

⁵ Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.

⁶ Professor of the Department of Theoretical Physics, Moscow State Regional University, Moscow; yushkanov@inbox.ru.

УДК 517.9

Топологическая классификация полупрямых произведений DA-дiffeоморфизма тора и грубого преобразования окружности

© В. З. Гринес¹, Ю. А. Левченко², О. В. Починка³

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов являющихся полупрямым произведением DA-дiffeоморфизма тора и грубого преобразования окружности. Доказывается, что класс топологической сопряженности такого диффеоморфизма полностью определяется комбинаторными инвариантами, а именно гиперболическим автоморфизмом тора и некоторым подмножеством его периодических орбит, а также числом периодических орбит и порядковым числом преобразования окружности

Ключевые слова: топологическая сопряжённость, DA-дiffeоморфизм, гиперболических автоморфизм

1. Введение

Существенную роль в понимании принципиального отличия структурно устойчивых каскадов на многообразиях размерности большей единицы от структурно устойчивых потоков на поверхностях сыграл важный класс структурно устойчивых потоков и диффеоморфизмов, введенных Д.А. Аносовым в [1], [2] названных им *У-системами* и получивших позднее название *потоков и диффеоморфизмов Аносова*. Диффеоморфизм Аносова f замкнутого n -многообразия M^n характеризуется тем, что касательное пространство TM^n можно представить в виде суммы Уитни $E^s \oplus E^u$ df -инвариантных подрасслоений E^s , E^u ($\dim E_x^s + \dim E_x^u = n$, $x \in M^n$), и существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\|df^m(v)\| \leq C_s \lambda^m \|v\| \quad \text{для } v \in E^s, \quad \|df^{-m}(v)\| \leq C_u \lambda^m \|v\| \quad \text{для } v \in E^u, \quad m > 0.$$

С. Смейл обобщил понятие У-дiffeоморфизма и ввел в рассмотрение класс систем с гиперболической структурой неблуждающего множества, являющегося замыканием множества периодических точек [11] (дiffeоморфизмы, обладающие этими свойствами, получили название *A-дiffeоморфизмов*). Неблуждающее множество систем из этого класса допускает разложение, называемое *спектральным*, на конечное число замкнутых инвариантных *базисных множеств*, на каждом из которых система действует транзитивно. Динамика на нетривиальном базисном множестве (не являющемся периодической орбитой) обладает свойствами, во многом сходными с поведением диффеоморфизма в примере “Аносовского тора”.

Гиперболическая структура на базисном множестве Λ некоторого A-дiffeоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$, порождает существование так называемых *устойчивых* и *неустойчивых* многообразий, которые объединяют точки с одинаковым асимптотическим поведением при положительных и отрицательных соответственно итерациях [6], [10]. Для любой точки

¹ Профессор кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vgrines@yandex.ru

² Научный сотрудник ННГУ им. Н.И. Лобачевского; ulev4enko@gmail.com

³ Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ; olga-pochinka@yandex.ru

$x \in \Lambda$ существует инъективная имерсия $J_x^s : \mathbb{R}^s \rightarrow M$, образ которой $W^s(x) = J_x^s(\mathbb{R}^s)$ называется *устойчивым многообразием точки x* , такая, что выполняются следующие свойства:

1. $T_x W^s(x) = E_\Lambda^s$.
2. Точки $x, y \in M^n$ принадлежат одному многообразию $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.
3. $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$.
4. Если $x, y \in \Lambda$, то либо $W^s(x) = W^s(y)$, либо $W^s(x) \cap W^s(y) = \emptyset$.
5. Если точки $x, y \in \Lambda$ близки на M^n , то $W^s(x), W^s(y)$ C^1 -близки на компактных множествах.

*Неустойчивое многообразие $W^u(x)$ точки $x \in \Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1} . Неустойчивые многообразия обладают аналогичными свойствами. Учитывая свойство 4.2), устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*.*

В силу [8] базисное множество является *аттрактором (репеллером)* тогда и только тогда, когда оно содержит неустойчивые (устойчивые) многообразия своих точек. Однако размерность базисного множества, вообще говоря, может не совпадать с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек. В случае, если размерность аттрактора (репеллера) совпадает с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек, то аттрактор (репеллер) называется *растягивающимся (сжимающимся)*.

Диффеоморфизмы Аносова являются основой для построения растягивающихся аттракторов (сжимающихся репеллеров). Следуя [11], можно построить структурно устойчивый диффеоморфизм тора \mathbb{T}^2 , неблуждающее множество которого состоит из неподвижного источника и одномерного растягивающегося аттрактора с помощью так называемой хирургической операции Смейла из диффеоморфизма Аносова, заданного на \mathbb{T}^2 (см. раздел 3.). Такой диффеоморфизм называется *DA-диффеоморфизмом*.

В настоящей работе мы моделируем класс структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многообразий, каждый из которых является локально прямым произведением некоторого DA -диффеоморфизма двумерного тора и грубого преобразования окружности. Затем мы находим полную систему топологических инвариантов для диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

2. Гиперболические автоморфизмы двумерного тора

Классическим примером U -диффеоморфизма является *гиперболический автоморфизм тора* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, то есть диффеоморфизм \widehat{C} , заданный формулой $\widehat{C}(x, y) = (ax + by, cx + dy) \pmod{1}$, где $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица из множества $GL(2, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1 , собственные значения λ_1, λ_2 которой удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$.

Обозначим через \mathcal{C} множество гиперболических матриц из $GL(2, \mathbb{Z})$. Для $C \in \mathcal{C}$ обозначим через $Z(\widehat{C})$ централизатор \widehat{C} , то есть $Z(\widehat{C}) = \{\widehat{J} : J \in GL(2, \mathbb{Z}), \widehat{C}\widehat{J} = \widehat{J}\widehat{C}\}$.

Следующий результат доказан в [5].

Предложение 2.1. *Группа $Z(\widehat{C}), C \in \mathcal{C}$ изоморфна группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.*

Положим $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $-Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{J} = \mathcal{C} \cup Id \cup (-Id)$. Так как \widehat{C} и $-\widehat{C}$ принадлежат $Z(\widehat{C})$, то следствием утверждения 2.1. является следующий факт (см., например, [3]).

С л е д с т в и е 2.1. Если $\widehat{J} \in Z(\widehat{C})$ для $C \in \mathcal{C}$, то $J \in \mathcal{J}$. Более того, C и J имеют одинаковую форму в следующем смысле: $C = (-Id)^{j_C} \xi^{k_C}$ и $J = (-Id)^{j_J} \xi^{k_J}$, где $\xi \in \mathcal{C}$, $k_C, k_J \in \mathbb{Z}$, $j_C, j_J \in \{0, 1\}$.

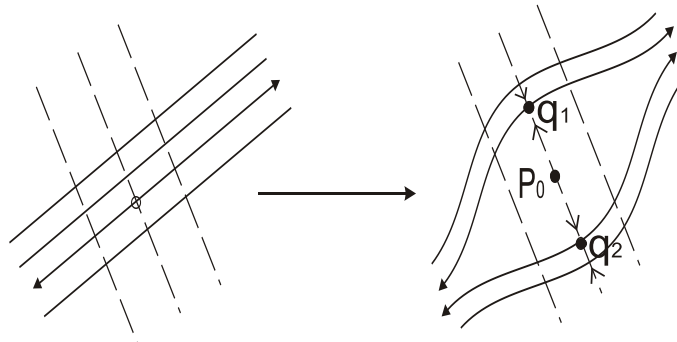
Гиперболический автоморфизм назовем *примарным*, если он не является степенью никакого другого гиперболического диффеоморфизма. Обозначим через \mathcal{E} множество сохраняющих ориентацию примарных автоморфизмов двумерного тора.

3. Конструкция DA-диффеоморфизмов

Приведем конструкцию DA-диффеоморфизма.

Пусть $\widehat{C} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – гиперболический автоморфизм тора и p_0 – неподвижная седловая точка, соответствующая началу координат в \mathbb{R}^2 с собственными значениями λ^u и λ^s . В некоторой окрестности U точки p_0 введем локальные координаты x_1, x_2 , в которых матрица линейного отображения L диагональная, то есть $\widehat{C}(x_1, x_2) = (\lambda^u x_1, \lambda^s x_2)$ на U . Выберем значение $r_0 \in (0, \frac{1}{2})$ так, чтобы 2-шар $B_{r_0}(p_0)$ радиуса r_0 с центром в точке p_0 содержался в U . Пусть $\delta(r)$ – функция одной переменной такая, что $0 \leq \delta(r) \leq 1$ для всех r , $\delta'(r) < 0$ для $r_0/2 < r < r_0$ и $\delta(r) = \begin{cases} 0, & r \geq r_0, \\ 1, & r \leq r_0/2. \end{cases}$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = x_2 \delta(\|x\|)$. Пусть φ^t – поток этой системы, $\varphi^t(x_1, x_2) = (x_1, \varphi_2^t(x_1, x_2))$. Тогда $\varphi^t = id$ вне шара $B_{r_0}(p_0)$ и $D\varphi_p^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda^s} \end{pmatrix}$. Положим $f_{\widehat{C}, p_0} = \varphi^\tau \widehat{C}$ для некоторого $\tau > 0$ такого, что $e^\tau \lambda^s > 1$. Заметим, что $Df_{p_0} = \begin{pmatrix} \lambda^u & 0 \\ 0 & e^\tau \lambda^s \end{pmatrix}$, так что p_0 – гиперболический источник. По построению диффеоморфизм $f_{\widehat{C}, p_0}$ сохраняет устойчивое слоение диффеоморфизма Аносова, и координатные оси $f_{\widehat{C}, p_0}$ -инвариантны. Поскольку диффеоморфизмы φ^τ и \widehat{C} имеют противоположные направления движения на оси Ox_2 , то диффеоморфизм $f_{\widehat{C}, p_0}$ имеет две симметричные относительно p_0 неподвижные точки q_1, q_2 на оси Ox_2 , которые являются гиперболическими седловыми точками (см. рис. 3.1). Имеет место следующее утверждение (см. например [9]).



Р и с у н о к 3.1

Хирургическая операция Смейла.

Предложение 3.1. Для диффеоморфизма $f_{\widehat{C}, p_0}$ множество $\Lambda = \mathbb{T}^2 \setminus W_{p_0}^u$ является одномерным аттрактором и спектральное разложение имеет вид $\{p_0, \Lambda\}$.

Построенный таким образом одномерный аттрактор Λ является растягивающимся, а про диффеоморфизм $f_{\widehat{C}, p_0}$ говорят, что он получен из гиперболического автоморфизма \widehat{C} раздутием неподвижной точки p_0 . Описанная хирургическая операция очевидным образом обобщается на любое множество P периодических орбит диффеоморфизма \widehat{C} и мы будем обозначать через $f_{\widehat{C}, P}$ диффеоморфизм тора \mathbb{T}^2 , полученный из гиперболического автоморфизма \widehat{C} раздутием периодических орбит множества P .

Обозначим через \mathcal{D} класс построенных DA-диффеоморфизмов $f_{\widehat{C}, P}$.

4. Грубые преобразования окружности

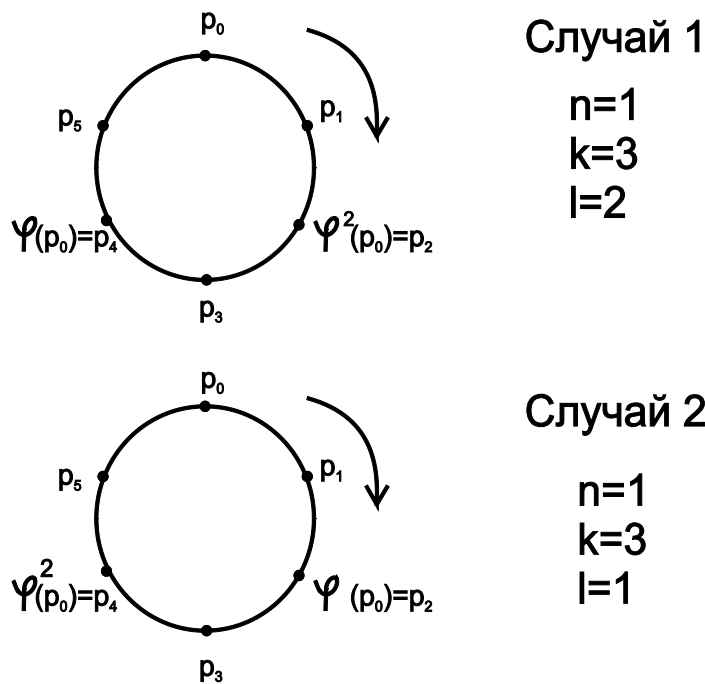
Пусть $MS_+(\mathbb{S}^1)$ – класс сохраняющих ориентацию структурно устойчивых преобразований окружности, который совпадает, согласно результатам Майера [7], с классом сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на \mathbb{S}^1 . Сформулируем результаты Майера по топологической классификации преобразований из множества $MS_+(\mathbb{S}^1)$.

Предложение 4.1. Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ неблуждающее множество $NW(\varphi)$ состоит из $2n, n \in \mathbb{N}$ периодических орбит, каждая из которых имеет период k .

Пусть $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$. Перенумеруем периодические точки из $NW(\varphi)$: $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$ начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ для $k > 1$ и числа (k, l) являются взаимнопростыми. Непосредственно проверяется, что l не зависит от выбора точки p_0 . Отметим, что А. Г. Майер вместо числа l использовал число r_1 , которое называл *порядковым числом*, таким что $l \cdot r_1 \equiv 1 \pmod{k}$.

Предложение 4.2. Два диффеоморфизма $\varphi, \varphi' \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $n, k, l; n', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$ и верно одно из следующих утверждений:

- $l = l'$ (при этом, если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),
- $l = k' - l'$ (при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).



Р и с у н о к 4.1

Топологически сопряженные диффеоморфизмы окружности с различными порядковыми числами.

На рисунке 4.1 изображены фазовые портреты топологически сопряженных диффеоморфизмов окружности с различными порядковыми числами.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l , такого что для $k = 1, l = 0$ и для $k > 1, l \in \{1, \dots, k - 1\}$, построим стандартного представителя φ_+ in $MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами n, k, l . Для $q \in \mathbb{N}$ построим стандартного представителя φ_- в $MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметром q .

Представим \mathbb{S}^1 как $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi r} = (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$. Обозначим через $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ проекцию, заданную формулой $\pi(r) = e^{i2\pi r}$. Введем следующие отображения: $\psi_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$; $\chi_{k,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$; $\tilde{\varphi} = \psi_{n \cdot k} \chi_{k,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Непосредственно проверяется, что $\tilde{\varphi}(r + w) = \tilde{\varphi}(r) + w$ для $w \in \mathbb{Z}$. Следовательно следующий диффеоморфизм корректно определен: $\varphi = \pi \tilde{\varphi} \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, где $\pi^{-1}(s)$ – полный прообраз точки $s \in \mathbb{S}^1$.

5. Формулировка результатов

Пусть $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$, $f_{\xi,P} \in \mathcal{D}$ для $\xi \in \mathcal{E}$, $\mu \in \mathbb{N}$ и $\nu \in \mathbb{Z}$. Положим $C = f_{\xi,P}^\mu$ и $J = f_{\xi,P}^\nu$. Обозначим через $\tilde{\varphi} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ произведение диффеоморфизма $\tilde{\varphi}$ и диффеоморфизма C , то есть $\tilde{\varphi}(z, r) = (C(z), \tilde{\varphi}(r))$.

Положим $M_J = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$. Обозначим через $p_J : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M_J$ естественную проекцию.

Непосредственно проверяется, что $\tilde{\varphi}_\sigma \gamma = \gamma \tilde{\varphi}_\sigma$ и, следовательно корректно определено отображение $\phi_\sigma = p_J \tilde{\varphi}_\sigma p_J^{-1}$. Будем называть диффеоморфизм $\phi : M_J \rightarrow M_J$ локально прямым произведением отображений C и φ и писать $\phi_\sigma = C \otimes \varphi$. Обозначим через Φ

множество всех локально прямых произведений ϕ . Тогда каждый диффеоморфизм $\phi \in \Phi$ единственным образом определяется параметрами $\{\xi, P, \mu, \nu, n, k, l\}$.

Следующий результат является алгебраическим критерием топологической сопряженности диффеоморфизмов из Φ .

Т е о р е м а 5.1. *Два диффеоморфизма $\phi; \phi' \in \Phi$ с параметрами $\{\xi, P, \mu, \nu, n, k, l\}; \{\xi', P', \mu', \nu', n', k', l'\}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $\nu = \nu', \mu = \mu', n = n', k = k'$, и существует матрица $H \in GL(2, \mathbb{Z})$, такая что $\xi H = H \xi', \hat{H}(P) = P'$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

- $l = l'$,
- $l = k' - l'$.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 15-01-03687-а, № 13-01-12452 офи_м2 и РНФ № 14-41-00044 в рамках в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д. В., “Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Докл. АН СССР*, **145**:4 (1962), 707–709.
2. Аносов Д. В., “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Тр. МИАН СССР*, **90**, 1967, **90** (1962), 3-210.
3. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., “On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **19**:4 (2014), 506–512.
4. Гринес В. З., Починка О. В., *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Москва-Ижевск., М., 2011, 424 с.
5. Плыкин Р. В., “О структуре централизаторов аносовских диффеоморфизмов тора”, *УМН*, **53**:6 (1998), 259–260.
6. Hirsch M., Pugh C., Shub M., *Invariant Manifolds*, Springer-Verlag, Lect. Notes Math., 1977, 576 pp.
7. Майер А. Г., “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Ученые записки Горьк. госуниверситета.*, 1939, № 12, 215–229.
8. Плыкин Р. В., “Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, 1974, № 94, 243–264.
9. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press., 1999, 506 pp.
10. Smale S., “Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms”, *Ann. Scuola Norm. Pisa.*, **18** (1963), 97–116.

11. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:1 (1967), 741–817.

The topological classification of locally direct product of DA-diffeomorphism of a 2-torus and rough diffeomorphism of the circle

© V. Z. Grines⁴, Yu. A. Levchenko⁵, O. V. Pochinka⁶

Abstract. In this paper we consider a class of diffeomorphisms of 3-manifold, such that each diffeomorphism from this class is a locally direct product of a DA-diffeomorphism of 2-torus and rough diffeomorphism of the circle. We find algebraic criteria for topological conjugacy of the systems. It is proved that the class of topological conjugacy of such diffeomorphism is completely determined by combinatorial invariants, namely hyperbolic automorphism of the torus, a subset of its periodic orbits, the number of periodic orbits and the serial number of the diffeomorphism of the circle

Key Words: topological conjugacy, DA-diffeomorphism, hyperbolic automorphism

⁴ Professor of Department of Numerical and Functional Analysis in Nizhny Novgorod State University; vgrines@yandex.ru

⁵ Researcher, Nizhny Novgorod State University; ulev4enko@gmail.com

⁶ Professor of Department of fundamental mathematics of Higher School of Economics; olga-pochinka@yandex.ru

УДК 517.938.5

О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локально прямыми произведениями

© Е. Я. Гуревич¹, С. Х. Зинина²

Аннотация. В работе выделяется класс градиентно-подобных динамических систем на поверхностях, топологическая классификация которых сводится к классификации грубых систем на окружности, полученной А.Г. Майером.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологическая сопряженность, локально-тривиальное расслоение, локально прямое произведение.

1. Введение и формулировка результатов

Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ связного замкнутого гладкого многообразия M^n размерности n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно, состоит только из гиперболических периодических точек, и для любых различных седловых периодических точек $p, q \in \Omega_f$ инвариантные многообразия W_p^s, W_q^u либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Диффеоморфизм Морса-Смейла f называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ следует, что размерность множества W_p^u меньше размерности множества W_q^u . Для случая $n = 2$ это условие означает, что инвариантные многообразия W_p^s, W_q^u различных седловых точек градиентно-подобного диффеоморфизма не пересекаются.

Поток $f^t : M^2 \rightarrow M^2$ называется градиентно-подобным, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, и инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесий не имеют общих точек. Из работы [5] следует, что любой градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^2 \rightarrow M^2$ можно представить как суперпозицию сдвига на единицу времени вдоль траекторий некоторого градиентно-подобного потока f^t и периодического диффеоморфизма на M^2 .

Задача о топологической классификации динамических систем Морса-Смейла на поверхностях (и градиентно-подобных систем в частности) восходит к классическим работам А.А. Андропова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович и А.Г. Майера, где был получен полный топологический инвариант — схема динамической системы — для потоков на сфере S^2 с конечным числом особых траекторий (см. работы [1], [12]). Подход, разработанный в этих работах, был обобщен М. Пейшото, которому принадлежит результат по топологической классификации потоков Морса-Смейла на произвольных поверхностях ([17]). Однако, в его работе была допущена неточность, которую заметили А. А. Ошемков и В. В. Шарко. В их работе [16] получена топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях (включая решение задачи реализации) на языке трехцветных графов. Еще один метод решения задачи о топологической классификации динамических систем состоит

¹ Доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород; egurevich@hse.ru

² Магистрантка факультета математики и информационных технологий, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; karkaevasvetlana@yandex.ru

в привлечении аппарата функции Ляпунова. К.Мейер получил полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях при помощи самоиндексирующейся энергетической функции (глобальной гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с множеством состояний равновесия потока). Однако, при проведении доказательства в окрестности предельных циклов, использовал результат Пейшото, который, вообще говоря, был верен только для близких систем. Результат К.Мейера уточняется в работе [9].

В цикле работ [2]– [8] В.З. Гринесом и А.Н. Безденежных получена топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических орбит на поверхностях. В работе [11] идеи Ошемкова и Шарко были применены для топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерных многообразий.

В настоящей работе предлагается еще один подход к решению проблемы топологической классификации некоторого содержательного класса градиентно-подобных систем, позволяющий понизить размерность задач и свести проблему к топологической классификации систем на многообразиях меньшей размерности.

Представим окружность \mathbb{S}^1 как подмножество комплексной плоскости: $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{ix}, x \in \mathbb{R}\}$, а тор \mathbb{T}^2 и бутылку Клейна \mathbb{K}^2 как фактор-пространство прямого произведения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ по циклической группе диффеоморфизмов $\Gamma = \{\gamma^n, n \in \mathbb{Z}\}$ с образующей $\gamma(z, t) = (\tau(z), t - 1)$, $z \in \mathbb{S}^1, t \in \mathbb{R}$, где $\tau : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ — тождественный диффеоморфизм в случае тора и инволюция $\tau(e^{ix}) = e^{-ix}$ в случае бутылки Клейна. Обозначим через $p_\tau : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow M^2$ естественную проекцию.

Пусть $M^2 \in \{\mathbb{T}^2, \mathbb{K}^2\}$, и $\tilde{\Phi} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow M^2$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\Phi}(z, t) = (\varphi_1(z), \tilde{\varphi}_2(t))$, где диффеоморфизмы $\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, \tilde{\varphi}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_1 \tau = \tau \varphi_1$;
2. либо $\tilde{\varphi}_2(t + 1) = \tilde{\varphi}_2(t) + 1$, либо $\tilde{\varphi}_2(t + 1) = \tilde{\varphi}_2(t) - 1$.

Непосредственно проверяется, что в случае, когда $\tilde{\varphi}_2(t + 1) = \tilde{\varphi}_2(t) + 1$, имеет место соотношение $\tilde{\Phi} \gamma \tilde{\Phi}^{-1} = \gamma$; а в случае $\tilde{\varphi}_2(t + 1) = \tilde{\varphi}_2(t) - 1$ имеет место соотношение $\tilde{\Phi} \gamma \tilde{\Phi}^{-1} = \gamma^{-1}$. Это позволяет корректно определить диффеоморфизм $\Phi : M^2 \rightarrow M^2$ формулой $\Phi = p_\tau \tilde{\Phi} p_\tau^{-1}$, где $p_\tau^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid p_\tau(x) = y\}$ обозначает полный прообраз точки $y \in M^2$. Отметим, что накрытие $p_0 : \{z\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, определяемое формулой $p_0(t) = e^{2\pi t i}$, и диффеоморфизм $\tilde{\varphi}_2$ однозначно определяют диффеоморфизм $\varphi_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ такой, что $\varphi_2 p_0 = p_0 \tilde{\varphi}_2$. Диффеоморфизм Φ будем называть *локально прямым произведением диффеоморфизмов* φ_1, φ_2 и обозначать $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

В разделе 2.3. мы вводим класс $\mathbb{G}(M^2)$ модельных градиентно-подобных диффеоморфизмов, являющихся локально прямыми произведениями двух структурно-устойчивых диффеоморфизмов на окружности.

Следующая теорема показывает, что класс топологической сопряженности произвольных модельных диффеоморфизмов $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$, заданных на одном и том же многообразии $M^2 \in \{\mathbb{T}^2, \mathbb{K}^2\}$, определяется классами сопряженности диффеоморфизмов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1, \varphi'_2$.

Т е о р е м а 1.1.

1. Модельные диффеоморфизмы $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ на торе топологически сопряжены тогда и только тогда, когда либо φ_1 топологически сопряжен с φ'_1 и

φ_2 топологически сопряжен с φ'_2 , либо φ_1 топологически сопряжен с φ'_2 и φ_2 топологически сопряжен с φ'_1 .

2. Модельные диффеоморфизмы $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ на бутылке Клейна топологически сопряжены тогда и только тогда, когда φ_1 топологически сопряжен с φ'_1 и φ_2 топологически сопряжен с φ'_2 .

Топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов на окружности была получена А.Г. Маейром в работе [13] (из этой работы также следует, что класс структурно устойчивых диффеоморфизмов на окружности совпадает с классом диффеоморфизмов Морса-Смейла). Для связности изложения мы приводим его результаты в разделе 2..

Отметим, что теорема 1.1. не обобщается на случай произвольных диффеоморфизмов, являющихся локально прямыми произведениями. Так, из работы [15] Я. Нильсена, в частности, следует, что если $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ — два периодических отображения на торе с одинаковым периодом³, то эти диффеоморфизмы топологически сопряжены даже в том случае, если соответствующие диффеоморфизмы окружности φ_i, φ'_i ($i = 1, 2$) не являются топологически сопряженными (например, имеют разные периоды).

Пусть $G(M^2)$ — класс градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном замкнутом многообразии M^2 такой, что для любого $f \in G(M^2)$ множество седловых точек Ω_f^1 представляется в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств Σ_1, Σ_2 таких, что:

- 1) множества $\mathcal{A}_f = cl W_{\Sigma_1}^u, \mathcal{R}_f = cl W_{\Sigma_2}^s$ состоят из конечного числа попарно непересекающихся компонент, каждая из которых гомеоморфна окружности;
- 2) $(\Omega_f^0 \cup \Omega_f^2) \subset \mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f$;
- 3) для любых различных седловых точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, принадлежащих одной и той же компоненте связности аттрактора \mathcal{A}_f (репеллера \mathcal{R}_f) выполняются условия $cl(W_{\sigma_1}^s) \cap cl(W_{\sigma_2}^s) = \emptyset$ ($cl(W_{\sigma_1}^u) \cap cl(W_{\sigma_2}^u) = \emptyset$).

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.2. Пусть $f \in G(M^2)$. Тогда M^2 диффеоморфно либо тору \mathbb{T}^2 , либо бутылке Клейна \mathbb{K}^2 и найдется модельный диффеоморфизм $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, топологически сопряженный с f .

Непосредственным следствием из теоремы 1.2. является аналогичный результат для потоков. Пусть $\mathcal{F}(M^2)$ — класс градиентно-подобных потоков f^t на поверхности M^2 таких, что для любого потока $f^t \in \mathcal{F}(M^2)$ выполняются условия 1,2 и 3. Аналогично определению модельных диффеоморфизмов, определим модельные потоки на торе и бутылке Клейна, являющиеся локально прямым произведением грубых потоков на окружности соответственно.

Т е о р е м а 1.3.

- Пусть $f^t \in \mathcal{F}(M^2)$. Тогда $M^2 \in \{\mathbb{T}^2, \mathbb{K}^2\}$ и найдется модельный поток на M^2 , топологически эквивалентный потоку f^t .

³ Отображение $f: M^2 \rightarrow M^2$ называется периодическим периода $t > 0$, если $f^m(x) = x$ для любой точки $x \in M^2$ и существует по крайней мере одна точка $y \in M^2$ такая, что множество $y, f(y), \dots, f^{m-1}(y)$ состоит из попарно-различных точек.

- Модельные потоки $\Phi^t = (\varphi_1^t, \varphi_2^t), \Phi'^t = (\varphi_1'^t, \varphi_2'^t)$ на торе топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда либо φ_1^t топологически эквивалентен $\varphi_1'^t$ и φ_2^t топологически эквивалентен $\varphi_2'^t$, либо φ_1^t топологически эквивалентен $\varphi_2'^t$ и φ_2^t топологически эквивалентен $\varphi_1'^t$.
- Модельные потоки $\Phi^t = (\varphi_1^t, \varphi_2^t), \Phi'^t = (\varphi_1'^t, \varphi_2'^t)$ на бутылке Клейна топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда φ_1^t топологически эквивалентен $\varphi_1'^t$ и φ_2^t топологически эквивалентен $\varphi_2'^t$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения») при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (13-01-12452 офи-м2, 15-01-03687 А и 15-31-50394 мол_нр). Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку за внимание к работе.

2. Модельные диффеоморфизмы, являющиеся локально прямыми произведениями на торе и бутылке Клейна

2.1. Топологическая классификация А.Г. Майера диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности

В этом разделе напоминаются результаты А.Г. Майера (см. [13]) по топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности. Обозначим этот класс через $MS(\mathbb{S}^1)$ и разобьем $MS(\mathbb{S}^1)$ на два подкласса $MS_+(\mathbb{S}^1)$ и $MS_-(\mathbb{S}^1)$, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно.

Предложение 2.1.

1. Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS(\mathbb{S}^1)$ неблуждающее множество Ω_φ состоит из четного числа периодических точек.
2. Если $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$, то все периодические точки имеют одинаковый период, если $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$, то в точности две его неблуждающие точки являются неподвижными, а остальные имеют период 2.

Пусть $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$, $2n$ — число его периодических орбит, k — период. Зафиксируем произвольную периодическую точку p_0 и занумеруем остальные периодические точки в порядке их следования за точкой p_0 вдоль обхода окружности по часовой стрелке. Если $k > 1$, то обозначим через $l \in \{1, \dots, k-1\}$ такое целое число, взаимно простое с k , что $\varphi(p_0) = p_{2nl}$. Если $k = 1$, то положим $l = 0$ ⁴. Заметим, что l не зависит от выбора точки p_0 .

Пусть $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$, $2q$ — число его периодических точек.

Предложение 2.2.

⁴ А.Г. Майер вместо числа l использовал число r_1 , которое он называл *порядковым числом*, такое что $l \cdot r_1 \equiv 1 \pmod{k}$.

1. Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $(n, k, l); (n', k', l')$ соответственно топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- $l = l'$ (при этом если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),
- $l = k' - l'$ (при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).

2. Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $q; q'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$.

2.2. Модельные представители классов топологической сопряженности диффеоморфизмов из $MS(\mathbb{S}^1)$

Напомним, что во введении определены следующие объекты: $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{ix}, x \in \mathbb{R}\}$ и $p_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ — непрерывное отображение, заданное формулой $p_0(x) = e^{2\pi xi}$. Определим диффеоморфизм $\chi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ формулой $\chi(e^{ix}) = e^{-ix}$.

Для $m \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{\eta}_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока $\dot{x} = \sin(2\pi mx)$. Для $k = 1$ положим $l = 0$, для $k > 1$ пусть $l \in \{1, \dots, k-1\}$ — натуральное число, взаимно простое с k . Определим диффеоморфизмы $\tilde{\theta}_{k,l}, \tilde{\phi}_{n,k,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулами $\tilde{\theta}_{k,l}(x) = x - \frac{l}{k}$, $\tilde{\phi}_{n,k,l} = \tilde{\theta}_{k,l} \tilde{\eta}_{n \cdot k}$. Так как для любых n, k, l диффеоморфизм $\tilde{\phi}_{n,k,l}$ удовлетворяет условию $\tilde{\phi}_{n,k,l}(x+1) = \tilde{\phi}_{n,k,l}(x) + 1$, то формула $\phi_{n,k,l}(z) = \pi(\tilde{\phi}_{n,k,l}(\pi^{-1}(z)))$ корректно определяет сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\phi_{n,k,l} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, реализующий класс топологической сопряженности, определяемый тройкой (n, k, l) .

Для определения меняющего ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла на окружности, реализующего класс топологической сопряженности, определяемый числом $q \in \mathbb{N}$, положим $\phi_q(z) = \phi_{q,1,0}(\chi(z))$ и отметим, что диффеоморфизм $\tilde{\phi}_q(x) = \tilde{\phi}_{q,1,0}(-x)$ является накрывающим для $\phi_q(z)$.

2.3. Определение модельных диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$

Напомним, что во введении тор \mathbb{T}^2 и бутылка Клейна \mathbb{K}^2 определены как факторпространство прямого произведения $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ по циклической группе диффеоморфизмов $\Gamma = \{\gamma^n, n \in \mathbb{Z}\}$ с образующей $\gamma(z, t) = (\tau(z), t - 1), z \in \mathbb{S}^1, t \in \mathbb{R}$, $\tau : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ — тождественный диффеоморфизм в случае тора и инволюция $\tau(e^{ix}) = \chi(e^{ix}) = e^{-ix}$ в случае бутылки Клейна, и через $p_\tau : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow M^2$ обозначена естественная проекция.

Выберем произвольную пару модельных диффеоморфизмов $\varphi_1, \varphi_2 \in MS(\mathbb{S}^1)$ и определим модельный диффеоморфизм $\Phi \in \mathbb{G}(\mathbb{T}^2)$ как прямое произведение $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Определим модельный диффеоморфизм $\Phi \in \mathbb{G}(\mathbb{K}^2)$, являющийся локально прямым произведением $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$. В качестве диффеоморфизма φ_2 выберем произвольный модельный диффеоморфизм из множества $MS(\mathbb{S}^1)$, а в качестве диффеоморфизма φ_1 выберем либо диффеоморфизм ϕ_q (где $q \in \mathbb{N}$ — произвольное число), либо диффеоморфизм $\phi_{n,1,0}$, либо диффеоморфизм $\phi_{n,2,1}$ (где $n \in \mathbb{N}$ — произвольное число). Такой выбор диффеоморфизма φ_2 исчерпывает все модельные диффеоморфизмы из множества $MS(\mathbb{S}^1)$, для которых выполняется условие $\varphi_2 \chi = \chi \varphi_2$.

2.4. Топологическая классификация модельных диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$

В этом разделе доказывается теорема 1.1..

Необходимость. Пусть $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$ — модельные диффеоморфизмы из класса $\mathbb{G}(\mathbb{K}^2)$, $\tilde{\Phi} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $\tilde{\Phi}' : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ — накрывающие диффеоморфизмы из определения локально прямого произведения, и, для определенности, $\varphi_1 = \phi_q, \varphi_2 = \phi_{n,k,l}$, $\varphi'_1 = \phi_{q'}, \varphi'_2 = \phi_{n',k',l'}$ (рассуждения в остальных случаях аналогичны).

Положим $\tilde{\mathcal{B}}_1 = \{\mathbb{S}^1 \times \{\frac{\nu}{2nk}\}, \nu \in \mathbb{Z}\}$, $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{\{e^{i\pi \frac{\mu}{q}}\} \times \{\mathbb{R}\}, \mu \in \{0, \dots, 2q-1\}\}$. Отметим, что $p_\tau(\tilde{\mathcal{B}}_1 \cup \tilde{\mathcal{B}}_2) = \bigcup_{p,q \in \Omega_{\frac{1}{q}}^1} (cl W_p^s \cup cl W_q^u)$, при этом множество $\mathcal{B}_1 = p_\tau(\tilde{\mathcal{B}}_1)$ состоит из $2nk$

двусторонних кривых, а множество $\mathcal{B}_2 = p_\tau(\tilde{\mathcal{B}}_2)$ является объединением двух односторонних кривых и $(q-1)$ односторонних кривых. Пусть $B_2 \in \mathcal{B}_2$ — односторонняя кривая. Выберем на B_2 ориентацию произвольным образом и занумеруем кривые $B_1^0, \dots, B_1^{2nk-1}$ из множества \mathcal{B}_1 таким образом, чтобы при обходе кривой B_2 в выбранном направлении от точки $B_1^0 \cap B_2$ к точке $B_1^{2nk-1} \cap B_2$ последовательность номеров возрастала, пробегая все значения от 0 до $2nk-1$. Ограничение диффеоморфизма Φ на множество \mathcal{B}_1 индуцирует подстановку P_1 на множестве $\{0, 1, \dots, 2nk-1\}$ периода k , причем либо $P_1(0) = 2nl$ либо $P_1(0) = 2n(k-l)$.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{B}}'_1, \tilde{\mathcal{B}}'_2, \tilde{\mathcal{B}}'_1, \tilde{\mathcal{B}}'_2, P'_1$ аналогичные объекты для диффеоморфизма Φ' .

Пусть Φ, Φ' топологически сопряжены, то есть существует гомеоморфизм $h : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ такой, что $h\Phi = \Phi'h$. Тогда $h(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}'_i$, $i \in \{1, 2\}$ и гомеоморфизм $h|_{\mathcal{B}_1}$ сопрягает подстановки P_1, P'_1 . Тогда $q = q', n = n', k = k'$ и либо $l = l'$, либо $l = k' - l'$, что, в силу утверждения 2.2., означает, что диффеоморфизмы φ_i, φ'_i топологически сопряжены, $i \in \{1, 2\}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi, \Phi' \in \mathbb{G}(\mathbb{T}^2)$. Аналогично первому случаю введем множества $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}'_i$, $i \in \{1, 2\}$, которые, в этом случае, состоят из конечного числа двусторонних кривых. Пусть существует гомеоморфизм $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что $h\Phi = \Phi'h$.

Возможны две ситуации: либо $h(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}'_i$, $i \in \{1, 2\}$, либо $h(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}'_2$, а $h(\mathcal{B}_2) = \mathcal{B}'_1$. В каждой ситуации рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

Достаточность. Пусть $\Phi, \Phi' \in \mathbb{G}(\mathbb{K}^2)$ и диффеоморфизм φ_i топологически сопряжен с диффеоморфизмом φ'_i посредством гомеоморфизма h_i , $i \in \{1, 2\}$. Тогда существует гомеоморфизм $\tilde{h}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\tilde{h}_2\chi = \chi\tilde{h}_2$ и $\tilde{h}_2\tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}'_2\tilde{h}_2$. Отсюда следует, что диффеоморфизм $\tilde{\Phi}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $\tilde{\Phi}'$ посредством гомеоморфизма $\tilde{h} = (h_1, \tilde{h}_2)$ и диффеоморфизм Φ топологически сопряжен с диффеоморфизмом Φ' посредством гомеоморфизма $h = p_\tau\tilde{h}p_\tau^{-1}$. Рассуждения в случае тора аналогичны.

Доказательство закончено.

3. Топология многообразий, допускающих диффеоморфизмы из класса $G(M^2)$

В этом разделе в лемме 3.2. доказывается первая часть теоремы 1.2..

Лемма 3.1. Пусть P_1, P_2 — топологические пространства такие, что существуют гомеоморфизмы $h_1 : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow P_1$ и $h_2 : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow P_2$. Тогда

а) если $P_1 \cap P_2 = h_1(\mathbb{S}^1 \times \{1\}) = h_2(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$, то существует гомеоморфизм $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow P_1 \cup P_2$;

b) если $P_1 \cap P_2 = h_1(\mathbb{S}^1 \times \{0, 1\}) = h_2(\mathbb{S}^1 \times \{0, 1\})$, то существует непрерывное отображение $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow P_1 \cup P_2$ такое, что ограничения $H|_{\mathbb{S}^1 \times (0,1)}$, $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}$ и $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}}$ являются гомеоморфизмами.

Доказательство. В случае а) определим гомеоморфизм $h_{1,2} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ формулой $h_2^{-1}(h_1(q, 1)) = (h_{1,2}(q), 0)$ для любой точки $q \in \mathbb{S}^1$ и гомеоморфизм $H_{1,2} : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ формулой $H_{1,2}(q, t) = (h_{1,2}(q), t)$. Положим $H_2 = h_2 H_{1,2} : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow P_2$. Тогда искомый гомеоморфизм $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow P_1 \cup P_2$ определяется формулой

$$H(q, t) = \begin{cases} h_1(q, 2t), t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(q, 2t - 1), t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

В случае б) не уменьшая общности можно считать, что $h_1(\mathbb{S}^1 \times \{1\}) = h_2(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$. Тогда отображение H , построенное в пункте а) будет взаимно-однозначным на множестве $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ и $H(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = H(\mathbb{S}^1 \times \{1\})$. По построению отображение H является непрерывным и его ограничения $H|_{\mathbb{S}^1 \times (0,1)}$, $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}$ и $H|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}}$ являются гомеоморфизмами.
Доказательство закончено.

Лемма 3.2. Пусть $f \in G(M^2)$, тогда M^2 диффеоморфно либо тору, либо бутылке Клейна.

Доказательство. Покажем, что для любого диффеоморфизма $f \in G(M^2)$ замыкание каждой компоненты связности V множества $V_f = M^2 \setminus (\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f)$ гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

Так как V — связно и принадлежит устойчивому многообразию аттрактора \mathcal{A}_f (неустойчивому многообразию репеллера \mathcal{R}_f), то V содержит в своем замыкании ровно по одной связной компоненте A, R множеств $\mathcal{A}_f, \mathcal{R}_f$. Далее будем предполагать, что множества V, A, R инвариантны относительно диффеоморфизма f (в противном случае перейдем к подходящей степени диффеоморфизма f).

Обозначим через U_A замкнутую окрестность множества A в V , для которой существует гомеоморфизм $h_A : U_A \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ такой, что $h_A|_A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Положим $S_A = h_A^{-1}(\mathbb{S}^1 \times \{1\})$ и обозначим через $U_R \subset V$, $h_R : U_R \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ и S_R аналогичные объекты для множества R .

Покажем, что существует натуральное число ν_* , такое что $S_A^* = f^{-\nu_*}(S_A) \subset U_R$. Действительно, для каждой точки $t \in S_A$ существует натуральное число $\nu(t)$ и окрестность $U_t \subset S_A$ такие, что $f^{-\nu}(U_t) \subset U_R$ для всех $\nu \geq \nu(t)$. Совокупность $\{U_t\}_{t \in S_A}$ образует покрытие окружности S_A . В силу компактности S_A , можно выбрать конечное число точек t_1, \dots, t_m таких, что их окрестности $U_{t_1}, \dots, U_{t_m} \subset \{U_t\}_{t \in S_A}$ образуют конечное покрытие окружности S_A . В качестве ν_* выберем максимальное из чисел $\nu(t_1), \dots, \nu(t_m)$.

Покажем, что R и S_R принадлежат различным компонентам связности множества $U_R \setminus S_A^*$. Предположим противное. Тогда S_A^* является границей некоторой области $D \subset U_R$ и найдется натуральное число $\nu_D \geq \nu_*$ такое, что $f^{\nu_D}(D \cup f^{-\nu_*}(U_A)) \subset U_A$. Окружность $S = f^{\nu_D}(S_A^*) = f^{\nu_D - \nu_*}(S_A)$ гомологична окружности A в V_A , так как $S \cup A$ является границей кольца $f^{\nu_D - \nu_*}(U_A) \subset U_A$. С другой стороны, S ограничивает диск $f^{\nu_D}(D) \subset U_A$, следовательно, S гомологична нулю в V_A . Полученное противоречие доказывает, что S_A^* делит R и S_R в U_R . Так как U_R по условию гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, то замыкание области в U_R , ограниченной замкнутыми кривыми R и S_A^* также гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Множество $f^{-\nu_*}(U_A)$ гомеоморфно множеству U_A , следовательно, гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. В силу леммы 3.1. замыкание множества V гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$.

Пусть B — произвольная компонента связности множества $\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f$. В силу леммы 3.1. существует непрерывное отображение $E_f : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow M^2 \setminus B$ такое, что отображения $E_f|_{\mathbb{S}^1 \times (0, 1)} : \mathbb{S}^1 \times (0, 1) \rightarrow M^2 \setminus B$, $E_f|_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}} : \mathbb{S}^1 \times \{0\} \rightarrow B$, $E_f|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}} : \mathbb{S}^1 \times \{1\} \rightarrow B$ являются гомеоморфизмами. Обозначим через $E_{f,0} : \mathbb{S}^1 \rightarrow B$ ($E_{f,1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow B$) гомеоморфизм такой, что $E_f(z, 0) = E_{f,0}(z)$ ($E_f(z, 1) = E_{f,1}(z)$) для любого $z \in \mathbb{S}^1$. Положим $\tau = E_{f,0}^{-1}E_{f,1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Тогда по построению многообразие M^2 диффеоморфно фактор-пространству прямого произведения $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]/\sim$ по отношению эквивалентности $(z, 1) \sim (\tau(z), 0)$, которое, в свою очередь, диффеоморфно либо тору \mathbb{T}^2 (в случае, когда τ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом), либо бутылкой Клейна (если τ является меняющим ориентацию гомеоморфизмом).

Доказательство закончено.

4. Топологическая классификация диффеоморфизмов из класса $\mathbb{G}(M^2)$

4.1. Оснащенный граф диффеоморфизма

Для доказательства теоремы используется результат работы [8], из которого следует, что два градиентно-подобных диффеоморфизма на поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда изоморфны их различающие графы, аналогичные графу Пейшото. Ниже даются необходимые определения и приводится точная формулировка результата.

Пусть $f : M^2 \rightarrow M^2$ — градиентно-подобный диффеоморфизм. Поставим ему в соответствие ориентированный граф Γ_f , множество вершин которого изоморфно множеству периодических точек Ω_f , множество ребер изоморфно множеству всех сепаратрис седловых периодических точек, и каждое ребро ориентировано в соответствии с ориентацией сепаратрисы (от источника к седлу или от седла к стоку). Обозначим через η_f изоморфизм из множества периодических точек и сепаратрис диффеоморфизма f на множество вершин и ребер графа Γ_f .

Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин графа Γ_f подстановку, которую обозначим через P_f .

Пусть L_ω — множество сепаратрис, содержащих в своем замыкании стоковую периодическую точку $\omega \in \Omega_f$ и n_ω — мощность множества L_ω . Выберем диск $d_\omega \subset W_\omega^s$, такой, что $\omega \in \text{int } d_\omega$, а граница c_ω диска d_ω пересекает каждую сепаратрису из множества L_ω в единственной точке. Занумеруем сепаратрисы $l_{\omega,1}, \dots, l_{\omega,n_\omega}$ из множества L_ω таким образом, чтобы при обходе дуги c_ω от точки $l_{\omega,1} \cap c_\omega$ к точке $l_{\omega,n_\omega} \cap c_\omega$ номера сепаратрис возрастали, последовательно принимая все значения от 1 до n_ω , а диск d_ω оставался слева.

Занумеруем множество ребер $E_\omega = \eta_f(L_\omega)$, инцидентных вершине $\eta_f\omega$ в соответствии с выбранной нумерацией соответствующих сепаратрис.

Граф Γ_f , в котором каждая вершина $\eta_f(\omega)$, $\omega \in \Omega_f^0$, оснащена нумерацией инцидентных ей ребер, согласованной с нумерацией сепаратрис, называется *оснащенным графом диффеоморфизма f* .

Оснащенные графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ диффеоморфизмов f, f' *изоморфны*, если существует изоморфизм $\xi : \Gamma_f \rightarrow \Gamma_{f'}$ такой, что:

1. ξ сохраняет ориентацию ребер;

2. $\xi P_f = P'_f \xi$;
3. для каждой вершины w , соответствующей стоковой точке, подстановка, которую индуцирует изоморфизм ξ на множестве $\{1, \dots, N_w\}$, является степенью циклической подстановки.

В силу [8] (см. также [10], теорема 3.2.1) справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Градиентно-подобные диффеоморфизмы $f, f' : M^2 \rightarrow M^2$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их оснащенные графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны.*

4.2. Доказательство теоремы 1.2.

В силу утверждения 4.1. для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого диффеоморфизма $f \in G(M^2)$ найдется модельный диффеоморфизм $\Phi : M^2 \rightarrow M^2$, оснащенный граф Γ_Φ которого изоморфен графу Γ_f .

Отметим, что модельные диффеоморфизмы реализуют всевозможные классы (относительно изоморфизма, определенного выше) оснащенных графов и подстановок на их множестве вершин, обладающих следующими свойствами:

1. граф связан; не имеет кратных ребер и циклов (с учетом ориентации);
2. каждая вершина инцидентна ровно четырем ребрам;
3. множество вершин разбивается на три инвариантных относительно подстановки подмножества: стоковые (для каждой стоковой вершины w все инцидентные ей ребра ориентированы к w), источниковые (для каждой источниковой вершины a все инцидентные ей ребра ориентированы от a) и седловые (для каждой седловой вершины s ровно два ребра ориентированы к s и два — от s);
4. число стоковых вершин равно числу источниковых вершин;
5. число седловых вершин равно сумме чисел стоковых и источниковых вершин.

Для произвольного диффеоморфизма $f \in G(M^2)$ оснащенный граф Γ_f и подстановка P_f обладают свойствами 1-5. Действительно, свойства 1, 3 и 5 следуют из определения графа Γ_f и формулы Лефшеца. Из условий 1-2, определяющих класс $G(M^2)$, следует, что число стоковых $|\Omega_f^0|$ и число седловых точек $|\Sigma_1|$, принадлежащих множеству \mathcal{A}_f , одинаково. Аналогично, равны число $|\Omega_f^2|$ источниковых и число $|\Sigma_2|$ седловых точек, принадлежащих множеству \mathcal{R}_f . Из условия 3 определения класса $G(M^2)$ следует, что $|\Sigma_1| \leq |\Omega_f^2|$, $|\Sigma_2| \leq |\Omega_f^0|$. Но из формулы Лефшеца следует, что $|\Sigma_1| + |\Sigma_2| = |\Omega_f^2| + |\Omega_f^0|$, тогда выполняются равенства $|\Sigma_1| = |\Omega_f^2|$, $|\Sigma_2| = |\Omega_f^0|$, откуда следует, что графа Γ_f удовлетворяет условиям 2,4.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., "Грубые системы", *Докл. АН СССР*, 14:5 (1937), 247-250.

2. Безденежных А. Н. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е. А. Лентович-Андроновой, Горький, 1985. - С. 22 - 38. [Имеется перевод: Bezdenezhykh A. N., Grines V. Z. Dynamical properties and topological classification of gradientlike diffeomorphisms on two-dimensional manifolds I. Sel. Math. Sov., 1992. - V. 11. - P. 1 - 11.]
3. Безденежных А. Н. Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е. А. Лентович-Андроновой, Горький, 1985. - С. 139 - 152.
4. Безденежных А. Н. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 2/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е. А. Леонтович-Андроновой, Горький, 1987. - С. 24-32. [Имеется перевод: Bezdenezhykh A. N., Grines V. Z. Dynamical properties and topological classification of gradientlike diffeomorphisms on two-dimensional manifolds II. Sel. Math. Sov., 1992. - V. 11. - P. 13 - 17.]
5. Безденежных А. Н. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н. Ф. Отрокова, Горький, ГГУ., 1985. - С. 33 - 37. [Имеется перевод: Bezdenezhykh A. N., Grines V. Z. Realization of gradientlike diffeomorphisms of two-dimensional manifolds. Sel. Math. Sov., 1992. - V. 1. № 1. - P. 19 - 23.]
6. Безденежных А. Н. Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях/ А. Н. Безденежных, В. З. Гринес// Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н. Ф. Отрокова, Горький, ГГУ., 1985. - С. 111 - 112.
7. Безденежных А. Н., Гринес В. З., “Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Дифференциальные и интегральные уравнения* / Н. Ф. Отроков. Горький: ГГУ, 1985, 33—37.
8. Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным числом гетероклинических траекторий на поверхностях/ В. З. Гринес// Мат. заметки, 1993.- Т. 54, № 3.- С. 3-17.
9. Гуревич Е. Я., Куренков Е. Д., “Энергетическая функция и топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях”, *Труды СВМО*, 2015..
10. Гринес В. З., Починка О. В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.
11. Гринес В. З., Капкаева С. Х., Починка О. В., “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Математический сборник*, **10**, 205 (2014), 19-46.

12. Леонтович Е., Майер А. О, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Доклады академии наук СССР*, **4**, 103 (1955), 557-560.
13. Майер А.Г., “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. Зап. ГГУ*, 1939, 12, 215-229.
14. Meyer K.R., “Energy Functions for Morse-Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
15. Нильсен Я., *Структура периодических преобразований поверхностей (перевод с немецкого языка книги Nielsen J. Die struktur Periodischer Transformationen von Flächen. - Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. M.-f. Meddelelser. XV, 1, Kobenhavn, 1937, s. 1-77)*, Горький, 1984, 77 с.
16. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93-140.
17. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.

On topological classification of gradient-like systems on surfaces, that are locally direct product

© Е. Ya. Gurevich⁵, S. H. Kapkaeva⁶

Abstract. We introduce a class of gradient-like dynamical systems for which the problem of topological classification is reduced to topological classification of structurally stable systems on the circle obtained by A. Mayer.

Key Words: Morse-Smale gradient-like diffeomorphism topological conjugacy, mapping torus, locally direct product.

⁵ Associate Professor of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics; egurevich@hse.ru

⁶ Student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.

УДК 519.63

Исследование порядка точности неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения задач газовой динамики

© Р. В. Жалнин¹, А. В. Максимкин², В. Ф. Масыгин³, А. И. Пантюшин⁴,
Е. Е. Пескова⁵, В. Д. Сальников⁶, В. Ф. Тишкин⁷

Аннотация. В работе предложена неявная методика для разрывного метода Галеркина, основанная на представлении системы сеточных уравнений в «дельта-форме». Для исследования численного порядка точности предложенного метода выполнены серии расчетов для одномерной задачи о волне, в которой сохраняются энтропия и инвариант Римана.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, неявная схема, уравнения газовой динамики.

1. Введение

В настоящее время метод Галеркина с разрывными базисными функциями [1] является одним из широко используемых численных методов, применяемых для решения задач газовой динамики. Но, как известно, при использовании явных схем накладываются жесткие ограничения на шаг дискретизации по времени. Это делает перспективным развитие неявных методик, где ограничение на шаг по времени обусловлено только требуемой точностью. В данной работе предложена неявная методика для разрывного метода Галеркина, основанная на представлении системы сеточных уравнений в «дельта-форме». Для исследования численного порядка точности предложенного метода выполнены серии расчетов для одномерной задачи о простой волне, сохраняющей энтропию и инвариант Римана [2].

¹ Заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; zhrv@mrsu.ru.

² Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; maksimkinav@apmath.mrsu.ru.

³ Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; masyaginvf@apmath.mrsu.ru.

⁴ Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; pantyushinai@apmath.mrsu.ru.

⁵ Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; peskovaee@apmath.mrsu.ru.

⁶ Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; salnikovvd@apmath.mrsu.ru.

⁷ Заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва; v.f.tishkin@mail.ru.

2. Неявная схема для разрывного метода Галеркина

Рассмотрим одномерную систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix},$$

$$E = \epsilon + \frac{u^2}{2}, \quad p = \rho\epsilon(\gamma - 1).$$

Здесь ρ – плотность, p – давление, u – скорость, ϵ – удельная внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты. Система (2.1) рассматривается вместе с соответствующими начальными и граничными условиями.

Систему (2.1) будем решать разрывным методом Галеркина на отрезке $[a, b]$. Для этого рассмотрим сетку

$$a = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = b$$

с шагом $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

В каждой ячейке $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ приближенное решение системы уравнений (2.1) будем искать в виде проекции на пространство полиномов степени p в базисе $\{\psi_k(x)\}$:

$$U_h(x, t) = \sum_{k=0}^p u_k(t) \psi_k(x). \quad (2.2)$$

Будем рассматривать случаи $p = 1$ и $p = 2$. В качестве базиса выберем систему функций:

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_1(x) = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad \psi_2(x) = \frac{(x - x_i)^2}{h_i^2}, \quad x \in I_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

где $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$.

Согласно разрывному методу Галеркина получим следующую систему [1]:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial U_h}{\partial t} \psi_l(x) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(U_h) \frac{\partial}{\partial x} \psi_l(x) dx + F_{i+1/2} \psi_l(x_{i+1/2}) - F_{i-1/2} \psi_l(x_{i-1/2}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad l = 0, \dots, p. \quad (2.4)$$

Здесь $F_{i-1/2}$, $F_{i+1/2}$ – дискретные потоки, которые вычисляются как решения задачи о распаде разрыва [3].

Обозначим \widetilde{M}_i – матрицу, составленную из элементов $m_{kl} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \psi_k(x) \psi_l(x) dx$, $k, l = 0, \dots, p$ для каждой ячейки I_i , $i = 1, \dots, N$. Далее обозначим M_i – блочно-диагональную матрицу

$$M_i = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_i & \dots & 0 \\ \vdots & \widetilde{M}_i & \vdots \\ 0 & \dots & \widetilde{M}_i \end{pmatrix},$$

и U_i^n – вектор составленный из коэффициентов разложения компонент вектора консервативных переменных U на n -м временном слое в ячейке I_i .

Затем с учетом введенных обозначений запишем неявную схему для (2.4):

$$\sum_{k=0}^p \frac{(u_k)_i^{n+1} - (u_k)_i^n}{\tau} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \psi_k(x) \psi_l(x) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(U_i^{n+1}) \frac{\partial}{\partial x} \psi_l(x) dx + F_{i+1/2}^{n+1} \psi_l(x_{i+1/2}) - F_{i-1/2}^{n+1} \psi_l(x_{i-1/2}) = 0, i = 1, \dots, N, l = 0, \dots, p, \quad (2.5)$$

или в матричной записи:

$$M \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} - L(U^{n+1}) = 0, \quad (2.6)$$

где $U^n = (U_1^n, \dots, U_N^n)$.

Представим

$$F(U^{n+1}) = F(U^n) + \frac{\partial F}{\partial U} \Delta U, \\ F_{i+1/2}^{n+1} = F_{i+1/2}^n + A^+ \Delta U_i + A^- \Delta U_{i+1},$$

где $\Delta U = U^{n+1} - U^n$, $A^\pm = R\Lambda^\pm L$, $\Lambda^\pm = (\Lambda \pm |\Lambda|)/2$, R, L – матрицы, составленные, соответственно, из правых и левых собственных векторов матрицы $A = \frac{\partial F}{\partial U}$, а Λ – диагональная матрица, составленная из собственных значений A . В результате получим линейную систему, которая в матричной форме запишется следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\tau} M - \frac{\partial L}{\partial U} \right) \Delta U = L(U^n). \quad (2.7)$$

Значение на новом временном слое находится следующим образом:

$$U^{n+1} = \Lambda \Pi_h(\alpha)(U^n + \Delta U), \quad (2.8)$$

где $\Lambda \Pi_h(\alpha)$ – ограничитель Кокбурна ($1 \leq \alpha \leq 2$) [1, 2], который используется для подавления осцилляций вблизи разрывов.

Для решения системы (2.7) использовались решатели GMRES и BoomerAMG из библиотеки HYPRE [5]. Более подробно использование данных решателей в рамках данной методики рассмотрено в работе [6].

3. Результаты расчетов

В качестве тестовой задачи для исследования порядка точности метода была выбрана задача с простой волной [2], в которой энтропия p/ρ^γ и инвариант Римана $R^+ = u + \frac{2}{\gamma-1}$ являются постоянными.

В начальный момент задаётся плотность:

$$\rho = \begin{cases} 1 + e^{2-2\frac{l^2}{l^2-x^2}}, & |x| < l, x \in [-1, 1], l = 0.2, \gamma = 5/3 \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Остальные параметры определяются согласно условию постоянства энтропии и инварианта Римана:

$$\epsilon = \rho^{\gamma-1}, u = \frac{-2\sqrt{\epsilon(\gamma-1)\gamma}}{\gamma-1}. \quad (3.2)$$

Были выполнены серии расчетов на последовательности сгущающихся сеток. Значения точного решения, используемые для определения погрешности, вычислялись аналогично

работе [2]. Численные решения были получены описанным выше методом с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \rho(-1, t) = 1, \quad u(-1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(-1, t) = 6, \\ \rho(1, t) = 1, \quad u(1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(1, t) = 6. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Погрешность решения оценивалась в следующих нормах:

$$\begin{aligned} \|U_h - U_T\|_{L_1} &= \int_a^b |U_h - U_T| dx, \\ \|U_h - U_T\|_{L_2} &= \left(\int_a^b |U_h - U_T|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где U_h – вычисленные значения сеточной функции, U_T – точные значения искомого решения.

В таблицах 1 – 8 представлены погрешности и порядки точности полученных результатов. При решении системы (2.7) относительная погрешность нахождения решения задавалась равной 10^{-4} .

По результатам расчетов можно сделать вывод, что предложенная схема состоятельна и показывает удовлетворительные результаты. При ослаблении параметров ограничителя ($\alpha = 2$) получается порядок точности выше первого. Тот факт, что не достигается, казалось бы, ожидаемый порядок точности (второй или выше) можно объяснить влиянием ограничителя Кокбурна, о чем подробно говорится в работе [2]. Это позволяет говорить о возможности повышения порядка точности методики за счет использования ограничителей, которые уменьшают порядок точности в меньшей степени, что является заделом для дальнейшего исследования.

Используемые методы решения системы линейных алгебраических уравнений не оказывают заметного влияния на порядок точности, но метод GMRES демонстрирует минимальное преимущество перед алгебраическим многосеточным методом (AMG). При этом, следует заметить, что использование BoomerAMG требовало в среднем в 1.5 раза меньшее количество итераций при решении системы (2.7) (для GMRES размерность пространства Крылова задавалась равной 20; для BoomerAMG допустимая глубина вложенных сеток задавалась равной 20).

Таблица 1: Порядок точности ($p = 2$, $\alpha = 1.5$, GMRES)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	Order, $\ \cdot\ _{L_2}$
50	7.051978E-002	-	1.219065E-001	-
100	3.789902E-002	0.8959	7.689797E-002	0.6648
200	2.005818E-002	0.9180	4.602746E-002	0.7405
400	1.053435E-002	0.9291	2.663442E-002	0.7893

Таблица 2: Порядок точности ($p = 2$, $\alpha = 2.0$, GMRES)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	Order, $\ \cdot\ _{L_2}$
50	5.684439E-002	-	1.062554E-001	-
100	2.647765E-002	1.1022	5.847784E-002	8.6157
200	1.085581E-002	1.2863	2.733743E-002	1.0970
400	4.137819E-003	1.3915	1.151226E-002	1.2477

Таблица 3: Порядок точности ($p = 2$, $\alpha = 1.5$, BoomerAMG)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	Order, $\ \cdot\ _{L_2}$
50	7.051859E-002	-	1.218947E-001	-
100	3.790927E-002	0.8955	7.690993E-002	0.6644
200	2.006011E-002	0.9182	4.603179E-002	0.7405
400	1.053347E-002	0.9293	2.663405E-002	0.7894

Таблица 4: Порядок точности ($p = 2$, $\alpha = 2.0$, BoomerAMG)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	Order, $\ \cdot\ _{L_2}$
50	5.681484E-002	-	1.062139E-001	-
100	2.643151E-002	1.1040	5.842460E-002	0.8623
200	1.084692E-002	1.2850	2.731513E-002	1.0969
400	4.162216E-003	1.3819	1.151728E-002	1.2459

Таблица 5: Порядок точности ($p = 3$, $\alpha = 1.5$, GMRES)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	Order, $\ \cdot\ _{L_2}$
50	8.177310E-002	-	1.347056E-001	-
100	4.486013E-002	0.8662	8.702407E-002	0.6303
200	2.430233E-002	0.8843	5.349442E-002	0.7020
400	1.293719E-002	0.9096	3.161057E-002	0.7590

Таблица 6: Порядок точности ($p = 3$, $\alpha = 2.0$, GMRES)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	Order, $\ \cdot\ _{L_2}$
50	6.638527E-002	-	1.166230E-001	-
100	3.105487E-002	1.0960	6.545680E-002	0.8332
200	1.321185E-002	1.2330	3.167177E-002	1.0473
400	4.934820E-003	1.4208	1.340976E-002	1.2399

Таблица 7: Порядок точности ($p = 3$, $\alpha = 1.5$, BoomerAMG)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	Order, $\ \cdot\ _{L_2}$
50	8.181598E-002	-	1.347550E-001	-
100	4.493047E-002	0.8647	8.711857E-002	0.6293
200	2.438070E-002	0.8820	5.363114E-002	0.6999
400	1.302655E-002	0.9043	3.177319E-002	0.7553

Таблица 8: Порядок точности ($p = 3$, $\alpha = 2.0$, BoomerAMG)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$	$\ \cdot\ _{L_2}$	Order, $\ \cdot\ _{L_2}$
50	6.641629E-002	-	1.166640E-001	-
100	3.110548E-002	1.0944	6.558310E-002	0.8310
200	1.327554E-002	1.2284	3.184349E-002	1.0423
400	5.016678E-003	1.4040	1.361815E-002	1.2255

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31260 мол_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bernardo Cockburn, "An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations", *Lecture Notes in Mathematics*, **1697** (1998), 151 – 268.
2. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф., "Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина", *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2012, № 34, 31 с., URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-34>.
3. Годунов С.К., "Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики", *Матем. сб.*, **47(89)**:3 (1959), 271 – 306.
4. Жалнин Р.В., Масыгин В.Ф., Сальников В.Д., Пескова Е.Е., "Решение задач газовой динамики с использованием неявной схемы для метода галеркина с разрывными базисными функциями", *Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн.*

конф. (Россия, г. Пенза, 28–31 октября 2014 г.), Изд-во ПГУ, Пенза, 2014, 100 – 104, 276 с.

5. E. Chow, A.J. Cleary, and R.D. Falgout, “Design of the hypre Preconditioner Library”, *Proc. of the SIAM Workshop on Object Oriented Methods for Inter-operable Scientific and Engineering Computing* (Workshop held at the IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, October 21-23, 1998), SIAM, Philadelphia, PA, 1998, 100 – 104, 276 pp.
6. Жалнин Р.В., Масыгин В.Ф., “Исследование влияния решателей систем линейных алгебраических уравнений на точность решения задач газовой динамики разрывным методом Галеркина с неявной дискретизацией по времени.”, *Препринт Средне-Волжского математического общества*, 2014, № 126, 8 с.

Research of the order of accuracy of an Implicit Discontinuous Galerkin method for solving problems of gas dynamics

© R. V. Zhalnin⁸, A. V. Maksimkin⁹, V. F. Masyagin¹⁰, A. I. Pantyushin¹¹, E. E. Peskova¹², V. D. Salnikov¹³, V. F. Tishkin¹⁴

Abstract. In this paper we propose a method for implicit discontinuous Galerkin method, based on the idea of difference equations in the form named "delta-form". We perform a series of calculations for one-dimensional problem of the wave which conserves the entropy and Riemann invariant to study the numerical order of accuracy of the proposed method.

Key Words: DG, implicit schemes, gas dynamic equations.

⁸ Head of the Department of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; zhrv@mrsu.ru.

⁹ Postgraduate student of the Department of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; maksimkinav@appmath.mrsu.ru.

¹⁰ Assistant of the Department of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; masyaginvf@appmath.mrsu.ru.

¹¹ Postgraduate student of the Department of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; pantyushinai@appmath.mrsu.ru.

¹² Postgraduate student of the Department of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; peskovaee@appmath.mrsu.ru.

¹³ Postgraduate student of the Department of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; salnikovvd@appmath.mrsu.ru.

¹⁴ Deputy director, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow; v.f.tishkin@mail.ru.

УДК 517.9

Непрерывные потоки Морса-Смейла на проективно-подобных многообразиях

© Е. В. Жужома¹, В. С. Медведев², Н. А. Тарасова³

Аннотация. В статье изучается топологическая структура несущих многообразий для потоков Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит ровно из трех состояний равновесия.

Ключевые слова: Поток Морса-Смейла, неблуждающее множество, проективно-подобное многообразие

Пусть f^t – непрерывный поток на замкнутом n -мерном топологическом многообразии M^n , $n \geq 2$. Это означает, что для любого $t \in \mathbb{R}$ задан гомеоморфизм $f_t : M^n \rightarrow M^n$ так, что $f_0 = id$ есть тождественное отображение и $f_{t_1+t_2} = f_{t_1} \circ f_{t_2}$ для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x) = U$ и числа $T > 0$ найдется $t_0 \geq T$ такое, что $U(x) \cap f_{t_0}(U) \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек образует неблуждающее множество потока, которое обозначается через $NW(f^t)$. Известно, что $NW(f^t)$ состоит из целых траекторий, то есть является инвариантным множеством потока [1], [2].

В связи с открытием в середине прошлого века топологических многообразий, которые не допускают гладкой структуры (см., например [3]), такие проблемы, как исследование топологической структуры несущего многообразия и топологическая классификация должны рассматриваться не только для гладких потоков на гладких многообразиях, но и для непрерывных потоков на топологических многообразиях. Особый интерес представляют непрерывные потоки, у которых неблуждающие множества аналогичны неблуждающим множествам гладких потоков с гиперболической структурой, поскольку последние обладают определенным типом устойчивости [4]. Простейшими потоками с такими неблуждающими множествами являются потоки Морса-Смейла, введенные Смейлом [5] (см. также [4], [6] с историческими комментариями). Будем называть f^t (непрерывным) *поток Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

1) Неблуждающее множество $NW(f^t)$ состоит из конечного набора состояний равновесия и периодических траекторий, причем α - и ω -предельные множества любой траектории лежат в $NW(f^t)$.

2) В окрестности каждой траектории из $NW(f^t)$ поток локально топологически эквивалентен потоку либо с гиперболической периодической траекторией, либо с гиперболическим состоянием равновесия. Как следствие, для каждой траектории $l \subset NW(f^t)$ определяются (и существуют) устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(l)$, $W^u(l)$ соответственно, которые являются топологически вложенными подмногообразиями:

$$W^s(l) = \{x \in M^n \mid f_t(x) \rightarrow l\}, \quad W^u(l) = \{x \in M^n \mid f_{-t}(x) \rightarrow l\}, \quad t \rightarrow \infty.$$

3) Для любых траекторий $l_1, l_2 \subset NW(f^t)$ многообразия $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ топологически трансверсальны (это означает, что в окрестности любой точки из $W^s(l_1) \cap W^u(l_2)$

¹ Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru

² Старший научный сотрудник НИИ ПМК ННГУ им. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru

³ Доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин, Нижегородский государственный инженерно-экономический университет, Княгинино; tarasova-na-an@gambler.ru

пересечение многообразий $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ локально гомеоморфно трансверсальному пересечению гиперплоскостей в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n).

Из неравенств Морса, которые справедливы для непрерывных потоков Морса-Смейла, вытекает, что любой поток Морса-Смейла на замкнутом многообразии имеет хотя бы одну притягивающую и хотя бы одну отталкивающую траектории [5]. Из связности несущего многообразия M^n (ниже мы всегда будем считать это многообразие связным, если не оговорено противное) вытекает, что если поток имеет ровно один устойчивый и ровно один неустойчивый узлы, то M^n является n -мерной сферой и поток топологически эквивалентен стандартному потоку типа "север-юг".

В настоящей работе рассматриваются непрерывные потоки Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит ровно из трех состояний равновесия. Мы изучаем топологическую структуру несущих многообразий.

Нетрудно показать, что если двумерное замкнутое многообразие M^2 допускает поток Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех точек, то M^2 является проективной плоскостью, и любые два потока Морса-Смейла с тремя критическими точками на проективной плоскости топологически эквивалентны. Этот результат мотивирует введение специального класса многообразий. Пусть M^n – топологическое замкнутое n -мерное многообразие, $n \geq 2$. Напомним, что топологически вложенная в M^n k -мерная сфера S^k , $1 \leq k \leq n-1$, называется *локально плоско вложенной*, если для любой точки $z \in S^k$ существует окрестность $U(z) = U \subset M^n$ и гомеоморфизм $\varphi_z : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_z(S^k \cap U) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если

1. $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;
2. M^n есть дизъюнктивное объединение⁴ $\frac{n}{2}$ -мерной сферы $S^{\frac{n}{2}}$, локально плоско вложенной в M^n , и открытого n -мерного шара B^n ,

$$M^n = S^{\frac{n}{2}} \cup B^n, \quad S^{\frac{n}{2}} \cap B^n = \emptyset.$$

Сфера $S^{\frac{n}{2}}$ из вышеприведенного определения называется *образующей* для данного проективно-подобного многообразия. Основным результатом настоящей работы относится к описанию топологической структуры несущего многообразия.

Т е о р е м а 1.1. Пусть f^t – непрерывный поток Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, на замкнутом n -мерном топологическом многообразии M^n , $n \geq 2$. Тогда M^n является проективно-подобным многообразием. При этом, M^2 является проективной плоскостью $M^2 = \mathbb{P}^2$ (неориентируемой поверхностью рода единица с фундаментальной группой $\pi_1(M^2) = \mathbb{Z}_2$), а при $n \geq 4$

$$\pi_1(M^n) = \dots = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0, \quad \text{и следовательно, } M^n \text{ ориентируемое.}$$

Более того, на каждом проективно-подобном многообразии существует непрерывный поток Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия.

Отметим результаты, имеющие отношение к рассматриваемой тематике. В 1962 году Иллс и Куипер [7] описали замкнутые многообразия (в топологической, кусочно линейной и гладкой категориях), допускающие непрерывные функции Морса с тремя критическими

⁴ Объединение называется дизъюнктивным, если объединяемые множества попарно не пересекаются.

точками. Они доказали, что многообразия, допускающие такие функции Морса являются проективно-подобными (в [7] не использовалось понятие проективно-подобного многообразия, и мы интерпретируем результат работы [7] в введенных нами терминах). Однако, в топологической категории доказательство теоремы 1.1. не сводится непосредственно к основному результату работы [7], поскольку неясно можно ли непрерывный поток Морса-Смейла представить в виде градиентного потока относительно некоторой функции Морса. Кроме этого, для потоков даже в гладкой категории имеется априорная возможность дикого вложения замыканий сепаратрис седловых состояний равновесия (поэтому неясно можно ли представить несущее многообразие в виде локально плоско вложенной сферы и шара). Возможность дикого вложения топологического замыкания сепаратрис седловых периодических точек была открыта Пикстоном [8] для диффеоморфизмов Морса-Смейла трехмерной сферы. При решении проблемы классификации возможность дикого вложения была также независимо открыта Бонатти и Гринесом [9]. Для потоков Морса-Смейла нетрудно показать, что при $n = 2, 3$ замыкания сепаратрис всегда локально плоско вложены [10]. Что касается размерности $n \geq 4$ несущего многообразия, то в [11], [12] авторы показали, что для любого $n \geq 4$ существуют замкнутое многообразие M^n и градиентный полярный поток Морса-Смейла f^t на M^n такие, что f^t не имеет гетероклинических пересечений, неблуждающее множество f^t состоит из четырех неподвижных точек, и замыкание одной из сепаратрис потока f^t является дико вложенной сферой коразмерности два.

Следующее утверждение нам понадобится в доказательстве двух лемм. Поэтому мы сформулируем его для ссылок в виде предложения.

Предложение 1.1. Пусть замкнутое n -мерное топологическое многообразие M^n , $n \geq 2$, является дизъюнктивным объединением локально плоско вложенной в M^n k -мерной сферы S^k , $1 \leq k \leq n-1$, и открытого n -мерного шара B^n , и пусть S^k обладает открытой трубчатой окрестностью $T(S^k)$ такой, что ее граница $\partial T(S^k)$ является плоско вложенным подмногообразием коразмерности один, причем окрестность $T(S^k)$ есть пространство локально тривиального расслоения $\pi : T(S^k) \rightarrow S^k$ над базой S^k и слоем, являющимся открытым $(n-k)$ -диском D^{n-k} . Тогда существует плоско вложенная в M^n $(n-1)$ -мерная сфера $\Sigma_T^{n-1} \subset T(S^k)$ такая, что 1) $S^k \cap \Sigma_T^{n-1} = \emptyset$; 2) сфера Σ_T^{n-1} ограничивает в M^n n -мерный шар b^n , содержащий $\partial T(S^k)$.

Доказательство. Пусть Σ^{n-1} – плоско вложенная в M^n $(n-1)$ -мерная сфера, окружающая n -шар b_0^n с точкой x_0 внутри и трансверсальная (в топологическом смысле) траекториям потока f_0^t . Из свойств этого потока и равенства $M^n = S^k \cup B^n$ вытекает, что для достаточно большого сдвига f_0^T на время T сферы Σ^{n-1} вдоль траекторий потока f_0^t множество $\Sigma_T^{n-1} = f_0^T(\Sigma^{n-1})$ является $(n-1)$ -мерной сферой, принадлежащей $T(S^k)$. Из непрерывности потока f_0^t вытекает, что Σ_T^{n-1} плоско вложена в M^n . Граница $\partial T(S^k)$ является компактным подмножеством открытого шара B^n . Поскольку при увеличении времени траектории потока f_0^t стремятся к виртуальной границе шара B^n , то для достаточно большого T множество $\partial T(S^k)$ окажется внутри шара $b^n = f_0^T(b_0^n)$.

Доказательство закончено.

Ключевым результатом для доказательства теоремы 1.1. является следующее утверждение, имеющее самостоятельный интерес (достаточное условие для топологического многообразия быть проективно-подобным).

Лемма 1.1. Пусть замкнутое n -мерное топологическое многообразие M^n , $n \geq 2$, является дизъюнктивным объединением локально плоско вложенной в M^n k -мерной сферы S^k , $1 \leq k \leq n-1$, и открытого n -мерного шара B^n . Тогда M^n есть

проективно-подобное многообразие, то есть $k = \frac{n}{2}$, и $S^k = S^{\frac{n}{2}}$ является образующей сферой для M^n (при этом, M^2 является проективной плоскостью). Более того, граница трубчатой окрестности сферы $S^{\frac{n}{2}}$ гомеоморфна $(n-1)$ -мерной сфере.

Доказательство. Имеем $M^n = S^k \cup B^n$, $S^k \cap B^n = \emptyset$, $1 \leq k \leq n-1$, $n \geq 2$. Поскольку для $n = 2$ образующая окружность многообразия M^2 не может разбивать M^2 , то ее трубчатая окрестность гомеоморфна листу Мебиуса. Поэтому M^2 является проективной плоскостью, $M^2 = \mathbb{P}^2$.

Далее мы будем предполагать $n \geq 3$. Из плоской вложимости $S^k \subset M^n$ вытекает, что S^k обладает открытой трубчатой окрестностью $T(S^k)$ такой, что ее граница $\partial T(S^k)$ является плоско вложенным подмногообразием коразмерности один, причем окрестность $T(S^k)$ есть пространство локально тривиального расслоения $\pi : T(S^k) \rightarrow S^k$ над базой S^k и слоем, являющимся открытым $(n-k)$ -диском D^{n-k} [13]. Удобно считать D^{n-k} единичным диском так, что граница каждого слоя $\partial D_x^{n-k} = S_x^{n-k-1}$, где $x \in S^k$, $D_x^{n-k} = \pi^{-1}(x)$, принадлежит границе $\partial T(S^k)$ трубчатой окрестности $T(S^k)$.

Построим на B^n и $\text{clos } T(S^k) = T(S^k) \cup \partial T(S^k)$, вообще говоря, несвязанные друг с другом потоки f_0^t и f_1^t соответственно. Возьмем произвольную точку $x_0 \in B^n$, не принадлежащую $\text{clos } T(S^k)$. Так как B^n – шар, то на B^n существует непрерывный поток f_0^t такой, что x_0 является неустойчивым узлом, а все остальные траектории покидают любую компактную часть шара B^n и потом в нее не возвращаются (траектории при увеличении времени стремятся к виртуальной границе шара B^n). За основу для построения потока f_1^t возьмем поток на замкнутом диске $\text{clos } D^{n-k}$, у которого центр является устойчивым узлом, граница состоит из точек покоя, а остальные одномерные траектории по радиусам движутся от границы к центру. Поскольку $T(S^k)$ является локально тривиальным расслоением со слоем D^{n-k} и центр диска D^{n-k} отождествляется в этом расслоении с S^k , то на $\text{clos } T(S^k)$ существует поток f_1^t такой, что множества $\partial T(S^k)$, S^k состоят из точек покоя, а остальные (одномерные) траектории движутся от $\partial T(S^k)$ к S^k при увеличении времени.

Пересечение $T(S^k) \cap f_0^T(b_0^n)$ есть открытое множество, граница которого содержит $\partial T(S^k)$. Поскольку $\partial T(S^k)$ суть подмногообразие коразмерности один, то у $\partial T(S^k)$ в множестве $\text{clos } (T(S^k) \cap f_0^T(b_0^n))$ есть полуокрестность $\mathfrak{U} \subset (T(S^k) \cup \partial T(S^k)) \cap f_0^T(b_0^n)$ гомеоморфная $(0; 1] \times \partial T(S^k)$. Возьмем открытое подмножество $\text{int } \mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$ гомеоморфное $(0; 1) \times \partial T(S^k)$. Из свойств гомотопических групп вытекают следующие равенства

$$\pi_i(\text{int } \mathfrak{U}) = \pi_i((0; 1) \times \partial T(S^k)) = \pi_i(\partial T(S^k)), \quad i = 0, \dots, n-2. \quad (1.1)$$

Множество $A_0 = B^n \setminus \text{clos } f_0^T(b_0^n)$ является открытым n -мерным кольцом, гомеоморфным $(0; 1) \times \mathbb{S}^{n-1}$. Поэтому его гомотопические группы равны $\pi_i(A_0) = 0$ для всех $i = 0, \dots, n-2$. Рассмотрим представитель $\gamma : \mathbb{S}^i \rightarrow \text{int } \mathfrak{U}$ группы $\pi_i(\text{int } \mathfrak{U})$, где \mathbb{S}^i – i -мерная (каноническая) сфера. Так как $\gamma(\mathbb{S}^i) \cap \partial T(S^k) = \emptyset$, то существует достаточно большой сдвиг f_1^R вдоль траекторий потока f_1^t такой, что $f_1^R(\gamma(\mathbb{S}^i)) \subset A_0$. Отсюда и (1.1) следует, что $\pi_i(\partial T(S^k)) = 0$ для всех $i = 0, \dots, n-2$. Из справедливости гипотезы Пуанкаре вытекает, что $\partial T(S^k)$ гомеоморфна $(n-1)$ -мерной сфере [14], [15], [16], [17], [18]. Отсюда следует нетривиальность расслоения $\pi : T(S^k) \rightarrow S^k$. Более того, локально тривиальное расслоение $\pi : T(S^k) \rightarrow S^k$ индуцирует локально тривиальное расслоение $\partial T(S^k) \rightarrow S^k$, то есть расслоение $(n-1)$ -мерной сферы S^{n-1} с базой S^k и слоем $S^{n-k-1} = \partial D^{n-k}$. Известно [19] (см. также [20]), что имеются только следующие такие расслоения

$$S^3 \rightarrow S^2, \text{ слой } S^1; \quad S^7 \rightarrow S^4, \text{ слой } S^3; \quad S^{15} \rightarrow S^8, \text{ слой } S^7.$$

Нетрудно видеть, что этим расслоениям соответствуют следующие пары (n, k) : $(4, 2)$, $(8, 4)$, $(16, 8)$. Это завершает доказательство леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Следующая лемма дает достаточное условие гомеоморфности проективно-подобных многообразий.

Л е м м а 1.2. Пусть M_1^n, M_2^n – проективно-подобные многообразия, и S_1, S_2 – их образующие сферы соответственно. Тогда если S_1, S_2 локально эквивалентно вложены, то M_1^n, M_2^n гомеоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Множество $O_i = M_i^n \setminus S_i$ гомеоморфно открытому n -шару, $i = 1, 2$. По условию леммы, для некоторых окрестностей $U(S_1), U(S_2)$ сфер S_1, S_2 соответственно существует гомеоморфизм $\varphi_0 : U(S_1) \rightarrow U(S_2)$, $\varphi_0(S_1) = S_2$. Перейдя, если необходимо, к меньшей окрестности, можно считать окрестность $U(S_1)$ трубчатой. В силу предложения 1.1., существует $(n - 1)$ -сфера $S^{n-1} \subset U(S_1)$, $S^{n-1} \cap S_1 = \emptyset$, плоско вложенная в M_1^n . Покажем, что существует гомеоморфизм $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$, совпадающий с φ_0 в некоторой окрестности сферы S_1 .

Так как $M_1^n = S_1 \cup O_1$, то $S^{n-1} \subset O_1$, поскольку $S^{n-1} \cap S_1 = \emptyset$. Так как сфера S^{n-1} плоско вложена, и O_1 гомеоморфно n -шару, то S^{n-1} ограничивает в O_1 n -шар τ_1^n , $\tau_1^n \cap S_1 = \emptyset$. Согласно предложению 1.1., мы можем считать, что граница $\partial U(S_1)$ трубчатой окрестности $U(S_1)$ лежит в шаре τ_1^n .

Поскольку $S^{n-1} \subset U(S_1)$ и $\partial U(S_1) \subset \tau_1^n$, то $M_1^n = U(S_1) \cup \tau_1^n$. Более того, множество $M_1^n \setminus \tau_1^n$ принадлежит $U(S_1)$. Из того, что φ_0 – гомеоморфизм вытекает, что $(n - 1)$ -сфера $\varphi_0(S^{n-1})$ плоско вложена в M_2^n , и $\varphi_0(S^{n-1}) \cap S_2 = \emptyset$, так как $\varphi_0(S_1) = S_2$. Поэтому $\varphi_0(S^{n-1})$ ограничивает в M_2^n n -шар τ_2^n , такой, что $\tau_2^n \cap S_2 = \emptyset$ (здесь мы учитываем равенство $M_2^n = S_2 \cup O_2$). Далее, из того, что S^{n-1} ограничивает в O_1 n -шар τ_1^n вытекает, что ограничение $\varphi_0|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \varphi_0(S^{n-1})$ продолжается до некоторого гомеоморфизма $\tau_1^n \rightarrow \tau_2^n$, который образует совместно с $\varphi_0|_{M_1^n \setminus \tau_1^n}$ требуемый гомеоморфизм $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Доказательство теоремы 1.1.. Поток Морса-Смейла f^t необходимо имеет устойчивый сток ω и неустойчивый источник α . Из связности несущего многообразия M^n вытекает, что третье состояние равновесия является седлом σ с k -мерным ($1 \leq k \leq n - 1$) устойчивым $W^s(\sigma)$ и $(n - k)$ -мерным неустойчивым многообразием $W^u(\sigma)$. Множество $Sep^\tau(\sigma) = W^\tau(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ называется сепаратрисой (τ либо s , либо u). Если $Sep^\tau(\sigma)$ не пересекается с сепаратрисами других седел, то $Sep^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторого стока (соответственно, источника), скажем N . Тогда топологическое замыкание сепаратрисы $Sep^\tau(\sigma)$ равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$, и является топологически вложенной в M^n сферой (k -сферой или $(n - k)$ -сферой соответственно) [21], [22], [23]. Поскольку сепаратрисы одного седла у потока f^t Морса-Смейла не пересекаются, то топологическое замыкание неустойчивой сепаратрисы $Sep^u(\sigma)$ является топологически вложенной k -сферой $W^u(\sigma) \cup \{\omega\} = S_\omega$, а топологическое замыкание устойчивой сепаратрисы $Sep^s(\sigma)$ является топологически вложенной $(n - k)$ -сферой $W^s(\sigma) \cup \{\alpha\} = S_\alpha$. Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет о сепаратрисе седла потока f^t мы будем обозначать сепаратрису через $Sep^\tau(\sigma, f^t)$. Нам нужно показать, что хотя бы одна из сфер S_ω, S_α локально плоско вложена. Поскольку для размерности $n = 4$ обозначения и конструкция доказательства нам понадобятся при рассмотрении топологической эквивалентности, то мы сформулируем утверждение в виде предложения. Далее будут использованы введенные выше обозначения.

Предложение 1.2. *Хотя бы одна из сфер S_ω , S_α локально плоско вложена.*

Доказательство. Отметим, что из определения потока Морса-Смейла вытекает, что инвариантные многообразия седла являются локально плоско вложенными подмногообразиями. Поэтому единственной точкой дикого вложения сферы S_ω (соотв. сферы S_α) может быть только точка ω (соотв. α).

Для $n = 2$ сферы S_ω , S_α являются окружностями. Известно, что топологически вложенная окружность плоско вложена [24], [25].

Из работы [26] вытекает, что на трехмерных замкнутых многообразиях не существуют потоков Морса-Смейла с тремя состояниями равновесия (на самом деле в [26] доказан более сильный результат для систем Морса-Смейла, но нам достаточно частного случая).

При $n \geq 5$ одна из сфер S_ω или S_α , скажем S_ω , имеет коразмерность не менее трех. Тогда из [27] следует, что S_ω локально плоско вложена.

Осталось рассмотреть случай $n = 4$. Если одна из сфер S_ω , S_α трехмерная, то известно, что она не может быть дико вложенной только в одной точке [28] (см. также [27], [29]). Поэтому далее будем считать, что обе сферы S_ω , S_α двумерные (для сфер коразмерности два имеется априорная возможность быть дико вложенной ровно в одной точке, см. [30]).

Сперва рассмотрим в евклидовом пространстве \mathbb{R}^4 с координатами (x_1, \dots, x_4) , векторное поле \vec{V}_s , которое задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3, \quad \dot{x}_4 = x_4. \quad (1.2)$$

Ясно, что начало координат $O = (0, \dots, 0)$ является седлом поля \vec{V}_s с 2-мерной устойчивой сепаратрисой $W^s(O)$ и 2-мерной неустойчивой сепаратрисой $W^u(O)$, где $W^s(O) = \{(x_1, \dots, x_4) \mid x_3 = 0, x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$, $W^u(O) = \{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1 = 0, x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Нетрудно видеть, что функция $F(x_1, \dots, x_4) = \sum_{i=1}^2 x_i^2 \sum_{j=3}^4 x_j^2$ является интегралом системы (1.2) (см. детали в [11]). Из вида F следует, что гиперповерхность $F = 1$ является 3-мерным многообразием, которое разбивает \mathbb{R}^4 на два открытых множества

$$\{\vec{x} = (x_1, \dots, x_4) \mid F(\vec{x}) < 1\} \stackrel{\text{def}}{=} U_0, \quad \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_4) \mid F(\vec{x}) > 1\} \stackrel{\text{def}}{=} U_\infty.$$

Объединение $W^s(O) \cup W^u(O)$ определяется равенством $F = 0$. Поскольку $O \in W^s(O) \cup W^u(O)$, то $O \in U_0$. Таким образом, U_0 - инвариантная окрестность седла O , которую мы будем называть *специальной*. Отметим, что множества

$$P_1 = \{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}, \quad P_2 = \{(x_1, \dots, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 \leq 1\}$$

являются полноториями с общей границей $\partial P_1 = \partial P_2 = P_1 \cap P_2$, которая представляет собой двумерный тор.

Окружим сток ω и источник α потока f^t четырехмерными шарами B_1 , B_2 соответственно такими, что их границы $\partial B_1 = S_1^3$, $\partial B_2 = S_2^3$ трансверсальны потоку, а седло σ принадлежит $M^4 \setminus (B_1 \cup B_2)$. Тогда сепаратрисы $Sep^u(\sigma)$, $Sep^s(\sigma)$ пересекают S_1^3 , S_2^3 по замкнутым простым кривым C_1 , C_2 соответственно. Отметим, что поток индуцирует отображения последования Пуанкаре

$$\xi : (S_2^3 \setminus C_2) \rightarrow (S_1^3 \setminus C_1),$$

и ниже будет показано, что 3-сфера S_1^3 получается из 3-сферы S_2^3 в результате перестройки S_2^3 по узлу C_2 с помощью отображения, которое индуцирует ξ на границе трубчатой окрестности узла C_2 .

Докажем, что каждая кривая C_1, C_2 является тривиальным узлом соответственно в S_1^3 и S_2^3 . Эти кривые на инвариантных многообразиях $W^s(\sigma), W^u(\sigma)$ ограничивают замкнутые двумерные диски D_1, D_2 соответственно. Так как сферы S_1^3, S_2^3 трансверсальны векторному полю, то седло σ лежит внутри каждого диска D_1, D_2 . Из того, что в потоках Морса-Смейла отсутствуют петли сепаратрис следует, что D_1, D_2 пересекаются ровно в одной точке $\sigma = D_1 \cap D_2$.

Предположим противное, и рассмотрим для определенности случай, когда кривая C_1 образует нетривиальный узел в S_1^3 (случай, когда C_2 образует нетривиальный узел в S_2^3 рассматривается аналогично). Согласно расширенной версии теоремы Гробмана-Хартмана, существует окрестность U множества $D_1 \cup D_2$, в которой поток топологически эквивалентен линейному потоку, определяемому линейной частью векторного поля \vec{V} в точке σ . В силу предложения 2.15 [31], линейные гиперболические векторные поля топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип состояния равновесия. Поэтому поле \vec{V} в U топологически сопряжено векторному полю \vec{V}_s , которое определяется системой дифференциальных уравнений (1.2). В частности, U гомеоморфна достаточно большой части специальной окрестности U_0 , содержащей седло O . Не уменьшая общности, можно считать, что U гомеоморфна окрестности $W_0 \subset U_0$. Из классических теорем теории дифференциальных уравнений следует, что ξ - гомеоморфизм. Таким образом, C_1 и C_2 - два узла с гомеоморфными дополнениями. В силу [32], нетривиальность узла C_1 влечет нетривиальность узла C_2 .

Рассмотрим полноторий $P_1 \subset U \cap S_1^3$, являющийся трубчатой окрестностью кривой C_1 в S_1^3 . Поскольку C_1 - гладкая кривая, то такая окрестность существует. Из эквивалентности поля \vec{V} в окрестности U с полем \vec{V}_s вытекает, что $\xi(P_1 - C_1)$ совместно с C_2 образуют трубчатую окрестность (обозначим ее через P_2) кривой C_2 . Уменьшив, если необходимо, полнотории P_1 и P_2 , можно считать, что P_1, P_2 принадлежат границе окрестности U . Поскольку U гомеоморфна окрестности $W_0 \subset U_0$, то границы полноторий P_1, P_2 соединены отрезками траекторий векторного поля \vec{V} , причем ограничение $\xi|_{\partial P_1} : \partial P_1 \rightarrow \partial P_2$ переводит меридиан полнотория P_1 в параллель полнотория P_2 , а параллель P_1 - в меридиан P_2 .

Покажем, что сфера S_2^3 гомеоморфна многообразию, которое получается после перестройки сферы S_1^3 вдоль узла C_1 . Действительно, удалим из S_1^3 полноторий P_1 и вклеим вместо него полноторий P_2 с помощью гомеоморфизма $\xi|_{\partial P_1} : \partial P_1 \rightarrow \partial P_2$. Поскольку приклеивающий гомеоморфизм $\xi|_{\partial P_1}$ является продолжением гомеоморфизма $\xi|_{S_1^3 \setminus P_1} : S_1^3 \setminus P_1 \rightarrow S_2^3 \setminus P_2$, то отображение $\xi_* : (S_1^3 \setminus P_1) \cup_{\xi} P_2 \rightarrow S_2^3$, которое совпадает с ξ на $S_1^3 \setminus P_1$ и суть тождественное на P_2 , является корректно определенным гомеоморфизмом. Таким образом, сфера S_2^3 получается в результате перестройки сферы S_1^3 вдоль узла C_1 с помощью нетривиального гомеоморфизма $\xi|_{\partial P_1} : \partial P_1 \rightarrow \partial P_2$. Так как C_1 - нетривиальный узел, то в результате такой перестройки всегда получается многообразие, отличное от 3-сферы [32] (см. также [33]). Полученное противоречие доказывает предложение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Таким образом, M^n является дизъюнктивным объединением локально плоско вложенной в M^n k -мерной сферы $S^k = S_\omega$, $1 \leq k \leq n-1$, и неустойчивого многообразия $W^u(\alpha)$ источника α , которое гомеоморфно открытому n -мерному шару B^n . Отсюда и леммы 1.1. следует, что M^n является проективно-подобным многообразием.

Из того, что M^n есть дизъюнктивное объединение сферы $S^{\frac{n}{2}}$ и n -мерного шара B^n вытекают равенства $\pi_1(M^n) = \dots = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0$ при $n \geq 4$. Из $\pi_1(M^n) = 0$ следует ориентируемость M^n .

Пусть M^n - проективно-подобное многообразие с образующей сферой $S^{\frac{n}{2}}$. Определим

на $S^{\frac{n}{2}}$ поток Морса-Смейла \tilde{f}^t ровно с одним стоком ω и ровно одним источником $\tilde{\sigma}$. Поскольку, в силу леммы 1.1., граница $\partial T(S^{\frac{n}{2}})$ трубчатой окрестности $T(S^{\frac{n}{2}})$ сферы $S^{\frac{n}{2}}$ есть $(n-1)$ -мерная сфера, то \tilde{f}^t можно продолжить на $T(S^{\frac{n}{2}})$ так, чтобы $S^{\frac{n}{2}}$ стала притягивающим инвариантным множеством с седлом $\tilde{\sigma}$ и притягивающей областью $T(S^{\frac{n}{2}})$, а $\partial T(S^{\frac{n}{2}})$ была трансверсальна потоку \tilde{f}^t . Так как дополнение к $T(S^{\frac{n}{2}})$ гомеоморфно открытому шару, то нетрудно продолжить \tilde{f}^t на M^n с источником α внутри данного открытого шара. В результате получается непрерывный поток Морса-Смейла на M^n с тремя состояниями равновесия: стоком ω , седлом $\tilde{\sigma}$ и источником α .

Доказательство закончено.

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку, а также участников семинара "Топологическая динамика" в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» за полезные обсуждения. Авторы благодарят РФФИ, гранты 13-01-12452 офи-м, 15-01-03687, 13-01-00589, и РНФ, грант 14-41-00044, за финансовую поддержку. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аносов Д. В., "Исходные понятия. Элементарная теория.", *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), Дин. системы - 1*, **1** (1985), 156–204.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В., *Качественная Теория Дифференциальных Уравнений*, ОГИЗ, Москва, Ленинград, М., 1947
3. Milnor J., "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere", *Annals of Math.*, **64:2** (1956), 399–405.
4. Аносов Д. В., "Грубые системы", *Труды МИАН СССР*, 1985, № 169, 59–93.
5. Smale S., "Morse inequalities for a dynamical system", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.
6. Жужома Е. В., Медведев В. С., "Глобальная динамика систем Морса-Смейла", *Труды МИАН*, **261** (2008), 115–139.
7. Eells J., Kuiper N., "Manifolds which are like projective planes", *Publ. Math. IHES*, **14** (1962), 5–46.
8. Pixton D., "Wild unstable manifolds", *Topology*, **16** (1977), 167–172.
9. Bonatti Ch., Grines V., "Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ", *Journal of Dyn. and Control Syst.*, **6** (2000), 579–602.
10. Гринес В. З., Починка О. В., *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Москва-Ижевск, М., 2011, 424 с.
11. Жужома Е. В., Медведев В. С., "Градиентные потоки с дико вложенными замыканиями сепаратрис", *Труды МИАН*, **270** (2010), 138–146.

12. Жужома Е. В., Медведев В. С., “Системы Морса-Смейла с тремя неблуждающими точками”, *Доклады РАН*, **440**:1 (2011), 11–14.
13. Hirsch M. W., *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1976, 424 pp.
14. Freedman M., “The topology of four-manifolds”, *J. Diff. Geometry*, **17** (1982), 357–453.
15. Newman M., “The engulfing theorem for topological manifolds”, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 555–571.
16. Perelman G., “Ricci flow with surgery on three-manifolds”, *Arxiv.org/abs/math.DG/0303109*, **1–10** (2003), 22 pp.
17. Perelman G., “Finite extension time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds”, *Arxiv.org/abs/math.DG/0307245*, **1–17** (2003), 7 pp.
18. Smale S., “Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four”, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 391–406.
19. Adams J. F., “On the non-existence of elements of Hopf invariant one”, *Annals of Math.*, **72**:1 (1960), 20–104.
20. Новиков С. П., *Топология*, Москва-Ижевск: Институт комп. исследований, М., 2002
21. Бонатти Х., Гринес В. З., Медведев В. С., Пеку Е., “О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях”, *Доклады РАН*, **377**:2 (2001), 151–155.
22. Бонатти Х., Гринес В. З., Медведев В. С., Пеку Е., “О диффеоморфизмах Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях”, *Труды МИАН*, **236** (2002), 66–78.
23. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., “О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. Заметки*, **74**:3 (2003), 369–386.
24. Келдыш Л. В., “Топологические вложения в евклидово пространство”, *Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова*, **81** (1966), 3–184.
25. Daverman R. J., Venema G. A., *Embeddings in Manifolds*, GSM, Amer. Math. Soc., Providence, M., 2009
26. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and Appl.*, 2002, № 117, 225–344.
27. Чернавский А. В., “Об особых точках топологических вложений многообразий и объединении локально плоских клеток”, *Докл. АН СССР*, **167**:3 (1966), 528–530.
28. Cantrell J. C., “Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n ”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1963, № 69, 716–718.
29. Cantrell J., Edwards C., “Almost locally flat imbeddings of manifolds”, *Michigan Math. Jour.*, 1965, № 12, 217–223.

30. Andrews J., Curtis M., “Knotted 2-spheres in the 4-sphere”, *Annals of Math.*, 1959, № 3, 565–571.
31. Палис Ж., Ди Мелу В., *Геометрическая теория динамических систем Введение.*, Из-во "Мир Москва, М., 1986
32. Gordon C. McA., Luecke J., “Knots are determined by their complements”, *Amer. Math. Soc.*, 1989, № 2, 371–415.
33. Kronheimer P., Mrowka T., “Witten’s conjecture and property P.”, *Geometry and Topology*, 2004, № 8, 295–310.

Continuous Morse-Smale flows on projective-like manifolds

© E. V. Zhuzhoma⁵, V. S. Medvedev⁶, N. A. Tarasova⁷

Abstract. In the paper, one studies a topological structure of supported manifold for Morse-Smale flows the non-wandering set of those consists of three critical points.

Key Words: Morse-Smale flow, non-wandering set, projective-like manifolds

⁵ Professor of Department of fundamental mathematics of Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru

⁶ Senior Researcher, Research Institute Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru

⁷ Associate Professor Department of Mathematical and Natural Sciences, Institute of Food Technology and Design, Knyaginino, tarasova-na-an@rambler.ru

УДК 517.9

Многоцветный граф как полный топологический инвариант потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях

© В.Е. Круглов¹, О.В. Починка²

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются непрерывные динамические системы на поверхностях. Для содержательного класса потоков с конечным числом особых траекторий вводится понятие многоцветного графа и доказывается, что класс топологической эквивалентности такого потока полностью определяется классом изоморфности его многоцветного графа.

Ключевые слова: многоцветный граф, поток, топологическая эквивалентность

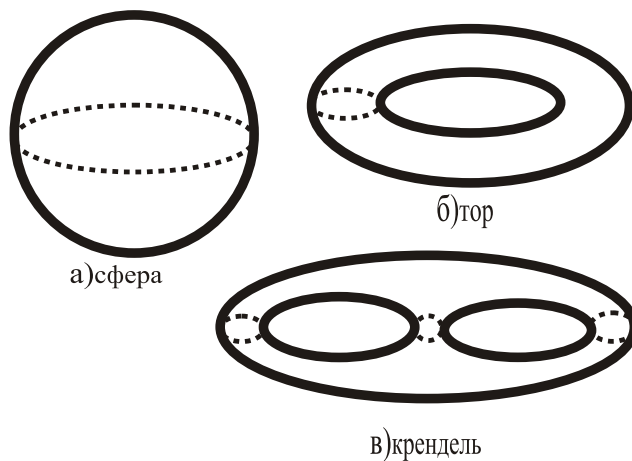
1. Введение

Непрерывной динамической системой или потоком на поверхности S называется непрерывное отображение $f : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$ с групповыми свойствами:

- 1) $f(x, 0) = x \quad \forall x \in S$;
- 2) $f(f(x, t), s) = f(x, t + s) \quad \forall x \in S, \forall s, t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем будем полагать $f^t(x) = f(x, t)$, $x \in S$, $t \in \mathbb{R}$.

Мы предполагаем поверхность S ориентируемой, т.е. она может быть, например, сферой, тором, кренделем; в общем, сферой с ручками (см. Рис. 1.1).



Р и с у н о к 1.1

Примеры поверхностей S

Для потока f^t точка x называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $t > 1$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*.

Множество всех блуждающих (неблуждающих) точек потока f^t называется его *блуждающим множеством* (*неблуждающим множеством*).

¹ Студент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского; kruglovslava21@mail.ru

² Профессор кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

Траекторией или *орбитой* точки $x \in S$ называется множество $O_x = \{f^t, t \in \mathbb{R}\}$. Полагают, что траектории потока ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t .

Точка x называется *неподвижной точкой* или *состоянием равновесия*, если $O_x = \{x\}$.

Орбита O_x называется *периодической*, если существует $T > 0$ такое, что $f^T(x) = x$ и $f^t(x) \neq x$ для $t < T$. Периодическая орбита называется *предельным циклом*, если в ее окрестности нет других периодических траекторий (эквивалентным является утверждение, что всякая достаточно близкая к предельному циклу траектория стремится к нему либо в прямом, либо в обратном времени).

Пусть d – риманова метрика на S . Тогда *устойчивым* (*неустойчивым*) многообразием точки x называется множество $W_x^s = \{y \in S : d(f^t(x), f^t(y)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\}$ ($W_x^u = \{y \in S : d(f^t(x), f^t(y)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}$).

Устойчивой (*неустойчивой*) *сепаратрисой* неподвижной точки p называется компонента связности множества $W_p^s \setminus p$ ($W_p^u \setminus p$).

Два потока называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм, отображающий траектории одного потока в траектории другого с сохранением направления движения.

Поток f^t называется *структурно устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ элемента f^t в $C^1(S \times \mathbb{R}, S)$ такая, что если $f^{t'} \in U(f^t)$, то траектории f^t и $f^{t'}$ топологически эквивалентны. В противном случае поток называется *структурно неустойчивым*.

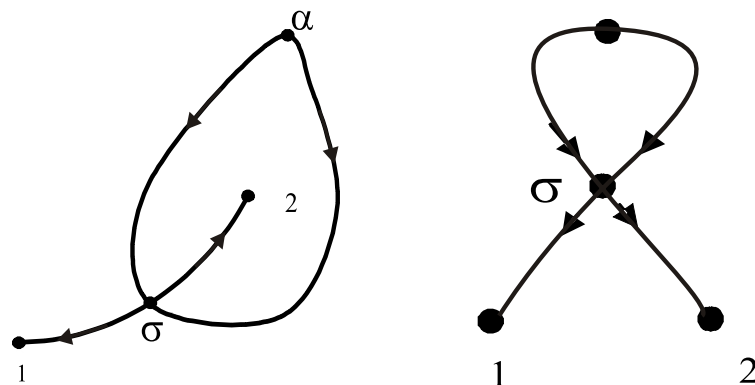
Потоки на плоскости возникают, например, при решении систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \text{ где } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

В 1937 г. для систем типа (1.1) с конечным числом состояний равновесия, предельных циклов и сепаратрис в ограниченной части плоскости Е.А. Леонтович и А.Г. Майер [1] в качестве топологического инварианта предложили *схему*. В 1955 [2] году они доказали, что схема задаёт поток с точностью до топологической эквивалентности.

В 1971 году Пейшото [6] получил топологическую классификацию структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях с помощью комбинаторного инварианта – *ориентированного графа*, обобщающего схему Леонтович-Майера.

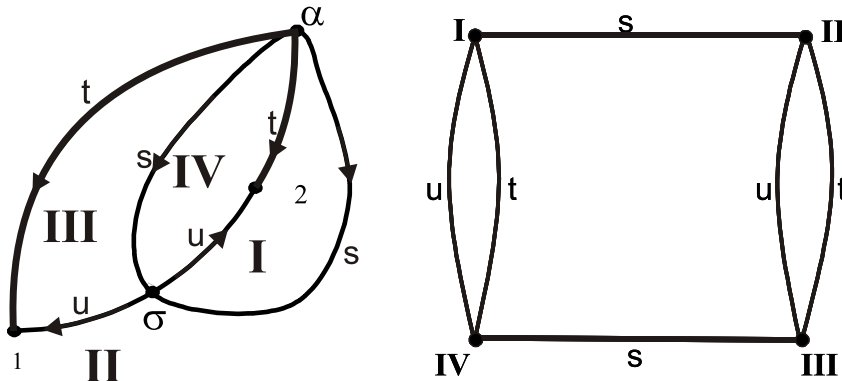
Простейшим примером структурно устойчивого потока на двумерной сфере служит поток, имеющий четыре неподвижные точки: источник α , седло σ и два стока ω_1 и ω_2 (см. Рис. 1.2). Ориентированный граф, соответствующий этому потоку также построен на рисунке 1.2.



Р и с у н о к 1.2

Ориентированный граф Пейшото

В 1998 году А.А. Ошемков, В.В. Шарко [3] ввели новый инвариант для структурно устойчивых потоков, устраняющий некоторые недостатки ориентированного графа, как полного топологического инварианта, – *трёхцветный граф*. Трёхцветный граф для потока, чей фазовый портрет построен на Рисунке 1.2, выполнен на Рисунке 1.3.



Р и с у н о к 1.3

Трёхцветный граф Ошемкова-Шарко

В настоящей работе многоцветный граф строится для более широкого класса потока на поверхностях, включающего структурно устойчивые потоки. В связи с чем дадим необходимые понятия.

Напомним, что *конечным графом* Γ называется упорядоченная пара (V, E) , для которой выполнены следующие условия: V – непустое множество *вершин*; E – множество пар вершин, называемых *рёбрами*.

Если граф Γ содержит ребро $e = (a, b)$, то каждую из вершин a, b называют *инцидентной* ребру e и говорят, что вершины a и b соединены ребром e .

Ориентированный граф – конечный граф, каждое из рёбер которого является упорядоченной парой вершин.

Путь в графе называют конечную последовательность его вершин и рёбер вида $b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k), b_k, k \geq 1$. Число k называется *длиной пути*, оно равно числу входящих в путь рёбер.

Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём.

Циклом длины $k \in \mathbb{N}$ в графе называют конечное подмножество его вершин и рёбер вида $\{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_0), b_0\}$. *Простым циклом* называют цикл, у которого все вершины и рёбра попарно различны.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Граф Γ называется многоцветным графом, если множество рёбер графа является объединением подмножеств, каждое из которых состоит из рёбер одного и того же определённого цвета;*

О п р е д е л е н и е 1.2. *Два многоцветных графа называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение вершин и рёбер одного графа соответственно на вершины и рёбра другого графа с сохранением цветности.*

В настоящей работе доказано, что для широкого класса потоков на поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности его многоцветного графа. Более детально.

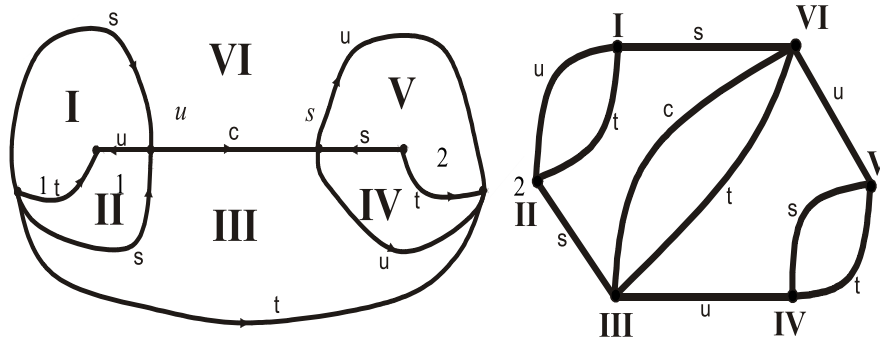
2. Формулировка результатов

Обозначим через G класс потоков f^t , заданных на поверхности S и обладающих следующими свойствами:

- 1) неблуждающее множество Ω_{f^t} конечно и гиперболично;
- 2) если $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных седловых точек p, q , то $(W_p^u \setminus p) \cap W_r^s = \emptyset$ и $(W_q^s \setminus q) \cap W_r^u = \emptyset$ для любой седловой точки r .

Заметим, что класс G содержит все структурно устойчивые потоки на поверхностях, но допускает и негрубые потоки с траекториями, идущими из седла в седло. Однако, в силу конечности неблуждающего множества, у потоков в классе G отсутствуют циклы и, в частности, петли сепаратрис.

В качестве простейшего примера негрубого потока из класса G рассмотрим поток f^t , фазовый портрет которого изображён на Рисунке 2.1. Там же изображён его четырёхцветный граф Γ_{f^t} . Опишем конструкцию построения многоцветного графа по потоку $f^t \in G$ в общем случае.



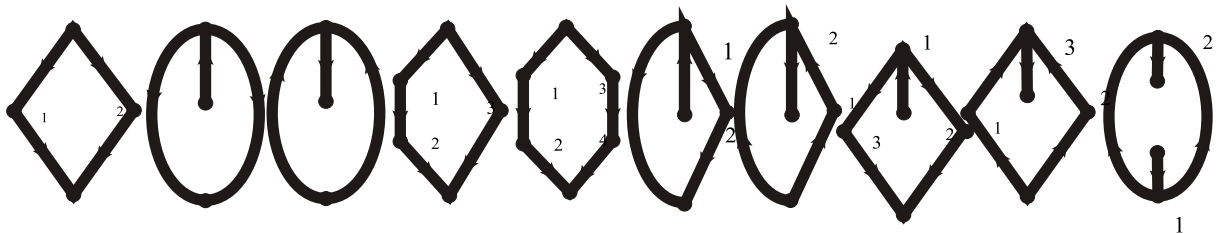
Р и с у н о к 2.1

Фазовый портрет негрубого потока из класса G и его многоцветный граф

Пусть $f^t : S \rightarrow S$ – поток из класса G .

Обозначим через $\Omega_{f^t}^0$ множество всех стоков потока f^t , $\Omega_{f^t}^1$ множество всех сёдел f^t , $\Omega_{f^t}^2$ множество всех источников f^t . Удалим из поверхности S замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых точек потока f^t и обозначим получившееся множество через \hat{S} , т. е. $\hat{S} = S \setminus (W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^2}^u \cup W_{\Omega_{f^t}^2}^s)$.

Л е м м а 2.1. *Множество \hat{S} представляется в виде объединения областей (ячеек), гомеоморфных открытому двумерному диску, граница каждой из которых имеет один из видов, изображённых на Рисунке 2.2 и содержит в точности один сток, один источник, одну, две, три или четыре седловые точки и некоторые из их сепаратрис.*



Р и с у н о к 2.2

Пусть A – любая ячейка из множества \widehat{S} , α и ω – источник и сток, входящие в её границу. Траекторию $\theta \in A$ потока f^t , граничными точками которой являются источник α и ω , будем называть t -кривой. Обозначим через Θ множество, состоящее из t -кривых, взятых по одной из каждой ячейки. Положим $\widehat{S}_{\Delta_{f^t}} = \widehat{S} \setminus \Theta$.

Любую компоненту связности $\widehat{S}_{\Delta_{f^t}}$ назовём *многоугольной областью*. Обозначим через Δ_{f^t} множество всех многоугольных областей потока f^t . В границу каждой из них входят 3 или 4 неподвижные точки: источник α , одно седло σ или два седла σ^u и σ^s , сток ω , устойчивая сепаратриса седла l_s (будем называть её s -кривой) с граничными точками α и σ либо σ^s , неустойчивая сепаратриса седла l_u (будем называть её u -кривой) с граничными точками ω и σ либо σ^u , t -кривая с граничными точками α и ω и, в случае двух седел, сепаратриса, соединяющая их (будем называть её c -кривой) с граничными точками σ^u и σ^s . Стороной многоугольной области будем называть замыкание s -, u -, t - или c -кривой. Будем говорить, что две области имеют *общую сторону*, если эта сторона принадлежит замыканиям обеих областей.

Простой цикл графа назовём *двухцветным* циклом типа tu , st , su , cu , sc или *трёхцветным* циклом типа scu , если он содержит рёбра в точности двух или трёх цветов соответственно.

Многоцветный граф Γ_{f^t} , соответствующий потоку $f^t \in G$, строится следующим образом:

1) вершины графа Γ_{f^t} взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям множества Δ_{f^t} ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s , t , u или c , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую s -, t -, u - или c -кривую.

Обозначим через V_{f^t} множество вершин графа Γ_{f^t} . Так как стороны любой многоугольной области раскрашены в разные цвета, то в вершине, соответствующей многоугольной области сходятся рёбра минимум трёх, максимум четырёх цветов графа. Поскольку каждая сторона многоугольной области примыкает ровно к двум различным многоугольным областям, то граф Γ_{f^t} не имеет циклов длины 1. Таким образом, граф Γ_{f^t} удовлетворяет определению многоцветного графа. В силу конструкции, многоцветные графы, полученные по различным разбиениям на многоугольные области (в зависимости от выбора t -кривых) изоморфны.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. *Потоки f^t и $f^{t'}$ из класса G топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их многоцветные графы Γ_{f^t} и $\Gamma_{f^{t'}}$ изоморфны.*

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения») при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (13-01-12452 офи-м2, 15-01-03687 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтович Е. А., Майер А. Г., “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251-257.
2. Леонтович Е. А., Майер А. Г., “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557-560.

3. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93-140.
4. Палис Ж., ди Мелу В., *Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ.*, Мир, М., 1986, 301 с.
5. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966, 568 с.
6. Peixoto M., *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971

Multicolored graph as a complete topological invariant for the flow with a finite number of singular trajectories on surfaces

© V. E. Kruglov³, O. V. Pochinka⁴

Abstract. In this paper we consider the continuous dynamic systems on surfaces. For a meaningful class of flows with finitely many singular trajectories we introduce the concept of multi-color graph and proved that the class of topological equivalence of such a flow is completely determined by the isomorphism class of its multi-colored graph.

Key Words: multicolored graph, flow, topological equivalence

³ Student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod

⁴ Professor of the Department fundamental mathematics, High School Economy, Nizhny Novgorod

УДК 539.376

О модификации наилучшего параметра продолжения решения

© Е. Б. Кузнецов¹, С. С. Леонов²

Аннотация. В работе вводится понятие параметра продолжения решения локально эквивалентного наилучшему аргументу и дается ряд частных утверждений, касающихся его обусловленности. Под наилучшим понимается параметр, в каждой точке направленный по касательной к интегральной кривой рассматриваемой задачи. Показано применение преобразования к наилучшему и локально эквивалентному ему аргументу для задачи одноосного растяжения цилиндрических образцов из стали 45 при постоянной температуре в условиях ползучести. Проводится сравнение полученных результатов.

Ключевые слова: ползучесть, разрушение, длительная прочность, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, продолжение решения по параметру, наилучшая параметризация.

1. Введение

На современном этапе развития перед человечеством ставятся все более сложные и трудоемкие задачи. Одна из них, расчет и эксплуатация конструкций из материалов со сложными реологическими свойствами, например композитов, в условиях сложного напряжено-деформированного состояния при высоких температурах. В связи с ростом мощностей вычислительной техники многие задачи этого класса решаются сегодня как на персональных, так и на высокопроизводительных компьютерах с использованием разностных и конечно-элементных подходов. Тем не менее, потребность в разработке новых эффективных и экономичных методов решения подобных задач не исчезла, более того, она ощущается все острее. Ведь не любую задачу можно решить простым увеличением мощности компьютера, именно комбинация производительности компьютера и эффективности алгоритма решения позволит существенно продвинуться дальше в исследовании поведения материалов при сложных режимах нагружения.

В последние десятилетия появился ряд работ, посвященных применению параметризации к решению задач механики деформируемого твердого тела. Так, в работе [1] вводится наилучший параметр, применяемый для решения задач нелинейного деформирования, сводящимся к системам нелинейных алгебраических уравнений. Под наилучшим понимается параметр, в каждой точке направленный по касательной к интегральной кривой рассматриваемой задачи. Обобщение данного подхода на системы обыкновенных дифференциальных (ОДУ) и дифференциально-алгебраических (ДАУ) уравнений было дано в работе [2]. Существенными преимуществами данного подхода является возможность построения решений сингулярных ОДУ, а также задач, интегральные кривые которых содержат критические или предельные точки [2].

В данной работе показано, что для некоторых практических задач наилучший параметр продолжения решения хотя и дает формально наименьшую погрешность, но вид

¹ Профессор кафедры «Дифференциальные уравнения», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; kuznetsov@mai.ru.

² Аспирант кафедры «Дифференциальные уравнения», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; powerandglory@yandex.ru.

параметризованных уравнений и их приближенные решения могут оказаться весьма сложными. Для решения данной задачи предложено вместо наилучшего параметра применять параметр близкий к нему по свойствам, но дающий более простой вид для параметризованной задачи. Будем рассматривать введение данного параметра на примере решения задачи об одноосном растяжении цилиндрических образцов из стали 45.

2. Постановка задачи

Для описания процесса деформирования металлических конструкций в условиях ползучести будем использовать уравнения теории структурных параметров Ю.Н. Работнова, которые в одномерном случае можно записать в виде системы двух ОДУ [3, 4, 5]

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где ϵ – деформация ползучести; ω – параметр поврежденности; σ – действующее напряжение; t – время; T – температура; функциональные зависимости, входящие в правые части, определяются по результатам эксперимента.

Для задачи одноосного растяжения цилиндрических образцов (диаметр $d = 42$ мм) из стали 45, широко используемой в авиации (например, для создания деталей трубопроводной арматуры после закалки и отпуска), при постоянных напряжении и температуре $T = 850^\circ\text{C}$ функцию $\Psi(\omega, T)$ примем в виде [4]

$$\Psi(\omega, T) = \omega^{-\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{-m}, \quad (2.2)$$

а функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ в форме степенной функции [4]

$$f_1(\sigma) = B_\epsilon \sigma^n, \quad f_2(\sigma) = B_\omega \sigma^k,$$

где B_ϵ , B_ω , n , k , α , m – характеристики ползучести материала.

Таким образом, в случае постоянного напряжения $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ получим систему ОДУ

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{B_\epsilon \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Отметим некоторые особенности системы (2.3). Искомые функциями являются $\epsilon(t)$ и $\omega(t)$, σ_0 – начальное напряжение, постоянная величина. Решение задачи ищется в области $V = \{(\epsilon, \omega, t) \mid 0 \leq \epsilon \leq \epsilon^*, 0 \leq \omega \leq 1, 0 \leq t \leq t^*\}$, где ϵ^* – значение деформации ползучести в момент разрушения; t^* – длительная прочность конструкции, т. е. время, в течение которого образец не разрушится; при $\omega = 0$ материал считается абсолютно целым, а при достижении $\omega = 1$ наступает разрушение, понимаемое как разделение образца на две части. Можно видеть, что рассматриваемая система имеет две особые точки в которых правые части уравнений системы (2.3) обращаются в бесконечность. Это $\omega = 0$ в момент времени $t = 0$ и $\omega = 1$ в момент времени $t = t^*$.

В качестве начальных условий для системы ОДУ (2.3) берутся однородные

$$t = 0 : \omega(0) = 0, \epsilon(0) = 0. \quad (2.4)$$

Можно записать аналитическое решение задачи (2.3)-(2.4) [6]

$$\omega(t) = \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (2.5)$$

$$\epsilon(t) = \frac{B_\epsilon \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (2.6)$$

Учитывая, что при разрушении параметр поврежденности принимает значение равное единице, из выражения (2.5) получим значение длительной прочности t^* данной конструкции

$$t^* = [(m + 1)(\alpha + 1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1}. \quad (2.7)$$

Полное решение задачи (2.3)-(2.4) в явном виде дается выражениями (2.5)-(2.7), что возможно лишь в исключительных случаях. На сегодняшний день основным инструментом анализа подобных задач остаются численные методы. Однако же, принимая во внимание особенности системы (2.3), в данном случае явные методы решения задачи Коши неприменимы, а неявные трудоемки в использовании. Для ослабления этих трудностей предлагается переход к новому аргументу. Рассмотрим применение метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации к задаче растяжения образцов из стали 45.

3. Параметризация и продолжение решения по параметру

В качестве наилучшего для задачи (2.3)-(2.4) примем параметр, дифференциал которого удовлетворяет соотношению [2]

$$d\lambda = (\bar{\alpha}, d\bar{y}), \quad (3.1)$$

где $\bar{\alpha} = \left(\frac{d\epsilon}{d\lambda}, \frac{d\omega}{d\lambda}, \frac{dt}{d\lambda} \right)^T$ – вектор, определяющий направление отсчета параметра λ , $d\bar{y} = (d\epsilon, d\omega, dt)^T$.

Выражение (3.1) можно также записать в виде

$$(d\lambda)^2 = (d\epsilon)^2 + (d\omega)^2 + (dt)^2. \quad (3.2)$$

Используя соотношение (3.2), получим систему

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{d\lambda} = \frac{B_\epsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q(\omega)}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q(\omega)}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q(\omega)}}, \end{cases} \quad (3.3)$$

с начальными условиями

$$\lambda = 0: \epsilon(0) = 0, \omega(0) = 0, t(0) = 0. \quad (3.4)$$

Функция $Q(\omega)$, входящая в знаменатели правых частей системы (3.3)

$$Q(\omega) = \omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\epsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}. \quad (3.5)$$

О п р е д е л е н и е 3.1. *Переход от задачи (2.3)-(2.4) к (3.3)-(3.4) будем называть λ -преобразованием.*

Задача (3.3)-(3.4) не имеет особенностей и может быть проинтегрирована с помощью любых методов решения задачи Коши.

Стоит отметить, что в некоторые моменты времени значение функции $Q(\omega)$ может оказаться близким к нулю (порядка 10^{-6}). И чем меньше характеристики ползучести, входящие в правые части уравнений системы, тем меньше знаменатели правых частей системы (3.3). Также можно видеть, что параметризованная задача имеет более сложный вид, нежели (2.3)-(2.4).

Чтобы устранить эту проблему, введем параметр μ , вектор $\bar{\alpha}'$ для которого получим, преобразуя вектор (3.1) к виду

$$\bar{\alpha}' = \left(\tilde{K}_1 \cdot \frac{d\epsilon}{d\lambda}, \tilde{K}_2 \cdot \frac{d\omega}{d\lambda}, \tilde{K}_3 \cdot \frac{dt}{d\lambda} \right)^T, \quad (3.6)$$

где $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3$ – в общем случае функции, зависящие от ϵ, ω, t . Для сохранения одного направления движения для нового параметра μ и наилучшего параметра λ , введем ограничения

$$\tilde{K}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Домножая и деля каждую компоненту вектора (3.6) на $d\mu$, получим

$$\bar{\alpha}' = \left(\tilde{K}_1 \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot \frac{d\epsilon}{d\mu}, \tilde{K}_2 \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot \frac{d\omega}{d\mu}, \tilde{K}_3 \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot \frac{dt}{d\mu} \right)^T.$$

Здесь $0 \leq \frac{d\mu}{d\lambda} < \infty$ – функция, зависящая от ϵ, ω, t .

Обозначая далее

$$K_i(\epsilon, \omega, t) = \tilde{K}_i \frac{d\mu}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, 3,$$

запишем направляющий вектор в форме

$$\bar{\alpha}' = \left(K_1(\epsilon, \omega, t) \cdot \frac{d\epsilon}{d\mu}, K_2(\epsilon, \omega, t) \cdot \frac{d\omega}{d\mu}, K_3(\epsilon, \omega, t) \cdot \frac{dt}{d\mu} \right)^T.$$

Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, примем

$$K_i(\epsilon, \omega, t) = \frac{1}{f_i^2(\epsilon, \omega, t)}, \quad i = 1, 2, 3$$

и окончательно получим

$$\bar{\alpha}' = \left(\frac{1}{f_1^2(\epsilon, \omega, t)} \cdot \frac{d\epsilon}{d\mu}, \frac{1}{f_2^2(\epsilon, \omega, t)} \cdot \frac{d\omega}{d\mu}, \frac{1}{f_3^2(\epsilon, \omega, t)} \cdot \frac{dt}{d\mu} \right)^T, \quad (3.7)$$

где $f_1(\epsilon, \omega, t), f_2(\epsilon, \omega, t), f_3(\epsilon, \omega, t)$ – произвольные функции.

Далее, параметр, определяемый вектором $\bar{\alpha}'$ (3.7) будем обозначать κ . В скалярном виде его можно представить как

$$(d\kappa)^2 = \left(\frac{d\epsilon}{f_1(\epsilon, \omega, t)} \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{f_2(\epsilon, \omega, t)} \right)^2 + \left(\frac{dt}{f_3(\epsilon, \omega, t)} \right)^2. \quad (3.8)$$

Существенным недостатком при использовании параметра κ является то, что на сегодняшний день нет доказанных утверждений о его применимости. Неизвестно, будет ли система (3.14) обусловлена хуже, чем система (3.3). Однако для частного случая параметра κ

$$(d\kappa)^2 = (d\epsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{f(\epsilon, \omega, t)} \right)^2, \quad (3.9)$$

т. е. $f_1(\epsilon, \omega, t) = f_2(\epsilon, \omega, t) \equiv 1$ и $f_3(\epsilon, \omega, t) = f(\epsilon, \omega, t)$, можно доказать следующие две теоремы

Теорема 3.1. *Если в точке M_0 и некоторой ее окрестности функция $f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то параметры λ и κ , задаваемые соотношениями (3.2) и (3.9), отличаются на бесконечно малую величину в окрестности точки M_0 , т. е.*

$$d\kappa = d\lambda + o(1). \quad (3.10)$$

Определение 3.2. *Параметры, удовлетворяющие соотношению (3.10) в окрестности каждой точки интегральной кривой, будем называть локально эквивалентными.*

Легко заметить, что при $f(x, y, z) \neq 0$ во всех точках рассматриваемого интервала изменения, параметры λ и κ являются локально эквивалентными в каждой точке рассматриваемого временного интервала. Относительно обусловленности задачи, полученной переходом к параметру κ , можно сказать, что она будет отличаться на бесконечно малую величину от соответствующей задачи, полученной λ -преобразованием.

Теорема 3.2. *Если в точке M_0 $f(x, y, z) = 0$, но частная производная $\frac{\partial f}{\partial z}$ отлична от нуля в ней и некоторой ее окрестности, то для параметров λ и κ , задаваемых соотношениями (3.2) и (3.9), в окрестности точки M_0 справедливо равенство*

$$\|d\bar{\lambda} - d\bar{\kappa}\|_2 = K, \quad (3.11)$$

$$\text{где } K = \left| c_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{M_0} + c_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{M_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{M_0} \right|^{-1}, \quad c_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta z}, \quad c_2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z}, \quad 0 \leq c_1, c_2 < \infty,$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Или в виде

$$d\kappa = d\lambda + O(1). \quad (3.12)$$

Используя результаты Теоремы 3.2 можно сформулировать следующее следствие

Следствие 3.1. *Если в условиях Теоремы 3.2, если частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращаются в точке M_0 в ноль, то значение K в выражении (3.11) примет вид*

$$K = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{M_0} \right|^{-1}$$

и параметры λ и κ , задаваемые соотношениями (3.2) и (3.9), будут локально эквивалентными в окрестности точки M_0 тогда и только тогда, когда частная производная $\frac{\partial f}{\partial z}$ обращается в точке M_0 в бесконечность.

З а м е ч а н и е 3.1. Стоит отметить, что равенство нулю какой-либо из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ или $\frac{\partial f}{\partial y}$ в окрестности точки M_0 не свидетельствует о возникновении неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$, но показывает, что слагаемое, соответствующее данной частной производной, отсутствует в выражении для K (3.11).

Полагая в выражении (3.9) $f(\epsilon, \omega, t) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m$, получим параметр κ в виде

$$(d\kappa)^2 = (d\epsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \right)^2. \quad (3.13)$$

Используя выражение (3.13) для параметра продолжения, можно записать систему (2.3) в виде

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{d\lambda} = \frac{B_\epsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q'}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q'}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q'}}, \end{cases} \quad (3.14)$$

с начальными условиями

$$\kappa = 0 : \epsilon(0) = 0, \omega(0) = 0, t(0) = 0. \quad (3.15)$$

Знаменатель правых частей системы (3.14)

$$Q' = 1 + B_\epsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}. \quad (3.16)$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Переход от задачи (2.3)-(2.4) к (3.14)-(3.15) будем называть κ -преобразованием.

Таким образом, знаменатели уравнений системы (3.14) не только не близки к нулю, но и больше единицы. Более того, система (3.14) имеет более простой вид, чем система (3.3), так как правые части первых двух уравнений системы (3.14) являются постоянными.

Используем результаты приведенных утверждений. Для задачи (3.14)-(3.15) функция $f(\epsilon, \omega, t) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m$. Можно заметить, что она не зависит от ϵ и неявно зависит от времени t , т. е. $f(\epsilon, \omega, t) = f(\omega)$. Функция $f(\omega)$ не обращается в ноль ни в одной точке рассматриваемого временного интервала, кроме $\omega = 0$ при $t = 0$ и момента разрушения $\omega = 1$ при $t = t^*$. Таким образом, параметры (3.2) и (3.13) локально эквивалентны при $t \in (0, t^*)$, покажем, что они также локально эквивалентны и в граничных точках.

Очевидно, что производная по ϵ равна нулю, производная же по ω

$$\frac{df}{d\omega} = \omega^{\alpha-1} (1 - \omega^{\alpha+1})^{m-1} \cdot [\alpha (1 - \omega^{\alpha+1}) - m(\alpha + 1)\omega^{\alpha+1}]. \quad (3.17)$$

Можно видеть, что $\frac{df}{d\omega} = 0$ при $\omega = 0$ и $\omega = 1$.

Согласно условиям Следствия 3.1, для того, чтобы параметры (3.2) и (3.13) были локально эквивалентными в точках $t = 0$ и $t = t^*$ необходимо и достаточно равенство бесконечности производной по времени

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{df}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \omega^{\alpha-1} (1 - \omega^{\alpha+1})^{m-1} \cdot [\alpha (1 - \omega^{\alpha+1}) - m(\alpha + 1)\omega^{\alpha+1}] \times \\ &\times \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} = \frac{B_\omega \sigma_0^k \cdot [\alpha (1 - \omega^{\alpha+1}) - m(\alpha + 1)\omega^{\alpha+1}]}{\omega (1 - \omega^{\alpha+1})}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Данная производная при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow t^*$ стремится к бесконечности. Таким образом, параметры λ и κ для данной задачи будут локально эквивалентными на всем рассматриваемом временном интервале, что говорит о близости обусловленности систем (3.3) и (3.14).

4. Численные результаты

Рассмотрим приближенное решение задач (2.3)-(2.4), (3.3)-(3.4) и (3.14)-(3.15). Поскольку численное решение непараметризованной задачи (2.3)-(2.4) затруднительно при помощи явных численных методов интегрирования, для решения данной задачи был выбран неявный метод Эйлера с переменным шагом интегрирования (получаемые системы нелинейных уравнений решаются методом простой итерации). Приближенное решение параметризованных задач (3.3)-(3.4) и (3.14)-(3.15) получено явным методом Эйлера и методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом интегрирования. Смена шага производится в соответствии с принципом Рунге-Ромберга-Ричардсона, с постоянными $\epsilon_1 = 10^{-4}$ и $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-5}$, отражающими точность численного решения [7]. Данные методы были реализованы в вычислительной среде Matlab R2012b.

Расчет проводился на персональном компьютере Intel Core i5 – 2410M CPU 2,30 ГГц; 4,00 ГБ ОЗУ; видеокарта NVIDIA GeForce GT540M 2 ГБ; 64 – разрядная операционная система Windows 7 Домашняя базовая Service Pack 1.

Характеристики ползучести для систем уравнений (2.3) и (3.3) и имеют вид [4]: $B_\epsilon = 9,967 \cdot 10^{-20}$ МПа $^{-n}$ с $^{-1}$, $B_\omega = 9,689 \cdot 10^{-17}$ МПа $^{-k}$ с $^{-1}$, $\alpha = 0,849$, $n = 9,1$, $k = 6,97$, $m = 2,83$.

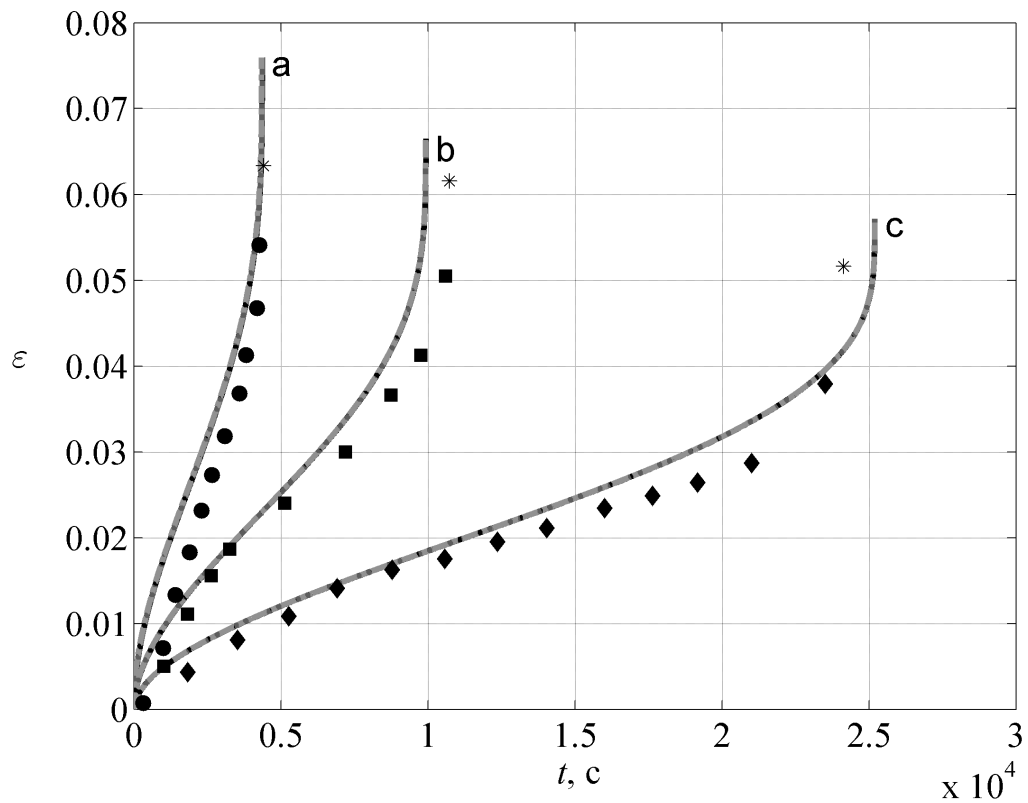
Получены зависимость деформации ползучести (рис. 1) и параметра поврежденности (рис. 2) от времени, где а – $\sigma_0 = 45$ МПа; б – $\sigma_0 = 40$ МПа; в – $\sigma_0 = 35$ МПа. На рис. 2, d – «единая кривая» в нормированных координатах $\omega - \bar{\tau}$, $\bar{\tau} = \frac{t}{t^*}$ – нормированное время.

Экспериментальные данные для $\sigma_0 = 45, 40, 35$ МПа обозначены кружками, квадратами и ромбами соответственно. Результаты эксперимента для деформации ползучести берутся из работы [4], данные для параметра поврежденности пересчитаны по формуле

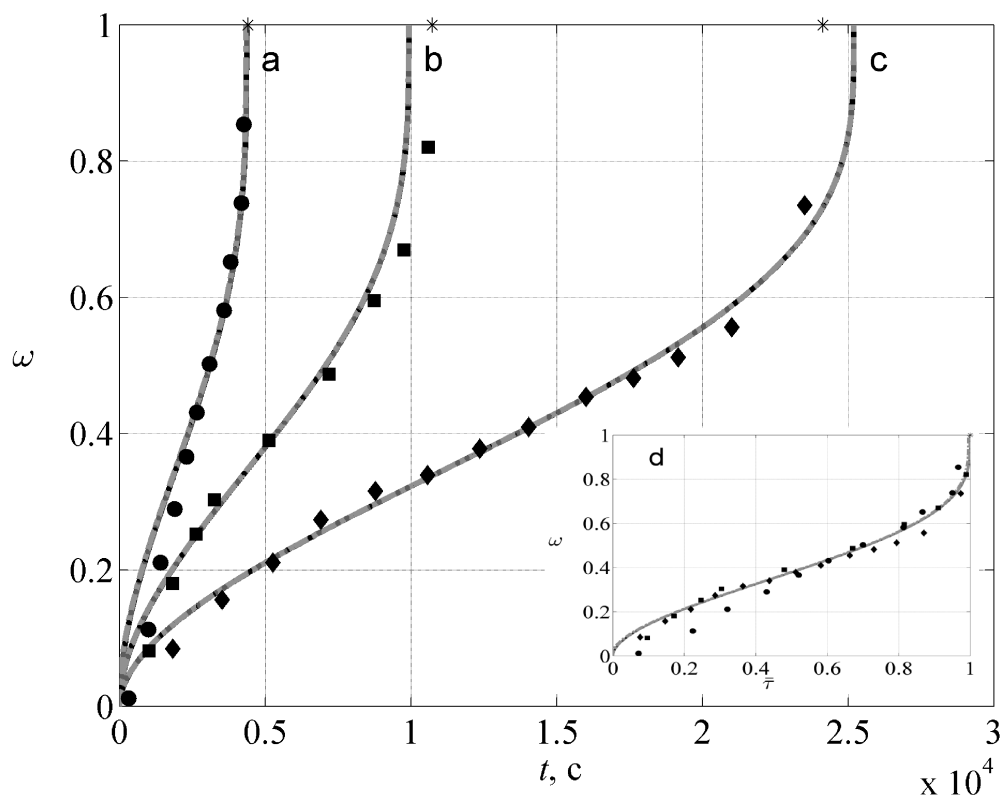
$$\omega = \frac{\epsilon}{\epsilon_*}. \quad (4.1)$$

Как можно видеть из рис. 1-2, аналитическое, а также приближенные решения задачи (2.3)-(2.4) неявным методом Эйлера и задачи (3.3)-(3.4) явным методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности практически совпадают. На рисунках они обозначены сплошной, пунктирной и штрих-пунктирной линиями соответственно. Приближенные решения задачи (3.14)-(3.15) явными методами Эйлера, Рунге-Кутты четвертого порядка точности и задачи (3.3)-(3.4) явным методом Эйлера имеют вид аналогичный, приведенному на рис. 1-2.

Основные сведения о процессе вычисления приведены в табл. 1, где t^* – расчетное значение длительной прочности конструкции; $\bar{\tau}_*$ – расчетное значение времени в нормированных координатах $\omega - \bar{\tau}$ при разрушении; ϵ_* – расчетное значение деформации ползучести в момент разрушения; ω_* – расчетное значение параметра поврежденности в момент разрушения; t_n – время счета. Здесь и далее будем обозначать: 1 – явный метод Эйлера, λ -преобразование; 2 – метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности, λ -преобразование; 3 – явный метод Эйлера, κ -преобразование; 4 – метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности, κ -преобразование; 5 – неявный метод Эйлера, 6 – аналитическое решение, 7 – экспериментальные данные.



Р и с у н о к 4.1
Зависимость деформации ползучести от времени



Р и с у н о к 4.2
Зависимость параметра поврежденности от времени, единая кривая в нормированных координатах

Таблица 9: Результаты расчета образцов из стали 45 при растяжении

σ_0 , МПа	Метод	t_* , ч	$\bar{\tau}_*$	ϵ_*	ω_*	t_n , с
35	1	7,000494	1	0,057157	0,99997	0,086
	2	7,0004	0,99999	0,057157	0,99997	0,101
	3	7,000493	1	0,057156	0,99996	0,052
	4	7,000492	1	0,057146	0,9998	0,045
	5	6,99907	0,9998	0,057156	0,99996	0,159
	6	7,000492	1	0,057159	1	–
	7	6,706122	–	0,051606	1	–
40	1	2,7600999	1	0,066467	0,99999	0,092
	2	2,760061	0,99999	0,066453	0,99978	0,105
	3	2,7600994	1	0,066465	0,99996	0,06
	4	2,7600994	1	0,066439	0,9996	0,046
	5	2,756934	0,9989	0,066467	0,99998	0,171
	6	2,7600998	1	0,066477	1	–
	7	2,979592	–	0,061554	1	–
45	1	1,2144838	1	0,075927	0,99996	0,085
	2	1,214466	0,99999	0,075909	0,99972	0,103
	3	1,21448	1	0,075928	0,99997	0,055
	4	1,21448	1	0,075884	0,9994	0,041
	5	1,208119	0,99476	0,075926	0,99994	0,141
	6	1,2144836	1	0,075928	1	–
	7	1,22449	–	0,063327	1	–

5. Заключение

Численное решение рассматриваемой задачи, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений кинетической теории ползучести с однородными начальными условиями, затруднительно при помощи традиционных явных методов интегрирования задачи Коши в связи с наличием особенностей в начальный момент времени и при разрушении. В работе предложен подход к решению этой проблемы. Он основан на применении к исходной системе (3.3) метода продолжения решения по параметру, в качестве которого наряду с наилучшим аргументом λ предложено использовать локально эквивалентный ему параметр κ . В результате, для обоих параметров получили преобразованные задачи, которые особенностей не имеют и могут быть решены любым численным методом интегрирования задачи Коши.

Полученные параметризованные задачи (3.3)–(3.4) и (3.14)–(3.15) решались численно явными методами Эйлера и Рунге-Кутты четвертого порядка точности, непараметризованная задача (2.3)–(2.4) – неявным методом Эйлера. При сравнении решений этих задач с аналитическими и экспериментальными данными, можно указать следующие преимущества применения параметризации исходной задачи:

1. Численные решения хорошо согласуются с аналитическими и экспериментальными данными как для параметризованных, так и непараметризованной задач.
2. Время счета для параметризованных задач в 1,5 - 3 раза меньше, в зависимости от

используемого параметра продолжения и порядка точности используемого численного метода, по сравнению с непараметризованной задачей.

3. Применение параметра локально эквивалентного наилучшему аргументу λ позволяет преобразовать исходную задачу (2.3)–(2.4) к более простому для численного решения виду (3.14)–(3.15). Это позволяет сократить до 2 раз время счета по сравнению с λ -преобразованной задачей (3.3)–(3.4).

Приводимые результаты ярко иллюстрируют возможные преимущества подхода, основанного на переходе как к наилучшему аргументу, так и к локально эквивалентному ему. Отметим также, что использование неявных методов решения задачи Коши приводит к необходимости численного решения систем нелинейных уравнений, что сопряжено с известными трудностями, связанными как с выбором начального приближения и вопросами сходимости итерационных процессов, так и со сложностью реализации приближенных методов решения (приведение рассматриваемой задачи к специальному виду, аппроксимация производных и т. д.). В данной статье системы нелинейных уравнений в неявном методе Эйлера решаются методом простой итерации, однако, в общем случае, могут потребоваться более трудоемкие методы, требующие вычисления производных, например, метод Ньютона. Все это может привести к значительному усложнению процесса решения. Вышесказанное подчеркивает то преимущество, которое дает метод продолжения решения по параметру, позволяя применять явные методы интегрирования систем ОДУ к решению рассматриваемых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 13-08-00473.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э.И. Григолюк, В.И. Шалашилин, *Проблемы нелинейного деформирования*, Наука, М., 1988, 232 с.
2. В.И. Шалашилин, Е.Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация*, Эдиториал УРСС, М., 1999, 224 с.
3. Ю.Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, М., 1966, 752 с.
4. Б.В. Горев, Т.Э. Захарова, И.Д. Клопотов, “К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств”, *Физическая мезомеханика*, 5:2 (2002), 17–22.
5. B. V. Gorev, I. D. Klopotov, I. V. Lyubashevskaya, “Creep and damage behavior of AK4-1T and VT-9 alloys under different stress states”, *Theor. and Appl. Fract. Mech.*, 29 (1998), 1–10.
6. Б.В. Горев, *Высокотемпературная ползучесть конструкционных сплавов и ее приложение к формообразованию крупногабаритных деталей*, дисс. . . . докт. техн. наук, Новосибирск, 2003, 426 с.
7. О. Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин, *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране*, Изд-во МГУ, М., 1990, 336 с.

On modification of the best parameter of solution continuation

© E. B. Kuznetsov³, S. S. Leonov⁴

Abstract. In this paper the concept of a local equivalent to the best solution continuation parameter is introduced. A number of particular assertions related to the parameterized problem conditionality is given. As the best parameter is denote a parameter, that at each point tangential to the integral curve of the problem. Application of the best and local equivalent argument transform to the uniaxial tension problem of cylindrical steel 45 specimens at a constant temperature under creep conditions is shown. A comparison of the results is considered.

Key Words: creep, fracture, long-term strength systems of ordinary differential equations, solution continuation with respect to a parameter, the best parametrization. A comparison of the results is considered.

³ Professor of «Differential Equations» Department, Moscow State Institute (National Research University), Moscow; kuznetsov@mai.ru.

⁴ Graduate student of «Differential Equations» Department, Moscow State Institute (National Research University), Moscow; powerandglory@yandex.ru.

УДК 517.929

О нелинейных задачах для функционально-дифференциального уравнения

© А. С. Ларионов¹, П. М. Симонов²

Аннотация. Приводятся утверждения о разрешимости нелинейных задач для дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом. Утверждения получены на основе монотонной итеративной техники.

Ключевые слова: изотонные и антитонные операторы, верхнее и нижнее решения, оператор внутренней суперпозиции, задача Коши – Николетти, модель Мэкки – Гласа.

1. Введение

Нелинейные начальные и краевые задачи для дифференциальных уравнений на протяжении длительного времени являются объектом интенсивного изучения благодаря многочисленным приложениям (в биологии, химии, математической экономике, экологии, задачах управления техническими системами и т.д.). Такие задачи естественно возникают при математическом моделировании явлений, для которых линейные модели дают слишком грубое описание или вовсе невозможны. Значительная часть результатов исследований нелинейных задач и библиография приведена в монографиях [10], [6], [16], [11] и обзорах [13], [14].

Центральное место при изучении краевых задач для дифференциальных уравнений занимают вопросы разрешимости. Для обыкновенных дифференциальных уравнений широко известен аналитический метод интегрирования — метод Чаплыгина, в основе которого лежит теорема о дифференциальном неравенстве для скалярного уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, $t \in [a, b]$. Эта теорема не предполагает никаких специальных ограничений на функцию f . Естественным образом возник вопрос о перенесении метода Чаплыгина на другие классы уравнений, в частности, на функционально-дифференциальные уравнения.

Одним из эффективных методов доказательства существования решения нелинейной краевой или начальной задачи является, как отмечено в обзоре [12], монотонный итеративный метод. В основе этого метода лежит редукция исходной задачи к уравнению

$$x = Ax \tag{1.1}$$

с монотонным оператором A , определенным на некотором частично упорядоченном множестве. Существует ряд схем, позволяющих свести рассматриваемую задачу к операторному уравнению (1.1). Различные варианты этих схем, по-видимому, впервые стал систематически использовать в своих работах Н.В.Азбелев. Впоследствии эти схемы нашли широкое применение в исследованиях о дифференциальных, интегральных, разностных и других неравенствах, вошли в современные монографии и обзоры.

Характерные свойства уравнения (1.1) с изотонным (из $x_1 \leq x_2$ следует, что $Ax_1 \leq Ax_2$) оператором A состоят в том, что при некоторых естественных предположениях для

¹ Доцент кафедры математики, Братский государственный университет, г. Братск; larios84@yandex.ru

² Профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; simpmp@mail.ru

этого уравнения справедлива теорема Тарского – Биркгофа – Канторовича [9] о разрешимости этого уравнения и о существовании упорядоченной пары решений. Основным вспомогательным аппаратом при таком подходе к исследованию разрешимости нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений является метод дифференциальных неравенств (метод верхних и нижних решений). Распространение на функционально-дифференциальные уравнения упомянутого метода изучения нелинейных задач потребовало специальных исследований условий сохранения знака функции Грина вспомогательных линейных краевых задач (функции Коши вспомогательного линейного уравнения) [4].

Значительный вклад в построение общей теории функционально-дифференциальных уравнений вносят представители научной школы Н.В. Азбелева. Предлагаемая работа примыкает к исследованиям пермских математиков по упомянутой проблеме.

2. Основные теоремы

Всюду ниже используются следующие обозначения.

$L_p = L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$ — банахово пространство функций $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, суммируемых на $[a, b]$ со степенью p ; $L_\infty = L_\infty[a, b]$ — банахово пространство функций $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измеримых и ограниченных в существенном; $AC_p = AC_p[a, b]$ — банахово пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, что $\dot{x} \in L_p$; $C = C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - b(t)\dot{x}_g(t) + p(t)x_h(t) = f(t, x_h(t)), \quad t \in [a, b], \quad (2.1)$$

где обозначено

$$y_r(t) = \begin{cases} y[r(t)], & \text{если } r(t) \in [a, b], \\ 0, & \text{если } r(t) \notin [a, b]. \end{cases}$$

Дополнительное условие для уравнения (2.1) зададим в виде равенства

$$x(a) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Начальную задачу (2.1), (2.2) рассмотрим в следующих предположениях: функция $b : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима и ограничена в существенном; функции $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы $g(t) \leq t$, $h(t) \leq t$ при почти всех $t \in [a, b]$, функция $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Будем предполагать также, что функция g удовлетворяет условиям:

$$(i) \text{ mes } g^{-1}(e) = 0 \quad (\text{здесь } g^{-1}(e) = \{t \in [a, b] : g(t) \in e\}) \quad (2.3)$$

для любого множества $e \subset [a, b]$ нулевой меры и, кроме того, для $1 \leq p < \infty$ имеет место

$$\mu = \left\{ \sup_{e \subset [a, b]} \frac{\text{mes } g^{-1}(e)}{\text{mes } e} \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем таким подмножествам e отрезка $[a, b]$, что $\text{mes } e > 0$; (ii) существует такое $\tau > 0$, что либо множество $\kappa = \{t \in [a, b] : t - g(t) \leq \tau, g(t) \geq a\}$ пусто, либо $\mu \operatorname{vrai} \sup_{t \in \kappa} |b(t)| < 1$.

Условие (i) обеспечивает [3], [1], [2] непрерывное действие оператора внутренней суперпозиции S , определяемого равенством $(Sy)(t) = b(t)y_g(t)$ в пространстве $L_p[a, b]$,

$1 \leq p < \infty$; при этом число μ , определенное в условии (i), является нормой оператора S в пространстве $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$. Для непрерывного действия оператора S в пространстве L_∞ достаточно [3] выполнения условия (2.3), при этом $\mu = \|S\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} = 1$ (см. также [1], [2]). При сделанных предположениях оператор \mathcal{L} непрерывно действует из пространства AC_p в пространство L_p и вольтерров.

При выполнении условия (ii) спектральный радиус оператора S меньше единицы [3].

Решением задачи (2.1), (2.2) будем называть функцию $x \in AC_p$, удовлетворяющую начальному условию (2.2) и почти всюду на $[a, b]$ уравнению (2.1).

Для $v, z \in L_\infty[a, b]$ обозначим $[v, z] = \{x \in L_\infty : v \leq x \leq z\}$.

Будем говорить [4], [1], что функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию $L^1[v, z]$ ($L^2[v, z]$), если существуют такие функции $r^1(t)$ ($r^2(t)$), $r^1, r^2 \in L_p$, что оператор Немыцкого $M^1 : [v, z] \rightarrow L_p$ ($M_2 : [v, z] \rightarrow L_p$), определяемый равенством $(M^1 u)(t) = f(t, u) + r^1(t)u$ ($(M^2 u)(t) = f(t, u) + r^2(t)u$), изотонен (антитонен).

Обозначим

$$\sigma_r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } r(t) \in [a, b], \\ 0, & \text{если } r(t) \notin [a, b] \end{cases}$$

и приведем утверждение о разрешимости начальной задачи (2.1), (2.2) в некотором порядковом отрезке.

Теорема 1. Пусть $b(t)\sigma_g(t) \geq 0$ и выполнены условия:

1) существуют функции $v, z \in L_\infty$ такие, что $v \leq z$ и при почти всех $t \in [a, b]$ справедливы неравенства

$$(\mathcal{L}v)(t) \leq f(t, v_h(t)), \quad (\mathcal{L}z)(t) \geq f(t, z_h(t)), \quad v(a) \leq x(a) \leq z(a);$$

2) функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию $L^1[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^1(t)$, что функция Коши $C^1(t, s)$ уравнения

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + r^1(t)x_h(t) = \eta_1(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.4)$$

неотрицательна в области $\Delta = \{(t, s) \in [a, b] \times [a, b] : a \leq s \leq t \leq b\}$.

Тогда задача (2.1), (2.2) имеет решение x , удовлетворяющее неравенствам $v \leq x \leq z$.

Если, кроме того,

3) функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию $L^2[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^2(t)$, что функция Коши $C^2(t, s)$ уравнения

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + r^2(t)x_h(t) = \eta_2(t), \quad t \in [a, b] \quad (2.5)$$

неотрицательна в области Δ , то это решение единственно.

Доказательство. При выполнении условия 2 теоремы 1 начальная задача (2.1), (2.2) эквивалентна уравнению (1.1), где оператор $A : [v, z] \rightarrow C$ определен равенством

$$(Ax)(t) = \int_a^t C^1(t, s) M^1(s, x_h(s)) ds + \xi^1(t).$$

Здесь $\xi^1(t)$ — решение неоднородной задачи $(\mathcal{L}_1 x)(t) = 0$, $t \in [a, b]$, $x(a) = \alpha$.

Оператор A изотонен и вполне непрерывен. Покажем, что из неравенств

$$(\mathcal{L}v)(t) \leq f(t, v_h(t)), \quad v(a) \leq x(a)$$

следует, что $v \leq Av$. Действительно, из первого неравенства вытекает

$$(\mathcal{L}v)(t) \leq \int_a^t C^1(t, s) M^1(s, x_h(s)) ds + v^1(t),$$

где $v^1(t)$ — решение задачи $(\mathcal{L}_1x)(t) = \eta_1(t)$, $t \in [a, b]$, $x(a) = v(a)$.

Обозначив $\theta(t) = \xi^1(t) - v^1(t)$, получаем, что $\theta(t)$ является нетривиальным решением уравнения $(\mathcal{L}_1x)(t) = 0$. В работе [7] показано, что неотрицательность функции Коши уравнения $(\mathcal{L}_1x)(t) = \eta(t)$ эквивалентна тому, что нетривиальное решение уравнения $(\mathcal{L}_1x)(t) = 0$ не обращается в нуль на $[a, b]$. Так как $v(a) \leq x(a)$, то отсюда заключаем, что $\theta(t) \geq 0$, то есть $\xi^1(t) \geq v^1(t)$, следовательно, неравенство $v \leq Av$ установлено. Неравенство $z \geq Az$ получается аналогично. Таким образом, вполне непрерывный оператор A отображает множество $[v, z]$ в себя, следовательно, оператор A имеет неподвижную точку, принадлежащую $[v, z]$. Существование решения краевой задачи (1.1), (2.1) в порядковом интервале доказано.

Для доказательства единственности решения краевой задачи (1.1), (2.1) в порядковом отрезке $[v, z]$ заметим, что в условиях теоремы существуют “верхнее” \bar{x} и “нижнее” \underline{x} решения этой задачи, причем $v \leq \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \leq z$. При выполнении условия 3 теоремы 1 исходная задача (2.1), (2.2) редуцируется к эквивалентному уравнению $x = Bx$, где оператор $B : [v, z] \rightarrow C$ определяется равенством

$$(Bx)(t) = \int_a^t C^2(t, s) M^2(s, x_h(s)) ds + \xi^2(t). \tag{2.6}$$

Здесь функция $\xi^2(t)$ есть решение краевой задачи

$$(\mathcal{L}_2x)(t) = 0, \quad t \in [a, b], \quad x(a) = \alpha.$$

Оператор B антитонен. Отсюда можно получить противоположное неравенство $\underline{x} \geq \bar{x}$, что завершает доказательство теоремы.

В приводимой ниже теореме доказывается существование решения начальной задачи (2.1), (2.2).

Теорема 2. Пусть $b(t)\sigma_g(t) \geq 0$ и существуют функции $v, z \in L_\infty$ такие, что $v \leq z$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполнены условия:

1) функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию $L^2[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^2(t)$, что функция Коши $C^2(t, s)$ уравнения (2.5) неотрицательна в области Δ ;

2) при почти всех $t \in [a, b]$ справедливы дифференциальные неравенства

$$(\mathcal{L}_2v)(t) \equiv (\mathcal{L}v)(t) + r^2(t)v_h(t) \leq f(t, z_h(t)) + r^2(t)z_h(t),$$

$$(\mathcal{L}_2z)(t) \equiv (\mathcal{L}z)(t) + r^2(t)z_h(t) \geq f(t, v_h(t)) + r^2(t)v_h(t), \quad t \in [a, b], \quad v(a) \leq x(a) \leq z(a).$$

Тогда начальная задача (2.1), (2.2) имеет решение x , удовлетворяющее неравенствам $v \leq x \leq z$.

Приведем схему доказательства теоремы 2. При выполнении условия 1 теоремы 2 начальная задача (2.1), (2.2) эквивалентна уравнению $x = Bx$, где оператор $B : [v, z] \rightarrow C$ определен равенством (2.6). Оператор B антитонен и вполне непрерывен. Из дифференциальных неравенств, входящих в условие 2 теоремы 2, следует, что $v \leq Bz$ и $z \geq Bv$,

то есть вполне непрерывный оператор B отображает множество $[v, z]$ в себя, следовательно, оператор B имеет неподвижную точку, принадлежащую $[v, z]$. Существование решения краевой задачи (2.1), (2.2) в порядковом интервале $[v, z]$ доказано.

Рассмотрим для уравнения (2.1) задачу Коши – Николетти с краевым условием

$$x(b) = \alpha. \quad (2.7)$$

Придем утверждения о разрешимости краевой задачи (2.1), (2.7).

Теорема 3. Пусть $b(t) \sigma_g(t) \geq 0$ и существуют функции $v, z \in L_\infty$ такие, что $v \leq z$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполнены условия:

1) функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию $L^2[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^2(t)$, что краевая задача

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + r^2(t)x_h(t) = \eta_2(t), \quad t \in [a, b], \quad x(b) = 0 \quad (2.8)$$

однозначно разрешима и ее функция Грина $G^2(t, s)$ неположительна в квадрате $[a, b] \times [a, b]$;

2) при почти всех $t \in [a, b]$ справедливы дифференциальные неравенства

$$(\mathcal{L}_2 v)(t) \equiv (\mathcal{L}v)(t) + r^2(t)v_h(t) \leq f(t, z_h(t)) + r^2(t)z_h(t),$$

$$(\mathcal{L}_2 z)(t) \equiv (\mathcal{L}z)(t) + r^2(t)z_h(t) \geq f(t, v_h(t)) + r^2(t)v_h(t), \quad t \in [a, b], \quad v(b) \leq x(b) \leq z(b).$$

Тогда краевая задача (2.1), (2.7) имеет решение x , удовлетворяющее неравенствам $v \leq x \leq z$.

Если, кроме того, функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию $L^1[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^1(t)$, что краевая задача

$$(\mathcal{L}_1 x)(t) \equiv (\mathcal{L}x)(t) + r^1(t)x_h(t) = \eta_1(t), \quad t \in [a, b], \quad x(b) = 0 \quad (2.9)$$

однозначно разрешима и ее функция Грина $G^1(t, s)$ неположительна в квадрате $[a, b] \times [a, b]$, то это решение единственно.

Теорема 4. Пусть $b(t) \sigma_g(t) \geq 0$ и существуют функции $v, z \in L_\infty$ такие, что $v \leq z$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполнены условия:

1) функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию $L^1[v_h, z_h]$ с таким коэффициентом $r^1(t)$, что краевая задача (2.9) однозначно разрешима и ее функция Грина $G^1(t, s)$ неположительна в квадрате $[a, b] \times [a, b]$;

2) при почти всех $t \in [a, b]$ справедливы дифференциальные неравенства

$$(\mathcal{L}_1 v)(t) \equiv (\mathcal{L}v)(t) + r^1(t)v_h(t) \leq f(t, z_h(t)) + r^1(t)z_h(t),$$

$$(\mathcal{L}_1 z)(t) \equiv (\mathcal{L}z)(t) + r^1(t)z_h(t) \geq f(t, v_h(t)) + r^1(t)v_h(t), \quad t \in [a, b], \quad v(a) \leq x(a) \leq z(a).$$

Тогда краевая задача (2.1), (2.7) имеет решение x , удовлетворяющее неравенствам $v \leq x \leq z$.

Доказательства теорем 3 и 4 проводятся по тем же схемам, что и доказательства теорем 1 и 2.

Замечание. Эффективные признаки неотрицательности функции Коши $C(t, s)$ вспомогательных линейных уравнений приведены в работах [7], [5]; условия неположительности функции Грина вспомогательных линейных краевых задач сформулированы в работе [7].

В качестве применения теоремы 1 рассмотрим математическую модель производства клеток крови [15], [8], являющейся частным случаем приведенной выше начальной задачи (2.1), (2.2)

$$\dot{x}(t) + px(t) = \frac{mx(t-\tau)}{c+x^n(t-\tau)}, \quad t \in [a, b], \quad (2.10)$$

$$x(a) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

где $p > 0$, $m > 0$, $c > 0$, $n > 1$, $0 \leq \tau < \infty$.

Обозначим $\sigma_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t - \tau \in [a, b], \\ 0, & \text{если } t - \tau \notin [a, b] \end{cases}$ и приведем утверждение о разрешимости задачи (2.10), (2.11).

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

- 1) имеет место неравенство $p \geq \frac{1}{t} \left[\frac{m(t-\tau)}{c+(t-\tau)^n} - 1 \right]$, $t \in [a, b]$,
- 2) существует такая функция $r(t) \geq 0$, что справедливо неравенство $p + r(t)\sigma_\tau(t) \leq \frac{1}{e}$, $t \in [a, b]$.

Тогда существует решение задачи (2.10), (2.11), удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leq x \leq t.$$

Доказательство этого утверждения сводится к проверке условий теоремы 1, где в качестве функций v и z выбраны соответственно $v = 0$, $z = t$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф., *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991, 278 с.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф., *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений*, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2002, 384 с.
3. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., “Функционально-дифференциальные уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **14:5** (1978), 771–797.
4. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., “К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах”, *Функц.-дифференц. уравнения: сб. науч. тр.*, 1986, 3–9.
5. Березанский Л.М., Ларионов А.С., “Положительность матрицы Коши линейного функционального уравнения”, *Дифференц. уравнения.*, **24:11** (1988), 1843–1854.
6. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., *Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Зинатне, Рига, 1978, 184 с.
7. Домошницкий А.И., “Знакопостоянство функции Коши и устойчивость линейного уравнения нейтрального типа по правой части”, *Краевые задачи: межвуз. сб. науч. тр.*, 1986, 44–48.

8. Дъери И., Перцев Н.В., *Устойчивость положения равновесия систем функционально-дифференциальных уравнений, обладающих свойством смешанной монотонности. Применение к моделям биологических процессов. Препринт №126*, Отдел вычислительной математики АН СССР, М., 1986, 384 с.
9. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г., *Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах*, Гостехиздат, М.-Л., 1950, 548 с.
10. Кигурадзе И. Т., *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси, 1978, 352 с.
11. Максимов В.П., *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений*, Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, Пермь, 2003, 306 с.
12. Митропольский Ю.А., Лиля С., Мартынюк А.А., “О некоторых направлениях исследований В. Лакшмикантама по теории дифференциальных уравнений и их приложениям”, *Дифференц. уравнения*, **22**:4 (1986), 555–572.
13. Conti R., “Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations”, *Boll. Unione mat.*, **22**:2 (1967), 135–178.
14. Lakshmikantham V., “The present state of the method of upper and lower solutions”, *Trends in theory and practice of nonlinear differential equations / Proceedings of the International Conference*, 1983, 285–299.
15. Mackey M. C., Glass L., “Oscillations and chaos in physiological control systems”, *Science*, **197** (1977), 287–289.
16. Scwabik S., Tvrđy M., Veivoda O., *Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints*, Academia, Praha, 1979, 252 pp.

On nonlinear problems for functional differential equation

© A. S. Larionov³, P. M. Simonov⁴

Abstract. Given the approval of the solvability of nonlinear problems for first order differential equation with retarded argument. The statements are derived from the monotone iterative technique.

Key Words: Isotonic and antitonic operators, upper and lower solutions, the operator of internal superposition, a problem of Cauchy – Nicoletti, a model of Mackey – Glass

³ Docent of the Department of Mathematics, Bratsk State University, Bratsk, larios84@yandex.ru

⁴ Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Perm, simpn@mail.ru

УДК 519.626

Сеточные аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлениями в коэффициентах при старших производных

© Ф. В. Лубышев¹, М. Э. Файрузов²

Аннотация. Рассматриваются и исследуются математические постановки нелинейных задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлениями в коэффициентах при старших производных. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость аппроксимаций по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций по Тихонову.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения, метод регуляризации

1. Введение

Характер конкретных постановок задач оптимального управления для распределенных систем существенно зависит от того, куда входят управления (в свободные члены уравнений состояния или в коэффициенты уравнений), линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями математической физики (УМФ) описываются состояния систем управления (см. [1]-[10]), а также зависит от того, какой гладкостью обладают входные данные систем управления (допускают ли входные данные и функции состояния разрывы). В настоящее время наиболее полно исследован случай таких систем управления, когда управления достаточно простым образом входят в линейные уравнения состояния и линейные предельные условия, а также когда входные данные и функции состояния систем являются достаточно гладкими (не допускающими разрывов коэффициентов и решений). Характерной особенностью задач оптимального управления нелинейного типа является то, что отображение $g \rightarrow u(g)$ из множества допустимых управлений U в пространство состояний W является нелинейным. Нелинейные задачи оптимального управления для УМФ относятся к наиболее сложному классу задач оптимизации (см. [2]). Особый интерес представляют задачи оптимального управления, когда их нелинейность обусловлена входением управлений в коэффициенты уравнений для состояний, в том числе, в коэффициенты при старших производных. Задачи оптимального управления с управляющими параметрами, содержащимися в главной части дифференциальных операторов (в старших коэффициентах уравнений состояний) являются сильно нелинейными оптимизационными задачами (см. [2]). Такие задачи весьма существенно отличаются от задач, где управление осуществляется путем внешних воздействий на систему (см. [2]), они наименее изучены, хотя развитие теории и методов их решения вызвано потребностями математического моделирования нелинейных оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких

¹ Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

² Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

задач при оптимизации процессов теплофизики, диффузии, фильтрации, теории упругости и др., а также при решении обратных задач для УМФ, рассматриваемых в вариационной постановке. Нелинейность оптимизационных задач еще более усугубляется, если, кроме того, и состояния процессов описываются нелинейными уравнениями. Особый интерес с теоретической и практической точек зрения представляют физико-математические постановки задач оптимального управления, в которых в силу характера исследуемых физических процессов состояния описываются нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своим физико-математическим постановкам сами решения УМФ допускают разрывы.

Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы – «конечномерными задачами оптимизации» (см. [1]). Обзор работ, посвященных основам общей теории и методам устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления, а также результатам в этой области, представлен, например, в [1], [7]-[10]. Одним из наиболее удобных, универсальных и широко распространенных методов конечномерных аппроксимаций задач оптимального управления является метод сеток (см. [11]-[14]). Центральными в проблеме аппроксимации являются вопросы «конструирования» аппроксимаций, сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций (см., например, [1], [7]-[10]). Для систем управления, описываемых УМФ, построения и исследования аппроксимаций проводились в основном также для линейных задач оптимального управления, причем с достаточно гладкими коэффициентами УМФ и состояниями.

В настоящей работе по тематике, примыкающей к [1], [7]-[10], [15]-[20] рассмотрены и исследованы математические постановки нелинейных задач оптимального управления, описываемых полулинейными уравнениями эллиптического типа в неоднородных средах с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями), с граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта [11], [14], [21]-[23]. В качестве управлений выступают переменные коэффициенты при старших производных в уравнениях состояния. Построены и исследованы разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимации по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимации. Для аппроксимации задач, описывающих состояния с разрывными коэффициентами и решением предложена некоторая новая «модифицированная разностная схема» с нетрадиционным для теории разностных схем способом вычисления переменных сеточных коэффициентов в главной части сеточного оператора. Исследования аппроксимации проводятся для дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния с обобщенными решениями из класса Соболева.

2. Постановка задач и их корректность

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в \mathbb{R}^2 с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\bar{S} = \{r_1 = \xi, 0 \leq r_2 \leq l_2\}$, $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi, 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1, 0 < r_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω_1 и Ω_2 соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы \bar{S} подобластей Ω_1 и Ω_2 , а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω . Далее, через $\bar{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S , $k = 1, 2$. Так что $\partial\Omega_k = \bar{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k , $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$; $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$.

Через n_α , $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α , $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1 , то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2 . Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2 , разбитой на части внутренней границей S , следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями:

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\bar{\Omega}$ вида $u(r) = u_1(r)$, $r \in \bar{\Omega}_1 \equiv \Omega^-$, $u(r) = u_2(r)$, $r \in \bar{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты $u_p(r)$, $p = 1, 2$, удовлетворяют условиям:

1) Функции $u_p(r)$, $p = 1, 2$, определенные на $\bar{\Omega}_p = \Omega_p \cup \partial\Omega_p$, $p = 1, 2$, удовлетворяют в Ω_p , $p = 1, 2$, уравнениям

$$L_p u_p = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(k_p(r) \frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha} \right) + d_p(r) q_p(u_p) = f_p(r), \quad \text{в } \Omega_p, \quad p = 1, 2; \quad (2.1)$$

а на границах $\partial\Omega_1 \setminus S = \bar{\Gamma}_1$, $\partial\Omega_2 \setminus S = \bar{\Gamma}_2$ условиям

$$u_1(r) = 0, \quad r \in \bar{\Gamma}_1, \quad u_2(r) = 0, \quad r \in \bar{\Gamma}_2; \quad (2.2)$$

2) Искомые функции $u_p(r)$, $p = 1, 2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(r)$ и $u_2(r)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$G(x) = k_1(r) \frac{\partial u_1}{\partial r_1} = k_2(r) \frac{\partial u_2}{\partial r_1} = \theta(r_2) (u_2(r) - u_1(r)), \quad r \in S. \quad (2.3)$$

Если ввести функции вида

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r), & r \in \Omega_1; \\ u_2(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \quad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$k(r), d(r), f(r) = \begin{cases} k_1(r), q_1(r), f_1(x), & x \in \Omega_1; \\ k_2(r), q_2(r), f_2(r), & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2.5)$$

то задачу (2.1)-(2.3) можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\bar{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(r) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(k(r) \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} \right) + d(r) q(u) = f(r), \quad r \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.6)$$

и условиям

$$\begin{aligned} u(r) &= 0, \quad r \in \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \\ \left[k(r) \frac{\partial u}{\partial r_1} \right] &= 0, \quad G(r) = \left(k_1(r) \frac{\partial u_1}{\partial r_1} \right) = \theta(r_2)[u], \quad x \in S. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ – скачок функции $u(r)$ на S ; $d(r)$, $f(r)$ – известные функции, определяемые по разному в Ω_1 и Ω_2 , претерпевающие разрыв

первого рода на S ; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$ – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$; $\theta(r_2)$ – заданная функция на S ;

$$k(r) \equiv g(r) = \begin{cases} g_1(r) \equiv k_1(r), & r \in \Omega_1, \\ g_2(r) \equiv k_2(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2.8)$$

– управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $d(r) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f(r) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$, $\theta(r_2) \in L_\infty(S)$; $0 \leq d_0 \leq d(r) \leq \bar{d}_0$, $r \in \Omega_1 \cup \Omega_2$; $0 < \theta_0 \leq \theta(r_2) \leq \bar{\theta}_0$, $x \in S$, $d_0, \bar{d}_0, \theta_0, \bar{\theta}_0$ – константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$ определены на \mathbb{R} со значениями в \mathbb{R} , причем $q_\alpha(0) = 0$, $0 \leq q_0 \leq (q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2))/(\xi_1 - \xi_2) \leq L_q < \infty$ для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \neq \xi_2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = U_1 \times U_2 \subset W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2) = B, \quad (2.9)$$

состоящее из пар $g(r) = k(r)$, определенных в (2.8) таких, что

$$g_p(r) \in U_p = \left\{ g_p(r) = k_p(r) \in W_\infty^1(\Omega_p) = B_p : 0 < \nu_p \leq g_p(r) \leq \bar{\nu}_p, \right. \\ \left. \left| \frac{\partial g_p(r)}{\partial r_1} \right| \leq R_p^{(1)}, \left| \frac{\partial g_p(r)}{\partial r_2} \right| \leq R_p^{(2)} \text{ п.в. на } \Omega_p \right\}, \quad p = 1, 2, \quad (2.10)$$

где $B_p = W_\infty^1(\Omega_p)$ – пространства управлений $g_p(r) = k_p(r)$, заданных на Ω_p , $p = 1, 2$, соответственно, $\nu_p, \bar{\nu}_p, R_1^{(p)}, R_2^{(p)}$, $p = 1, 2$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J : U \rightarrow \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \rightarrow J(g) = \int_{\Omega_1} |u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \quad (2.11)$$

где $u_0^{(1)}(r) \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset B$ функционал цели $g \rightarrow J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r; g)$ задачи (2.1)-(2.3), отвечающих всем допустимым управлениям $g = k \in U$, требуется минимизировать функционал цели (2.11).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(r) = (u_1(r), u_2(r))$:

$$V \equiv V(\Omega^{(1,2)}) = \{u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\}, \quad (2.12)$$

где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k , $k = 1, 2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ соответственно и нормами [24]

$$\|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2 = \int_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \quad (2.13)$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_V = \sum_{k=1}^2 (u_k, v_k)_{W_2^1(\Omega_k)}, \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2, \quad (2.14)$$

$V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k + \int_S [u]^2 dS, \quad (2.15)$$

где $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ – скачок функции $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ на S . Здесь $u_2(r) = u^+(r)$, $r \in S$ и $u_1(r) = u^-(r)$, $r \in S$ – следы функции $u(r)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1, 2$, ограничены, так как Ω_1 и Ω_2 – области с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(r)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [24]-[28] справедлива для каждой из сторон S^+ , S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на S^\pm . С другой стороны, если элемент $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$, то его следы на S с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2) в общем случае различны. Сужения функции $u(r)$ на области Ω_k , $k = 1, 2$: $u|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$ принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, соответственно, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(r)$ не принадлежит, поскольку на множестве S (при переходе из Ω_1 в Ω_2) она имеет разрыв ($\delta(r) = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$, $r \in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $v(r) \in W_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S)$ является условие склейки: $v(r) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$; $v_1(r)|_S = v_2(r)|_S$ (см., например, [28], [29]). Далее, так как Ω_k – области с границами Липшица $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, а Γ_1 и Γ_2 – соответственно их (открытые) части (куски границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $mes\Gamma_k > 0$, $k = 1, 2$, то [30] существуют некоторые постоянные C_1 и C_2 , зависящие только от данных областей Ω_k , $k = 1, 2$ и от кусков Γ_1 и Γ_2 соответственно, такие, что для каждой функции $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ имеют место соотношения:

$$\|u_k(r)\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2 \leq C_k^2 \left[\int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k \right], \quad k = 1, 2. \quad (2.16)$$

Так как для рассматриваемых областей Ω_k , $k = 1, 2$ отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1, 2$, ограничены, то существуют такие постоянные C_3 и C_4 соответственно, не зависящие от функции $u_k(r)$, что для любых функций $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки [25],[26]:

$$\|u_k(r)\|_{L_2(\partial\Omega_k)}^2 \leq C_{k+2}^2 \|u_k(r)\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2, \quad k = 1, 2, \quad (2.17)$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\bar{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку; $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \emptyset$; $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k) = \overset{0}{W}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \partial\Omega_k$. Заме-

тим, что для элементов $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ справедливо неравенство [25]

$$\int_{\Omega_k} u_k^2(r) d\Omega_k \leq C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k) \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \quad (2.18)$$

с постоянной $C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k)$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, при этом «площадь» куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $mes \overset{\circ}{\Gamma}_k > 0$.

Введем в рассмотрение нормированное пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(r) = (u_1(r), u_2(r))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \{u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\}, \quad (2.19)$$

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})}^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int_S [u]^2 dS. \quad (2.20)$$

Под решением прямой задачи (2.1)-(2.3) при фиксированном управлении $g(r) = k(r) \in U$ понимается функция $u(r) \equiv u(r; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех $v \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^2 k(r) \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} \frac{\partial v}{\partial r_\alpha} + d(r)q(u)v \right] d\Omega_0 + \int_S \theta(x)[u][v] dS = \\ &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(r)v d\Omega_0 = l(v). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Разрешимость задачи (2.1)-(2.3) в смысле ее определения (2.21) гарантирует

Т е о р е м а 2.1. *При любом $g(r) \in U$ существует единственное обобщенное решение $u(r) = u(r; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи (2.1)-(2.3), определяемое из интегрального тождества (2.21), причем*

$$\|u(r; g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} \leq C_7 \sum_{k=1}^2 \|f_k(r)\|_{L_2(\Omega_k)} = \bar{C}_7, \quad (2.22)$$

где $C_7 = Const > 0$.

Доказательство теоремы 2.1. опирается на теорию монотонных операторов [26], [27], [30], [31], при этом существенно используются, введенные выше Гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы, а также неравенства (2.15)-(2.17).

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.11), (2.1)-(2.10).

Т е о р е м а 2.2. *Существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_* \in U$ задачи (2.11), (2.1)-(2.10), т.е. $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$. Множество точек минимума U_* функционала цели $J(g)$ в экстремальной задаче (2.11), (2.1)-(2.10) слабо компактно в $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$. Любая минимизирующая последовательность $\{g^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset U$ функционала $J(g)$ слабо в H сходится к множеству U_* .*

3. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.11), (2.1)-(2.10) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим и изучим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [10]-[14]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций при неограниченном измельчении шага h сетки дискретизации. Для аппроксимации задач оптимизации (2.11), (2.1)-(2.10) нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$ и в $\bar{\Omega}$. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по x_1 и x_2 : $\hat{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} \in [0, l_\alpha] : i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, h_{\alpha i_\alpha} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}\}$, $\alpha = 1, 2$, а также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в области $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$: $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 \times \hat{\omega}_2$. Очевидно, всегда можно построить сетку $\hat{\omega}_1$ на $[0, l_1]$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и исходя из положения точки $x_1 = \xi$ число узлов находить из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$. Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной экстремальной задачи (2.11), (2.1)-(2.10) не носят принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области $\bar{\Omega}$ сетку по x_1 и x_2 будем считать равномерной, полагая $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1 - 1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1, N_1}$ и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2 - 1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ , а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$.

Введем сетки узлов: $\bar{\omega}_1^{(1)} = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : i_1 = \overline{0, N_{1\xi}}, N_{1\xi} h_1 = \xi\}$, $\bar{\omega}_1^{(2)} = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : i_1 = \overline{N_{1\xi}, N_1}, N_1 h_1 = l_1\}$, $\omega_1^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$; $\bar{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : i_2 = \overline{0, N_2}, N_2 h_2 = l_2\}$, $\omega_2 = \bar{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$; $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$; $\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}^{(1,2)} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = (\bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}) \times \bar{\omega}_2 = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, N_{1/x_i} h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi}) h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\} \times \bar{\omega}_2$, $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \cup \omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi)$, $\omega_1^{(1)-} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \bar{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$, $\omega^{(1)+} = \omega_1^{(1)+} \times \bar{\omega}_2$; $\gamma_\xi = \{x_1 = \xi, x_2 = h_2, 2h_2, \dots, (N_2 - 1)h_2\} = \{x_1 = \xi, x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}\}$; $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$; $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \bar{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)} = \bar{\omega}^{(k)} \setminus \omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\bar{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$. При исследовании сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций $y_k(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(k)} \subset \bar{\Omega}_k$, $k = 1, 2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{\bar{\omega}^{(k)}} y_k(x) v_k(x) \bar{h}_1 \bar{h}_2, \quad \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})} = (y_k, y_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}^{1/2}, \quad (3.1)$$

обозначим через $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$. Здесь $\bar{h}_1 = \bar{h}_1(x)$ – средний шаг сеток $\bar{\omega}_1^{(1)}$ и $\bar{\omega}_1^{(2)}$, $\bar{h}_2 = \bar{h}_2(x)$ – средний шаг сетки $\bar{\omega}_2$ [11]. Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$ со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, v_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1} v_{k\bar{x}_1} \bar{h}_1 \bar{h}_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\bar{x}_2} v_{k\bar{x}_2} \bar{h}_1 \bar{h}_2 + (y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})},$$

$$\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}^2 = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}^2, \quad \|\nabla y_k\|^2 = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1}^2 \bar{h}_1 \bar{h}_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(k)+} \times \omega_2^+} y_{k\bar{x}_2}^2 \bar{h}_1 \bar{h}_2, \quad k = 1, 2. \quad (3.2)$$

Введем в рассмотрение пространство $V_h \equiv V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением $V_h \equiv V_h(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, v_k)_{V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^2 (y_k, v_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}, \quad \|y_k\|_{V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^2 \|y_k\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}^2, \quad (3.3)$$

$V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Пусть $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\bar{\omega}^{(k)} \subset \bar{\Omega}_k$, $k = 1, 2$. Через $L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$, с нормами

$$\|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})}^2 = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} y_k^2(x) h_1 h_2, \quad k = 1, 2. \quad (3.4)$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2, \quad k = 1, 2. \quad (3.5)$$

Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathring{H}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ и $\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ пар $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$:

$$\mathring{H}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y = (y_1(x), y_2(x)) \in L_2(\bar{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times L_2(\bar{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)})\}, \quad (3.6)$$

$$\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)})\}, \quad (3.7)$$

$$\|y\|_{\mathring{H}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}}^2 = \sum_{k=1}^2 \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})}^2, \quad \|y\|_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}}^2 = \sum_{k=1}^2 \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|_{L_2(\gamma_S)}^2. \quad (3.8)$$

Задачам оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \bar{\omega}^{(1)}} |y(x; \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}|^2 \bar{h}_1 \bar{h}_2 = \|y(x; \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}\|_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})}^2, \quad (3.9)$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) \equiv y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h)) \in \mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемой) для задачи (2.1)-(2.3), удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in \mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$

$(\bar{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{aligned}
 Q_h(y, v) = & \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1, x_2)) y_{1\bar{x}_1} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left(\sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1, x_2)) y_{1\bar{x}_1} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi, x_2)) y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \\
 & + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1, x_2)) y_{2\bar{x}_1} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \right. \\
 & + \left(\sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1, x_2)) y_{2\bar{x}_2} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi, x_2)) y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \\
 & + \left\{ \left(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x)) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\
 & + \left. \left(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x)) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2(\xi, x_2)) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \\
 & + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] \cdot [v(\xi, x_2)] h_2 = \\
 & \left\{ \left(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} = l_h(v),
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$ принадлежат множеству допустимых сеточных управлений

$$U_h = U_{1h} \times U_{2h} \subset W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)}) = B_h \tag{3.11}$$

и состоят из пар

$$\Phi_h(x) = \begin{cases} \Phi_{1h}(x), & x \in \bar{\omega}^{(1)}; \\ \Phi_{2h}(x), & x \in \bar{\omega}^{(2)}, \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ph}(x)(x) \in U_{ph} = & \{ \Phi_{ph}(x) \in W_\infty^1(\bar{\omega}^{(p)}) = B_{ph} : 0 < \nu_p \leq \Phi_{ph}(x) \leq \bar{\nu}_p, x \in \bar{\omega}^{(p)}, \\
 & |\Phi_{phx_1}(x)| \leq R_p^{(1)}, x \in \omega_1^{(p)-} \times \bar{\omega}_2, |\Phi_{phx_2}(x)| \leq R_p^{(2)}, x \in \omega_1^{(p)} \times \bar{\omega}_2^-, p = 1, 2, \}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $B_{1h} = W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)})$, $B_{2h} = W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)})$ – пространства сеточных управлений $\Phi_{1h}(x)$, $\Phi_{2h}(x)$, заданных на сетках $\bar{\omega}^{(1)}$, $\bar{\omega}^{(2)}$ с нормами

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_{1h}(x)\|_{W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)})} &= \max_{\bar{\omega}^{(1)}} |\Phi_{1h}(x)| + \max_{\omega_1^{(1)-} \times \bar{\omega}_2} |\Phi_{1hx_1}(x)| + \max_{\bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2^-} |\Phi_{1hx_2}(x)|, \\
 \|\Phi_{2h}(x)\|_{W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)})} &= \max_{\bar{\omega}^{(2)}} |\Phi_{2h}(x)| + \max_{\omega_1^{(2)-} \times \bar{\omega}_2} |\Phi_{2hx_1}(x)| + \max_{\bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2^-} |\Phi_{2hx_2}(x)|,
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

соответственно. Здесь

$$\begin{aligned}
 b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1, x_2)) &= \frac{\Phi_{1h}^{(-1,2)}(x) + \Phi_{1h}^{(-1,1)}(x) + \Phi_{1h}^{(+1,2)}(x) + \Phi_{1h}^{(+1,1)}(x)}{4}, \\
 \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1, x_2)) &= \frac{\Phi_{1h}(x) + \Phi_{1h}^{(-1,2)}(x)}{2}, \\
 b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1, x_2)) &= \frac{\Phi_{2h}^{(-1,2)}(x) + \Phi_{2h}^{(-1,1)}(x) + \Phi_{2h}^{(+1,2)}(x) + \Phi_{2h}^{(+1,1)}(x)}{4}, \\
 \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1, x_2)) &= \frac{\Phi_{2h}(x) + \Phi_{2h}^{(-1,2)}(x)}{2},
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$\Phi_{1h}^{(-1_1, -1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1 - h_1, x_2 - h_2)$, $\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1, x_2 - h_2)$, $\Phi_{1h}^{(-1_1, +1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1 - h_1, x_2 + h_2)$, $\Phi_{1h}^{(+1_2)}(x) = \Phi_{1h}(x_1, x_2 + h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_1, -1_2)}(x) = \Phi_{2h}(x_1 - h_1, x_2 - h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x) = \Phi_{2h}(x_1, x_2 - h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_1, +1_2)}(x) = \Phi_{2h}(x_1 - h_1, x_2 + h_2)$, $\Phi_{2h}^{(+1_2)}(x) = \Phi_{2h}(x_1, x_2 + h_2)$, а $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $\theta_h(x_2)$, $f_{\alpha h}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $d_{\alpha}(r)$, $\alpha = 1, 2$, $\theta(r_2)$, $f_{\alpha}(r)$, $\alpha = 1, 2$, $u_0^{(1)}(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$\begin{aligned}
 d_{\alpha h}(x) &= \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(\alpha)}(x)} d_{\alpha}(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x \in \omega^{(\alpha)}, \alpha = 1, 2; \\
 d_{1h}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi - 0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} d_1(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2, \\
 d_{2h}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi + 0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} d_2(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2, \\
 f_{1h}(x) &= \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} f_1(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x \in \omega_1^{(1)}, \\
 f_{1h}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi - 0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} f_1(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \\
 f_{2h}(x) &= \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(2)}(x)} f_2(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x \in \omega^{(2)}, \\
 f_{2h}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi + 0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} f_2(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \\
 \theta_h(x_2) &= \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} \theta(r_2) dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \quad u_{0h}^{(1)}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x \in \bar{\omega}^{(1)}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь усреднения берутся по элементарным ячейкам [10].

Т е о р е м а 3.1. *Задача о нахождении решения разностной схемы (3.10) при любом фиксированном управлении $\Phi_h \in U_h$ однозначно разрешима, причем справедлива априорная оценка*

$$\|y(x; \Phi_h)\|_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \leq M \sum_{k=1}^2 \|f_{kh}(x)\|_{L_2(\omega^{(k)}) \cup \gamma_S} = \hat{M}, \quad \forall \Phi_h \in U_h, \tag{3.17}$$

где $M = Const > 0$.

Т е о р е м а 3.2. *Для каждого $h > 0$ существует по крайней мере одно оптимальное управление $\Phi_{h*} \in U_h$ в последовательности сеточных (разностных) экстремальных задач (3.9)-(3.16), т.е. $J_{h*} = \inf\{J_h(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} > -\infty$, $U_{h*} = \{\Phi_{h*} \in U_h : J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*}\} \neq \emptyset$.*

4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между $u(r; g)$ – решением прямой задачи (2.1)-(2.3) с разрывными коэффициентами и решением и $y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h))$ – решением аппроксими-

рующей ее разностной задачи состояния (3.10) при $h \rightarrow 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где U и U_h – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10) и (3.9)-(3.16) соответственно.

Справедлива следующая теорема о точности аппроксимаций по состоянию.

Т е о р е м а 4.1. Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r; g)$ и $y(x, \Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.11), (2.1)-(2.10) и (3.9)-(3.16). Тогда для любых $h > 0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи (2.11), (2.1)-(2.10):

$$\begin{aligned} \|y(x, \Phi_h) - u(x; g)\|_{V_{\gamma(1), \gamma(2)}(\bar{\omega}(1,2))} \leq & C \left\{ |h| \left[\sum_{\alpha=1}^2 (\|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L_{q_\alpha} \|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0, l_\alpha)} \sum_{\alpha=1}^2 \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} \right] + \right. \\ & + \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left\| b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1, x_2)) - \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1 - 0.5h_1, r_2) dr_2 \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)} + \right. \\ & \left. + \left\| \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1, x_2)) - \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+)} \right) \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \\ & + \left\| \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_\infty(\omega_2^+)} \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)} \\ & \left. + \left\| \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_\infty(\omega_2^+)} \|u_2\|_{W_2^2(\Omega_1)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.9)-(3.16) по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ экстремальных задач (3.9)-(3.16) и (2.11), (2.1)-(2.10), для любых фиксированных управлений $\Phi_h \in U_h$ и $g \in U$, и любых $h > 0$.

Оценку погрешности функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи (3.9)-(3.16) устанавливает

Т е о р е м а 5.1. Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (2.11), (2.1)-(2.10) и (3.9)-(3.16) соответственно и любых $h > 0$ для погрешности

сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи (3.9)-(3.16) справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 & |J(g) - J_h(\Phi_h)| = |I(u(r; g)) - I_h(y(x; \Phi_h))| \leq \\
 & \leq M \left\{ |h| + \sum_{\alpha=1}^2 \left[\left\| \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1 - 0.5h_1, r_2) dr_2 - b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1, x_2)) \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left\| \frac{1}{h_2} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 - \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1, x_2)) \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+)} \right] + \\
 & \quad + \left\| \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 - \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi, x_2)) \right\|_{L_\infty(\omega_2^+)} + \\
 & \quad \left. + \left\| \frac{2}{h_1} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 - \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi, x_2)) \right\|_{L_\infty(\omega_2^+)} \right\}. \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

где $M = Const > 0$, не зависящая от h , y , u , Φ_h , g .

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации (3.9)-(3.16), зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ при $|h| \rightarrow 0$.

Т е о р е м а 5.2. Пусть J_* и J_{h*} - нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в задачах (2.11), (2.1)-(2.10) и (3.9)-(3.16) соответственно. Семейство сеточных задач (3.9)-(3.16), зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\bar{\omega}^{(1,2)} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ при $|h| \rightarrow 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу (2.11), (2.1)-(2.10) по функционалу, т.е. $\lim J_{h*} = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, и справедлива оценка скорости сходимости

$$|J_{h*} - J_*| \leq M|h|. \tag{5.2}$$

Предположим теперь, что при каждом $h = (h_1, h_2)$ и соответствующей сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*} + \epsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (3.9)-(3.16) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h$, дающее приближенное решение задачи (3.9)-(3.16) в следующем смысле:

$$J_{h*} \leq J_h(\Phi_{h\epsilon_h}) \leq J_{h*} + \epsilon_h, \quad \Phi_{h\epsilon_h} \in U_h, \tag{5.3}$$

где последовательность $\{\epsilon_h\}$ такова, что $\epsilon_h \geq 0$ и $\epsilon_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h$ из (5.3) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.11), (2.1)-(2.10).

Т е о р е м а 5.3. Пусть последовательность сеточных управлений $\{\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h\}$ определена из условий (5.3). Тогда последовательность управлений $\{F_h \Phi_{h\epsilon_h}(r)\}$, где $F_h : H_h \rightarrow H$ - кусочно-линейные восполнения сеточных управлений, является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной задачи (2.11), (2.1)-(2.10), т.е. $\lim J(F_h \Phi_{h\epsilon_h}) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$ и справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(F_h \Phi_{h\epsilon_h}) - J_* \leq C|h| + \epsilon_h. \tag{5.4}$$

Последовательность $\{F_h \Phi_{h\epsilon_h}(r)\}$ слабо в $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$ сходится к множеству $U_* \neq \emptyset$ оптимальных управлений исходной экстремальной задачи (2.11), (2.1)-(2.10).

Рассмотрим вопрос о сильной сходимости в $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$ по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (3.9)-(3.16). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$, фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \forall \Phi_h \in U_h, \delta_h \rightarrow +0 \text{ при } |h| \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.9)-(3.16) введем на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2 = \|g\|_{W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)}^2$, $g \in U$, и его сеточный аналог $\Omega(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2 = \|\Phi_h\|_{W_2^1(\bar{\omega}_1) \times W_2^1(\bar{\omega}_2)}^2$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (3.9)-(3.16): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega_h(\Phi_h)$, $\Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \rightarrow 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h : при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h}(x) \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \leq T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat{\Phi}_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \quad (5.6)$$

где $\nu_h \geq 0$ и $\nu_h \rightarrow +0$ при $|h| \rightarrow 0$. Введем множество Ω -нормальных решений задачи оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf\{\Omega(g_*) : g_* \in U_*\} = \Omega_*\}$. Так как функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (2.11), (2.1)-(2.10) и функционалы $J(g)$ и $\Omega(g)$ – полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$, то $U_{**} \neq \emptyset$ [1].

Т е о р е м а 5.4. Пусть последовательность сеточных управлений $\{\hat{\Phi}_h\} \subset U_h$ определена из условий (5.6). Тогда последовательность управлений $\{F_h\hat{\Phi}_h(r)\} \subset U_h$ является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной экстремальной задачи (2.11), (2.1)-(2.10), т.е. $\lim J(F_h\hat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$ и справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(F_h\hat{\Phi}_h) - J_* \leq M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h]. \quad (5.7)$$

Если, кроме того, параметры ν_h , δ_h , α_h согласованы с $|h|$ так, что $\nu_h, \delta_h, \alpha_h \rightarrow +0$ при $|h| \rightarrow 0$ и $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, то последовательность $\{F_h\hat{\Phi}_h\}$ сильно сходится в H к множеству Ω -нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений U_{**} задачи (2.11), (2.1)-(2.10).

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [1], [32] и опирается на полученные выше результаты.

З а м е ч а н и е 5.1. Полученные результаты не зависят от способа решения разностных задач оптимального управления (3.9)-(3.16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.
2. Лионс Ж.-Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972.

3. Лурье К. А., *Оптимальное управление в задачах математической физики*, Наука, М., 1975.
4. Литвинов В. Г., *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике*, Наука, М., 1987.
5. Райтум У. Ё., *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений*, Зинатне, Рига, 1989.
6. Егоров А. И., *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*, Наука, М., 1978.
7. Ишмухаметов А. З., *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления*, ВЦ РАН, М., 1999.
8. Ишмухаметов А. З., *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами*, ВЦ РАН, М., 2001.
9. Потапов М. М., *Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболические уравнения)*, Изд-во МГУ, М., 1985.
10. Лубышев Ф. В., *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БашГУ, Уфа, 1999.
11. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.
12. Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989.
13. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.
14. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.
15. Лубышев Ф. В., “Точность разностных аппроксимаций и регуляризация задач оптимального управления для эллиптического уравнения с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **29:9** (1989), 1431–1444.
16. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **31:1** (1991), 17–30.
17. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления коэффициентами параболических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **33:8** (1993), 1166–1183.
18. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Доклады РАН*, **349:5** (1996), 598–602.
19. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **41:8** (2001), 1148–1164.

20. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.
21. Цурко В. А., “О точности разностных схем для параболических уравнений с разрывным решением”, *Дифференц. уравнения*, **36**:7 (2000), 986–992.
22. Цурко В. А., “Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и решениями”, *Дифференц. уравнения*, **41**:2 (2005), 274–280.
23. Карташов Э. М., *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985.
24. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
25. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
26. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
27. Куфнер А., Фучик Ф., *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988.
28. Гилбарг Д., Трудингер Н., *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
29. Киндерлер Д., Стампакья Г., *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983.
30. Ректорис К., *Вариационные методы в математической физике и технике*, Мир, М., 1985.
31. Браудер Ф. Е., *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными*, Новосибирск, 1963.
32. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

Grid approximation of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions, with offices in the coefficients of the highest derivatives

© F. V. Lubyshev³, M. E. Fairuzov⁴

Abstract. Discusses and examines the mathematical formulation of nonlinear optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions, with offices in the coefficients of the highest derivatives. Built difference approximation of extremal problems, establish estimates of the accuracy of the approximations on the condition and functionality, proved weak convergence of approximations. Held regularization approximations on Tikhonov.

Key Words: the problem of optimal control, semilinear elliptic equations, differential solution method, regularization method.

³ Full professor of Department of Applied Computer Science and Numerical Methods, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.

⁴ Associate Professor of Department of Applied Computer Science and Numerical Methods, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.

УДК 621.383.4, 621.382.2.3

Искажения, возникающие при восстановлении высокочастотных оптических импульсов фотоприемником, изготовленным на основе кристаллического кремния, легированного индием

© Е. В. Никишин¹, С. М. Мурюмин², Е. Е. Пескова³

Аннотация. В статье проведены теоретические исследования искажений восстановленного по фототоку высокочастотного оптического сигнала. Расчеты сделаны для фоторезистора с рекомбинационными центрами индия (In). Используются параметры характерные для кристаллического кремния. Определены условия, при которых частотные и фазовые искажения малы.

Ключевые слова: механизмы рекомбинации, фотопроводимость, кремний, индий, периодическое возбуждение, частотные искажения, фазовые искажения

При освещении резистора (фотодиода) вид отклика на возбуждение, проявляющийся в виде изменения концентрации носителей заряда (электронов и дырок), как правило, не повторяет форму падающего излучения. То есть зависимости интенсивности возбуждающего излучения ($J = J(t)$) и зависимости концентраций неравновесных носителей (КНН) заряда ($\Delta n = \Delta n(t)$, $\Delta p = \Delta p(t)$) представляются разными функциями. В работах [1–4] изложена методика восстановления временной зависимости высокочастотных возбуждающих импульсов по зависимостям тока от времени при подаче постоянного напряжения на фоторезистор. Методика восстановления серии импульсов реализуется, если их средняя длительность τ сравнима или меньше времени жизни основных носителей заряда $\max(\tau_n, \tau_p)$. Кинетика фотопроводимости в этом случае практически не зависит от времен жизни электронов и дырок и определяется в основном зависимостью величины темпа генерации от времени (или интенсивности).

При использовании метода восстановления оптического сигнала возникают различного рода искажения: частотные, фазовые, нелинейные. В работе проведено исследование искажений, возникающих при использовании фотоприемника, изготовленного на основе кристаллического кремния с рекомбинационными центрами индия. Учитывалась межзонная и Оже - рекомбинация. Уравнения для нахождения зависимостей концентраций электронов и дырок имеют вид [5–7]:

$$\frac{dn}{dt} = k\beta(1-R)J(\omega \cdot t) - A(pn - n_i^2) - B_n n(np - n_i^2) - B_p p(np - n_i^2) - N_r \sigma_n (n(1-f) - n_1 f), \quad (1.1)$$

$$\frac{dp}{dt} = k\beta(1-R)J(\omega \cdot t) - A(pn - n_i^2) - B_n n(np - n_i^2) - B_p p(np - n_i^2) - N_r \sigma_p (pf - p_1(1-f)), \quad (1.2)$$

$$\frac{df}{dt} = \sigma_n (n(1-f) - n_1 f) - \sigma_p (pf - p_1(1-f)), \quad (1.3)$$

¹ Доцент кафедры экспериментальной физики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikishin57@mail.ru.

² Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru

³ Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; lizanika@mail.ru.

здесь n_1 и p_1 численно равны концентрации электронов и дырок, когда уровень Ферми совпадает с положением рекомбинационного центра индия в запрещенной зоне; N_r — концентрация рекомбинационных центров индия; σ_p и σ_n — вероятности захвата дырок и электронов примесными центрами индия; f — вероятность нахождения электрона на рекомбинационном центре; A — коэффициент межзонной рекомбинации; B_n, B_p — коэффициенты Оже-рекомбинации.

В работе [5] проведены исследования искажений при различных интенсивностях возбуждающего излучения. В данной работе исследовано влияние концентрации центров индия на искажения оптического импульса восстановленного по электрическому импульсу. Методика расчета аналогична той, которая применялась в работе [5], поэтому здесь не приводится.

Нелинейные искажения, которые связаны с нелинейностью процессов при обработке и передаче сигнала, в нашем случае связаны, в основном, с нелинейными законами рекомбинации электронов и дырок, которые в общем случае достаточно сложны [6–9]. При выполнении неравенства $\max(\tau_n\omega, \tau_p\omega) > 1$ составляет величину менее 1%. Коэффициент нелинейных искажений в этой области частот уменьшается с ростом концентрации центров индия. Таким образом, в области частот, где можно использовать метод восстановления оптического импульса (импульсов) влиянием нелинейных искажений можно пренебречь. Это обусловлено тем, что при больших частотах оптического сигнала система дифференциальных уравнений (1.1–1.3) линеаризуется [2].

При восстановлении формы оптических импульсов амплитуда восстановленного сигнала будет зависеть от частоты, с которой изменяется интенсивность падающего на фотодатчик света. Под коэффициентом, определяющим частотные искажения ($Y(\omega_i)$), будем понимать отношение амплитуды интенсивности восстановленного сигнала для фиксированной частоты ($J(\omega_i)$) к максимальной амплитуде интенсивности восстановленного сигнала ($\max(J(\omega))$) в рабочей области частот ω [5]. Так как в предложенном методе интенсивность пропорциональна производной от плотности тока через фоторезистор ($J(\omega_i) \approx \text{const} \cdot j'_t(\omega_i)$) и $\max(J(\omega) \approx \text{const} \cdot \max(j'_t))$, то для $Y(\omega_i)$ получаем:

$$Y(\omega_i) = \max |j'_t(\omega_i \cdot t)| / \max [j'_t(\omega \cdot t)]. \quad (1.4)$$

При больших частотах функция зависимости интенсивности света от времени отличается от зависимости фототока от времени. В первую очередь это связано с частотными искажениями, во вторую с фазовыми искажениями. При увеличении частоты и неизменной амплитуде интенсивности падающего на фоторезистор света, переменная составляющая которой меняется по гармоническому закону, амплитуда переменной составляющей фототока уменьшается обратно пропорционально частоте. Коэффициенты разложения произвольной периодической функции интенсивности света от времени $c_k(j)$ и соответствующие коэффициенты разложения функции фототока $c_k(j)$ связаны соотношением: $\omega \cdot c_k(j) \approx \text{const} \cdot c_k(J)$.

На рис. 1 представлены зависимости $Y = Y(\omega)$ при различных значениях концентраций рекомбинационных центров. Расчеты приведены в широкой области частот. При увеличении концентрации центров рекомбинации коэффициент частотных искажений для фиксированной частоты уменьшается. При частотах, где выполняется условие $\max(\tau_n\omega, \tau_p\omega) > 1$, $Y(\omega)$ составляет величину менее 1% и не зависит от концентрации рекомбинационных центров индия. Функция $Y = Y(\omega)$ имеет экстремум, что обусловлено вкладом дырочной проводимости, доля которой увеличивается с увеличением частоты. При больших частотах значение Y приближается к единице.

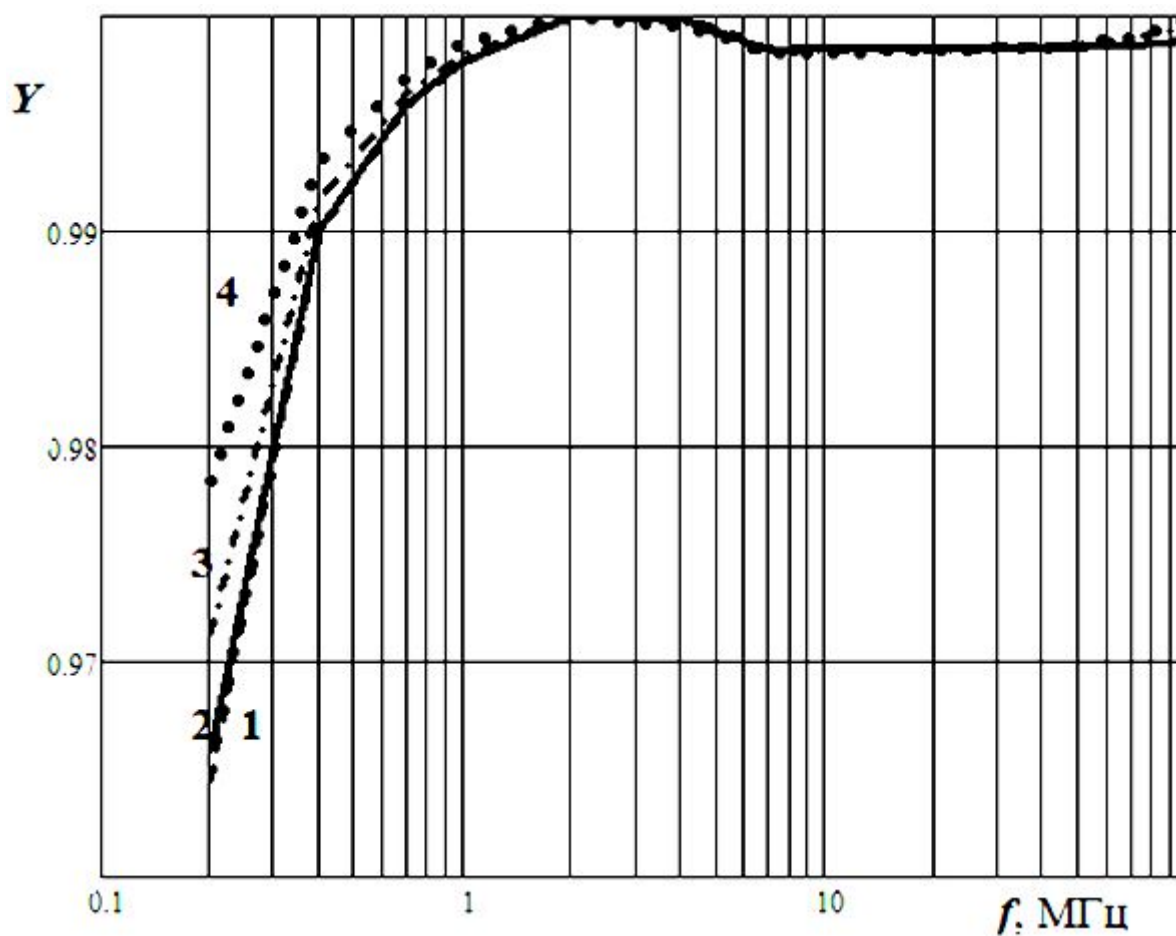


Рис. 1. Зависимости коэффициента частотных искажений от концентрации рекомбинационных центров при $Q = 10^{20} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$, $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$: 1 – $N_a = 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 2 – $N_a = 8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 3 – $N_a = 4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 4 – $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$.

На рис. 2 представлены зависимости сдвига фаз между импульсом возбуждения, переменная составляющая которого меняется по гармоническому закону, и восстановленного, который по форме близок к гармоническому импульсу, что связано с малостью коэффициента нелинейных искажений. Восстановленный импульс отстает по фазе от возбуждающего импульса. Экстремум функции связан с относительным (по сравнению с концентрацией электронов) увеличением концентрации дырок. При больших частотах $\Delta n = \Delta p$. При выполнении неравенства $\max(\tau_n \omega, \tau_p \omega) > 1$, $Y(\omega)$ составляет величину менее 1%. Зависимость сдвига фаз от концентрации рекомбинационных центров индифферентна при малых частотах, где метод не работает. В области рабочих частот ($\max(\tau_n \omega, \tau_p \omega) > 1$) ϕ увеличивается при уменьшении концентрации.

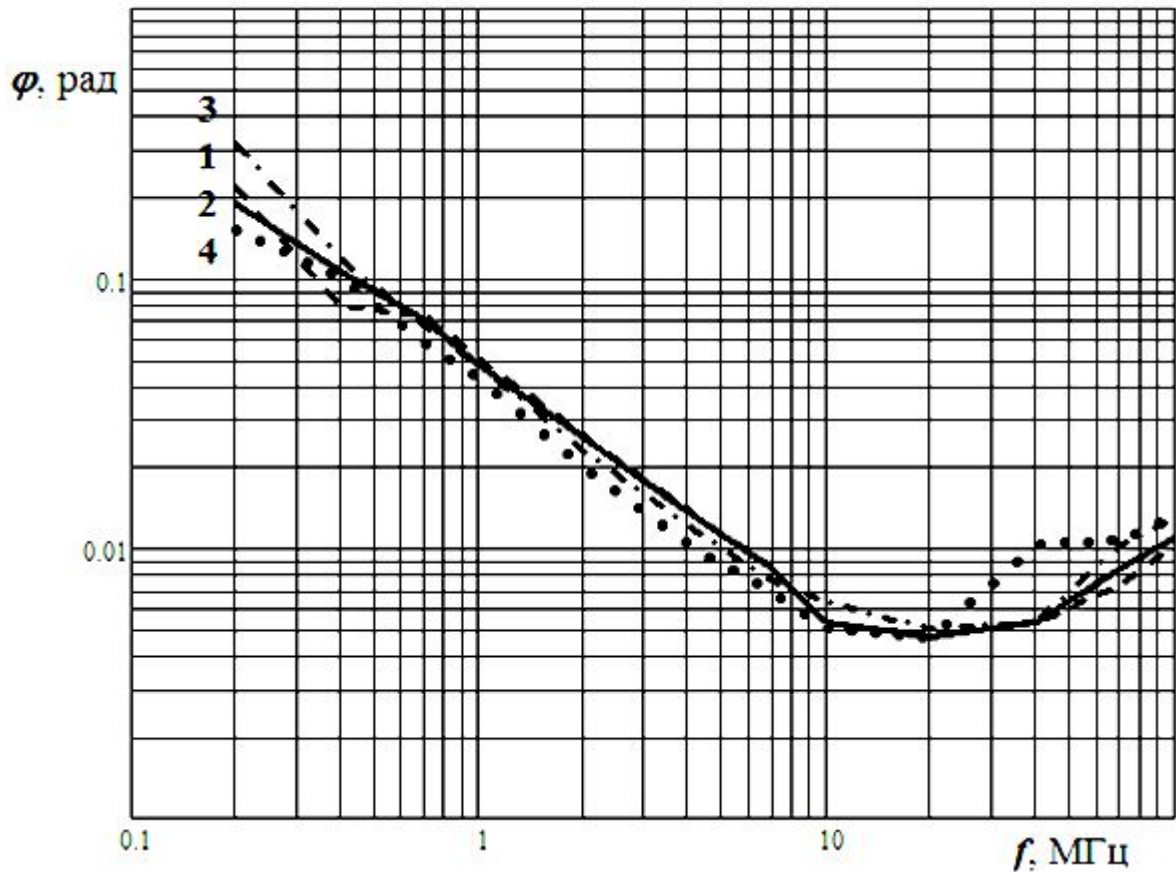


Рис. 2. Зависимости сдвига фаз от концентрации рекомбинационных центров при $Q = 10^{20} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$, $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$: 1 – $N_a = 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 2 – $N_a = 8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 3 – $N_a = 4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 4 – $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$.

Для качественного восстановления зависимости интенсивности света от времени по зависимости фототока от времени необходимо получить достаточно большую глубину амплитудной модуляции фототока [5]. Расчеты показывают, что ее величина практически не зависит от концентрации рекомбинационных центров и по величине достаточна для восстановления оптических сигналов до частот вплоть до 1 ГГц. Глубину амплитудной модуляции фототока уменьшает с увеличением частоты (рис. 3).

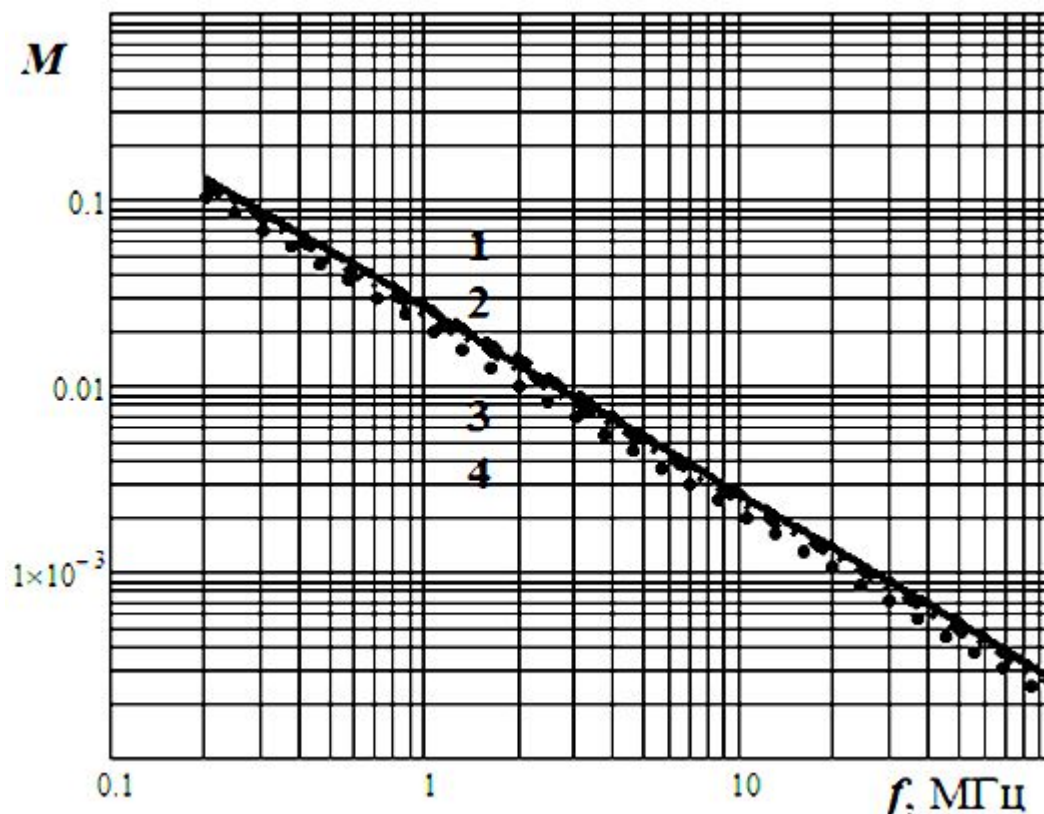


Рис. 3. Зависимости глубины модуляции от концентрации рекомбинационных центров при $Q = 10^{20} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$, $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$: 1 – $N_a = 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 2 – $N_a = 8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 3 – $N_a = 4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$; 4 – $N_a = 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$.

Таким образом, фотодатчик, изготовленный на основе кристаллического кремния с рекомбинационными центрами индия, может быть использован для восстановления периодического оптического сигнала, основная частота и гармоники которого лежат в области частот от 1 МГц до 1 ГГц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мхитарян В. М., Партамян Х. В., “Скоростные фотоприемники импульсного излучения на основе “инерционных” фоторезисторов и фотодиодов”, *ЖТФ*, **52**:9 (1982), 1900–1902.
2. Горюнов В. А., Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Кинетика фотопроводимости при возбуждении высокочастотными импульсами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.*, 2012, № 4, 242–250.
3. Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Фотоэлектрический преобразователь высокочастотного оптического сигнала”, *патент на полезную модель — RUS 132287*, 24.12.2012.
4. Мурюмин С. М., Никишина А. Е., Никишин Е. В., “Использование кремния легированного золотом для определения формы оптического сигнала”, *Журнал Средне-волжского математического общества*, **16**:1 (2014), 140–144.

5. Никишин Е. В., “О границах применимости способа восстановления временной формы модулированных оптических сигналов с частотой выше граничной частоты фоторезистора”, *Физика и техника полупроводников*, **48:11** (2014), 1526–1529.
6. Милнс А., *Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках*, Мир, М., 1977, 568 с.
7. Смит Р., *Полупроводники: пер. с англ.*, Мир, М., 1982, 560 с.
8. Горюнов В. А., Гришаев В. Я., Никишин Е. В., “Об изменении времен жизни носителей заряда при импульсном фотовозбуждении в кремнии с глубокими примесными центрами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2011, № 4, 118–126.
9. Denisov B. N., Nikishin E. V., “Investigations of the Kinetics of Nonequilibrium Carriers in a Semiconductor by the Average Value of the Photoconductivity under Periodic Optical Excitation”, *Semiconductors*, **48:2** (2014), 163–166.

Distortion that occurs when you restore a high-frequency optical pulses (silicon doped with indium)

© E. V. Nikishin⁴, S. M. Muryumin⁵, E. E. Peskova⁶

Abstract. In the article theoretical study of the nonlinear distortion of the restored high frequency optical signal. The calculations made for the photoresistor with recombination centers indium (In). Used parameters typical for crystalline silicon. Found conditions under which the frequency and phase distortion is small.

Key Words: mechanisms of recombination, photoconductivity, silicon, indium, periodic excitation, frequency distortion, phase distortion

⁴ Associate Professor in the Department of experimental physics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; nikishin57@mail.ru.

⁵ Associate Professor of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru

⁶ Assistant Professor of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; lizanika@mail.ru.

УДК 519.624

Регуляризованный непрерывный метод второго порядка для аккретивных включений

© И. П. Рязанцева¹

Аннотация. Рассмотрены уравнения с многозначными аккретивными операторами в банаховом пространстве, решения которых понимаются в смысле включения. С помощью резольвенты эти уравнения сводятся к уравнениям с однозначными операторами. Для построенных задач предлагается регуляризованный непрерывный метод второго порядка, в некотором классе банаховых пространств получены достаточные условия его сильной сходимости.

Ключевые слова: аккретивный оператор, дуальное отображение, резольвента, непрерывный метод, сходимость.

1. Основные предположения, вспомогательные утверждения и постановка задачи

Пусть X – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, X^* – его сопряженное, $\langle x, y \rangle$ – значение линейного функционала $x \in X^*$ на элементе $y \in X$, $J^s : X \rightarrow X^*$ – дуальное отображение в X с масштабной функцией $\mu(t) = t^{s-1}$, $s \geq 2$, при $s = 2$ имеем нормализованное дуальное отображение $J : X \rightarrow X^*$ (см. [1], с.65).

Предположим, что оператор $A : X \rightarrow X$ обладает свойством обратной сильной псевдоаккретивности (см. [2])

$$\langle J^s(u - v), Au - Av \rangle \geq M \|Au - Av\|^s \quad \forall u, v \in X, \quad M > 0, \quad (1.1)$$

а $B : X \rightarrow 2^X$ – m -аккретивное отображение, т.е. $R(\gamma B + E) = X$ при всех $\gamma > 0$, $E : X \rightarrow X$ – единичный оператор.

Рассмотрим в X уравнение

$$Ax + Bx = f \quad (1.2)$$

с многозначным оператором, решение которого понимается в смысле включения

$$f - Ax \in Bx.$$

Пусть (1.2) имеет непустое множество решений N . В наших предположениях относительно свойств операторов A и B задача решения уравнения (1.2) является некорректной, поэтому для её решения необходимо использовать методы регуляризации. В настоящей заметке для решения (1.2) строится непрерывный метод регуляризации второго порядка, устанавливаются достаточные условия его сильной сходимости. Методы первого порядка для (1.2) изучались в [2]. Интерес к методам второго порядка вызван возможностью полнее учесть в начальных условиях априорную информацию о искомом решении. Для уравнений с однозначными аккретивными операторами регуляризованные методы второго порядка изучались в [3], [4].

Предположим, что оператор J^s обладает свойством

$$\|J^s u - J^s v\| \leq C(R) \|u - v\|^\sigma, \quad \sigma \in (0, 1], \quad \|u\| \leq R, \quad \|v\| \leq R, \quad (1.3)$$

¹ Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@apmath.ru

где $C(R)$ – неубывающая неотрицательная функция при $R \geq 0$.

Отметим, что из (1.1) следует аккретивность оператора A и справедливость для него условия Липшица с постоянной $L = 1/M$, т. е.

$$\|Au - Av\| \leq \frac{1}{M} \|u - v\| \quad \forall u, v \in X. \quad (1.4)$$

Таким образом, оператор A в наших условиях непрерывен.

В [2], [5] на основании (1) и (1.3) установлено неравенство

$$\langle J^s(v - w), Au - Av \rangle \leq \frac{C^m(R)}{\tilde{M}} \|u - w\|^{m\sigma}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{m} = 1, \quad \sigma \in (0, 1], \quad (1.5)$$

где $R \geq \max\{\|v - w\|, \|v - u\|\}$, $\tilde{M} = s^{1/(s-1)}M$.

Вопрос о справедливости (1.3) исследован в [5], где в пространствах Лебега l^p , $L^p(G)$ (G – ограниченная измеримая область в R^n) установлены неравенства вида (1.3) при определённых согласованиях s и p .

Исследование сходимости непрерывного метода регуляризации опирается на установленную сходимость операторного метода регуляризации, который для (1.2) определяется следующим уравнением [6]

$$Ax + Bx + \alpha(t)x = f, \quad (1.6)$$

где $\alpha(t)$ – положительная функция при $t \geq t_0 \geq 0$, причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0. \quad (1.7)$$

В наших предположениях в [7] доказана однозначная разрешимость (1.6) при всех $t \geq t_0$, т.е. существует единственный элемент $x_\alpha(t) \in X$ такой, что

$$f - Ax_\alpha(t) - \alpha(t)x_\alpha(t) \in Bx_\alpha(t) \quad \forall t \geq 0$$

или

$$Ax_\alpha(t) + y_\alpha(t) + \alpha(t)x_\alpha(t) = f, \quad y_\alpha(t) \in Bx_\alpha(t), \quad (1.8)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_\alpha(t) = x^*, \quad (1.9)$$

здесь $x^* \in N$ и однозначно определяется неравенством

$$\langle J^s(x^* - x), x^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in N. \quad (1.10)$$

Далее считаем, что условия, при которых справедливо (1.9), выполнены.

2. Непрерывный метод регуляризации второго порядка

Поскольку всякий метод регуляризации должен быть устойчив относительно возмущений данных решаемой задачи, то считаем, что вместо A , B и f известны их приближения соответственно $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ при $t \geq t_0 \geq 0$, которые при каждом $t \geq t_0$ обладают следующими свойствами :

(I) величины $A(t)u$, $f(t)$ непрерывны по t при каждом фиксированном $u \in X$;

(II) оператор $A(t) : X \rightarrow X$ обладает свойством обратной сильной псевдоаккретивности, т. е.

$$\langle J^s(u - v), A(t)u - A(t)v \rangle \geq M^{s-1} \|A(t)u - A(t)v\|^s \quad \forall u, v \in X, s \geq 2, M > 0, \quad (2.1)$$

и

$$\|A(t)u - Au\| \leq h(t)p(\|u\|) \quad \forall u \in X; \quad (2.2)$$

(III) $B(t) : X \rightarrow 2^X$ – m -аккретивный оператор, оператор $B : X \rightarrow 2^X$ ограниченный и m -аккретивный,

$$r_X(Bu, B(t)u) \leq \tilde{h}(t)q(\|u\|) \quad \forall u \in X, \quad (2.3)$$

кроме того, семейство операторов $\{B(t)\}$ обладает свойством: для любого фиксированного элемента $v \in X$ и любого числа $\epsilon > 0$ найдётся число $\tilde{\delta}(\epsilon, v) > 0$ такое, что при $|t_1 - t_2| < \tilde{\delta}$ для любого элемента $y \in B(t_1)v$ существует элемент $\tilde{y} \in B(t_2)v$ такой, что $\|y - \tilde{y}\| < \epsilon$;

(IV) $\|f(t) - f\| \leq \delta(t)$.

Здесь $r_X(M_1, M_2)$ – хаусдорфово расстояние между множествами M_1 и M_2 из X (см. [1], с. 18), $p(\theta)$ и $q(\theta)$ – ограниченные функции, т. е. переводящие ограниченные множества в ограниченные, $\theta \geq 0$, $h(t), \tilde{h}(t), \delta(t)$ – неотрицательные функции, являющиеся бесконечно малыми при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что из (2.1) следует при каждом $t \geq t_0$ аккретивность оператора $A(t)$ и справедливость для него условия Липшица (сравни с (1.4))

$$\|A(t)u - A(t)v\| \leq \frac{1}{M} \|u - v\| \quad \forall u, v \in X, \quad (2.4)$$

и предположение (2.2) позволяет получить из (2.1) и (2.4) свойства (1.1) и (1.4) оператора A . Кроме того, из (2.2), (2.3) и ограниченности отображений A и B вытекает ограниченность в совокупности семейств операторов $\{A(t)\}$ и $\{B(t)\}$.

Пусть $I_B^{\gamma(t)} = (\gamma(t)B + E)^{-1}$ – резольвента оператора B , $\gamma(t)$ – положительная дважды дифференцируемая убывающая выпуклая вниз при $t \geq t_0$ функция,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0. \quad (2.5)$$

Тогда от (1.8) придем к уравнению

$$x_\alpha(t) = I_B^{\gamma(t)}(x_\alpha(t) - \gamma(t)[Ax_\alpha(t) + \alpha(t)x_\alpha(t) - f])$$

с однозначными операторами.

Далее функцию $\alpha(t)$ дополнительно считаем дважды дифференцируемой убывающей и выпуклой вниз на $[t_0, +\infty)$. Очевидно, что свойства функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ сохраняются и для функции $\beta(t) = \alpha(t)\gamma(t)$ при $t \geq t_0$.

Непрерывный метод второго порядка для последнего уравнения при приближённом задании данных имеет вид следующей задачи Коши (см., например, [8])

$$u''(t) + \mu u'(t) + u(t) = I_B^{\gamma(t)}(u(t) - \gamma(t)[A(t)u(t) + \alpha(t)u(t) - f(t)], \quad \mu > 0, \quad (2.6)$$

$$u(t_0) = u_0 \in X, \quad u'(t_0) = u'_0 \in X, \quad (2.7)$$

здесь и далее $I_B^{\gamma(t)} = (\gamma(t)B(t) + E)^{-1}$.

Однозначная разрешимость этой задачи в классе функций $C^2[t_0, \infty)$ устанавливается в наших условиях теми же рассуждениями, что и в [9], [10] с применением результатов [11], с. 399 – 401.

Исследуем стабилизацию $u(t)$ при $t \rightarrow \infty$ к решению x^* уравнения (1.2), при этом будем использовать идеи из [12], гл. 2, §10.

Пусть $x_\alpha(\tau)$ – решение (1.6) при $t = \tau$, где τ – некоторое действительное число. Значит, согласно (1.8), верно равенство

$$Ax_\alpha(\tau) + y_\alpha(\tau) + \alpha(\tau)x_\alpha(\tau) = f. \quad (2.8)$$

Определим функцию

$$r(t, \tau) = \|u(t) - x_\alpha(\tau)\|^s/s, \quad (2.9)$$

тогда

$$r'_t(t, \tau) = \langle J^s(u(t) - x_\alpha(\tau)), u'(t) \rangle, \quad (2.10)$$

$$r''_{tt}(t, \tau) = \langle J^s(u(t) - x_\alpha(\tau)), u''(t) \rangle + \left\langle \frac{dJ^s(u(t) - x_\alpha(\tau))}{dt}, u'(t) \right\rangle. \quad (2.11)$$

От (2.6) перейдем к эквивалентному уравнению

$$u''(t) + \mu u'(t) + \gamma(t)[B(t)(u''(t) + \mu u'(t) + u(t)) + A(t)u(t) + \alpha(t)u(t) - f(t)] = 0.$$

Следовательно, при каждом $t \geq t_0$ найдётся элемент $\xi(t) \in B(t)(u''(t) + \mu u'(t) + u(t))$ такой, что справедливо равенство

$$u''(t) + \mu u'(t) + \gamma(t)[\xi(t) + A(t)u(t) + \alpha(t)u(t) - f(t)] = 0. \quad (2.12)$$

Теперь, введя обозначение $v(t) = u''(t) + \mu u'(t) + u(t)$, из (2.12) и (2.8), умноженном на $\gamma(t)$, имеем

$$\begin{aligned} & \langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), u''(t) + \mu u'(t) \rangle + \gamma(t)[\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), \xi(t) - y_\alpha(\tau) \rangle + \\ & + \langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), A(t)u(t) - Ax_\alpha(\tau) \rangle] + \beta(\tau)\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), u(t) - x_\alpha(\tau) \rangle = \\ & = \alpha(\tau)[\gamma(t) - \gamma(\tau)]\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), x_\alpha(\tau) \rangle + \\ & + [\beta(\tau) - \beta(t)]\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), u(t) \rangle + \gamma(t)\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), f(t) - f \rangle. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для оценки слагаемых, входящих в (2.13), будем использовать свойство (1.3) дуального отображения J^s . Поскольку оно верно на ограниченных множествах, то нам необходима ограниченность $\|x_\alpha(\tau)\|, \|u(t)\|, \|u'(t)\|, \|u''(t)\|$ при $t \geq t_0, \tau \geq t_0$. Прежде всего отметим ограниченность $\|x_\alpha(\tau)\|$, вытекающую из (1.9). Для установления ограниченности остальных функций сделаем дополнительное предположение (сравни с [13]).

Пусть для некоторого $R > 0$ и любой функции $y(t) \in C^2[t_0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mu \|y'(t)\|^2 - \langle Jy(t), y'(t) \rangle + \langle Jy'(t), y(t) - I_B^{\gamma(t)}(y(t) - \gamma(t)[A(t)y(t) + \alpha(t)y(t) - f(t)]) \rangle & \geq 0 \\ \text{при } \|y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2 & \geq R_0^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Теперь, подобно [13], используя (1.8), (2.2), (IV), (2.5), (2.6), (2.14) и нерастяжимость резольвенты, убеждаемся в существовании положительной постоянной R_1 такой, что

$$\|x_\alpha(\tau)\| \leq R_1, \quad \|w(t)\| \leq R_1, \quad \|w'(t)\| \leq R_2, \quad \|w''(t)\| \leq R_3 \quad \forall \tau \geq t_0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.15)$$

Следовательно, из (2.12) вытекает неравенство

$$\|u''(t) + \mu u'(t)\| \leq a_1 \gamma(t), \quad a_1 > 0, \quad t \geq t_0. \quad (2.16)$$

Всюду далее a_k – положительные постоянные. Теперь наша цель состоит в получении из (2.13) дифференциального неравенства второго порядка относительно функции $r(t, \tau)$ при $t \leq \tau$, $t, \tau \in [t_0, +\infty)$. Для этого последовательно оценим слагаемые, входящие в (2.13).

Подобно [13] с учётом (2.10), (2.11) и монотонности оператора J^s придём к неравенству

$$\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), u''(t) + \mu u'(t) \rangle \geq r''_{tt}(t, \tau) + \mu r'_t(t, \tau) - \left\langle \frac{d(J^s(u(t) - x_\alpha(\tau)))}{dt}, u'(t) \right\rangle. \quad (2.17)$$

В силу предположения (2.3) для элемента $y_\alpha(\tau) \in Bx_\alpha(\tau)$ найдётся элемент $z_\alpha(t, \tau) \in B(t)x_\alpha(\tau)$ такой, что

$$\|z_\alpha(t, \tau) - y_\alpha(\tau)\| \leq \tilde{h}(t)q(\|x_\alpha(\tau)\|) \leq a_2 \tilde{h}(t), \quad t, \tau \geq t_0.$$

При записи последнего неравенства учтены свойства функции $q(s)$ и ограниченность $\|x_\alpha(\tau)\|$ при $\tau \geq t_0$. Теперь с учетом аккретивности оператора $B(t)$ и (2.15) имеем

$$\langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), \xi(t) - y_\alpha(\tau) \rangle \geq -a_2 \tilde{h}(t). \quad (2.18)$$

Свойство (1.5) оператора A , условие (2.2) и доказанные неравенства (2.15) обеспечивают справедливость следующих соотношений

$$\begin{aligned} & \langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), A(t)u(t) - Ax_\alpha(\tau) \rangle = \langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), [A(t)u(t) - Au(t)] + \\ & + [Au(t) - Ax_\alpha(\tau)] \rangle \geq -a_3 [h(t) + \|u''(t) + \mu u'(t)\|^{m\sigma}], \\ & \frac{1}{m} + \frac{1}{s} = 1, \quad \sigma \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Далее, используя условие (1.3), определение (2.9) величины $r(t, \tau)$, числовое неравенство

$$ab \leq \frac{a^m}{m} + \frac{b^s}{s}, \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{s} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (2.20)$$

и (2.15), имеем

$$\begin{aligned} & \langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)), u(t) - x_\alpha(\tau) \rangle = \langle J^s(v(t) - x_\alpha(\tau)) - J^s(u(t) - x_\alpha(\tau)), u(t) - x_\alpha(\tau) \rangle + \\ & + \langle J^s(u(t) - x_\alpha(\tau)), u(t) - x_\alpha(\tau) \rangle \geq \|u(t) - x_\alpha(\tau)\|^s - \\ & - a_4 \|u''(t) + \mu u'(t)\|^\sigma \|u(t) - x_\alpha(\tau)\| \geq (s-1)r(t, \tau) - \\ & - a_5 \|u''(t) + \mu u'(t)\|^{m\sigma}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Теперь неравенства (см. [12], с. 266)

$$\beta(t) - \beta(\tau) \leq \beta'(t)(t - \tau), \quad \gamma(t) - \gamma(\tau) \leq \gamma'(t)(t - \tau), \quad t \leq \tau,$$

условия (1.7), (2.5), (IV) и оценки (2.15) – (2.19) и (2.21) позволяют от (2.13) перейти к следующему неравенству при $t \leq \tau$

$$\begin{aligned} & r''_{tt}(t, \tau) + \mu r'_t(t, \tau) + (s-1)\beta(\tau)r(t, \tau) \leq \left\langle \frac{d(J^s(u(t) - x_\alpha(\tau)))}{dt}, u'(t) \right\rangle + \\ & + a_6 \left\{ \gamma(t) \left[(\gamma(t))^{m\sigma} + \delta(t) + h(t) + \tilde{h}(t) \right] + \right. \\ & \left. + \beta'(t)(t - \tau) + \alpha(t)\gamma'(t)(t - \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Чтобы установить оценку сверху для первого слагаемого в правой части последнего неравенства, сделаем дополнительное предположение относительно геометрии пространства X .

Пусть справедливо неравенство

$$\left\| \frac{dJ^s(u(t) - x_\alpha(\tau))}{dt} \right\| \leq \lambda \|u'(t)\|, \quad \lambda > 0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.23)$$

Следовательно, получение указанной оценки свелось к нахождению оценки сверху для $\|u'(t)\|^2$ при $t \geq t_0$.

Вычисляя значение линейного функционала $Ju'(t)$ на элементах обеих частей равенства (2.12) и используя ограниченность в совокупности каждого из семейств операторов $\{A(t)\}$ и $\{B(t)\}$, предположения (1.7), (IV) и доказанные оценки (2.15), приходим к неравенству

$$\langle Ju'(t), u''(t) \rangle + \mu \langle Ju'(t), u'(t) \rangle \leq a_7 \gamma(t) \|u'(t)\|.$$

Отсюда (см. [13]) имеем оценку

$$\|u'(t)\|^2 \leq a_8 [\exp(-2\mu t) + \gamma^2(t)] \quad \forall t \geq t_0.$$

Теперь неравенство (2.22) перепишем в виде

$$r''_{tt}(t, \tau) + \mu r'_t(t, \tau) + (s-1)\beta(\tau)r(t, \tau) \leq a_9 \{ \gamma(t) [\delta(t) + h(t) + \tilde{h}(t)] + \beta'(t)(t-\tau) + [\gamma(t)]^\eta + \exp(-2\mu t) \} = a_9 \Gamma(t, \tau), \quad t \geq \tau, \quad \eta = \max\{2, 1 + m\sigma\}.$$

Отсюда получаем оценку (см. [13], [14])

$$r(t, \tau) \leq a_{10} \left[\exp(k_2(\tau)t) + \int_{t_0}^t \Gamma(\xi, \tau) \exp(-k_2(\tau)(\xi - \tau)) d\xi \right], \quad t \leq \tau,$$

здесь

$$k_2(\tau) = -\frac{\beta(\tau)(s-1)}{\mu} + o(\beta(\tau)).$$

При $t = \tau$ последнее неравенство принимает вид

$$r(\tau, \tau) \leq a_{10} \left[\exp(k_2(\tau)\tau) + \int_{t_0}^{\tau} \Gamma(\xi, \tau) \exp(-k_2(\tau)(\xi - \tau)) d\xi \right].$$

Отсюда, используя правило Лопиталья, делаем вывод о том, что $r(\tau, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, если $(t\beta(t))' > 0$ хотя бы при достаточно больших t ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta'(t)}{\beta^2(t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)[\delta(t) + h(t) + \tilde{h}(t)]}{(t\beta(t))'} = 0, \quad (2.24)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma^\eta(t)}{(t\beta(t))'} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta'(t)}{(t\beta(t))'' + [(t\beta(t))']^2} = 0. \quad (2.25)$$

Теперь с учётом (1.9) приходим к утверждению.

Теорема 2.1. Пусть X – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, дуальное отображение J^s с $s \geq 2$ обладает свойством (1.3), $B : X \rightarrow 2^X$ – m -аккретивный ограниченный оператор, $A : X \rightarrow X$ – однозначное отображение, уравнение (1.2) имеет непустое множество решений N , приближённые данные (1.2) $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ при $t \geq t_0$ обладают свойствами (I) – (IV). Положительные дважды дифференцируемые убывающие выпуклые вниз функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ удовлетворяют условиям (1.7), (2.5). Тогда задача Коши (2.6), (2.7) имеет единственное решение $u(t) \in C^2[t_0, \infty)$. Пусть имеют место (2.14), (2.23), функция $\beta(t) = \alpha(t)\gamma(t)$ такова, что $(t\beta(t))' > 0$, хотя бы при достаточно больших t , и обладает свойствами (2.24), (2.25), тогда при любых u_0 и u'_0 из X $u(t) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$, где x^* – решение уравнения (1.2), определяемое неравенством (1.10).

Нетрудно убедиться, что при положительных α , γ , δ , h , \tilde{h} функции $\alpha(t) = t^{-\alpha}$, $\gamma(t) = t^{-\gamma}$ (т.е. $\beta(t) = t^{-(\alpha+\gamma)}$), $\delta(t) = t^{-\delta}$, $h(t) = t^{-h}$, $\tilde{h}(t) = t^{-\tilde{h}}$ при $0 < \alpha < \max\{\delta, h, \tilde{h}\}$, $\alpha < \gamma(\eta - 1)$, $\alpha + \gamma < 1$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Отметим также, что для функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ степенного типа второе равенство в (2.24) принимает вид классического достаточного условия сходимости операторного метода регуляризации

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta(t) + h(t) + \tilde{h}(t)}{\alpha(t)} = 0,$$

а для функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ экспоненциального типа $\alpha(t) = \exp(-\alpha t)$, $\gamma(t) = \exp(-\gamma t)$ нарушается первое предельное равенство в (2.24).

Замечание 2.1. Поясним, как установлено достаточное условие ограниченности $w(t)$ и $w'(t)$ на $[t_0, \infty)$ в форме (2.14). Легко проверить, что неравенство

$$\langle Jy(t), C(t)y(t) - f(t) \rangle \geq 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{при} \quad \|y(t)\| \geq r_0 > 0, \quad C(t) : X \rightarrow X, \quad (2.26)$$

обеспечивает ограниченность на $[t_0, \infty)$ решения дифференциального уравнения

$$y'(t) + C(t)y(t) = f(t). \quad (2.27)$$

Чтобы использовать этот факт, от уравнения (2.6) был сделан переход к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, для которой условие типа (2.26) в пространстве $X \times X$ приняло вид (2.14). Кроме того, (2.26) есть одно из достаточных условий разрешимости уравнения $C(t)x = f(t)$ при $t \geq t_0$ (см. [1], с.158).

Уравнения с многозначными аккретивными операторами изучались многочисленными авторами (см., например, [15], [16] и приведённую там библиографию).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рязанцева И.П., *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, НГТУ, Нижний Новгород, 2008.
2. Рязанцева И.П., “Методы регуляризации первого порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **54**:11 (2014), 1711–1723..

3. Рязанцева И.П., Бубнова О.Ю., “Непрерывный метод второго порядка для нелинейных аккретивных уравнений в банаховом пространстве”, *Труды Средневолжского математического общества*, **3 - 4:6** (2002), 327–334..
4. Бубнова О.Ю., “Методы итеративной регуляризации второго порядка для нелинейных аккретивных уравнений в банаховом пространстве”, *Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 2001, № 2(24), 219–228.
5. Рязанцева И.П., “Непрерывный метод первого порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы девятой Всероссийской конференции*, 2012, 321–326.
6. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.
7. Нгуен Быонг, Нгуен Тхи Хонг Фыонг, “Методы регуляризации для нелинейных некорректных уравнений, содержащих m -аккретивные отображения в банаховом пространстве”, *Известия вузов. Математика*, 2013, № 2, 67–74..
8. Антипин А. С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем*, 1989, 5 - 43.
9. Рязанцева И.П., “Непрерывный метод первого порядка для смешанных вариационных неравенств”, *Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы восьмой Всероссийской конференции*, 2010, 373 - 379.
10. Рязанцева И.П., “О непрерывных методах первого порядка и их регуляризованных вариантах для смешанных вариационных неравенств”, *Дифференциальные уравнения*, **48:7** (2012), 1020–1032.
11. Треногин В.А., *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980.
12. Васильев Ф.П., *Методы решения экстремальных задач*, Наука, Москва, 1981.
13. Рязанцева И.П., “Методы второго порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **50:9** (2014), 1264–1275.
14. Рязанцева И.П., “Непрерывный метод решения задач условной минимизации”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **39:5** (1999), 734–742..
15. Morales C.H., “Surjectivity theorems for multi-valued mappings of accretive type”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **26** (1985), 397 – 413.
16. He X., “On ϕ -strongly accretive mappings and some set-valued variational problems”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **227** (2003), 504 – 511.

Second-order regularized continuous method for accretive inclusions

© I. P. Ryazantseva²

Abstract. We consider equations with set-valued accretive operators in Banach space, whose solutions are understood in the sense of inclusion. By using the resolvent, we reduce these equations to equations with single-valued operators. For the constructed problems, we suggest a regularized continuous method and obtain sufficient conditions for their strong convergence in some class of Banach spaces.

Key Words: accretive operator, duality mapping, resolvent, continuous method, convergence

² Professor of Applied Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhnii Novgorod; lryazantseva@aplmath.ru

УДК 517.9

Асимптотическое равновесие и ограниченность решений нелинейных дифференциальных уравнений

© Д. В. Пашуткин¹

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы асимптотического поведения решений некоторого класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений. На базе методов, предложенных в [1], получены новые классы уравнений, имеющих равномерно ограниченные решения и обладающих свойством асимптотического равновесия

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, асимптотическое равновесие, равномерная ограниченность решений

1. Введение

Среди задач теории асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений важными являются задачи обнаружения свойств равномерной ограниченности решений и существования асимптотического равновесия [1]. Связь этих задач друг с другом проявляется прежде всего в методах исследования: хотя равномерная ограниченность и не является необходимым условием асимптотического равновесия, широкий класс уравнений, обладающих с этим свойством, удается получить как подкласс уравнений с равномерно ограниченными решениями [1].

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.1)$$

где $f \in C([T, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Введём обозначения:

$\|\cdot\|$ – произвольная норма в \mathbb{R}^n .

$\|\cdot\|_C$ – равномерная норма в пространстве непрерывных функций.

$x(t : t_0, x_0)$ – решения задачи Коши системы (1.1) с начальными условиями (t_0, x_0) .

О п р е д е л е н и е 1.1. [2] Если для любого $C_1 > 0$ существует $C_2 \in \mathbb{R}$ такое, что для решений (1.1) выполнено неравенство

$$\|x(t : t_0, x_0)\| \leq C_2 < \infty$$

при всех $t_0 \geq T$, $t \geq t_0$, $\|x_0\| \leq C_2$, то будем говорить, что решения (1.1) равномерно ограничены.

О п р е д е л е н и е 1.2. [1] Будем говорить, что система (1.1) обладает свойством асимптотического равновесия, если любое её решение бесконечно продолжимо вправо. Любое решение (1.1) $x(t)$ имеет предел при $t \rightarrow +\infty$ и для любого $C \in \mathbb{R}^n$ существует решение $x(t)$ такое, что $x(t) \rightarrow C$ при $t \rightarrow +\infty$.

Следуя [1, 2, 3], для исследования поведения решений (1.1) при $t \rightarrow +\infty$ оценим норму правой части $f(t, x)$:

$$\|f(t, x)\| \leq \lambda(t, \|x\|). \quad (1.2)$$

¹ Руководитель отдела, ГК АТОЛ

На основе анализа решений вспомогательного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z), \quad z \geq 0, \quad t \geq T. \quad (1.3)$$

делаются выводы об асимптотических свойствах решений (1.1).

В работах [2, 3] в функция λ имеет вид

$$\lambda(t, \alpha) = \varphi(t)\Psi(\alpha), \quad (1.4)$$

т.е. "разделена" относительно аргументов. На Ψ накладывается условие

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{\Psi(\alpha)} d\alpha = +\infty, \quad (1.5)$$

ограничивающее скорость её роста при $\alpha \rightarrow +\infty$. Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию:

$$\int_T^{+\infty} \varphi(s) ds = c < +\infty. \quad (1.6)$$

В этом случае решения системы (1.1) равномерно ограничены и она обладает свойством асимптотического равновесия.

В [1] даются условия равномерной ограниченности и асимптотического равновесия системы (1.1) для функции λ общего вида. Это позволяет рассматривать системы уравнений с существенными нелинейностями, когда представление вида (1.4) при выполнении условий (1.5), (1.6) невозможно.

Для иллюстрации характера условий, накладываемых на λ , рассмотрим следующий простой пример:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{x}{1+|x| \operatorname{arctg} t}, \quad (1.7)$$

где $t \in [0, +\infty)$. Оценим модуль правой части функцией λ :

$$\left| \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{x}{1+|x| \operatorname{arctg} t} \right| \leq \lambda(t, |x|).$$

Выбрав в качестве $\lambda(t, \alpha) = \frac{1}{1+t^2} \alpha$, легко убеждаемся, что решения уравнения равномерно ограничены и оно обладает свойством асимптотического равновесия ([2, 3]).

Попытаемся оценить правую часть более точно. Положим

$$\lambda(t, \alpha) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha \operatorname{arctg} t} \quad (1.8)$$

Результаты [2, 3] при такой оценке неприменимы в принципе. Но результаты [1] позволяют исследовать уравнения и с оценкой правой части такого типа.

Например, на вопрос об ограниченности решений в этом случае дает ответ следующая теорема (в обозначениях [1] Теорема 1.2.2).

Т е о р е м а 1.1. ([1, с.26]) Пусть:

1) Интеграл

$$J(\alpha) = \int_T^{+\infty} \lambda(s, \alpha) ds < +\infty$$

существует $\forall \alpha \in [0, +\infty)$ и $\lambda(t, \alpha_1) \leq \lambda(t, \alpha_2)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

2) При некотором $a \geq 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty.$$

3) Функция

$$q(t, \alpha) = \int_{t_0}^t \frac{\lambda(s, \alpha)}{J(\alpha)} ds$$

имеет непрерывную частную производную $q'_\alpha(t, \alpha) \geq 0$.

Тогда решения (1.1) равномерно ограничены, т.е.

$$\|x(t : t_0, y_0)\| \leq c(r) < +\infty, \|x_0\| \leq r, t \geq t_0, t_0 \geq T.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Показывается, что функция

$$V(t, z) = e^{-q(t, z)} \int_a^z \frac{d\alpha}{J(\alpha)}$$

удовлетворяет условиям критерия Мизохаты-Ямагути [2] для уравнения (1.3), откуда вытекает равномерная ограниченность его решений.

Так как для решения системы (1.1) $x(t)$

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \lambda(s, \|x(s)\|) ds,$$

то на основании теоремы об интегральных неравенствах [4]

$$\|x(t)\| \leq z(t), \|x_0\| \leq z_0, z(t) = z_0 + \int_{t_0}^t \lambda(s, z(s)) ds, t_0 \leq t < +\infty.$$

Откуда и вытекает утверждение теоремы.

Доказательство закончено.

Для функции λ вида (1.8) получаем:

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha \operatorname{arctg} s} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\alpha + 1\right);$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{\pi}{2}\alpha + 1\right)} = +\infty;$$

$$q(t, \alpha) = \frac{\ln(\alpha \operatorname{arctg} t + 1)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}\alpha + 1\right)};$$

$$q'(t, \alpha) \geq 0.$$

Функция λ не убывает по второму аргументу. Откуда получаем тот же вывод о равномерной ограниченности решений уравнения (1.7).

Несколько изменим правую часть (1.7) и рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(1+t)^2} \cdot \frac{x}{1+|x|/(1+t)}. \quad (1.9)$$

Снова оценим правую часть функцией λ ,

$$\left| \frac{1}{(1+t)^2} \cdot \frac{x}{1+|x|/(1+t)} \right| \leq \lambda(t, |x|).$$

Если в качестве λ выбрать

$$\lambda(t, \alpha) = \frac{1}{(1+t)^2} \alpha,$$

то получим, что решения уравнения равномерно ограничены.

Но если снова уточнить оценку правой части (1.1), выбрать

$$\lambda(t, \alpha) = \frac{1}{(1+t)^2} \frac{\alpha}{\alpha/(1+t) + 1} \tag{1.10}$$

и попытаться воспользоваться теоремой 1.1., то обнаружится, что её условия не выполняются.

Действительно,

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lambda(s, \alpha) ds = \ln(\alpha + 1) < +\infty,$$

$\alpha \in [0, +\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty.$$

Функция λ возрастает по второй переменной. Осталось проверить последнее условие. Рассмотрим функцию:

$$q(t, \alpha) = \int_{t_0}^t \frac{\lambda(s, \alpha)}{J(\alpha)} ds = - \frac{\ln(\alpha/(t+1) + 1) - \ln(\alpha/(t_0+1) + 1)}{\ln(\alpha + 1)}.$$

Согласно последнему условию эта функция должна иметь неотрицательную частную производную по α . Однако здесь это условие не выполняется: всегда можно подобрать достаточно большое α , при котором $q'_\alpha(t, \alpha) < 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} q'_\alpha(2t_0, \alpha) &= \frac{1}{\ln(\alpha + 1)} \left(\frac{\ln(\alpha/(2t_0 + 1) + 1) - \ln(\alpha/(t_0 + 1) + 1)}{\ln(\alpha + 1)(\alpha + 1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{a + 2t_0 + 1} - \frac{1}{a + t_0 + 1} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\ln(\alpha + 1)} \left(\frac{\ln((\alpha/(2t_0 + 1) + 1)/(\alpha/(t_0 + 1) + 1))}{\ln(\alpha + 1)(\alpha + 1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_0}{(a + 2t_0 + 1)(a + t_0 + 1)} \right). \end{aligned}$$

Так как $\ln((\alpha/(2t_0 + 1) + 1)/(\alpha/(t_0 + 1) + 1)) \rightarrow -\ln 2$ при $\alpha \rightarrow +\infty$, а

$$\frac{1}{a + t_0 + 1} = o\left(\frac{1}{\ln(\alpha + 1)}\right),$$

то $q'_\alpha(2t_0, \alpha) < 0$ при достаточно большом α .

Пример с одной стороны демонстрирует, что излишняя точность оценок может оказаться вредной. С другой указывает на существование классов уравнений, для исследования свойства асимптотического равновесия которых необходимы новые типы ограничений на λ .

2. Равномерная ограниченность решений

Вернемся к примеру (1.9). Расширить область действия теоремы 1.1. так, чтобы захватывались в частности примеры, подобные указанному, можно за счет выбора другой функции Ляпунова и ослабления некоторых ограничений на функцию λ .

Т е о р е м а 2.1. Пусть существует функция $J \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$, $J(\alpha) > 0$ такая, что

1) При некотором $a \geq 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty.$$

2) Функция

$$q(t, \alpha) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(s, \alpha)}{J(\alpha)} ds$$

имеет непрерывную частную производную по α , причем

$$\lambda(t, \alpha)q'_\alpha(t, \alpha) \leq \varphi(t),$$

$$\varphi \in C([T, +\infty), \mathbb{R}), \int_T^{+\infty} \varphi(s) ds \leq c_2 < +\infty.$$

Тогда решения (1.1) равномерно ограничены, т.е.

$$\|x(t : t_0, y_0)\| \leq c(r) < +\infty, \|x_0\| \leq r, t \geq t_0, t_0 \geq T.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$V(t, \alpha) = \int_a^z \frac{d\alpha}{J(\alpha)} + \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(s, \alpha)}{J(\alpha)} ds - \int_T^t \varphi(s) ds.$$

Из условий 1), 3) вытекает, что $V(t, \alpha) \rightarrow +\infty$ равномерно по t , причем для производной V в силу (1.3) справедливо неравенство:

$$\dot{V}(t, \alpha)_{(1.3)} = \lambda(t, \alpha)q'_\alpha(t, \alpha) - \phi(t) \leq 0.$$

Откуда из критерия Мизохаты-Ямагути [2] вытекает равномерная ограниченность решений уравнения (1.3).

Покажем, что равномерная ограниченность решений (1.3) влечет за собой ограниченность решений (1.1). Рассмотрим функцию $W(x) = \|x\|$. Обозначим D^+ правую верхнюю производную Дини. Тогда если $x(t)$ — решение (1.7), то

$$\begin{aligned} D^+W(x(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|x(t) + hf(t, x(t))\| - \|x(t)\|}{h} \leq \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|x(t) + hf(t, x(t)) - x(t)\|}{h} = \|f(t, x(t))\| \leq \lambda(t, x(t)). \end{aligned}$$

Откуда на основании теоремы о дифференциальных неравенствах [4]

$$\|x(t)\| \leq z(t), \|x(t_0)\| \leq z_0, z(t_0) = z_0, \frac{dz}{dt} = \lambda(t, z),$$

что и обеспечивает равномерную ограниченность решений (1.1). (Заметим, что неубывание функции λ по второму аргументу здесь не требуется).

Доказательство закончено.

Выбор $J(\alpha)$ при использовании теоремы 1.1. в общем случае может вызвать определенные затруднения. Но если положить $J(\alpha) = \int_T^{+\infty} \lambda(s, \alpha) ds$ (при условии существования интеграла в правой части), то получим обобщение теоремы 1.1..

С л е д с т в и е 2.1. Пусть:

1) Интеграл

$$J(\alpha) = \int_T^{+\infty} \lambda(s, \alpha) ds < +\infty$$

существует $\forall \alpha \in [0, +\infty)$ и сходится равномерно по α на любом отрезке из $[0, +\infty)$, $J(\alpha) > 0$

2) При некотором $a \geq 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty.$$

3) Функция

$$q(t, \alpha) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(s, \alpha)}{J(\alpha)} ds$$

имеет непрерывную частную производную по α , причем

$$\lambda(t, \alpha) q'_\alpha(t, \alpha) \leq \varphi(t),$$

$$\varphi \in C([T, +\infty), R), \int_T^{+\infty} \varphi(s) ds \leq c_2 < +\infty.$$

Тогда решения (1.1) равномерно ограничены, т.е.

$$\|x(t : t_0, y_0)\| \leq c(r) < +\infty, \|x_0\| \leq r, t \geq t_0, t_0 \geq T.$$

Заметим, так как

$$\begin{aligned} q(t, \alpha) &= \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(s, \alpha) ds}{J(\alpha)} = \\ &= \frac{\int_T^{+\infty} \lambda(s, \alpha) ds - \int_T^t \lambda(s, \alpha) ds}{\int_T^{+\infty} \lambda(s, \alpha) ds} = 1 - \int_T^t \frac{\lambda(s, \alpha) ds}{J(\alpha)}, \end{aligned}$$

то при выполнении условия 2) теоремы 1.1. условие 3) следствия 2.1. всегда выполнено. Причём здесь условие неубывания $\lambda(s, \alpha)$ заменено более слабым условием 1). Условие 3) также ослаблено.

Несложно проверить, что для примера (1.9) с оценкой правой части (1.10) условия следствия 2.1. оказываются выполненными.

Рассмотрим пример, демонстрирующий использование теоремы 2.1., и для которого ранее полученные результаты неприменимы. Для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 \left(\frac{x^2}{t^m} \right), \quad (2.1)$$

где $m \geq 3$, положим

$$\lambda(t, \alpha) = \sin^2 \left(\frac{\alpha^2}{t^m} \right), \quad J(\alpha) = \alpha + 1.$$

Все условия следствия 2.1. выполнены и решения уравнения (2.1) равномерно ограничены.

3. Асимптотическое равновесие

Перейдем к вопросу об асимптотическом равновесии системы (1.1). Предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а 3.1. Пусть при некотором фиксированном $c \in \mathbb{R}^n$ семейство функций $F \subset C([T, +\infty), \mathbb{R}^n)$ равномерно ограничено, равномерно непрерывно и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{f \in F} |f(t) - c| = 0$, тогда F относительно компактно в $C([T, +\infty), \mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ для F существует конечная ε -сеть. Действительно, в силу условий леммы можно выбрать T_1 такое, что

$$|f_1(t) - f_2(t)| < \varepsilon \quad (3.1)$$

для всех $f_1, f_2 \in F$, $t \in [T_1, +\infty)$. Если рассмотреть семейство F , как подмножество множества непрерывных функций, определенных на отрезке $[T, T_1]$ (элементами этого подмножества будут сужения функций из F на промежуток $[T_1, T_2]$), то согласно теореме Арцела-Асколи, для F можно выбрать конечную ε -сеть в $C([T, T_1], \mathbb{R}^n)$, но в силу (3.1) эта ε -сеть будет являться ε -сетью и для функций из F , определенных на промежутке $[T, +\infty)$, откуда вытекает относительная компактность F в $C([T, +\infty), \mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 3.1. Пусть для системы (1.1) выполнены теоремы 2.1., причем интеграл $\int_T^{+\infty} \lambda(s, \alpha)$ сходится равномерно по α на каждом конечном отрезке, то система (1.1) обладает свойством асимптотического равновесия.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что каждое решение $y(t)$ (1.1) имеет предел. Будем следовать ([1], С.26). Действительно, для всех $T_1 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$ имеем

$$\|y(t_1) - y(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} y'(s) ds \right\| \leq \int_{T_1}^{+\infty} \lambda(s, \|y(s)\|) ds.$$

Так как для $\|y(t)\| \leq M$, при всех t , то из равномерной сходимости $\int_{T_1}^{+\infty} \lambda(s, \alpha)$ на $[0, M]$ вытекает существование предела $y(t)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Теперь покажем, что для любого элемента $y_0 \in \mathbb{R}^n$ существует решение (1.1) такое, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0.$$

В силу условий теоремы оператор $L : C([T_1, +\infty)) \rightarrow C([T_1, +\infty))$ ($T_1 \geq T$)

$$L[y(t)] = y_0 - \int_t^{+\infty} f(s, y(s)) ds$$

корректно определен. Рассмотрим в пространстве $C([T_1, +\infty))$ шар радиуса $2\|y_0\|$ с центром в нуле:

$$B = \{y | y \in C([T_1, +\infty)), \|y\|_C \leq 2\|y_0\|\}.$$

Из равномерной сходимости интеграла $\int_T^{+\infty} \lambda(s, \alpha)$ на отрезке $[0, 2\|y_0\|]$ вытекает, что можно выбрать T_1 такое, что

$$\left\| \int_t^{+\infty} f(s, y(s)) ds \right\| \leq \|y_0\|$$

для всех $y \in B$. Легко видеть, что L непрерывен и отображает B в множество, удовлетворяющее условиям леммы 3.1.. Тогда из теоремы Шаудера вытекает существование у L неподвижной точки $y_1(t)$ в B , которая будет являться решением (1.1), причем $y_1(t) \rightarrow y_0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

С л е д с т в и е 3.1. *В условиях следствия 2.1. система (1.1) обладает свойством асимптотического равновесия.*

В качестве примера снова рассмотрим уравнение (2.1). Из следствия 3.1. получаем, что это уравнение обладает свойством асимптотического равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат. ун-та, саран фил, Саранск, 1990, 224 с.
2. Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р., *Качественная теория нелинейных систем дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1974, 318 с.
2. Wintner A., "An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria of differential equations.", *Amer. J. of Math.*, **68.** (1946), 451–454
3. Нгуен Тхе Хоан, "Об асимптотическом равновесии", *Диф. уравнения*, **6:2** (1970), 385–386.
4. Красносельский М. А., *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1966, 332 с.

Asymptotic equilibrium and boundedness of solutions of nonlinear ODE

© D. V. Pashutkin²

Abstract. The paper is concerned with the asymptotic behaviour of some class of crucially nonlinear ODE. On the base of methods from [1] we obtained new class of ODE with uniformly bounded solutions and asymptotic equilibrium.

Key Words: ODE, asymptotic equilibrium, boundedness of solutions of ODE

² Head of department, ATOL Group, Moscow; pashutkindv@yandex.ru

УДК 517.95

Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром

© Т. К. Юлдашев¹ О. В. Новоселов²

Аннотация. Изучена однозначная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром. Сначала модифицирован метод вырожденного ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода для случая интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных четвертого порядка. После решения системы алгебраических уравнений путем интегрирования получено интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Далее использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: Смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, система алгебраических уравнений, однозначная разрешимость.

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений, не имеющих аналогов в классической математической физике. Теория смешанных задач для уравнений в частных производных в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1].

Изучению уравнений в частных производных четвертого порядка посвящено большое количество работ (см., напр. [2] – [8]).

В настоящей работе предлагается методика изучения смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром. Данная работа является дальнейшим развитием и совершенствованием методики работ [9] – [13].

1. Постановка задачи

Рассматривается в области $\Omega \equiv \Omega_T \times R^+$ интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t^3} - \lambda \int_0^T K(t, s) u(s, x) ds \right) = p(t) \cdot f \left(x, \int_0^T \int_0^\infty H(s, y) u(s, y) dy ds \right) \quad (1.1)$$

со смешанными условиями

$$u_x(0, x) = \varphi_1(x), \quad u_x(T, x) = \varphi_2(x), \quad u_{xt}(0, x) = \varphi_3(x), \quad x \in R^+, \quad (1.2)$$

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@gambler.ru

² Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in \Omega_T, \quad (1.3)$$

где $p(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x, \gamma) \in C(R^+ \times R)$, $\varphi_k(x) \in C^1(R^+)$, $k = \overline{1, 3}$, $K(t, s) = \sum_{i=1}^n a_i(t)b_i(s)$, $0 < a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\psi(t) \in C(\Omega_T)$, $\Omega_T \equiv [0, T]$, $R^+ \equiv [0, \infty)$, λ – параметр, $0 < \int_0^T \int_0^\infty |H(t, x)| dx dt < \infty$.

В настоящей работе предлагается методика изучения смешанной задачи (1.1) – (1.3) для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром.

Под решением смешанной задачи (1.1) – (1.3) понимаем функцию $u(t, x) \in C^{3,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и смешанным условиям (1.2) и (1.3).

2. Сведение задачу (1.1) – (1.3) к интегральному уравнению

В уравнении (1.1) сделаем замену $u_x(t, x) = \vartheta(t, x)$. Тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^3 \vartheta(t, x)}{\partial t^3} - \lambda \int_0^T K(t, s) \vartheta(s, x) ds = p(t) \cdot f(x, \gamma), \quad (2.1)$$

где $\gamma = \int_0^T \int_0^\infty H(s, y) u(s, y) dy ds$ – неизвестная константа.

С помощью обозначения

$$c_i(x) = \int_0^T b_i(s) u(s, x) ds \quad (2.2)$$

уравнение (2.1) переписется в следующем виде

$$\frac{\partial^3 \vartheta(t, x)}{\partial t^3} = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot c_i(x) + p(t) \cdot f(x, \gamma). \quad (2.3)$$

Для дифференциального уравнения (2.3) граничные условия (1.2) принимают вид

$$\vartheta(0, x) = \varphi_1(x), \quad \vartheta(T, x) = \varphi_2(x), \quad \vartheta_t(0, x) = \varphi_3(x), \quad x \in R^+. \quad (2.4)$$

Использование обобщенной функции Грина с учетом условий (2.4) в (2.3) дает

$$\vartheta(t, x) = h(t, x) + \lambda \sum_{i=1}^n \mu_i(t) \cdot c_i(x) + q(t) \cdot f(x, \gamma), \quad (2.5)$$

где

$$h(t, x) = \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right) \varphi_1(x) + \frac{t^2}{T^2} \varphi_2(x) + \left(t - \frac{t^2}{T}\right) \varphi_3(x),$$

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{sT-ts}{2T^2}(ts + sT - 2tT), & 0 \leq s \leq t, \\ -\frac{t^2}{2T^2}(T-s)^2, & t \leq s \leq T, \end{cases}$$

$$\mu_i(t) = \int_0^T G(t, s) a_i(s) ds, \quad q(t) = \int_0^T G(t, s) p(s) ds.$$

Подставляя (2.5) в (2.2), имеем

$$c_i(x) = \int_0^T b_i(s) \left[h(s, x) + \lambda \sum_{j=1}^n \mu_j(s) \cdot c_j(x) + q(s) \cdot f(x, \gamma) \right] ds. \quad (2.6)$$

Примем обозначение

$$B_i(x) = \int_0^T b_i(s) [h(s, x) + q(s) \cdot f(x, \gamma)] ds. \quad (2.7)$$

Пусть

$$A_{ij} = \int_0^T b_i(s) \mu_j(s) ds > 0. \quad (2.8)$$

Тогда из (2.6) получаем относительно $c_i(x)$ следующую систему алгебраических уравнений (САУ)

$$c_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot c_j(x) = B_i(x), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Система алгебраических уравнений (2.9) однозначно разрешима при любых конечных $B_i(x)$, если выполняется следующее условие

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1 - \lambda A_{22} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n2} & \dots & 1 - \lambda A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.10)$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ в (2.10) есть многочлен относительно λ степени не выше n . Уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет не более n различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1.1). Другие значения λ являются регулярными, при которых условие (2.10) выполняется. Для регулярных значений λ система (2.9) имеет единственное решение при любой конечной и ненулевой правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра λ устанавливается однозначная разрешимость поставленной смешанной задачи (1.1) – (1.3).

Сначала решения САУ (2.9) записываем в виде

$$c_i(x) = \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.11)$$

где

$$\Delta_i(\lambda, x) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_1(x) & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_2(x) & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_n(x) & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1 - \lambda A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_i(\lambda, x)$ находятся функции $B_i(x)$. В свою очередь, функции $B_i(x)$ содержат в себя неизвестную функцию $u(t, x)$ в составе функции $f(x, \gamma)$.

В самом деле, эта неизвестная функция находилась в правой части САУ (2.9). Чтобы вывести её из знака определителя выражение в (2.7) запишем в следующем виде

$$B_i(x) = B_{1i}(x) + f(x, \gamma) \cdot B_{2i},$$

$$\text{где } B_{1i}(x) = \int_0^T h(s, x) \cdot b_i(s) ds, \quad B_{2i} = \int_0^T q(s) \cdot b_i(s) ds.$$

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_i(\lambda, x) = \Delta_{1i}(\lambda, x) + f(x, \gamma) \cdot \Delta_{2i}(\lambda),$$

где

$$\Delta_{ki}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda A_{11} & \dots & -\lambda A_{1(i-1)} & B_{k1} & -\lambda A_{1(i+1)} & \dots & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & \dots & -\lambda A_{2(i-1)} & B_{k2} & -\lambda A_{2(i+1)} & \dots & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda A_{n1} & \dots & -\lambda A_{n(i-1)} & B_{kn} & -\lambda A_{n(i+1)} & \dots & 1 - \lambda A_{nn} \end{vmatrix},$$

$$k = 1, 2, \quad \Delta_{1i}(\lambda) = \Delta_{1i}(\lambda, x), \quad B_{1i} = B_{1i}(x).$$

Тогда (2.11) приобретает вид

$$c_i(x) = \frac{\Delta_{1i}(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)} + f(x, \gamma) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.12)$$

Подстановка (2.12) в (2.5) дает

$$u_x(t, x) = \Phi(t, x) + F(t) \cdot f(x, \gamma), \quad (2.13)$$

где

$$\Phi(t, x) = h(t, x) + \lambda \sum_{i=1}^n \mu_i(t) \frac{\Delta_{1i}(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)}, \quad F(t) = \lambda \sum_{i=1}^n \mu_i(t) \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + q(t).$$

Интегрируя по x , из (2.13) получаем

$$u(t, x) = D(t) + \int_0^x \Phi(t, y) dy + F(t) \int_0^x f(y, \gamma) dy. \quad (2.14)$$

Для определения неизвестного коэффициента $D(t)$ используем начальное условие (1.3). Тогда из (2.14) имеем следующее нелинейное интегральное уравнение

$$u(t, x) = Q(t, x) + F(t) \int_0^x f(y, \gamma) dy, \quad (2.15)$$

$$\text{где } Q(t, x) = \psi(t) + \int_0^x \Phi(t, y) dy.$$

3. Теорема об однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3)

Для произвольной функции $l(t, x) \in C^{3,1}(\Omega)$ рассматривается следующая норма

$$\|l(t, x)\|_C = \max \left\{ |l(t, x)| : (t, x) \in \Omega \right\}.$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть:

- 1) Выполняются условия (2.8) и (2.10);
- 2) $\alpha = \max \left\{ |Q(t, x)| : (t, x) \in \Omega \right\} < \infty$;
- 3) $M = \max \left\{ \left| F(t) \int_0^x f(y, \gamma) dy \right| : (t, x) \in \Omega \right\} < \infty$;
- 4) $|f(x, \gamma_1) - f(x, \gamma_2)| \leq L(x) |\gamma_1 - \gamma_2|$, $0 < L(x) \in C(R^+)$;
- 5) $\rho = \delta_1 \delta_2 < 1$,

где $\delta_1 = \int_0^T \int_0^\infty |H(t, x)| dx dt < \infty$, $\delta_2 = \max \left\{ \left| F(t) \int_0^x L(y) dy \right| : (t, x) \in \Omega \right\} < \infty$.

Тогда в области Ω существует единственное решение смешанной задачи (1.1) – (1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующий итерационный процесс для уравнения (2.15)

$$u_0(t, x) = 0, \quad u_{k+1}(t, x) = Q(t, x) + F(t) \int_0^x f(y, \gamma_k) dy, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где $\gamma_k = \int_0^T \int_0^\infty H(s, \xi) u_k(s, \xi) d\xi ds$.

В силу условий теоремы, из (3.1) получаем следующие оценки

$$\|u_1(t, x) - u_0(t, x)\|_C \leq \alpha + M, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \|u_{k+1}(t, x) - u_k(t, x)\|_C \leq \\ & \leq \delta_1 \max \left\{ |F(t)| \int_0^x L(y) \cdot \|u_k(t, y) - u_{k-1}(t, y)\|_C dy : (t, x) \in \Omega \right\} \leq \\ & \leq \rho \cdot \|u_k(t, x) - u_{k-1}(t, x)\|_C < \|u_k(t, x) - u_{k-1}(t, x)\|_C. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из оценок (3.2) и (3.3) следует, что оператор в правой части (2.15) является сжимающим. Следовательно, в области Ω смешанная задача (1.1) – (1.3) имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

4. Заключение

В заключении отметим, что теория интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных в настоящее время является одним из важнейших разделов современной теории уравнений математической физики. Рассмотрено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма в частных производных четвертого порядка, для решения которого не применим метод Фурье разделения переменных. Доказана теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи (1) – (3). Главной особенностью этого уравнения, которая позволяет свести данное уравнение к более простому и удобному для вычисления виду, является то, что ядро вырожденное. Данная работа может быть применена при теоретических исследованиях по интегро-дифференциальным уравнениям математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.
2. Абзалимов Р. Р., Саляхова Е. В., “Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями”, *Известия вузов. Математика*, 2008, № 11, 3 – 11.
3. Джураев Т. Д., Сопуев А., *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка*, Фан, Ташкент, 2000, 144 с.
4. Мамедов И. Г., “Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами”, *Владикав. мат. журнал*, **12** (2010), 17 – 32.
5. Мукминов Ф. Х., Биккулов И. М., “О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области”, *Мат. сборник*, **195:3** (2004), 115 – 142.
6. Смирнов М. М., *Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка*, ЛГУ, Л., 1972, 123 с.
7. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.
8. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журн. СВМО*, **14:2** (2012), 137 – 142.
9. Юлдашев Т. К., “О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Журн. СВМО*, **15:3** (2013), 158 – 163.
10. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка”, *Вестн. СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **34:1** (2014), 56 – 65.
11. Юлдашев Т. К., “Двойная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма эллиптического типа”, *Вестн. СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **35:2** (2014), 39 – 49.
12. Юлдашев Т. К., Шабаликов К. Х., “Обратная задача для гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Таврич. вестн. информатики и математики*, **24:1** (2014), 73 – 81.
13. Юлдашев Т. К., Лоскутова А. Г., “Обратная задача для эллиптического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Журн. СВМО*, **16:3** (2014), 87 – 93.

On a fredholm partial integro-differential equation of fourth order with degenerate kernel

© T. K. Yuldashev³ O. V. Novoselov⁴

Abstract. It is studying the one value solvability of the mixed value problem for a nonlinear partial Fredholm integro-differential equation of the fourth order with degenerate kernel. First, it is modified to the case of partial Fredholm integro-differential equations of the fourth order the method of degenerate kernel designed for Fredholm integral equations of the second kind. After solving the system of algebraic equations it is obtained by the aid of integration the Volterra integral equation of the second kind. Further it is used the method of successive approximations combined it with the method of compressing maps.

Key Words: Initial value problem, integro-differential equation, Fredholm equation with degenerate kernel, system of algebraic equations, one valued solvability.

³ Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru

⁴ Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 533.9+517.2+519.142.6

Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами© Р. К. Галимова¹, З. Я. Якупов²

Аннотация. С целью расчёта распределения потенциала в объёме электролита применялись экспериментальные данные распределения потенциала электрического поля на поверхности электролита. Решалось уравнение, сводящееся к уравнению Лапласа. При этом использовались цилиндрическая система координат и метод переменных направлений на разностной сетке при соответствующих граничных условиях. Были рассчитаны распределения напряжённости электрического поля и плотности электрического тока вблизи микровыступов обрабатываемой поверхности попеременно–треугольным методом при фиксированной границе. Результаты численного расчёта процесса обработки микровыступа поверхности подтвердили факт более быстрого выравнивания поверхности за счёт большей плотности тока на вершине пика выступа.

Ключевые слова: численные методы, математическое моделирование, уравнение Лапласа, распределение потенциала, парогазовый разряд, жидкостный электрод, электролит, технологический процесс

1. Введение

Явления, протекающие на границе металл–электролит и в межэлектродном промежутке в процессе обработки поверхностей парогазовым разрядом с жидким электродом, представляют собой совокупность взаимосвязанных процессов физического, химического и электрохимического характера. К основным макроскопическим физико–химическим явлениям, определяющим процесс обработки поверхности, следует отнести электрическое поле, обеспечивающее обрабатываемость поверхности, и режим тепло-массопереноса между обрабатываемой поверхностью и электролитом [1– 5].

На основе экспериментальных данных разработаны методики определения напряжённости электрического поля и плотности тока на поверхности электролита в функции основных параметров парогазового разряда с жидким электродом (форма и геометрия электродов, полярность и величина приложенного напряжения, состав и концентрация примесей в жидком электроде). Результаты экспериментальных измерений распределения потенциала на поверхности электролита и результаты численного расчета распределения потенциала в объёме электролита, компонент напряжённости электрического поля и плотности тока на поверхности электролита использовались для моделирования процесса обработки поверхностей металлических изделий [1, 3].

¹ Доцент кафедры технической физики, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева – КАИ (Казанский авиационный институт), г. Казань; zumat@bk.ru

² Доцент кафедры специальной математики, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева – КАИ (Казанский авиационный институт), г. Казань; zumat@bk.ru

2. Численные методы

Исследована возможность применения уравнения Лапласа для моделирования технологического процесса обработки металлических поверхностей с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами. Например, к исследованию простейшего уравнения класса уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

и им подобным [2], приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т. д.

Экспериментальные измерения потенциала на поверхности электролита с помощью одиночного цилиндрического зонда и уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} &= 0, \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E}, \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi \end{aligned}$$

позволили рассчитать значения плотности тока на поверхности жидкого электрода [3]. Для расчета распределения потенциала в объеме электролита использовано уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

где r – расстояние от центра электролитической ячейки круглого сечения ($0 \leq r \leq R$), z – координата расстояния от металлического токоподвода на дне электролитической ячейки до поверхности электролита.

Уравнение (1) решается в цилиндрической системе координат при следующих граничных условиях

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (2)$$

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\varphi(r, h) = f(r), \quad (4)$$

$$\varphi(R, z) = 0, \quad (5)$$

где $R \gg h$, R – внешний радиус электролитической ячейки, h – текущее расстояние по оси z .

Условие (2) продиктовано соображениями симметрии распределения потенциала φ относительно оси z . Условие (4) – известное распределение потенциала φ на поверхности электролита.

Для решения уравнения (1) используется метод переменных направлений на разностной сетке. Применяется равномерная прямоугольная разностная сетка по (r, z) . Правильность расчётов оценивается соотношением

$$I = \int_S j_z dS,$$

где I – полный ток разряда, $j_z = \sigma E_z$, σ – удельная проводимость среды, j_z – компонента плотности тока. Интегрирование производится по поверхности электролита S .

Для моделирования процесса обработки проводилось численное решение уравнения

$$\operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) решалось в малой области D микровыступа с плавным профилем высотой R_z . Начальный профиль микровыступа задавался как

$$y = \frac{R_z}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right),$$

где a – протяженность микровыступа вдоль координаты x . Высота области D выбиралась достаточно большой ($b \approx (3 \div 4)R_z$). Напряжённость электрического поля на верхней границе области считалась постоянной: $E|_{y=b} = E_0 = \text{const}$. Это значение находилось из решения уравнения (6). На обрабатываемой поверхности принималось граничное условие $\varphi|_{\Gamma} = 0$, Γ – граница поверхности изделия. На боковых границах области D граничное условие имело вид $\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=\pm a} = 0$.

Уравнение (6) решалось попеременно–треугольным методом при фиксированной границе Γ . Использовалась прямоугольная разностная сетка с равномерным шагом как по координате x , так и по координате y .

3. Результаты моделирования

Решение уравнения (6) позволяет получить распределение потенциала φ во всех узлах разностной сетки. Далее находится плотность тока вблизи границы Γ : $j_x = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $j_y = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2}$. Скорость съёма металла v_p принимается пропорциональной плотности тока $\vec{v}_p = k_v \vec{j}|_{\Gamma}$. Здесь k_v – удельный съём металла.

Проведённые вычисления показали, что при $k_v = 60 \div 100$ (мм³/А · ч) [3] экспериментальные данные по измерению R_z исследуемых металлических поверхностей до и после обработки хорошо согласуются с расчётными.

4. Выводы

Благодаря широким возможностям применения, интерес представляют способы получения низкотемпературной плазмы зажиганием разряда между твердым металлическим и жидким неметаллическим (электролиты с добавлением неорганических и органических примесей) электродами. Изучение явлений в таких разрядах заслуживает внимания специалистов по технологии обработки материалов с различными физико–механическими свойствами с целью улучшения их эксплуатационных свойств [1, 3, 5].

Многофакторность процесса и большое количество видов связи вызывает трудности планирования эксперимента в технологии обработки поверхностей изделий парогозовым разрядом между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами. Как и в большинстве технологических процессов, наряду с контролируруемыми факторами существует целый ряд неконтролируемых входных переменных. Поэтому изменение выходных параметров, например, шероховатости поверхности, носит случайный характер [4]. Несмотря на это, процессы прогнозирования результатов технологических процессов с использованием указанного типа разряда и их моделирование в настоящее время актуальны и востребованы.

В работе использовалась информация об обработке металлических поверхностей в электролитах с концентрацией растворенных веществ порядка 1%. Обычная электрохимическая обработка предполагает использование значительно концентрированных электролитов с агрессивными добавками [1, 3, 4]. Результаты моделирования и численные расчеты, представленные в работе, позволяют сделать заключение об одновременном воздействии на обрабатываемую поверхность парогазового разряда и электрохимического растворения, а также о значительной активации электрохимической обработки разрядными процессами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галимова Р. К., *Характеристики плазменной электротермической установки с жидкими электродами (электролиты с добавлением неорганических и органических примесей)*. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук., 1997, 202 с.
2. Якупов З. Я., “Ляпуновские преобразования стационарного уравнения Шрёдингера с возмущающим потенциалом”, *Математическое моделирование*, **7:5** (1995), 71 с.
3. Basyrov R. Sh., Galimova R. K., Khaziev R. M., “Modelling of the process of the treatment of metallic surfaces by the gas–vapour discharge with a liquid electrode”, *Материалы V международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера на рубеже XXI века» в г. Севастополе.*, **3:6** (1998), 318–319.
4. Галимова Р. К., Якупов З. Я., “Исследование технологического процесса обработки поверхностей изделий парогазовым разрядом между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами”, *Fundamental and applied sciences today. CreateSpace. 4900 LaCross Road. North Charleston, SC, USA 29406*, spc Academic, M., 2013, 147–149.
5. Якупов З. Я., Галимова Р. К., “Об Адамаровых матрицах”, *Математика в современном мире: Материалы международной научно-практической конференции*. (7-11 октября 2013 г.), Изд-во ВГПУ, Вологда, 2014, 38–40.

Investigation of the solutions of the Laplace equation in processes using steam and gas discharges with liquid electrodes

© R. K. Galimova³, M. Y. Yakupov⁴

Abstract. For the purpose of calculation of distribution of potential in volume of electrolyte experimental data of distribution of potential of electric field on an electrolyte surface were applied. The equation which is reducing to the equation of Laplace was solved. The cylindrical system of coordinates and method of the variable directions on a differential grid were thus used under the corresponding boundary conditions. Distributions of intensity of electric field and density of electric current near microedges of a processed surface were calculated by an alternate and triangular method at the fixed border. Results of numerical calculation of processing of a microedge of a surface confirmed the fact of faster alignment of a surface at the expense of the bigger density of current at top of peak of a ledge.

Key Words: numerical methods, mathematical modeling, Laplace's equation, potential distribution, steam-gas category, liquid electrode, electrolyte, technological process

³ Associate professor of Technical Physics Chair, KNRTU-KAI named by A.N.Tupolev, Kazan; zymat@bk.ru.

⁴ Associate professor of Special Mathematics Chair, KNRTU-KAI named by A.N.Tupolev, Kazan; zymat@bk.ru.

УДК 517.929

Условия существования интегралов системы уравнений движения

© А. В. Зубов¹, А. Ф. Зубова², О. А. Пустовалова³

Аннотация. В данной работе получен аналог известной теоремы Харитоновой на случай однородных классов эквивалентности неустойчивых интервальных полиномов. В.Л. Харитоновым установлено, что для устойчивости интервального полинома необходимо и достаточно, чтобы четыре его угловых полинома были устойчивы [5]. Основным результатом наших исследований заключается в том, что получены необходимые и достаточные условия того, что неустойчивый интервальный полином является однородным, т. е. состоит из полиномов, имеющих одинаковое число корней, лежащих как в левой, так и в правой полуплоскости. Полученные условия несколько сложнее, чем у В.Л. Харитоновой, но они позволяют также как и в случае устойчивых полиномов, бесконечномерную задачу свести к конечномерной задаче.

Ключевые слова: полином, степень, вещественный коэффициент, корень, класс эквивалентности, прямоугольник, радиус - вектор, комплексная плоскость, параллельная ось, часовая стрелка

О п р е д е л е н и е 1.1. *Полином степени n с вещественными коэффициентами*

$$\varphi(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0,$$

не имеющий нулевых и чисто мнимых корней, принадлежит классу (n, k) - эквивалентности, если k его корней (с учетом их кратностей) лежат в правой полуплоскости [1].

О п р е д е л е н и е 1.2. *Интервальный полином с вещественными коэффициентами*

$$F(s) = \begin{cases} f(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, & \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \\ i = \overline{0, n}, & \underline{a}_0 \cdot \bar{a}_0 > 0, \quad \underline{a}_n \cdot \bar{a}_n > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

называется интервальным полиномом класса (n, k) - эквивалентности, если любой полином из этого семейства принадлежит классу (n, k) - эквивалентности.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Угловыми полиномами $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$, $f_4(s)$ интервального полинома (1.1) будем называть угловые полиномы Харитоновой, задаваемые следующими равенствами:*

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1s + \bar{a}_2s^2 + \bar{a}_3s^3 + \dots, \\ f_2(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \bar{a}_3s^3 + \dots, \\ f_3(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1s + \underline{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \dots, \\ f_4(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1s + \bar{a}_2s^2 + \underline{a}_3s^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹ Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

³ Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Т е о р е м а 1.1. Для того чтобы интервальный полином (1.1) являлся интервальным полиномом класса (n, k) - эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы: 1. Угловые полиномы (1.2) принадлежали классу (n, k) - эквивалентности; 2. Для всех вещественных корней ω полиномов

$$\bar{g}(\omega) = \bar{a}_0\omega^2 + \bar{a}_4\omega^4 - \dots, \quad \underline{g}(\omega) = \underline{a}_0 - \bar{a}_2\omega^2 + \underline{a}_4\omega^4 - \dots,$$

$$\bar{h}(\omega) = \bar{a}_1\omega - \underline{a}_3\omega^3 + \bar{a}_5\omega^5 - \dots, \quad \underline{h}(\omega) = \underline{a}_1\omega - \bar{a}_3\omega^3 + \underline{a}_5\omega^5 - \dots,$$

выполняются соотношения:

$$\text{если } \bar{h}(\omega) = 0 \text{ или } \underline{h}(\omega) = 0, \text{ то } \underline{g}(\omega) \cdot \bar{g}(\omega) > 0;$$

$$\text{если } \bar{g}(\omega) = 0 \text{ или } \underline{g}(\omega) = 0, \text{ то } \underline{h}(\omega) \cdot \bar{h}(\omega) > 0. \quad (1.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть интервальный полином (1.1) являлся интервальным полиномом класса (n, k) - эквивалентности. Тогда "угловые" полиномы (1.2) принадлежат этому классу, т. к. входят в это семейство. Далее очевидно, что концы всех радиус - векторов $f(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega)$, получающихся из полиномов $f(s)$, входящих в интервальный полином (1.1) подстановкой в них $s = i\omega$, принадлежат прямоугольнику $\Gamma(\omega)$ комплексной плоскости с вершинами образованными "угловыми" радиус - векторами:

$$f_1(i\omega) = \Gamma_1(\omega) = \underline{g}(\omega) + i\underline{h}(\omega), \quad f_2(i\omega) = \Gamma_2(\omega) = \underline{g}(\omega) + i\bar{h}(\omega),$$

$$f_3(i\omega) = \Gamma_3(\omega) = \bar{g}(\omega) + i\underline{h}(\omega), \quad f_4(i\omega) = \Gamma_4(\omega) = \bar{g}(\omega) + i\bar{h}(\omega).$$

Это утверждение вытекает из очевидных неравенств

$$\underline{g}(\omega) \leq g(\omega) \leq \bar{g}(\omega), \quad \underline{h}(\omega) \leq h(\omega) \leq \bar{h}(\omega), \quad (1.4)$$

которые справедливы у этих полиномов для всех $\omega \in [0, +\infty)$. В справедливости первого неравенства можно убедиться, умножив неравенства, заданные в определении 1

$$\underline{a}_0 \leq a_0 \leq \bar{a}_0, \quad -\bar{a}_2 \leq -a_2 \leq -\underline{a}_2, \quad \underline{a}_4 \leq a_4 \leq \bar{a}_4, \dots \quad (1.5)$$

соответственно на $1, \omega^2, \omega^4, \dots$, а затем сложив. Второе неравенство доказывается аналогично.

При изменении ω от 0 до $+\infty$ прямоугольник $\Gamma(\omega)$ перемещается по комплексной плоскости, а его стороны остаются параллельными осям координат. При этом, согласно принципу аргумента, "угловые" радиус-векторы $\Gamma_1(\omega)$, $\Gamma_2(\omega)$, $\Gamma_3(\omega)$, $\Gamma_4(\omega)$ поворачиваются против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$, так как соответствующие им "угловые" полиномы принадлежат классу (n, k) - эквивалентности. При достаточно больших значениях величины ω прямоугольник $\Gamma(\omega)$ прекращает "вращаться" и остается в одном из квадрантов, так как $Arg f_j(i\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}(n - 2k)$ при $\omega \rightarrow +\infty$, $j = \overline{1, 4}$.

Докажем, что прямоугольник $\Gamma(\omega)$ при своем перемещении не может пересекаться с началом координат ни по одной из своих сторон. Это и будет эквивалентно выполнению условий (1.3).

Заметим, что ни одна из вершин прямоугольника $\Gamma(\omega)$ не может пересекаться с началом координат. Ибо это будет означать, что угловой полином имеет мнимый корень.

Допустим, например, что имеет место пересечение прямоугольника $\Gamma(\omega)$ по своей нижней стороне с началом координат. Это означает, что для некоторого $\omega_0 > 0$ справедливы соотношения $\underline{h}(\omega_0) = 0$, $\underline{g}(\omega_0) < 0$, $\bar{g}(\omega_0) > 0$.

Покажем, что существует полином $g(\omega)$ такой, что коэффициенты этого полинома удовлетворяют интервальным ограничениям (1.5) и, следовательно, условиям (1.4) $\underline{g}(\omega) \leq g(\omega) \leq \bar{g}(\omega)$, а, кроме того, выполняется равенство $g(\omega_0) = 0$.

Для этого рассмотрим полином $\tilde{g}(t, \omega)$ с коэффициентами, зависящими от параметра t

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t, \omega) = & \underline{a}_0 + t(\bar{a}_0 - \underline{a}_0) - (\bar{a}_2 + t(\underline{a}_2 - \bar{a}_2))\omega^2 + \\ & + (\underline{a}_4 + t(\bar{a}_4 - \underline{a}_4))\omega^4 - (\bar{a}_6 + t(\underline{a}_6 - \bar{a}_6))\omega^6 + \dots \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для любого фиксированного $t \in [0, 1]$ коэффициенты этого полинома удовлетворяют интервальным ограничениям (1.5) и, соответственно условиям (1.4). Это означает, что при $t \in [0, 1]$ полином $f(s) = \tilde{g}(t, -si) + ih(-si)$ входит в семейство интервальных полиномов (1.1) принадлежащих классу (n, k) - эквивалентности.

Далее рассмотрим линейную функцию одной переменной t , $\tilde{g}(t, \omega_0)$. Так как справедливы неравенства $\tilde{g}(0, \omega_0) = \underline{g}(\omega_0) < 0$ и $\tilde{g}(1, \omega_0) = \bar{g}(\omega_0) > 0$, то существует $t_0 \in (0, 1)$ такое, что $\tilde{g}(t_0, \omega_0) = 0$.

Отсюда вытекает, что полином $f(s) = \tilde{g}(t_0, -si) + ih(-si)$ имеет мнимый корень $i\omega_0$, т. к. вещественная и мнимая часть его годографа Михайлова в этой точке равна нулю $\tilde{g}(t_0, \omega_0) = \underline{h}(\omega_0) = 0$. Это противоречит тому, что полином $f(s) = \tilde{g}(t_0, -si) + ih(-si)$ принадлежит классу (n, k) - эквивалентности, как было установлено выше.

Заметим, что нами параллельно доказано более сильное утверждение о том, что для любого $\omega \in [0, +\infty)$ множество значений годографов Михайлова семейства интервальных полиномов (1.1), принадлежащих классу (n, k) - эквивалентности, полностью заполняет прямоугольник $\Gamma(\omega)$.

Достаточность. Выполнение условий теоремы означает, что прямоугольник $\Gamma(\omega)$ - содержащий все радиус - вектора $f(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega)$, получающиеся из полиномов $f(s)$, входящих в интервальный полином (1.1) подстановкой в них $s = i\omega$, при изменении ω от 0 до $+\infty$, поворачивается против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$, не пересекаясь с началом координат. Это означает, что все годографы Михайлова полиномов этого семейства, являющиеся кривыми образованными концами этих радиус-векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$, поворачиваются против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$, не пересекаясь с началом координат, то есть, согласно принципу аргумента, принадлежат классу (n, k) - эквивалентности. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1.1. Теорему Харитонова [5] можно рассматривать как частный случай данной теоремы, т. к. устойчивые полиномы соответствуют классу $(n, 0)$ - эквивалентности, а условия (1.3) теоремы будут вытекать из монотонности "вращения" прямоугольника $\Gamma(\omega)$ против хода часовой стрелки при изменении ω от 0 до $+\infty$.

З а м е ч а н и е 1.2. Для проверки принадлежности "угловых" полиномов классу (n, k) - эквивалентности достаточно применить метод понижения порядка [4], но для проверки соотношений (1.3) необходимо найти все вещественные корни полиномов $\bar{g}(\omega)$, $\bar{h}(\omega)$, $\underline{g}(\omega)$, $\underline{h}(\omega)$, тогда как для устойчивых полиномов (теорема Харитонова) это не требуется.

З а м е ч а н и е 1.3. Полученный критерий легко можно обобщить на случай, когда коэффициенты интервального полинома будут зависеть от параметров [2], однако, в этом случае проверка условий (1.3) станет весьма затруднительной.

З а м е ч а н и е 1.4. Можно доказать принадлежность интервального полинома (1.1) классу (n, k) - эквивалентности, если потребовать принадлежность классу (n, k) - эквивалентности 4-х угловых полиномов и линейных политопов, соответствующих ребрам, их соединяющих. Хотя задача становится бесконечномерной, но принадлежность политопов классу (n, k) - эквивалентности проверяется с помощью обобщения критерия Найквиста.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. №10 – 8 – 00624.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.А. Зеленков Н.В. Зубов В.Ф. Неронов, “Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов -”, Труды ИСА РАН, **17 (1)** (2005).
2. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002.
3. А.В. Михайлов, “Методы гармонического анализа в теории регулирования”, Автоматика и Телемеханика, **3** (1938), 27-81.
4. В.В. Дикусар Г.А. Зеленков Н.В. Зубов, “Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости”, 2007, 234 с.
5. В.Л. Харитонов, “Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений”, Дифференц. уравнения, **14**, № 11 (1978), 2086-2088.
6. О.В. Мутлу, *Основы управления движением. (Исследование равномерной устойчивости по Ляпунову)*, СПб, 2007, 92 с.
7. Л.Д. Блистанова И.В. Зубов Н.В. Зубов Н.А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.
8. К.Ф. Черных, *Нелинейная упругость (теория и приложения)*, Изд. «Соло», СПб, 2004, 420 с.

The conditions of existing integrals system equations of motion

© A. V. Zubov ⁴, A. F. Zubova ⁵, O. A. Pustovalova ⁶

Abstract. In giving work is receives analog know theorem Haritonov's on case homogeneous classes of equivalent instability interval polynomials. V.L. Haritonov is installs that for stability interval polynomial necessary and sufficiently that four this angle polynomial was stabilizes. The base result own investigations is contains in that is gives necessary and sufficiently conditions that instability interval polynomial is appears homogeneous, i.e. is consists from polynomials is have equal number roots is lies as in left, so in right half-plane. Is giving conditions several composite, than by V.L. Haritonov, but they is allows so as in case stability polynomials, infinitely measure task is reduces to last measure task.

Key Words: Polynomial, degree, material coefficient, root, class of equivalent, rectangle, radius - vector, integrated plane, parallel axis, hands of a clock

⁴ Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁵ Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁶ Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневожского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании. Объем рукописи не должен превышать 12 страниц для статьи, 20 страниц для обзорной статьи и 3-4 страницы для краткого сообщения. Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX. Компиляцию статьи необходимо производить с помощью MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте — <http://www.miktex.org>. В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF). Статья должна содержать следующие разделы:

- коды УДК;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО, e-mail, должность и место работы (официальное название организации);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи;
- список литературы.

Если статья на русском языке, то название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова необходимо так же предоставить и на английском языке. Если статья написана на английском языке, то отдельно представляются коды УДК, название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова на русском языке. Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок. Рекомендуются включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, тему, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы. Объем аннотации должен быть в среднем от 100 до 250 слов.

Особое внимание необходимо уделить оформлению аннотаций на английском языке. Рекомендации по оформлению аннотаций на английском языке будут размещены на сайте журнала «Журнал Средневожского математического общества».

Раздел Ключевые слова должен содержать от 5 до 15 слов и четко указывать на основное содержание статьи. Не следует приводить в качестве ключевых слов общие понятия, так как поиск по ключевому слову не приведет читателя к нахождению интересующей его информации. Однако данное слово может входить в значимое словосочетание.

Авторам статей необходимо придерживаться следующей структуры статей:

- Введение - краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье.
- Материалы и методы решения задачи и принятые допущения.
- Результаты – основное содержание статьи.
- Обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.
- Заключение – выводы и рекомендации.

Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB (см. Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX). Список литературы

должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье. В оригинальных статьях допускается до 20, в обзорных – до 60 источников.

Подробные Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX содержатся на сайте журнала.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе Т_EX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды $\backslash\mathbf{R}$, $\backslash\mathbf{Rn}$, $\backslash\mathbf{C}$, $\backslash\mathbf{Z}$, $\backslash\mathbf{N}$ и т.д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды $\backslash\mathbf{phi}$, $\backslash\mathbf{epsilon}$ соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами $\backslash\mathbf{px}\{i\}$ и $\backslash\mathbf{pxtog}\{u\}\{i\}$.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды $\backslash\mathbf{textrm}$, $\backslash\mathbf{textit}$. Например, для вставок формул Γ_i , \mathcal{D}_i в текст статьи необходимо набрать команды $\backslash\mathbf{textrm}\{\Gamma\}_i$, $\backslash\mathbf{textit}\{\mathcal{D}\}_i$.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{метка}\}$ и $\backslash\mathbf{eqref}\{\mathit{метка}\}$, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{ivanov14}\}$, теорему 5 из этой статьи — $\backslash\mathbf{label}\{\mathit{ivanovt5}\}$ и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду $\backslash\mathbf{ref}\{\mathit{метка}\}$).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

$\backslash\mathbf{insertpicture}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя_файла.eps}\}\{\mathit{степень_сжатия}\}$

где $\mathit{степень_сжатия}$ число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

$\backslash\mathbf{insertpicturewscap}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя_файла.eps}\}\{\mathit{подпись_под_рисунком}\}$

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

$\backslash\mathbf{insertpicturecapscale}\{\mathit{метка}\}\{\mathit{имя_файла.eps}\}\{\mathit{степень_сжатия}\}\{\mathit{подпись_под_рисунком}\}$

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

$\backslash\mathbf{insertpicturenonum}\{\mathit{имя_файла.eps}\}\{\mathit{степень_сжатия}\}\{\mathit{подпись_под_рисунком}\}$

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате *AMSBIB*. Подробности смотрите в прилагаемом файле *amsbib.pdf*. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл *svtobib.sty* (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд $\backslash\mathbf{R}\mathbf{Bibitem}\{\mathit{метка\ для\ ссылки\ на\ источник}\}$.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду $\backslash\mathbf{cite}$ или $\backslash\mathbf{pgcite}$ (параметры см. в преамбуле).

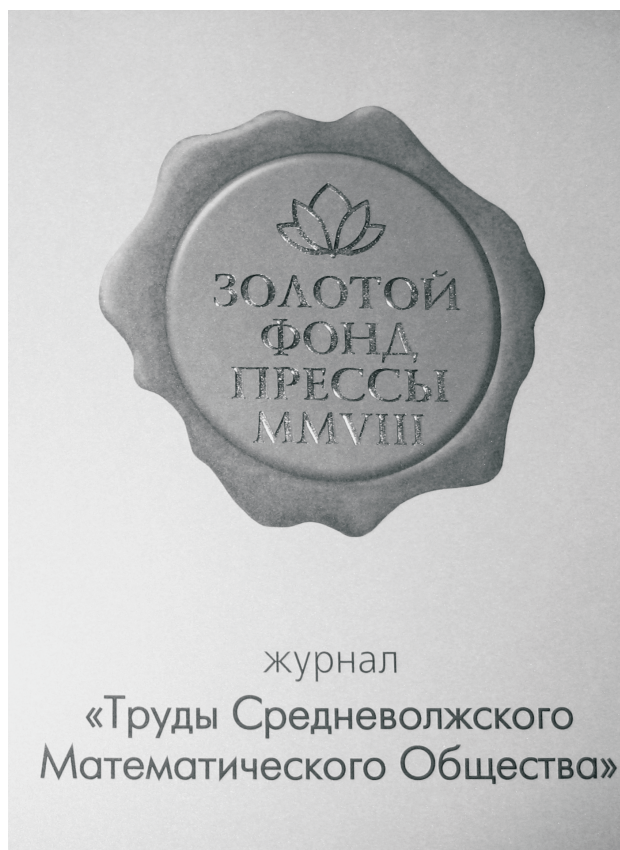
Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи *MiKTeX 2.9*, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Анкилов А. В.	8	Медведев В. С.	55
Вельмисов П. А.	8	Мурюмин С. М.	105
Галимова Р. К.	135	Никишин Е. В.	105
Гермидер О. В.	22	Новоселов О. В.	128
Гринес В.З.	30	Пантюшин А. И.	48
Гуревич Е. Я.	37	Пашуткин Д. В.	120
Жалнин Р. В.	48	Пескова Е. Е.	48, 105
Жужома Е. В.	55	Попов В. Н.	22
Зинина С. Х.	37	Починка О. В.	30, 65
Зубов А. В.	140	Пустовалова О. А.	140
Зубова А. Ф.	140	Рязанцева И. П.	111
Круглов В. Е.	65	Сальников В. Д.	48
Кузнецов Е. Б.	71	Симонов П. М.	82
Ларионов А. С.	82	Тарасова Н. А.	55
Левченко Ю. А.	30	Тишкин В. Ф.	48
Леонов С. С.	71	Файрузов М. Э.	89
Лубышев Ф. В.	89	Юлдашев Т. К.	128
Максимкин А. В.	48	Юшканов А. А.	22
Масягин В. Ф.	48	Якупов З. Я	135

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.

Для заметок

Для заметок