2013 г. январь — февраль *т. 68, вып. 1 (409)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.938

Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях

В. З. Гринес, О. В. Починка

Настоящий обзор посвящен изложению результатов, недавно (начиная с 2000 г.) полученных авторами в сотрудничестве с отечественными и зарубежными коллегами. Исследования связаны с каскадами Морса–Смейла на ориентируемых 3-многообразиях и включают в себя их полную топологическую классификацию, установление взаимосвязи их динамики с топологией объемлющего многообразия, критерий включения в топологический поток, а также необходимые и достаточные условия существования для таких каскадов энергетической функции.

Библиография: 76 названий.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса–Смейла, топологическая классификация, включение в поток, энергетическая функция.

DOI: 10.4213/rm9489

Содержание

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м), гранта Правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

Введение

В 1937 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [2] ввели понятие *грубой системы* дифференциальных уравнений, заданных в ограниченной части плоскости, т. е. системы, сохраняющей свои качественные свойства при небольших изменениях в правой части. Они доказали, что поток, порожденный такой системой, характеризуется следующими свойствами:

1) множество неподвижных точек и периодических орбит конечно, и все его элементы являются гиперболическими;
2) нет сепаратрис, идущих из седла в седло;
3) все ω- и α-предельные множества содержатся в объединении неподвижных точек и периодических орбит (предельных циклов).

Свойства, приведенные выше, характеризуют также и грубые потоки на двумерной сфере. Принципиальная трудность при переходе от двумерной сферы к ориентируемым поверхностям положительного рода связана с возможностью существования новых типов движения – незамкнутых рекуррентных траекторий. Отсутствие таких траекторий у грубых потоков без состояний равновесия на двумерном торе следует из работы А. Г. Майера [42] 1939 г. В 1959 г. М. Пейшото [56] ввел понятие *структурной устойчивости* потоков, обобщающее понятие грубости. Напомним, что поток f^t называется *структурно устойчивым*, если для любого достаточно близкого к нему потока g^t существует гомеоморфизм h, переводящий траектории системы g^t в траектории системы f^t. В определении грубого потока присутствовало дополнительное требование C^0-близости гомеоморфизма h к тождественному отображению. Теперь известно, что понятия "грубость" и "структурная устойчивость" эквивалентны, хотя доказательство этого факта весьма нетривиально. В работах [57], [58] М. Пейшото доказал, что приведенные выше условия 1)–3) являются необходимыми и достаточными условиями структурной устойчивости потоков на ориентируемых замкнутых (компактных без края) поверхностях, а также установил всюду плотность таких потоков в пространстве всех C^1-потоков.

Непосредственное обобщение свойств грубых потоков на ориентируемых поверхностях приводит к системам (непрерывным и дискретным) *Морса–Смейла*.

Неблуждающее множество такой системы состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит, каждая из которых является гиперболической; при этом устойчивые и неустойчивые многообразия W^s_p, W^u_q пересекаются трансверсально[1] для любых неблуждающих точек p, q. Такое название системы Морса–Смейла получили после работы С. Смейла [68] 1960 г., где он впервые ввел потоки с указанными выше свойствами и доказал, что они удовлетворяют неравенствам, подобным неравенствам Морса. Позже С. Смейл и Дж. Палис [52], [55] показали, что системы Морса–Смейла являются структурно устойчивыми, но уже в 1961 г. С. Смейл [70] доказал, что они не исчерпывают множества всех грубых систем, построив структурно устойчивый диффеоморфизм на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ с бесконечным числом периодических точек, известный сейчас как "подкова Смейла". Тем не менее эти системы важны как для приложений, поскольку адекватно описывают любые регулярные устойчивые процессы, так и для исследования топологии фазового пространства, в силу того, что динамика этих систем обладает свойствами глубокой взаимосвязи с объемлющим многообразием.

Ключевым вопросом в изучении динамической системы является нахождение набора полных топологических инвариантов – свойств системы, которые однозначно определяют разбиение фазового пространства на траектории с точностью до топологической эквивалентности (сопряженности). Напомним, что два потока f^t, f'^t (два диффеоморфизма f, f'), заданных на n-многообразии M^n, называются *топологически эквивалентными* (*топологически сопряженными*), если существует гомеоморфизм $h\colon M^n \to M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t (удовлетворяющий условию $f'h = hf$). Топологическая классификация динамических систем занимает особое место в качественной теории дифференциальных уравнений. Кроме непосредственного использования полученных топологических инвариантов, ценнейшей информацией является обнаружение принципиально новых динамических эффектов. На сегодняшний день эта проблема имеет богатую историю.

Класс эквивалентности потоков Морса–Смейла на окружности однозначно определяется числом его неподвижных точек. Для каскадов на окружности полный топологический инвариант был получен А. Г. Майером [42] в 1939 г. и состоит из набора трех чисел: числа периодических орбит, их периода и так называемого порядкового числа. В 1955 г. Е. А. Леонтович и А. Г. Майер [40] ввели полный топологический инвариант для потоков с конечным числом особых траекторий на двумерной сфере – схему потока. Она содержала описание особых траекторий (состояний равновесия, периодических орбит, сепаратрис седловых состояний равновесия) и их взаимного расположения. В 1971 г. М. Пейшото [59] формализовал понятие схемы Леонтович–Майера и доказал, что для систем Морса–Смейла на произвольных поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности его ориентированного графа, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями равновесия и замкнутыми траекториям, а ребра соответствуют

[1] Говорят, что два гладких подмногообразия X_1, X_2, принадлежащих n-многообразию X, *пересекаются трансверсально* (*находятся в общем положении*), если либо $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, либо $T_xX_1 + T_xX_2 = T_xX$ для любой точки $x \in (X_1 \cap X_2)$ (здесь T_xA – обозначение для касательного пространства к многообразию A в точке x).

компонентам связности инвариантных многообразий состояний равновесия и замкнутых траекторий, кроме того, изоморфизм сохраняет выбранные специальным образом подграфы[2].

Потоки (каскады) Морса–Смейла, заданные на многообразиях размерности $n \geqslant 3$ ($n \geqslant 2$), обладают новым, по сравнению с системами меньшей размерности, типом движения, связанным с возможностью пересечений инвариантных многообразий различных седловых точек – *гетероклинических пересечений*. В работе В. С. Афраймовича и Л. П. Шильникова [1] доказано, что ограничение потоков Морса–Смейла на замыкание множества гетероклинических траекторий сопряжено с надстройкой над топологической марковской цепью. Тем не менее инварианта, подобного графу Пейшото, оказалось достаточно, чтобы описать полный топологический инвариант для широкого подмножества таких систем, в частности, для диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях с конечным числом гетероклинических орбит (А. Н. Безденежных, В. З. Гринес [6], [7], 1985 г.; В. З. Гринес [25], 1993 г.)[3], для потоков с конечным числом особых траекторий на 3-многообразиях (Я. Л. Уманский [73], 1990 г.), для потоков на сфере $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 3$, без замкнутых орбит (С. Ю. Пилюгин [60], 1978 г.), для диффеоморфизмов с седловыми точками индекса Морса один, заданных на замкнутых ориентируемых многообразиях M^n, $n > 3$ (В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев [26], [27], 2007–2008 гг.).

Топологическая классификация даже простейших диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях не вписывается в концепцию выделения каркаса, состоящего из устойчивых и неустойчивых многообразий периодических орбит. Причина этого эффекта кроется прежде всего в возможности "дикого" поведения сепаратрис седловых точек. А именно, замыкание сепаратрисы может отличаться от сепаратрисы всего одной точкой, но не быть при этом даже топологическим подмногообразием. Первый диффеоморфизм с дикими сепаратрисами был построен Д. Пикстоном [61] в 1977 г., он использовал кривую Артина–Фокса [3] для реализации инвариантных многообразий седловой неподвижной точки (см. рис. 5). Х. Бонатти и В. З. Гринесом [9] в 2000 г. был рассмотрен класс диффеоморфизмов на трехмерной сфере (диффеоморфизмов класса Пикстона $\mathscr{P}$), имеющих неблуждающее множество, состоящее из четырех неподвижных точек: двух стоков, источника и седла. Ими доказано, что класс Пикстона содержит счетное множество попарно топологически несопряженных диффеоморфизмов. При этом класс топологической сопряженности диффеоморфизма $f \in \mathscr{P}$ однозначно определяется типом вложения

[2] В работе [51] А. А. Ошемкова, В. В. Шарко была отмечена неточность инварианта Пейшото, связанная с тем, что изоморфизм графов не различает типы разбиения на траектории для области, ограниченной двумя периодическими орбитами.

[3] Следует отметить также работу Р. Ланжевена [39], где предложен другой подход к нахождению топологических инвариантов для таких диффеоморфизмов. Несмотря на то что в работе [39] не были получены классификационные результаты, тем не менее ее идеи оказались весьма плодотворными и нашли свое применение в классификации диффеоморфизмов, что и продемонстрировано, в частности, в настоящем обзоре. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях с бесконечным множеством гетероклинических орбит потребовала привлечения аппарата топологических цепей Маркова и следует из работы Х. Бонатти и Р. Ланжевена [15], где найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов Смейла (C^1-структурно устойчивых диффеоморфизмов) на поверхностях.

одномерной сепаратрисы в бассейн стока, описываемым новым топологическим инвариантом – гладким вложением окружности $\mathbb{S}^1$ (пространства орбит одномерной сепаратрисы) в многообразие $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ (пространство блуждающих орбит в бассейне стока).

С появлением новых топологических инвариантов возникает естественная задача – исследование бифуркаций, позволяющих перейти от одного класса топологически сопряженных диффеоморфизмов к другому. При этом специфика появляющейся здесь бифуркации состоит в том, что структура неблуждающего множества не меняется, а качественное изменение диффеоморфизма происходит исключительно за счет смены типа вложения сепаратрис седловых точек. Авторами обзора совместно с Х. Бонатти и В. С. Медведевым в работе [12] доказано, что переход от одного класса топологической сопряженности к другому в множестве диффеоморфизмов Пикстона возможно осуществить с помощью последовательности двух бифуркаций типа седло-узел. Отметим, что этот результат является решением в классе Пикстона проблемы, поставленной Ж. Палисом и Ч. Пью в работе [54], нахождения гладкой дуги с некоторыми “хорошими” свойствами (например, с конечным числом бифуркаций), соединяющей две структурно устойчивые динамические системы (два потока или два диффеоморфизма). Напомним, что два C^r-диффеоморфизма ($r \geqslant 0$) $f, f'\colon X \to X$ называются C^r-изотопными, если существует C^r-гомотопия $F\colon X \times [0,1] \to X$ между отображениями f и f' такая, что отображение $f_t\colon X \to X$, определенное формулой $f_t(x) = F(x,t)$, является C^r-диффеоморфизмом для каждого $t \in [0,1]$. Семейство C^r-диффеоморфизмов $\{f_t, t \in [0,1]\}$ называется при этом C^r-дугой, соединяющей f с f'. Ш. Ньюхауз и М. Пейшото доказали в работе [50], что любые потоки Морса–Смейла на замкнутом многообразии могут быть соединены дугой с конечным числом бифуркаций. Для дискретных динамических систем ситуация иная. Так, из работ Ш. Матсумото [41] и П. Бланшара [8] следует, что любая ориентируемая замкнутая поверхность допускает изотопные диффеоморфизмы Морса–Смейла, которые не могут быть соединены такой дугой.

Другое отличие диффеоморфизмов Морса–Смейла в размерности 3 от их поверхностных аналогов состоит в разнообразии гетероклинических пересечений, компонента связности которых может быть не только точкой, как в двумерном случае, но также и кривой, как компактной, так и некомпактной (см. рис. 2, 3). В серии работ Х. Бонатти, В. З. Гринеса, В. С. Медведева, Э. Пеку, О. В. Починки [9], [11], [13], [14] в 2000–2006 гг. была решена проблема топологической классификации каскадов Морса–Смейла на 3-многообразиях либо без гетероклинических точек (градиентоподобных каскадов), либо без гетероклинических кривых. Полная топологическая классификация для множества $\mathrm{MS}(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3, анонсирована в работах О. В. Починки [62], [63], подробное доказательство изложено в [64]. Везде далее через $\mathrm{MS}(M^n)$, $n \geqslant 1$, мы будем обозначать множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на замкнутых ориентируемых n-многообразиях M^n.

В силу того, что системы Морса–Смейла существуют на любом компактном многообразии, интересным и важным является вопрос о взаимосвязи между динамикой таких систем и топологической структурой несущих многообразий. Первая работа в этом направлении принадлежит С. Смейлу [68], который с помощью неравенств Морса установил связь чисел Бетти объемлющего многообразия с числом и индексом состояний равновесия и замкнутых траекторий заданного на нем потока Морса–Смейла. В работе Дж. Фрэнкса [24] получены аналоги неравенств Морса для потоков Морса–Смейла без состояний равновесия. Заметим, что неблуждающее множество потоков Морса–Смейла без точек покоя состоит из периодических траекторий. В работе Д. Азимова [4] для таких потоков на многообразиях размерности $n \geqslant 4$ построено специальное разложение несущего многообразия на круговые ручки и доказано, что если многообразие допускает разложение на круговые ручки, то на данном многообразии существует поток Морса–Смейла без точек покоя. Топологическая структура трехмерного многообразия, допускающего поток Морса–Смейла без точек покоя, исследована в работе Дж. Моргана [49], где показано, что несущее многообразие представляет собой либо зейфертово многообразие, либо специальное объединение зейфертовых пространств и “толстых” торов $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$.

Прогресс в нахождении взаимоотношений между топологией 3-многообразия и динамикой заданного на нем каскада Морса–Смейла получен в работах Х. Бонатти, В. З. Гринеса, В. С. Медведева, Э. Пеку, Е. В. Жужомы. Так, в статье [10] получена полная топологическая классификация фазовых пространств каскадов Морса–Смейла без гетероклинических кривых на 3-многообразиях, а в работе [33] установлено, что объемлющее 3-многообразие градиентоподобного диффеоморфизма с ручно вложенными пучками одномерных сепаратрис седловых точек допускает разбиение Хегора, род которого однозначно определяется периодическими данными диффеоморфизма.

Еще одно концептуальное направление качественной теории связано с фундаментальной теоремой динамических систем, доказанной Ч. Конли [19] в 1978 г. Согласно этой теореме любая непрерывная динамическая система (поток или каскад) обладает непрерывной функцией Ляпунова, т. е. функцией, убывающей вдоль траекторий системы вне цепно рекуррентного множества и постоянной на цепных компонентах. Со многих точек зрения более содержательной является информация о существовании у гладкой динамической системы энергетической функции, т. е. гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Наиболее законченные результаты в этом направлении получены для систем Морса–Смейла, у которых цепно рекуррентное множество совпадает с множеством неподвижных точек и периодических орбит. С. Смейла [69] в 1961 г. доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, у *градиентоподобного потока* (потока Морса–Смейла без замкнутых траекторий). К. Мейер [44] в 1968 г. обобщил этот результат и построил энергетическую функцию, являющуюся функцией Морса–Ботта для произвольного потока Морса–Смейла. Напомним, что точка $p \in M^n$ называется *критической точкой* C^r-гладкой ($r \geqslant 2$) функции $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}$, если в некоторых локальных координатах $x_1, \dots, x_n$ ($x_j(p) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$) $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1}(p) = \dots = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) = 0$ ($\operatorname{grad} \psi(p) = 0$). Критическая точка p называется *невырожденной*, если матрица вторых производных $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_i\, \partial x_j}(p)$ (матрица Гесса) невырождена, в противном случае точка p называется *вырожденной.* Функция $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, и *функцией Морса–Ботта*, если гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении, нормальном к критическому множеству уровня.

В 1977 г. Д. Пикстон [61] установил существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях. Кроме того, он построил диффеоморфизм на 3-сфере, не обладающий энергетической функцией, и показал, что этот эффект связан с диким вложением сепаратрис седловых точек. Авторами обзора в сотрудничестве с Ф. Лауденбахом в работах [31], [32] исследованы условия существования энергетической функции для каскадов Морса–Смейла на 3-многообразиях. Из этих исследований стало понятно, что многие каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях не обладают энергетической функцией. Это означает, что любая функция Ляпунова для такой системы, являющаяся функцией Морса, имеет дополнительные критические точки (отличные от периодических точек диффеоморфизма). Это приводит к понятию функции Ляпунова с минимальным числом критических точек, которая в работе [30] названа *квазиэнергетической.* Там же выделен класс каскадов из множества Пикстона, не обладающих энергетической функцией, для которых построена квазиэнергетическая функция. Однако проблема построения квазиэнергетической функции для произвольных каскадов Морса–Смейла является открытой.

Существование у каскада Морса–Смейла энергетической функции накладывает определенные ограничения на его динамику. Однако оно не гарантирует, что диффеоморфизм, обладающий энергетической функцией, включается в какой-либо поток даже при отсутствии гетероклинических пересечений. Говорят, что диффеоморфизм f *включается в C^m-поток* ($m \geqslant 0$), если он является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий некоторого C^m-потока X^t ($f = X^1$). Проблема включения диффеоморфизма в поток является классической; детальный обзор результатов, полученных в этой области, изложен в [74]. В частности, из работ [52], [55], в которых доказана структурная устойчивость диффеоморфизмов Морса–Смейла, следует, что для любого многообразия M^n существует открытое в $\mathrm{Diff}^1(M^n)$ множество диффеоморфизмов Морса–Смейла, включающихся в топологический поток (C^0-поток). Заметим, что, согласно [16], множество C^2-диффеоморфизмов, включающихся в C^1-гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса–Смейла. В работе Дж. Палиса [52] найдены некоторые необходимые условия включения диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ в топологический поток, показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными, и поставлена задача обобщения этого результата на случай большей размерности. Авторами обзора в сотрудничестве с Е. Я. Гуревич и В. С. Медведевым в статьях [28] и [29] решена проблема Палиса в размерности $n = 3$.

Настоящий обзор имеет следующую структуру.

В разделе 1 приводятся необходимые для понимания динамики свойства диффеоморфизмов Морса–Смейла. Именно, изучается асимптотическое поведение, топология вложения и структура пространства орбит, принадлежащих сепаратрисам периодических точек.

В разделе 2 рассмотрен класс Пикстона, являющийся основой для понимания результатов всех последующих разделов. В п. 2.1 изложен подход к топологической классификации диффеоморфизмов класса Пикстона, обобщение которого приводит к полной топологической классификации произвольных диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях. В п. 2.2 построена простая дуга, соединяющая два топологически несопряженных каскада в классе Пикстона.

В разделе 3 настоящего обзора приводится полная топологическая классификация (включая реализацию) диффеоморфизмов из множества $\mathrm{MS}(M^3)$. Именно, доказывается, что полным топологическим инвариантом диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ является класс эквивалентности его схемы S_f, которая содержит информацию о периодических данных и топологии вложения в фазовое пространство двумерных инвариантных многообразий седловых точек диффеоморфизма f. Более того, на основе свойств этой схемы выделяется множество $\mathscr{S}$ абстрактных схем, по каждой из которых, $S \in \mathscr{S}$, конструируется диффеоморфизм $f_S \in \mathrm{MS}(M^3)$ такой, что схемы S_{f_S} и S эквивалентны.

В разделе 4 выводятся соотношения между числом $g_f = (r_f - l_f + 2)/2$, где r_f – число седловых, l_f – число узловых (источниковых или стоковых) периодических точек диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$, и топологией многообразия M^3. Получена топологическая классификация трехмерных замкнутых ориентируемых 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса–Смейла без гетероклинических кривых. Установлено, что эти многообразия являются либо трехмерной сферой, если $g_f = 0$, либо связной суммой[4] g_f копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Еще одно соотношение между числом g_f и топологией многообразия M^3 обнаруживается в том случае, когда диффеоморфизм f является градиентоподобным и имеет ручно вложенные пучки одномерных сепаратрис. В этом случае объемлющее многообразие M^3 допускает разбиение Хегора[5] рода g_f.

В разделе 5 изложены результаты, связанные с существованием энергетической функции у каскада Морса–Смейла на 3-многообразии. Так, в п. 5.1 построена квазиэнергетическая функция для подмножества диффеоморфизмов класса Пикстона. В п. 5.2 для градиентоподобного диффеоморфизма вводится понятие самоиндексирующейся энергетической функции и доказывается, что критерий ее существования связан с наличием специальных поверхностей Хегора рода g_f. В п. 5.3 для произвольного диффеоморфизма Морса–Смейла трехмерного многообразия вводится понятие динамически упорядоченной функции Морса–Ляпунова, свойства которой тесно связаны с динамикой диффеоморфизма. Показывается, что необходимые и достаточные условия существования

---

[4] Пусть X_1, X_2 – два компактных n-многообразия, $D_1 \subset X_1$, $D_2 \subset X_2$ – подпространства, гомеоморфные $\mathbb{D}^n$, $h_1 : \mathbb{D}^n \to D_1$ и $h_2 : \mathbb{D}^n \to D_2$ – соответствующие гомеоморфизмы. Пусть $g : \partial D_1 \to \partial D_2$ – гомеоморфизм такой, что отображение $h_2^{-1} g h_1\big|_{\partial\mathbb{D}^n} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ меняет ориентацию. Пространство $X_1 \sharp X_2 = (X_1 \setminus \operatorname{int} D_1) \cup_g (X_2 \setminus \operatorname{int} D_2)$ называется *связной суммой* пространств X_1, X_2.

[5] Трехмерное ориентируемое многообразие называется *ручечным телом рода* $g \geqslant 0$, если оно получено из 3-шара меняющим ориентацию отождествлением g пар попарно непересекающихся 2-дисков на границе шара. Граница ручечного тела – ориентируемая поверхность рода g. *Разбиение Хегора* рода $g \geqslant 0$ для многообразия M^3 – это представление M^3 в виде склейки двух ручечных тел рода g посредством некоторого диффеоморфизма их границ, общая граница этих тел называется *поверхностью Хегора* в многообразии M^3.

энергетической функции с такими свойствами определяются типом вложения инвариантных многообразий седловых орбит диффеоморфизма.

В разделе 6 для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях продемонстрированы принципиально новые препятствия для включения в поток по сравнению с их аналогами на поверхностях. Доказано, что критерием включения диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ в топологический поток является так называемая тривиальность его схемы S_f.

1. Основные свойства

Определение 1.1. Диффеоморфизм $f\colon M^n \to M^n$, заданный на гладком замкнутом (компактном без края) связном ориентируемом n-многообразии M^n $(n \geqslant 1)$, называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если

1) неблуждающее множество Ω_f конечно и гиперболично;

2) многообразия W^s_p, W^u_q пересекаются трансверсально для любых периодических точек p, q.

В этом разделе мы приводим необходимые для понимания динамики свойства диффеоморфизмов Морса–Смейла. Сформулированные ниже результаты частично анонсированы и доказаны в обзоре [71] и статьях [52], [55], исчерпывающее их доказательство можно найти в монографии [34]. Все факты приводятся для класса $\mathrm{MS}(M^n)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$, заданных на ориентируемых многообразиях M^n.

1.1. Динамика. Пусть $f \in \mathrm{MS}(M^n)$. Согласно определению 1.1, неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит из конечного числа периодических точек ($\Omega_f = \mathrm{Per}_f$). Гиперболическая структура множества Ω_f означает, что в каждой периодической точке $p \in \Omega_f$ периода m_p собственные значения якобиана $\left.\left(\dfrac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)\right|_p$ по модулю не равны единице. Отсюда следует существование инвариантных многообразий у каждой периодической точки p: *устойчивого* W^s_p и *неустойчивого* W^u_p, которые определяются в топологических терминах следующим образом:

$$W^s_p = \Big\{x \in M^n\colon \lim_{n\to+\infty} d(f^{nm_p}(x), p) = 0\Big\},$$
$$W^u_p = \Big\{x \in M^n\colon \lim_{n\to+\infty} d(f^{-nm_p}(x), p) = 0\Big\},$$

где d – метрика на M^n. Более того, $\dim W^s_p = n - q_p$ ($\dim W^u_p = q_p$), где q_p – число собственных значений якобиана $\left.\left(\dfrac{\partial f^{m_p}}{\partial x}\right)\right|_p$, по модулю больших единицы, называемое *индексом Морса*. В дальнейшем для любого подмножества $P \subset \Omega_f$ через W^u_P (W^s_P) обозначаем объединение неустойчивых (устойчивых) многообразий всех точек из P. Компонента связности ℓ^s_p (ℓ^u_p) множества $W^s_p \setminus p$ ($W^u_p \setminus p$) называется *устойчивой* (*неустойчивой*) *сепаратрисой точки* p. Число ν_p, которое равно $+1$, если отображение $f^{m_p}\big|_{W^u_p}$ сохраняет ориентацию, и -1, если отображение $f^{m_p}\big|_{W^u_p}$ меняет ориентацию, называется *типом ориентации* точки p. Тройка $(m_p, q_p, \nu_p) = (m_{\mathscr{O}_p}, q_{\mathscr{O}_p}, \nu_{\mathscr{O}_p})$ называется *периодическими данными* точки p или орбиты $\mathscr{O}_p$.

Периодическая точка p называется *седловой*, если $0 < q_p < n$, и *узловой* в противном случае, при этом p называется *стоком* (*источником*), если $q_p = 0$ ($q_p = n$). Поскольку диффеоморфизм $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ сохраняет ориентацию, то тип ориентации узловой точки равен $+1$, тогда как для седловой точки возможны оба типа ориентации $+1$, -1. Для $q \in \{0, \dots, n\}$ обозначим через Ω_q множество периодических точек с индексом Морса q, через k_f число всех периодических орбит и через k_q число периодических орбит с индексом Морса, меньшим или равным q.

Качественные свойства (с точки зрения топологической сопряженности) диффеоморфизмов Морса–Смейла во многом определяются вложением, расположением и асимптотическим поведением инвариантных многообразий периодических точек, описанными в следующем утверждении.

Утверждение 1.1. *Пусть* $f \in \mathrm{MS}(M^n)$. *Тогда*:

1) $M^n = \bigcup_{p\in\Omega_f} W^u_p$;

2) W^u_p *является гладким подмногообразием*[6] *многообразия* M^n, *гомеоморфным* $\mathbb{R}^{q_p}$ *для любой периодической точки* $p \in \Omega_f$;

3) $\mathrm{cl}(\ell^u_p)\setminus(\ell^u_p \cup p) = \bigcup_{r\in\Omega_f\colon \ell^u_p\cap W^s_r\neq\varnothing} W^u_r$ *для любой неустойчивой сепаратрисы* ℓ^u_p *любой периодической точки* $p \in \Omega_f$.

Поскольку устойчивое многообразие периодической точки диффеоморфизма f является неустойчивым многообразием этой же точки как периодической точки диффеоморфизма f^{-1}, то все утверждения для неустойчивых многообразий имеют место (с соответствующими изменениями) и для устойчивых многообразий.

В силу теоремы о локальной топологической классификации гиперболической неподвижной точки диффеоморфизма (см. теорему 5.5 в [53]), отображение f^{m_p} в точке p локально сопряжено линейному диффеоморфизму $a_{q_p,\nu_p}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданному формулой

$$a_{q_p,\nu_p}(x_1,\dots,x_n) = \left(\nu_p\cdot 2x_1, 2x_2,\dots,2x_{q_p}, \nu_p\,\frac{x_{q_p+1}}{2}, \frac{x_{q_p+2}}{2},\dots,\frac{x_n}{2}\right).$$

Назовем $a_{q,\nu}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *каноническим диффеоморфизмом.* Более того, обозначим через $a^u_{q,\nu}$ и $a^s_{q,\nu}$ его ограничения на $Ox_1\dots x_q$ и $Ox_{q+1}\dots x_n$ и назовем их

---

[6] Подмножество A C^r-многообразия X ($r \geqslant 0$) называется *C^r-подмногообразием*, если для некоторого целого числа $0 \leqslant k \leqslant n$ каждая точка множества A принадлежит карте (U,ψ) многообразия X такой, что $\psi(U\cap A) = \mathbb{R}^k$ или $\psi(U\cap A) = \mathbb{R}^k_+$, где $\mathbb{R}^k = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ и $\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^k\colon x_k \geqslant 0\}$. При этом A становится C^r-многообразием с картами $\bigl\{(U\cap A, \psi\big|_{U\cap A})\bigr\}$. C^0-подмногообразие называется также *топологическим подмногообразием.*

Классический факт топологии говорит о том, что подмножество A C^r-многообразия X с $r \geqslant 1$ является C^r-подмногообразие тогда и только тогда, когда оно является образом C^r-вложения, т.е. существуют C^r-многообразие B и регулярное C^r-отображение $g\colon B\to X$ (ранг матрицы Якоби отображения g в каждой точке равен размерности многообразия B), которое гомеоморфно отображает B в подпространство $A = g(B)$ с индуцированной из X топологией. Отображение g при этом называется *C^r-вложением.*

каноническим растяжением и *каноническим сжатием* соответственно. Согласно пункту 2) утверждения 1.1, $W^u_{\mathscr{O}_p}$ является гладким подмногообразием в M^n и, следовательно, отображение $f\big|_{W^u_{\mathscr{O}_p}}: W^u_{\mathscr{O}_p} \to W^u_{\mathscr{O}_p}$ является диффеоморфизмом. Эти обстоятельства позволяют получить глобальную топологическую классификацию отображений $f\big|_{W^u_{\mathscr{O}_p}}$ в следующем виде.

Утверждение 1.2. *Пусть $f \in \mathrm{MS}(M^n)$. Тогда для любой периодической точки $p \in \Omega_f$ диффеоморфизм $f^{m_p}\big|_{W^u_p}: W^u_p \to W^u_p$ топологически сопряжен с каноническим растяжением $a^u_{q_p,\nu_p}: \mathbb{R}^{q_p} \to \mathbb{R}^{q_p}$.*

В случае, когда периодическая точка диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ является седловой, информативным становится не только вложение в объемлющее пространство ее инвариантных многообразий, но и вложение f-инвариантной окрестности ее орбиты.

Для $q \in \{1, \dots, n-1\}$, $t \in (0, 1]$ положим $\mathscr{N}^t_q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1^2 + \dots + x_q^2)(x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2) < t\}$ и $\mathscr{N}^1_q = \mathscr{N}_q$. Заметим, что множество $\mathscr{N}^t_q$ является инвариантным относительно канонического диффеоморфизма $a_{q,\nu}$, имеющего единственную неподвижную седловую точку в начале координат O с неустойчивым многообразием $W^u_O = Ox_1 \dots x_q$ и устойчивым многообразием $W^s_O = Ox_{q+1} \dots x_n$.

Определение 1.2. Пусть $f \in \mathrm{MS}(M^n)$. Окрестность N_σ седловой точки $\sigma \in \Omega_f$ назовем *линеаризующей*, если существует гомеоморфизм $\mu_\sigma: N_\sigma \to \mathscr{N}_{q_\sigma}$, сопрягающий диффеоморфизм $f^{m_\sigma}\big|_{N_\sigma}$ с каноническим диффеоморфизмом $a_{q_\sigma,\nu_\sigma}\big|_{\mathscr{N}_{q_\sigma}}$.

Окрестность $N_{\mathscr{O}_\sigma} = \bigcup_{k=0}^{m_\sigma-1} f^k(N_\sigma)$, оснащенную отображением $\mu_{\mathscr{O}_\sigma}$, составленным из гомеоморфизмов $\mu_\sigma f^{-k}: f^k(N_\sigma) \to \mathscr{N}_{q_\sigma}$, $k = 0, \dots, m_\sigma - 1$, будем называть *линеаризующей окрестностью* орбиты $\mathscr{O}_\sigma$ и гомеоморфизм $\mu_{\mathscr{O}_\sigma}$ – *линеаризующим*.

Утверждение 1.3. *Любая седловая точка (орбита) диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ обладает линеаризующей окрестностью.*

Определим в окрестности $\mathscr{N}_q$ пару трансверсальных слоений $\mathscr{F}^u_q$, $\mathscr{F}^s_q$ следующим образом:

$$\mathscr{F}^u_q = \bigcup_{(c_{q+1},\dots,c_n) \in Ox_{q+1}\dots x_n} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{N}_q : (x_{q+1}, \dots, x_n) = (c_{q+1}, c_n)\},$$

$$\mathscr{F}^s_q = \bigcup_{(c_1,\dots,c_q) \in Ox_1\dots x_q} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{N}_q : (x_1, \dots, x_q) = (c_1, \dots, c_q)\}.$$

Заметим, что канонический диффеоморфизм $a_{q,\nu}$ переводит слои слоения $\mathscr{F}^u_q$ ($\mathscr{F}^s_q$) в слои этого же слоения. В силу утверждения 1.3, для любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ слоения $\mathscr{F}^u_{q_\sigma}$, $\mathscr{F}^s_{q_\sigma}$ индуцируют посредством линеаризующего гомеоморфизма f-инвариантные слоения $F^u_{\mathscr{O}_\sigma}$, $F^s_{\mathscr{O}_\sigma}$ на линеаризующей окрестности $N_{\mathscr{O}_\sigma}$, которые называются *линеаризующими* (см. рис. 1).

Согласно пункту 1) утверждения 1.1, инвариантные многообразия периодических точек диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ являются подмногообразиями

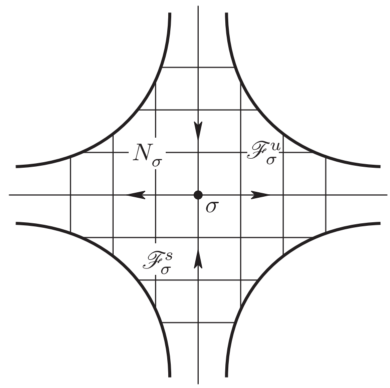


Рис. 1. Линеаризующие слоения в линеаризующей окрестности

многообразия M^n. Тем не менее замыкание инвариантного многообразия седловой точки может иметь сложную топологическую структуру. Это явление может иметь как динамическую, так и чисто топологическую природу. Первый случай соответствует ситуации, когда сепаратриса седловой точки участвует в гетероклинических пересечениях.

Определение 1.3. Если σ_1, σ_2 – различные периодические седловые точки диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$, для которых $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2} \neq \varnothing$, то пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ называется *гетероклиническим*. При этом:

– в случае $\dim(W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}) > 0$ компонента связности пересечения $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ называется *гетероклиническим многообразием*, а в случае $\dim(W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}) = 1$ – *гетероклинической кривой* (см. рис. 2);

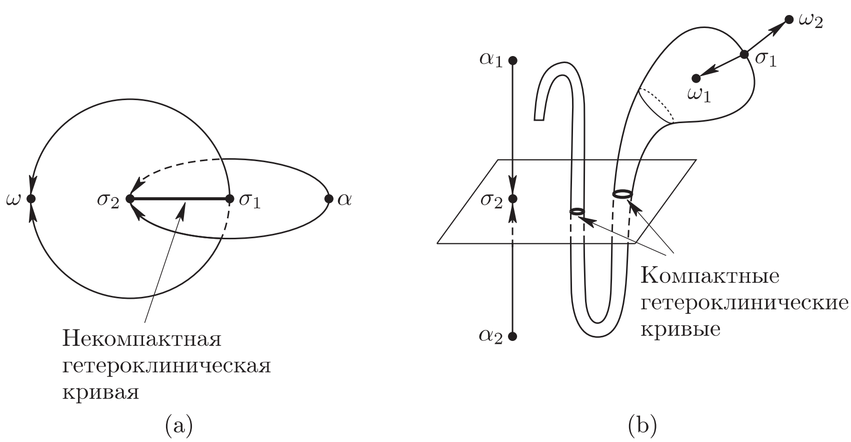


Рис. 2. Гетероклинические кривые

– в случае $\dim(W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}) = 0$ пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется *гетероклинической точкой*, а орбита гетероклинической точки называется *гетероклинической орбитой* (см. рис. 3).

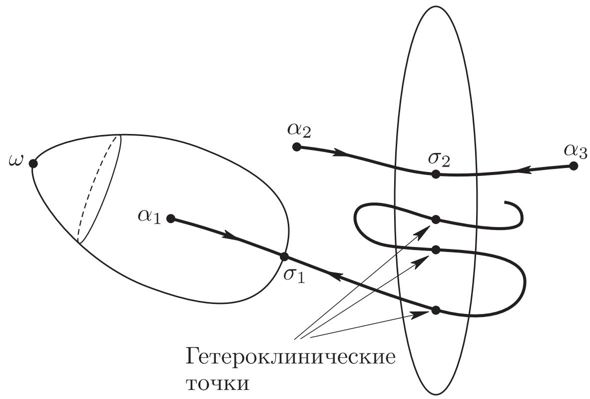


Рис. 3. Гетероклинические точки

Определение 1.4. Диффеоморфизм $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ называется градиентоподобным, если из условия $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2} \neq \varnothing$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $\dim W^u_{\sigma_1} < \dim W^u_{\sigma_2}$.

Из условия трансверсальности пересечения инвариантных многообразий непосредственно следует, что диффеоморфизм $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ является градиентоподобным, если и только если он не имеет гетероклинических точек.

В силу пункта 3) утверждения 1.1, замыкание сепаратрисы седловой точки, участвующей в гетероклиническом пересечении, не имеет структуры топологического многообразия, в противном случае оно является топологически вложенным многообразием, поскольку получается компактификацией евклидова пространства одной точкой. Напомним, что C^0-отображение $g\colon B \to X$ называется *топологическим вложением* топологического многообразия B в многообразие X, если оно гомеоморфно отображает B на подпространство $g(B)$ с индуцированной из X топологией. При этом образ $A = g(B)$ называется *топологически вложенным многообразием*. Заметим, что топологически вложенное многообразие не является топологическим подмногообразием в общем случае. Если A – подмногообразие, то оно называется *ручным* или *ручно вложенным*, в противном случае A называется *диким* или *дико вложенным* и точки, в которых не выполняются условия определения топологического подмногообразия, называются *точками дикости*.

Утверждение 1.4. *Пусть $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ и σ – седловая точка f такая, что неустойчивая сепаратриса ℓ^u_σ не участвует в гетероклинических пересечениях. Тогда*

$$\mathrm{cl}(\ell^u_\sigma) \setminus (\ell^u_\sigma \cup \sigma) = \{\omega\},$$

где ω – стоковая периодическая точка. При этом, если $q_\sigma = 1$, то $\mathrm{cl}(\ell^u_\sigma)$ есть топологически вложенная дуга в M^n, а если $q_\sigma \geqslant 2$, то $\mathrm{cl}(\ell^u_\sigma)$ есть топологически вложенная в M^n сфера $\mathbb{S}^{q_\sigma}$.

В силу пункта 2) утверждения 1.1, множество $\ell^u_\sigma \cup \sigma$ является гладким подмногообразием многообразия M^n. Однако многообразие $\mathrm{cl}(\ell^u_\sigma)$ может оказаться диким в точке ω, в этом случае сепаратриса ℓ^u_σ называется *дикой*, в противном случае она называется *ручной*.

В случае $n = 2$ результаты Э. Мойса [48] гарантируют, что любая компактная дуга и, следовательно, любая сепаратриса без гетероклинических точек ручно вложена в M^2. Пример (не связанный с динамикой) компактной дикой дуги в $\mathbb{S}^3$ с одной точкой дикости был построен Э. Артином и Р. Фоксом [3] в 1948 г. В 1977 г. Д. Пикстон [63] реализовал эту дугу сепаратрисами седловой точки диффеоморфизма Морса–Смейла на 3-сфере (см. рис. 4). В следующем утверждении сформулирован критерий ручного вложения сепаратрис седловых точек диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ в объемлющее 3-многообразие.

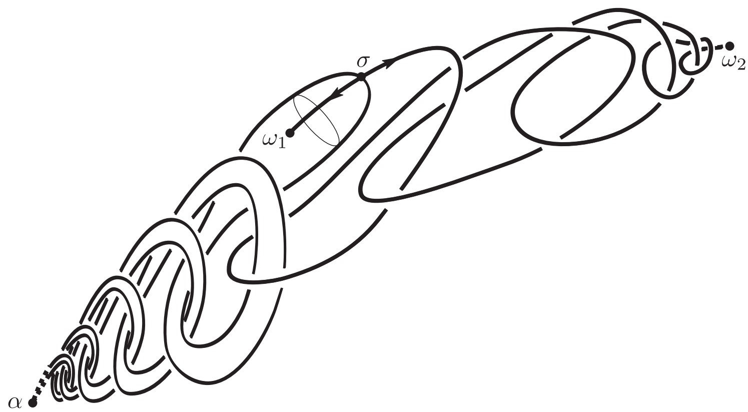


Рис. 4. Пример Пикстона

Утверждение 1.5. *Пусть $f \in \mathrm{MS}(M^3)$, ω – стоковая точка и ℓ^u_σ – одномерная (двумерная) сепаратриса седла σ такая, что $\ell^u_\sigma \subset W^s_\omega$. Сепаратриса ℓ^u_σ является ручно вложенной в M^3 тогда и только тогда, когда существует гладкий 3-шар $B_\omega \subset W^s_\omega$, содержащий ω в своей внутренности и такой, что сепаратриса ℓ^u_σ пересекает ∂B_ω в единственной точке (по единственной окружности).*

Поскольку сопрягающий гомеоморфизм должен переводить инвариантные многообразия периодических точек одного диффеоморфизма в аналогичные многообразия другого, становится очевидным существование по крайней мере двух топологически несопряженных диффеоморфизмов, имеющих изоморфные графы, – это диффеоморфизм f, все сепаратрисы которого являются ручными, и диффеоморфизм f', среди сепаратрис которого есть дикие (см. рис. 5). Отсюда следует, что граф не является полным топологическим инвариантом и нужны механизмы, отслеживающие не только асимптотику сепаратрис, но и топологию их вложения. Для этого нам понадобится небольшой экскурс в теорию действия групп на многообразии. Основным источником информации, приведенной в следующем пункте, является замечательная книга [38].

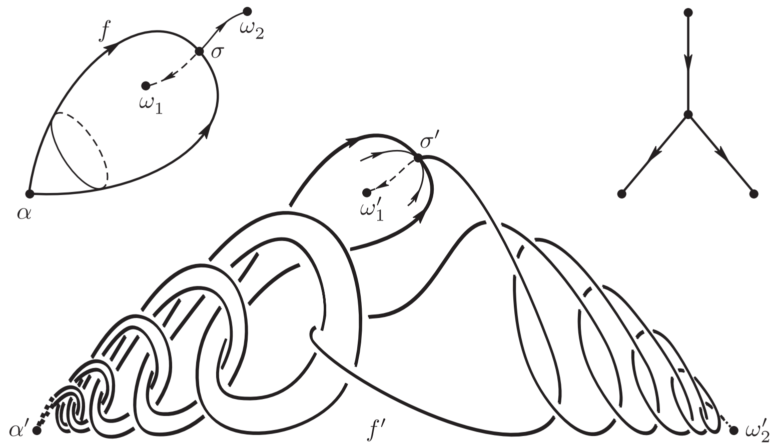


Рис. 5. Диффеоморфизмы класса Пикстона, не являющиеся топологически сопряженными

1.2. Пространства орбит. Пусть $g\colon X \to X$ – диффеоморфизм многообразия X и n_X – число компонент связности многообразия X. Обозначим через X/g пространство g-орбит на X и через $p_g\colon X \to X/g$ естественную проекцию. Для простоты изложения мы будем предполагать, что пространство X/g связно. Говорят, что g действует *разрывно* на X, если для любого компактного множества $K \subset X$ множество элементов $k \in \mathbb{Z}$ таких, что $g^k(K) \cap K \neq \varnothing$, конечно. В случае такого действия проекция p_g является накрытием, которое индуцирует гомоморфизм $\eta_g\colon \pi_1(X/g) \to \mathbb{Z}$ следующим образом. Обозначим через $p_g^{-1}(\widehat{x})$ прообраз точки $\widehat{x} \in X/g$ относительно p_g. Заметим, что $p_g^{-1}(\widehat{x})$ является орбитой любой точки $x \in p_g^{-1}(\widehat{x})$. Пусть $\widehat{c}$ – петля в X/g такая, что $\widehat{c}(0) = \widehat{c}(1) = \widehat{x}$. В силу теоремы о монодромии существует петля c в X с началом в точке x ($c(0) = x$), которая является поднятием пути c. Более того, существует элемент $k \in n_X\mathbb{Z}$ такой, что $c(1) = g^k(x)$. Здесь $n_X\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел, кратных n_X. Пусть $\eta_g\colon \pi_1(X/g) \to n_X\mathbb{Z}$ – отображение, переводящее $[\widehat{c}]$ в k. *Фундаментальной областью действия g на X* называется замкнутое множество $D_g \subset X$, для которого существует множество $\widetilde{D}_g$ со следующими свойствами:

1) $\mathrm{cl}(\widetilde{D}_g) = D_g$;

2) $g^k(\widetilde{D}_g) \cap \widetilde{D}_g = \varnothing$ для всех $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$;

3) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} g^k(\widetilde{D}_g) = X$.

Утверждение 1.6. *Пусть диффеоморфизм g действует разрывно на n-многообразии X. Тогда*:

1) *естественная проекция $p_g\colon X \to X/g$ является накрытием*;

2) *пространство орбит X/g является гладким n-многообразием*;

3) *для фундаментальной области D_g действия g на X пространства орбит D_g/g и X/g гомеоморфны*;

4) *отображение $\eta_{X/g}\colon \pi_1(X/g) \to n_X\mathbb{Z}$ является эпиморфизмом.*

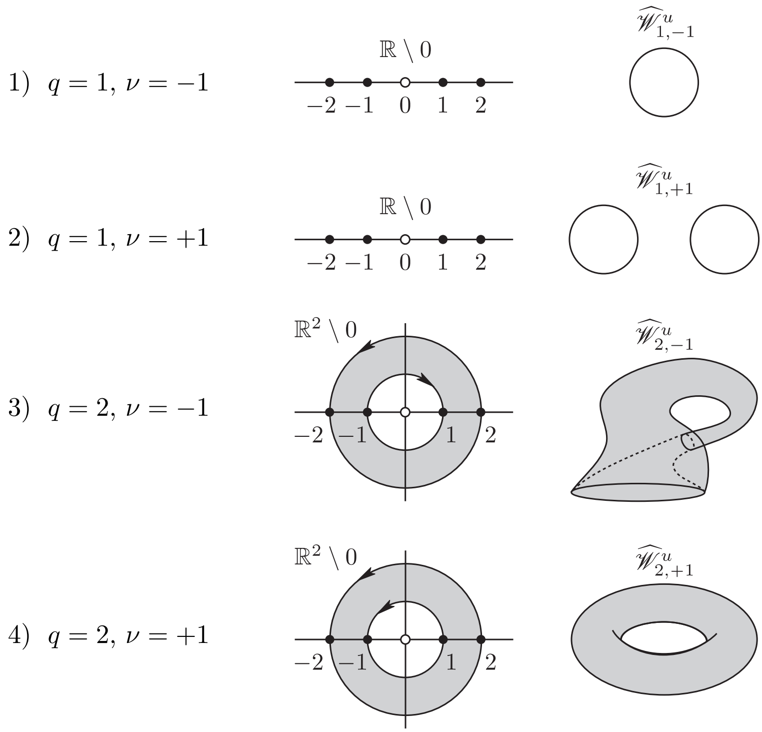


Рис. 6. Пространства орбит канонического растяжения

Проиллюстрируем вышеприведенное утверждение на пространстве орбит $\widehat{\mathscr{W}}^u_{q,\nu} = (\mathbb{R}^q \setminus O)/a^u_{q,\nu}$ действия канонического растяжения $a^u_{q,\nu}$ на $\mathbb{R}^q \setminus O$ для $q \in \{1, \dots, n\}$, $\nu \in \{+1, -1\}$. Это действие является разрывным, и его фундаментальная область имеет вид $\{(x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q \colon 1 \leqslant x_1^2 + \dots + x_q^2 \leqslant 4\}$ (см. рис. 6), что приводит к следующему списку пространств:

1) пространство $\widehat{\mathscr{W}}^u_{1,-1}$ гомеоморфно окружности $\mathbb{S}^1$;

2) пространство $\widehat{\mathscr{W}}^u_{1,+1}$ гомеоморфно паре окружностей $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$;

3) пространство $\widehat{\mathscr{W}}^u_{2,-1}$ гомеоморфно бутылке Клейна;

4) пространство $\widehat{\mathscr{W}}^u_{2,+1}$ гомеоморфно двумерному тору $\mathbb{T}^2$;

5) пространство $\widehat{\mathscr{W}}^u_{q,-1}$, $q \geqslant 3$, гомеоморфно обобщенной бутылке Клейна (топологическому пространству, которое получается из $\mathbb{S}^{q-1} \times [0,1]$ отождествлением его границ посредством отображения $g \colon \mathbb{S}^{q-1} \times \{0\} \to \mathbb{S}^{q-1} \times \{1\}$, заданного формулой $g(x_1, x_2, \dots, x_q, 0) = (-x_1, x_2, \dots, x_q, 1)$);

6) пространство $\widehat{\mathscr{W}}^u_{q,+1}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{S}^1$.

Следующий результат частично объясняет, как топологическая классификация диффеоморфизмов сводится к манипуляциям с топологическими объектами.

Утверждение 1.7. *Пусть диффеоморфизмы g, g' действуют разрывно на многообразиях X, X' соответственно и пространства X/g, X'/g' являются связными. Тогда*:

1) *если $h\colon X\to X$ – гомеоморфизм (диффеоморфизм) такой, что $hg=g'h$, то отображение $\widehat{h}\colon X/g\to X'/g'$, заданное формулой $\widehat{h}=p_{g'}hp_g^{-1}$, является гомеоморфизмом и $\eta_g=\eta_{g'}\widehat{h}_*$, где $\widehat{h}_*$ – индуцированный гомеоморфизмом $\widehat{h}$ изоморфизм*;

2) *если $\widehat{h}\colon X/g\to X'/g'$ – гомеоморфизм (диффеоморфизм) такой, что $\eta_g=\eta_{g'}\widehat{h}_*$, то для любых точек $x\in X$ и $x'\in p_{g'}^{-1}(\widehat{h}(p_g(\widehat{x})))$ существует единственный гомеоморфизм $h\colon X\to X'$, являющийся поднятием $\widehat{h}$ и такой, что $hg=g'h$, $h(x)=x'$.*

Из утверждений 1.2 и 1.7 получаем следующий факт.

Утверждение 1.8. *Пусть p – периодическая точка с индексом Морса $q_p\geqslant 1$ диффеоморфизма $f\in \mathrm{MS}(M^n)$. Тогда пространство орбит $\widehat{W}^u_{\mathscr{O}_p}=(W^u_{\mathscr{O}_p}\setminus\mathscr{O}_p)/f$ является гладким q_p-многообразием, гомеоморфным $\widehat{\mathscr{W}}^u_{q_p,\nu_p}$.*

2. Класс Пикстона

Обозначим через $\mathscr{P}$ класс диффеоморфизмов Морса–Смейла $f\in\mathrm{MS}(M^3)$, неблуждающее множество которых состоит из неподвижного источника α, неподвижного седла σ и неподвижных стоков ω_1, ω_2. Пример Пикстона принадлежит именно этому классу, и мы называем класс $\mathscr{P}$ *классом Пикстона*.

2.1. Полный топологический инвариант. В этом пункте мы изложим подход к топологической классификации диффеоморфизмов класса Пикстона, обобщение которого приводит к полной топологической классификации произвольных диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях (см. раздел 3).

2.1.1. *Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности.* Положим $V_f=W^u_{\alpha_f}\setminus\alpha_f$, $\widehat{V}_f=V_f/f$ и обозначим через $p_f\colon V_f\to\widehat{V}_f$ естественную проекцию. В силу утверждения 1.8, факторпространство $\widehat{V}_f$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$, из утверждения 1.6 следует, что проекция $p_f\colon V_f\to\widehat{V}_f$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм $\eta_f\colon\pi_1(\widehat{V}_f)\to\mathbb{Z}$. Согласно утверждению 1.8, пространство $\widehat{L}^s_f=p_f(W^s_{\sigma_f}\setminus\sigma_f)$ является двумерным тором, гладко вложенным в многообразие $\widehat{V}_f$. При этом тор $\widehat{L}^s_f$ является *гомотопически нетривиальным*, т. е. $i_{\widehat{L}^s_f*}(\pi_1(\widehat{L}^s_f))\neq 0$, где $i_{\widehat{L}^s_f*}\colon\widehat{L}^s_f\to\widehat{V}_f$ – отображение включения. Более того, из определения эпиморфизма η_f следует, что $\eta_f(i_{\widehat{L}^s_f*}(\pi_1(\widehat{L}^s_f)))=\mathbb{Z}$ (см. рис. 7).

Определение 2.1. Набор $S_f=(\widehat{V}_f,\eta_f,\widehat{L}^s_f)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f\in\mathscr{P}$.

На рис. 7 представлены геометрические составляющие схем S_f, $S_{f'}$ диффеоморфизмов f, f', фазовые портреты которых изображены на рис. 5. В действительности на рис. 7 изображены фундаментальные области действия диффеоморфизмов f, f' на V_f, $V_{f'}$ соответственно. Каждая фундаментальная область

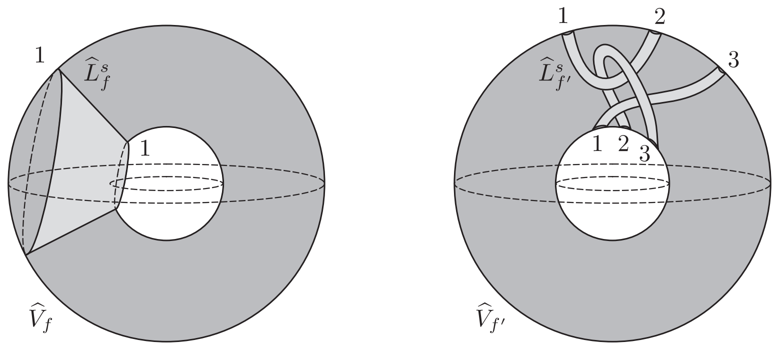


Рис. 7. Схемы диффеоморфизмов класса Пикстона

является трехмерным кольцом, из которого пространства орбит $\widehat{V}_f$, $\widehat{V}_{f'}$ получаются отождествлением граничных сфер кольца посредством диффеоморфизма f, f'. При этом пространства орбит $\widehat{L}^s_f$, $\widehat{L}^s_{f'}$ получаются из цилиндров отождествлением окружностей с одинаковыми номерами.

Из утверждения 1.7 следует, что если диффеоморфизмы $f, f' \in \mathscr{P}$ топологически сопряжены, то их схемы эквивалентны в смысле следующего определения.

Определение 2.2. Схемы S_f, $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in \mathscr{P}$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

1) $\eta_f = \eta_{f'}\widehat{\varphi}_*$;
2) $\widehat{\varphi}(\widehat{L}^s_f) = \widehat{L}^s_{f'}$.

В действительности класс эквивалентности схемы является полным топологическим инвариантом для диффеоморфизма Пикстона.

Теорема 2.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in \mathscr{P}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы S_f, $S_{f'}$ эквивалентны.*

Идея доказательства состоит в следующем. Согласно пункту 1) утверждения 1.1, объемлющее многообразие представляется в виде объединения $M^3 = V_f \cup W^u_\sigma \cup \Omega_f$. В силу утверждения 1.7, из существования гомеоморфизма $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$, осуществляющего эквивалентность схем S_f, $S_{f'}$, следует существование гомеоморфизма $\varphi\colon V_f \to V_{f'}$, сопрягающего диффеоморфизмы $f\big|_{V_f}$, $f'\big|_{V_{f'}}$ и такого, что $\varphi(W^s_\sigma \setminus \sigma) = W^s_{\sigma'} \setminus \sigma'$. В общем случае этот гомеоморфизм не продолжается на множество W^u_σ. Однако φ можно модифицировать в линеаризующей окрестности N_σ так, чтобы он переводил слои линеаризующего слоения F^s_σ в слои линеаризующего слоения $F^s_{\sigma'}$ и, следовательно, единственным образом продолжался до искомого сопрягающего гомеоморфизма.

Такая модификация осуществляется в пространствах орбит $\widehat{V}_f$, $\widehat{V}_{f'}$, куда линеаризующие окрестности N_σ, $N_{\sigma'}$ проектируются как трубчатые окрестности $N(\widehat{L}^s_f)$, $N(\widehat{L}^s_{f'})$ торов $\widehat{L}^s_f$, $\widehat{L}^s_{f'}$, расслоенные двумерными слоями $\widehat{F}^s_\sigma$, $\widehat{F}^s_{\sigma'}$, являющимися проекциями в силу p_f, $p_{f'}$ двумерных линеаризующих слоев F^s_σ, $F^s_{\sigma'}$

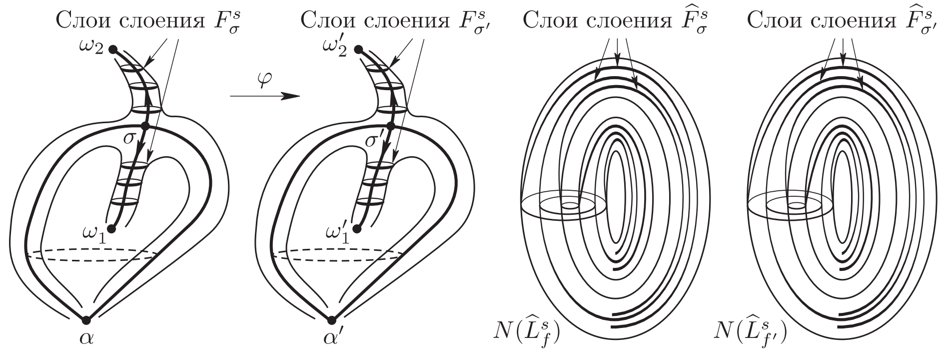


Рис. 8. Построение сопрягающего гомеоморфизма

соответственно (см. рис. 8). Слоение F^s_σ ($F^s_{\sigma'}$) имеет единственный компактный слой $\widehat{L}^s_f$ ($\widehat{L}^s_{f'}$), и группа его голономий[7] $\mathrm{Hol}(\widehat{L}^s_f, \widehat{x})$ ($\mathrm{Hol}(\widehat{L}^s_{f'}, \widehat{x}'))$ является бесконечной циклической группой. Образующая этой группы является ростком растяжения интервала с одной неподвижной точкой. Поскольку все такие растяжения топологически сопряжены в окрестности неподвижной точки, то голономии $\mathrm{Hol}(\widehat{L}^s_f, \widehat{x})$, $\mathrm{Hol}(\widehat{L}^s_{f'}, \widehat{x}')$ являются сопряженными. Более того, сопрягающий гомеоморфизм можно выбрать совпадающим с $\widehat{\varphi}$ на $\widehat{L}^s_f$. Тогда существуют окрестности $U(\widehat{L}^s_f)$, $U(\widehat{L}^s_{f'})$ торов $\widehat{L}^s_f$, $\widehat{L}^s_{f'}$ и гомеоморфизм $\widehat{\varphi}_0\colon U(\widehat{L}^s_f) \to U(\widehat{L}^s_{f'})$, совпадающий с $\widehat{\varphi}$ на $\widehat{L}^s_f$ и переводящий слои слоений $\widehat{F}^s_\sigma\big|_{U(\widehat{L}^s_f)}$ в слои слоений $\widehat{F}^s_{\sigma'}\big|_{U(\widehat{L}^s_{f'})}$ (см., например, [17; гл. IV, теорема 2]).

Определим отображение $\widehat{\phi}$ на $U(\widehat{L}^s_f)$ формулой $\widehat{\phi} = \widehat{\varphi}^{-1}\widehat{\varphi}_0$. Отождествим окрестность $U(\widehat{L}^s_f)$ с множеством $\mathbb{T}^2 \times [-1,1]$. Построим изотопию $\widehat{\phi}_t\colon \mathbb{T}^2 \times [-1,1] \to \mathbb{T}^2 \times [-1,1]$ такую, что $\widehat{\phi}_0 = \widehat{\phi}$, $\widehat{\phi}_1 = \mathrm{id}\big|_{\mathbb{T}^2\times[-1,1]}$ и $\widehat{\phi}_t(\mathbb{T}^2 \times \{0\}) = \mathbb{T}^2 \times \{0\}$ для $t \in [0,1]$ следующим образом. Определим отображения $h_{+,t}\colon \mathbb{T}^2 \times [t,1] \to \mathbb{T}^2 \times [0,1]$ и $h_{-,t}\colon \mathbb{T}^2 \times [-1,-t] \to \mathbb{T}^2 \times [-1,0]$, $t \in [0,1)$, формулами

$$h_{+,t}(x,s) = \left(x, \frac{s-t}{1-t}\right), \qquad h_{-,t}(x,s) = \left(x, \frac{s+t}{-1+t}\right),$$

[7]Пусть $\mathscr{F}$ – гладкое слоение коразмерности m на n-многообразии и F – компактный слой этого слоения. Пусть Σ – гладкая локальная секущая размерности m к слоям слоения $\mathscr{F}$, проходящая через точку $x \in F$. Тогда каждой замкнутой в точке x петле $c \subset F$ соответствует диффеоморфизм $\psi_c\colon \Sigma \to \Sigma$ с неподвижной точкой x, переводящий точку $y \in \Sigma$ на слое слоения $\mathscr{F}$ в точку первого возвращения этого слоя на секущую Σ вдоль петли c. Если $c' \in [c] \in \pi_1(F,x)$, то отображения $\psi_{c'}$ и ψ_c совпадают в некоторой окрестности точки x, т. е. принадлежат одному и тому же *ростку* диффеоморфизмов Σ в точке x. Таким образом, отображение $c \to \psi_c$ индуцирует гомоморфизм $\Phi\colon \pi_1(F,x) \to G(\Sigma,x)$ из фундаментальной группы слоя F в точке x в группу ростков диффеоморфизмов Σ в точке $\widehat{x}$. Группа $\mathrm{Hol}(F,x) = \Phi(\pi_1(F,x))$ называется *группой голономий* F в точке x. Голономии F и F' называются *сопряженными*, если существуют секущие Σ, Σ', трансверсальные F, F' в точках $x \in F$, $x' \in F'$, и гомеоморфизм $h\colon F \cup \Sigma \to F' \cup \Sigma'$ такой, что $\psi_{h(c)} = h\psi_c h^{-1}$ для любого $[c] \in \pi_1(F,x)$ вблизи точки x'.

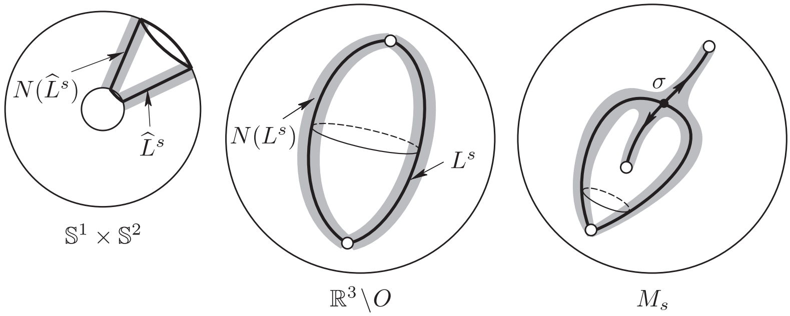


Рис. 9. Реализация абстрактной схемы

положим

$$\widehat{\phi}_t(x,s) = \begin{cases} h_{-,t}^{-1}\widehat{\phi}h_{-,t}(x,s), & s \in [-1,-t], \\ (x,s), & |s| \leqslant t, \\ h_{+,t}^{-1}\widehat{\phi}h_{+,t}(x,s), & s \in [t,1], \end{cases}$$

и продолжим семейство $\widehat{\phi}_t$, $t \in [0,1)$, по непрерывности отображением $\widehat{\phi}_1(x,s) = (x,s)$. Тогда существует гомеоморфизм $\widehat{\Phi}\colon U(\widehat{L}^s_f) \to U(\widehat{L}^s_f)$, тождественный на границе $\partial U(\widehat{L}^s_f)$ и совпадающий с $\widehat{\phi}$ в некоторой окрестности $\widehat{L}^s_f$ (см., например, [10; следствие 3.14]). Отсюда следует, что гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\widehat{\Phi}$ является искомой модификацией гомеоморфизма $\widehat{\varphi}$.

2.1.2. *Реализация.* Чтобы описать идею реализации диффеоморфизмов класса Пикстона, представим многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ как пространство орбит $(\mathbb{R}^3 \setminus O)/a^u_{3,+1}$ действия канонического растяжения на $\mathbb{R}^3 \setminus O$. В силу утверждения 1.6, естественная проекция $p_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}\colon \mathbb{R}^3 \setminus O \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ этого действия является накрытием и индуцирует эпиморфизм $\eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}\colon \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$. Из утверждений 1.2, 1.7 следует, что схема любого диффеоморфизма $f \in \mathscr{P}$ эквивалентна (в смысле определения 2.2) набору $S = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}, \widehat{L}^s)$, где $\widehat{L}^s \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – двумерный тор такой, что $\eta(i_{\widehat{L}^s*}(\pi_1(\widehat{L}^s))) = \mathbb{Z}$. Любой такой набор S называется *абстрактной схемой.* Имеет место следующая теорема реализации.

Теорема 2.2. *Для любой абстрактной схемы $S = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}, \widehat{L}^s)$ существует диффеоморфизм $f_S \in \mathscr{P}$, схема которого эквивалентна S.*

Возможность реализации абстрактной схемы $S = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \eta_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}, \widehat{L}^s)$ диффеоморфизмом из класса Пикстона основана на следующем наблюдении. Выберем трубчатую окрестность $N(\widehat{L}^s) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ тора $\widehat{L}^s$. Положим $L^s = p^{-1}_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}(\widehat{L}^s)$ и $N(L^s) = p^{-1}_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}(N(\widehat{L}^s))$. Поскольку окрестность $N(\widehat{L}^s)$ гомеоморфна пространству орбит $(\mathscr{N}_1 \setminus W^u_O)/a_{1,+1}$, то, в силу утверждения 1.7, существует диффеоморфизм $\nu_s\colon N(L^s) \to \mathscr{N}_1 \setminus W^u_O$, сопрягающий диффеоморфизмы $a^u_{3,+1}\big|_{N(L^s)}$ и $a_{1,+1}\big|_{\mathscr{N}_1\setminus W^u_O}$. Это обстоятельство позволяет “вклеить окрестность линейного седла” в многообразие $\mathbb{R}^3 \setminus O$ (см. рис. 9). Последнее означает существование на многообразии $M_s = (\mathbb{R}^3 \setminus O) \cup_{\nu_s} \mathscr{N}_1$ диффеоморфизма $f_{M_s}\colon M_s \to M_s$, неблуждающее множество которого состоит из единственной гиперболической седловой

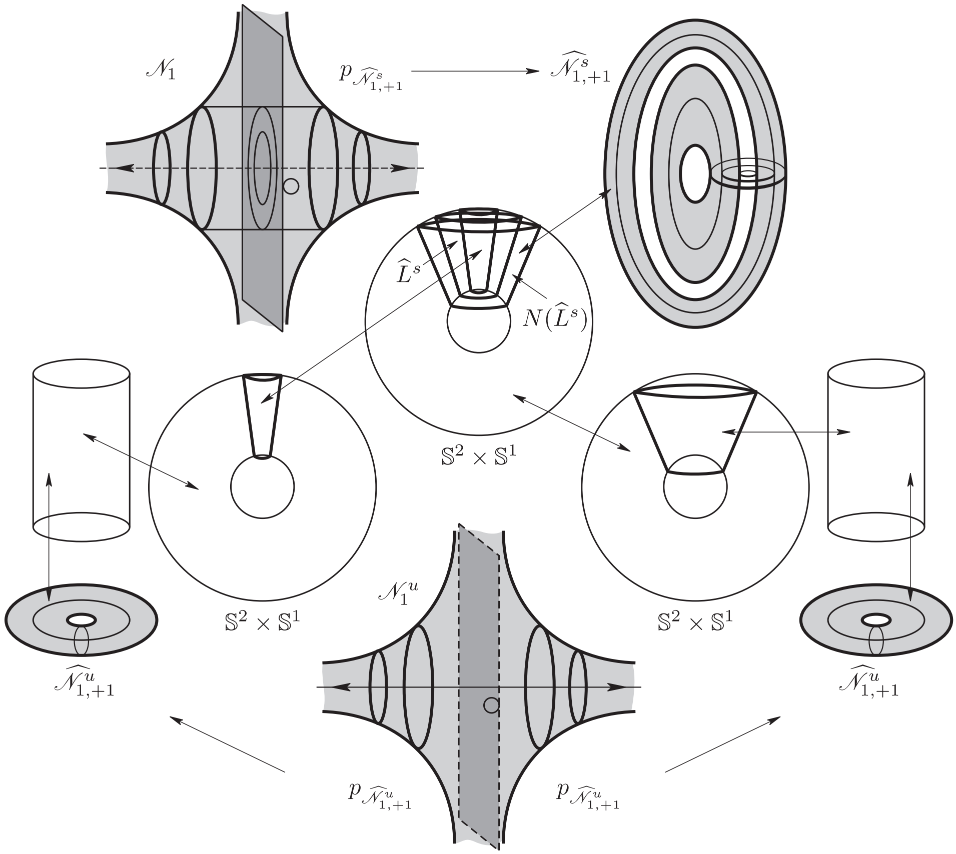


Рис. 10. Перестройка вдоль тора

точки σ с индексом Морса 1, а его ограничение на многообразие $R_u = M_s \setminus W^u_\sigma$ топологически сопряжено каноническому растяжению $a^u_{3,+1}$.

Многообразие $R_s = M_s \setminus W^s_\sigma$ получается из многообразия $\mathbb{R}^3 \setminus O$ удалением множества $N(L^s)$ и вклеиванием множества $\mathscr{N}_1 \setminus W^s_O$. Тогда пространство орбит R_s/f_s получается из исходного многообразия $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ так называемой *перестройкой вдоль тора* $\widehat{L}^s$. Эта хирургическая операция состоит в удалении трубчатой окрестности $N(\widehat{L}^s)$ (гомеоморфной пространству орбит $\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,+1} = (\mathscr{N}_1 \setminus W^u_O)/a_{1,+1}$) и приклеивании к границе полученного многообразия двух заполненных торов (гомеоморфных пространству орбит $\widehat{\mathscr{N}}^u_{1,+1} = (\mathscr{N}_1 \setminus W^s_O)/a_{1,+1}$) так, что меридиан заполненного тора (граница двумерного диска в заполненном торе, не стягиваемая на граничном торе) отождествляется с гомотопически тривиальной в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ кривой (см. рис. 10). Поскольку тор $\widehat{L}^s$ является гомотопически нетривиальным в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то он ограничивает заполненный тор в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см., например, [9; теорема 4]). Так как многообразие, полученное из двух заполненных торов, склеенных по границам посредством диффеоморфизма, переводящего меридиан в меридиан, диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см., например, [23; предложение 7.1]), то многообразие $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)_{\widehat{L}^s}$, полученное перестройкой мно-

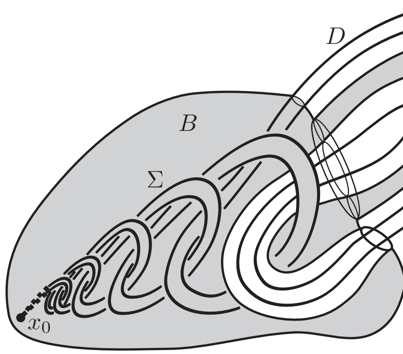


Рис. 11. Построение шара B для сферы Артина–Фокса

гообразия $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ вдоль тора $\widehat{L}^s$, состоит из двух копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда из утверждения 1.7 следует, что многообразие $R_s = M_s \setminus W^s_\sigma$ состоит из двух компонент связности и ограничение диффеоморфизма f_{M_s} на каждую из них топологически сопряжено каноническому сжатию $a^s_{0,+1}$.

Компактифицируем многообразие M_s тремя точками и доопределим диффеоморфизм f_{M_s} по непрерывности тремя неподвижными гиперболическими узлами: одним источником и двумя стоками. Тогда построенный диффеоморфизм f_S принадлежит классу Пикстона и его схема эквивалентна S.

2.1.3. *Топология объемлющего многообразия.*

Теорема 2.3. *Для любого диффеоморфизма $f \in \mathscr{P}$ объемлющее многообразие диффеоморфно 3-сфере $\mathbb{S}^3$.*

В основе доказательства теоремы 2.3 лежит замечательная лемма, описывающая топологическую структуру окрестности сферы с одной точкой дикости.

Лемма 2.1. *Пусть $\eta\colon \mathbb{S}^2 \to M^3$ – топологическое вложение 2-сферы, которое является гладким всюду, кроме одной точки, и пусть $\Sigma = \eta(\mathbb{S}^2)$. Тогда любая окрестность V сферы Σ содержит окрестность K, диффеоморфную $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$.*

Доказательство леммы 2.1 сводится к построению гладкого 3-шара $B \subset M^3$, содержащего во внутренности точку дикости x_0 и такого, что $\partial B \cap \Sigma$ состоит из одной окружности. Тогда искомая окрестность K получается из B добавлением трубчатой окрестности двумерного диска $D = \Sigma \setminus \operatorname{int} B$. Как построить такой шар B в случае дикой сферы Артина–Фокса, показано на рис. 11. Заметим, что в конструкции принципиально используется наличие не более чем одной точки дикости у сферы Σ и это не случайно, поскольку лемма 2.1 не имеет места в случае двух и более точек дикости. Пример двумерной сферы с двумя точками дикости в $\mathbb{R}^3$ приведен на рис. 12.

Теперь нетрудно выстроить схему доказательства теоремы 2.3. В силу утверждений 1.1 и 1.4, множество $\Sigma = W^s_\sigma \cup \alpha$ является топологически вложенной сферой, гладкой всюду, кроме точки α. Поскольку объемлющее многообразие M^3, согласно пункту 1) утверждения 1.1, представляется в виде

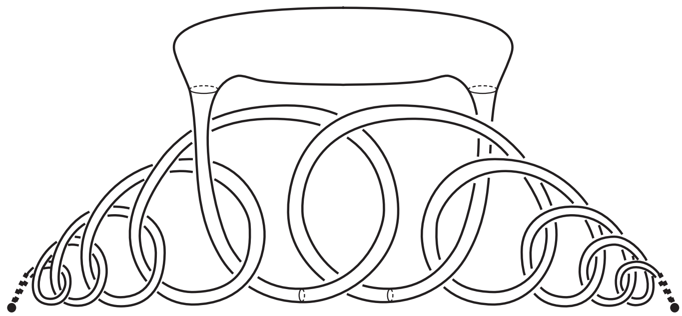


Рис. 12. Двумерная сфера с двумя точками дикости в $\mathbb{R}^3$

$M^3 = \Sigma \cup W^s_{\omega_1} \cup W^u_{\omega_2}$, то окрестность K, удовлетворяющая заключению леммы 2.1, имеет граничные сферы S_1, S_2 в бассейнах $W^s_{\omega_1}$, $W^u_{\omega_2}$ соответственно. Поскольку каждый из бассейнов гомеоморфен $\mathbb{R}^3$, то множество $M^3 \setminus \operatorname{int} K$ состоит из гладких 3-шаров $B_1 \subset W^s_{\omega_1}$, $B_2 \subset W^u_{\omega_2}$ таких, что $\partial B_1 = S_1$, $\partial B_2 = S_2$. Таким образом, многообразие M^3 образовано склеиванием двух гладких 3-шаров B_1 и $B_2 \cup K$ по границе и, следовательно, диффеоморфно $\mathbb{S}^3$ (см., например, [23]).

2.2. Бифуркации, меняющие тип вложения сепаратрис. Обозначим через $J(\mathbb{S}^3)$ множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов "Северный полюс – Южный полюс", т. е. диффеоморфизмов, неблуждающие множества которых состоят в точности из двух гиперболических точек: источник и сток. Основная теорема этого пункта имеет следующий вид.

Теорема 2.4. *Для любых диффеоморфизмов $f, f' \in \mathscr{P}$ существует гладкая дуга $\{f_t \in \operatorname{Diff}(\mathbb{S}^3)\}$ такая, что*:

1) $f_0 = f$, $f_1 = f'$;

2) $f_t \in \mathscr{P}$ *для всех* $t \in [0, 1/3) \cup (2/3, 1]$;

3) $f_t \in J(\mathbb{S}^3)$ *для всех* $t \in (1/3, 2/3)$;

4) *неблуждающее множество диффеоморфизма* $f_{i/3}$, $i = 1, 2$, *состоит из двух гиперболических неподвижных точек*: *источник и сток, и одной негиперболической неподвижной точки типа седло-узел.*

Доказательство теоремы 2.4 состоит из двух частей:

(I) построение гладкой дуги с одной бифуркационной точкой типа седло-узел между произвольным диффеоморфизмом из класса Пикстона и некоторым диффеоморфизмом типа "Северный полюс – Южный полюс";

(II) построение гладкой изотопии между любыми диффеоморфизмами типа "Северный полюс – Южный полюс", состоящей из диффеоморфизмов этого же типа.

(I) Ключом к решению первой проблемы является основополагающее свойство всех диффеоморфизмов класса Пикстона, сформулированное в следующем предложении.

Предложение 2.1. *По меньшей мере одна из одномерных сепаратрис любого диффеоморфизма $f \in \mathscr{P}$ является ручной.*

Это обстоятельство позволяет уложить ручную сепаратрису на координатную ось в локальных координатах соответствующего стока и произвести на ней стандартное слияние седла со стоком, тем самым решив задачу (I).

Для доказательства предложения 2.1 вновь используется переход к пространству орбит.

Для диффеоморфизма $f \in \mathscr{P}$ обозначим через γ_1, γ_2 неустойчивые сепаратрисы точки σ_f. Согласно утверждению 1.4, замыкание $\mathrm{cl}(\gamma_i)$ $(i = 1, 2)$ одномерной неустойчивой сепаратрисы точки σ гомеоморфно простой компактной дуге и состоит из этой сепаратрисы и двух точек: точки σ и стока. Предположим для определенности, что точка ω_i принадлежит дуге $\mathrm{cl}(\gamma_i)$. Для $i = 1, 2$ положим $V_i = W^s_{\omega_i} \setminus \omega_i$ и $\widehat{V}_i = V_i/f$. Из результатов п. 1.2 следует, что естественная проекция $p_i \colon V_i \to \widehat{V}_i$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм $\eta_i \colon \pi_1(\widehat{V}_i) \to \mathbb{Z}$. При этом многообразие $\widehat{V}_i$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и множество $\widehat{\gamma}_i = p_i(\gamma_i)$ является *узлом* (гомеоморфным образом окружности) в многообразии $\widehat{V}_i$ таким, что $\eta_i(i_{\widehat{\gamma}_i *}(\pi_1(\widehat{\gamma}_i))) = \mathbb{Z}$.

Ключом к доказательству предложения 2.1 является следующий критерий ручности одномерной сепаратрисы γ_i, $i = 1, 2$.

Лемма 2.2. *Сепаратриса γ_i, $i = 1, 2$, является ручной тогда и только тогда, когда существует трубчатая окрестность $N(\widehat{\gamma}_i)$ узла $\widehat{\gamma}_i$ в многообразии $\widehat{V}_i$ такая, что многообразие $\widehat{V}_i \setminus N(\widehat{\gamma}_i)$ гомеоморфно заполненному тору.*

Достаточность условий леммы 2.2 основана на том, что из условия существования окрестности $N(\widehat{\gamma}_i)$ следует существование гомеоморфизма $\widehat{\varphi}_i \colon \widehat{V}_i \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такого, что $\widehat{\varphi}_i(\widehat{\gamma}_i) = \{x_i\} \times \mathbb{S}^1$ для некоторого $x_i \in \mathbb{S}^2$. В силу утверждения 1.7, это влечет существование гомеоморфизма $\varphi_i \colon W^s_{\omega_i} \to \mathbb{R}^3$ такого, что $\varphi(\gamma_i) = \mathbb{R}_+$.

Приведем схему доказательства необходимости условий леммы 2.2. Если сепаратриса γ_i является ручной, то по определению ручности существует гладкий 3-шар $B_i \subset W^s_{\omega_i}$, содержащий ω_i и такой, что сепаратриса γ_i пересекает ∂B_i в единственной точке. Стандартными топологическими методами можно деформировать его в гладкий 3-шар (который мы снова обозначим через B_i) с дополнительным свойством: $f(B_i) \subset \mathrm{int}\, B_i$.

Положим $K_i = B_i \setminus \mathrm{int}\, f(B_i)$. По построению трехмерное кольцо K_i является фундаментальной областью действия f на V_i, и, следовательно, в силу утверждения 1.6, K_i/f гомеоморфно $\widehat{V}_i$. Выберем трубчатую окрестность $N_i \subset K_i$ дуги $l_i = \gamma_i \cap K_i$ так, чтобы для двумерного диска $d_i = N_i \cap \partial B_i$ его образ $f(d_i)$ совпадал с пересечением $N_i \cap \partial f(B_i)$. По построению множество $G_i = K_i \setminus N_i$ ограничено двумерной сферой, составленной из дисков $\delta_i = \partial B_i \setminus d_i$, $f(\delta_i)$ и двумерного кольца $\partial N_i \cap \mathrm{int}\, G_i$. Отсюда следует, что G_i – трехмерный шар. При этом трубчатая окрестность $N(\widehat{\gamma}_i)$ получается из N_i отождествлением дисков d_i, $f(d_i)$, а ее дополнение получается из G_i отождествлением дисков δ_i, $f(\delta_i)$ посредством диффеоморфизма f и, следовательно, является заполненным тором.

Таким образом, доказательство предложения 2.1 сводится к проверке того, что дополнение хотя бы до одной из трубчатых окрестностей $N(\widehat{\gamma}_1)$, $N(\widehat{\gamma}_2)$ является заполненным тором. Справедливость последнего имеет место благодаря двойственности факторпространств $(\widehat{V}_1 \setminus N(\widehat{\gamma}_1)) \cup (\widehat{V}_2 \setminus N(\widehat{\gamma}_2)) = \widehat{V}_f \setminus N(\widehat{L}^s_f)$ (см.

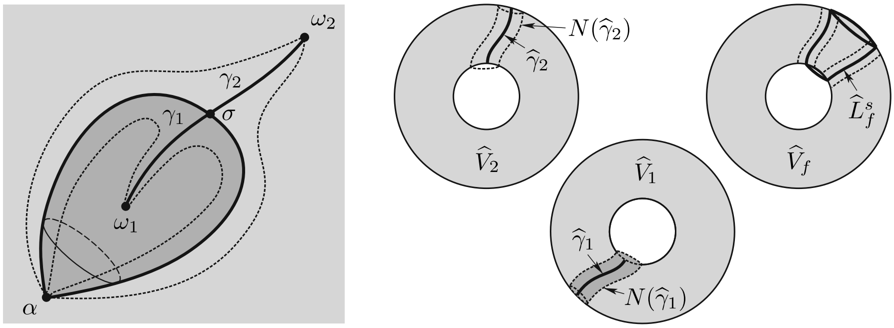


Рис. 13. Двойственность факторпространств

рис. 13) и свойству гомотопически нетривиального тора ограничивать заполненный тор в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

(II) Существование гладкой дуги, соединяющей любые сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы и, следовательно, любые диффеоморфизмы типа "Северный полюс – Южный полюс" на $\mathbb{S}^3$, – классический результат Ж. Серфа [18]. Мы покажем, что эта дуга может быть выбрана таким образом, что она целиком состоит из диффеоморфизмов "Северный полюс – Южный полюс". Заметим, что в размерности шесть аналогичный результат не имеет места (см. [34; теорема 4.3.5]), что связано с существованием различных гладких структур на семимерной сфере (этот факт установлен Дж. Милнором в [45]).

Рассматриваемая задача сводится к построению гладкой дуги $\{l_t \in J(\mathbb{S}^3),\ t \in [0,1]\}$, соединяющей любой диффеоморфизм $f \in J(\mathbb{S}^3)$ с *каноническим диффеоморфизмом "Северный полюс – Южный полюс"* $g\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, заданным формулой

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{4x_1}{5-3x_4}, \frac{4x_1}{5-3x_4}, \frac{4x_3}{5-3x_4}, \frac{5x_4-3}{5-3x_4}\right)$$

(непосредственно проверяется, что $a^s_{3,+1} = \vartheta g \vartheta^{-1}$, где $\vartheta\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ – *стереографическая проекция* $\vartheta(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\dfrac{x_1}{1-x_4}, \dfrac{x_2}{1-x_4}, \dfrac{x_3}{1-x_4}\right)$). Конструктивно дуга $\{l_t \in J(\mathbb{S}^3)\}$ состоит из следующих частей:

1. l_t – диффеоморфизм из класса $J(\mathbb{S}^3)$ для всех $t \in [0,1/4]$, при этом $l_0 = f$ и $l_{1/4}$ – C^2-диффеоморфизм из класса $J(\mathbb{S}^3)$;
2. l_t – C^2-диффеоморфизм из класса $J(\mathbb{S}^3)$ для всех $t \in [1/4,1/2]$, при этом $l_{1/2}$ – C^2-диффеоморфизм из класса $NS(\mathbb{S}^3)$, где $NS(\mathbb{S}^3) \subset J(\mathbb{S}^3)$ – подмножество, состоящее из диффеоморфизмов, которые имеют источник в точке $N(0,0,0,1)$ и сток в точке $S(0,0,0,-1)$;
3. l_t – диффеоморфизм из класса $NS(\mathbb{S}^3)$ для всех $t \in [1/2,3/4]$, при этом $l_{3/4}$ – диффеоморфизм из класса E_g, где $E_g(\mathbb{S}^3) \subset NS(\mathbb{S}^3)$ – множество диффеоморфизмов таких, что для каждого диффеоморфизма $h \in E_g(\mathbb{S}^3)$ существуют окрестности $V_h(N)$, $V_h(S)$ точек N, S, где $h\big|_{V_h(N)\cup V_h(S)} = g\big|_{V_h(N)\cup V_h(S)}$;
4. l_t – диффеоморфизм из класса $E_g(\mathbb{S}^3)$ для всех $t \in [3/4,1]$, при этом $l_1 = g$.

Построение первой части дуги $\{l_t\}$ основано на структурной устойчивости диффеоморфизма f и всюду плотности C^2-диффеоморфизмов в пространстве всех диффеоморфизмов.

Для построения второй части дуги $\{l_t\}$ обозначим через α источник и через ω сток диффеоморфизма $l_{1/4}$. Пусть D_α, D_ω (D_S, D_N) – попарно непересекающиеся 3-диски, содержащие α, ω (S, N). Тогда существует C^2-гладкая дуга $\{H_t \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^3)\}$ со следующими свойствами: $H_0 = \mathrm{id}$, $H_1(D_N) = D_\alpha$, $H_1(D_S) = D_\omega$, $H_1(N) = \alpha$ и $H_1(S) = \omega$ (см., например, [35; теорема 3.2]). Тогда $H_t^{-1} l_{1/4} H_t$ – изотопия, соединяющая диффеоморфизм $l_{1/4}$ с диффеоморфизмом $l_{1/2} = H_1^{-1} l_{1/4} H_1$, которая после перепараметризации дает искомую дугу.

В основе построения третьей части дуги лежат теорема Белицкого (см., например, [66]) о гладкой сопряженности C^2-диффеоморфизма со своей линейной частью в окрестности гиперболической неподвижной узловой точки и факт существования гладкой дуги, соединяющей два линейных сжатия (растяжения) на $\mathbb{R}^3$ (см., например, [53; предложение 5.4]).

В построении последней части дуги опять используется переход в пространство блуждающих орбит. Для этого заметим, что для любого диффеоморфизма $h \in E_g(\mathbb{S}^3)$ блуждающее множество диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и существует величина $r_h^+ \in \mathbb{R}$ ($r_h^- \in \mathbb{R}$) такая, что h совпадает с g на $\mathbb{S}^2 \times [r_h^+, +\infty)$ ($\mathbb{S}^2 \times (-\infty, r_h^-]$). Тогда существует диффеоморфизм $\psi_h \colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, сопрягающий диффеоморфизмы h, g и совпадающий с тождественным отображением на $D_h^+ \cup D_h^-$, где $D_h^+ = \mathbb{S}^2 \times [r_h^+, +\infty) \cup S$, $D_h^- = \mathbb{S}^2 \times (-\infty, r_h^-] \cup N$. В силу утверждения 1.7, диффеоморфизм ψ_h посредством накрытия $p_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1} \colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ индуцирует диффеоморфизм $\widehat{\psi}_h \colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, действующий тождественно в фундаментальной группе. Согласно предложению 0.4 работы [9], один из диффеоморфизмов $\widehat{\psi}_h$, $\widehat{v}\widehat{\psi}_h$ изотопен тождественному отображению, где диффеоморфизм $\widehat{v}$ определяется следующим образом. Для любого $\Theta \in \mathbb{R}$ обозначим через $R_\Theta \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ отображение поворота на угол Θ вокруг оси, проходящей через точки $(0,0,1)$ и $(0,0,-1)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\tilde{v}_\lambda \colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ – диффеоморфизм такой, что $\tilde{v}_\lambda(s,r) = (R_{2\pi(r-\lambda)}, r)$ на $K_\lambda = \mathbb{S}^2 \times [\lambda, \lambda+1)$ и $\widetilde{v}_\lambda$ совпадает с тождественным отображением вне K_λ. Тогда $\widehat{v} = p_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1} \widetilde{v}_\lambda (p_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}\big|_{K_\lambda})^{-1} \colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – искомый диффеоморфизм.

Таким образом, диффеоморфизм $\widehat{\psi}_{l_{3/4}}$ можно считать изотопным тождественному (в противном случае $l_{3/4}$ можно соединить с диффеоморфизмом $\nu_1 l_{3/4}$ гладкой дугой $\{\nu_t l_{3/4}\} \subset E_g(\mathbb{S}^3)$, где $\nu_t(S) = S$, $\nu_t(N) = N$ и ν_t на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ определяется формулой

$$\nu_t(s,r) = \begin{cases} (s,r), & (s,r) \in \mathbb{S}^2 \times (-\infty, \lambda], \\ (R_{2\pi(r-\lambda)t}, r), & (s,r) \in K_\lambda, \\ (R_{2\pi t}, r), & (s,r) \in \mathbb{S}^2 \times [\lambda+1, +\infty), \end{cases}$$

для $t \in [0,1]$ и $\lambda > r^+_{l_{3/4}}$). В силу леммы о фрагментации (см. [5]), существуют гладко изотопные тождественному диффеоморфизмы $\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_q \colon \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такие, что $\widehat{\psi}_{l_{3/4}} = \widehat{w}_1 \cdots \widehat{w}_q$ и для каждого $i = 1, \dots, q$ существует

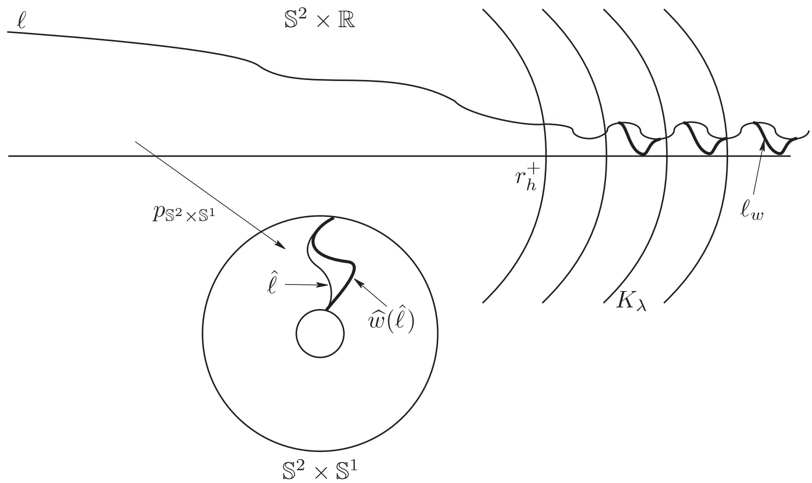


Рис. 14. Иллюстрация к пункту (I)

носитель U_i изотопии $\{\widehat{w}_{i,t}\}$ между тождественным отображением и $\widehat{w}_i$, который обладает следующим свойством: существует значение $\lambda_i\in[r^+_{l_{3/4}}+2(i-1), r^+_{l_{3/4}}+2i)$ такое, что компонента связности множества $p^{-1}_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}(U_i)$ является подмножеством K_{λ_i}. Пусть $w_{i,t}\colon\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ – диффеоморфизм, совпадающий с $\big(p_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}\big|_{K_{\lambda_i}}\big)^{-1}\widehat{w}^{-1}_{i,t}p_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}$ на K_{λ_i} и с тождественным отображением вне K_{λ_i}. Положим $\mu_t=w^{-1}_{q,t}\cdots w^{-1}_{1,t}\psi_{l_{3/4}}\colon\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$. Тогда после перепараметризации дуга $\{\mu_t g\mu_t^{-1}\}$ является искомой.

Абсолютно такая же идея перехода к факторпространству используется в пункте (I) при укладывании ручной сепаратрисы на координатную ось. На рис. 14 изображена h-инвариантная дуга ℓ для некоторого диффеоморфизма $h\in E_g(\mathbb{S}^3)$, показана ее проекция $\widehat{\ell}$ в многообразие $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$. Затем к узлу $\widehat{\ell}$ применен гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $\widehat{w}\colon\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$ такой, что носитель U изотопии $\{\widehat{w}_t\}$ между тождественным отображением и $\widehat{w}$ обладает следующим свойством: существует значение $\lambda\in[r_h^+, r_h^++2)$ такое, что компонента связности множества $p^{-1}_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}(U)$ является подмножеством K_λ. Далее показана дуга ℓ_w, совпадающая с ℓ на множестве D_h^- и инвариантная относительно диффеоморфизма wh, где $w\colon\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ – диффеоморфизм, совпадающий с $\big(p_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}\big|_{K_\lambda}\big)^{-1}\widehat{w}^{-1}p_{\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1}$ на K_λ и с тождественным отображением вне K_λ.

3. Топологическая классификация

В этом разделе мы предъявляем полную топологическую классификацию диффеоморфизмов из класса $\mathrm{MS}(M^3)$. При этом идейно она является развитием методов, изложенных в п. 2.1. Основной принцип состоит в представлении динамики диффеоморфизма $f\in\mathrm{MS}(M^3)$ в виде “источник–сток”, где под “источником” и “стоком” понимаются инвариантные замкнутые множества, одно

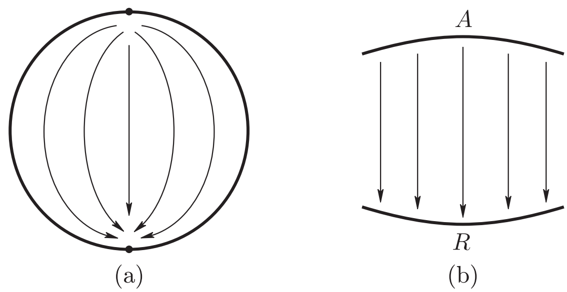


Рис. 15. Диффеоморфизм “источник–сток” (a) и его обобщение (b)

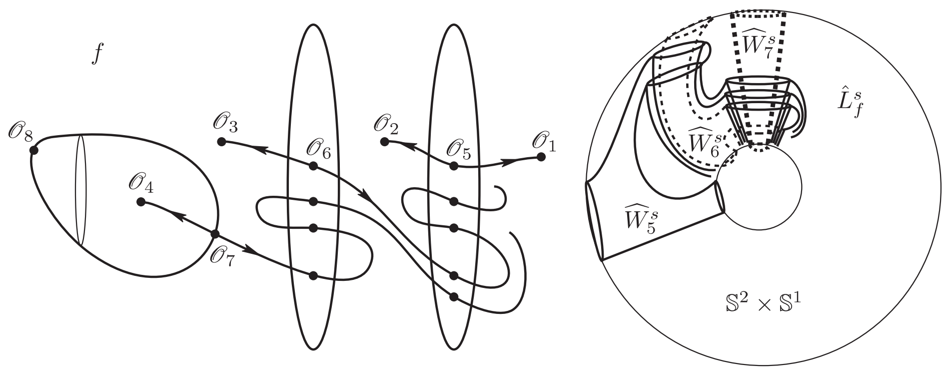


Рис. 16. Схема диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(\mathbb{S}^3)$

из которых, A, является аттрактором, а другое, R, – репеллером[8], при этом множество $V = M^n \setminus (A \cup R)$ состоит из блуждающих точек, движущихся под действием диффеоморфизма от источника к стоку (см. рис. 15). При выборе подходящей для топологического инварианта пары A, R основное внимание уделяется двум вещам: пространство блуждающих орбит $\widehat{V} = V/f$ вместе с вложенными в него проекциями сепаратрис седловых точек должно поддаваться каноническому описанию, а сопрягающий гомеоморфизм на многообразии V должен модифицироваться до гомеоморфизма, продолжающегося на аттрактор и репеллер. Для диффеоморфизмов из класса Пикстона таким аттрактором является множество $\mathrm{cl}\, W^u_\sigma$, репеллером – источник α, а множество V совпадает с $W^u_\alpha \setminus \alpha$. В общем случае такой выбор описан в следующем пункте.

3.1. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности. Предположим, что $f \in \mathrm{MS}(M^3)$. Представим динамику f в виде “источник–сток” следующим образом. Положим $A_f = W^u_{\Omega_0 \cup \Omega_1}$, $R_f = W^s_{\Omega_2 \cup \Omega_3}$ и $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$. Тогда множество A_f (R_f) является связным аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f с топологической размерностью, меньшей

[8]Компактное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором диффеоморфизма* $f\colon M^n \to M^n$, если существует окрестность U множества A такая, что $f(U) \subset \mathrm{int}\, U$ и $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$. Окрестность U при этом называется *захватывающей*. Множество $R \subset M^n$ называется *репеллером* диффеоморфизма f, если оно является аттрактором для f^{-1}.

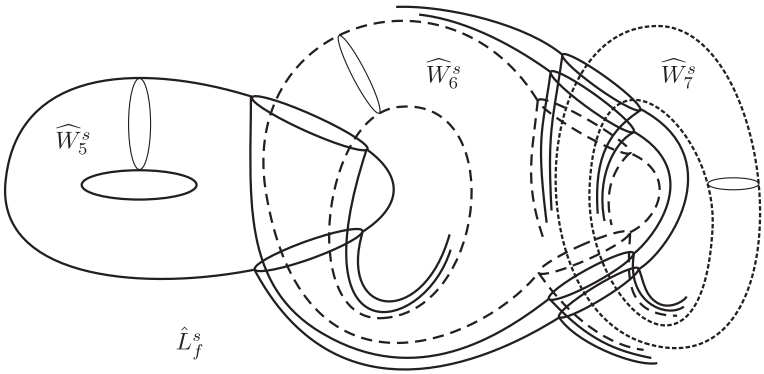


Рис. 17. Объединение проекций в $\widehat{V}_f$ двумерных сепаратрис

или равной единице, а множество V_f является связным 3-многообразием. Более того, факторпространство $\widehat{V}_f = V_f/f$ является замкнутым связным ориентируемым 3-многообразием, на котором естественная проекция $p_f\colon V_f \to \widehat{V}_f$ индуцирует эпиморфизм $\eta_f\colon \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z}$. Положим $\widehat{L}^s_f = p_f(W^s_{\Omega_1} \setminus A_f)$ и $\widehat{L}^u_f = p_f(W^u_{\Omega_2} \setminus R_f)$.

Определение 3.1. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \widehat{L}^s_f, \widehat{L}^u_f)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$.

Каждая компонента линейной связности множества $\widehat{L}^s_f$ ($\widehat{L}^u_f$) является проекцией относительно p_f устойчивого (неустойчивого) двумерного многообразия седловой орбиты и гомеоморфна двумерному тору или бутылке Клейна с пустым, конечным или счетным множеством выколотых точек, равномощным множеству гетероклинических орбит на этом многообразии. На рис. 16 изображен фазовый портрет и схема диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(\mathbb{S}^3)$ (в виде фундаментальной области с неотождествленными границами). При этом предполагается, что неблуждающее множество диффеоморфизма f неподвижно, периодические орбиты пронумерованы так, как показано на рисунке, и $\widehat{W}^s_j = p_f(W^s_{\mathcal{O}_j})$, $j = 5, 6, 7$. На рис. 17 отдельно изображено объединение $\widehat{L}^s_f = \widehat{W}^s_5 \cup \widehat{W}^s_6 \cup \widehat{W}^s_7$, где $\widehat{W}^s_7$ – непроколотый тор, $\widehat{W}^s_6$ – тор с конечным числом выколотых точек, $\widehat{W}^s_5$ – тор со счетным числом выколотых точек.

Заметим, что в примере на рис. 16 множество $\widehat{L}^u_f$ пусто, а множество $\widehat{L}^s_f$ состоит из одной компоненты связности. В общем случае каждое из множеств $\widehat{L}^s_f$, $\widehat{L}^u_f$ состоит из конечного числа компонент связности, подобных изображенным на рис. 17. Кроме того, множества $\widehat{L}^s_f$, $\widehat{L}^u_f$ имеют трансверсальное (непустое в общем случае) пересечение. На рис. 18 простейший случай такого пересечения изображен на примере схемы диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(\mathbb{S}^3)$, блуждающее множество которого содержит некомпактную гетероклиническую кривую. Для этого диффеоморфизма захватывающая окрестность M_f аттрактора $A_f = \mathrm{cl}\, W^u_\sigma$ является заполненным тором, фундаментальная область $M_f \setminus \mathrm{int}\, M_f$

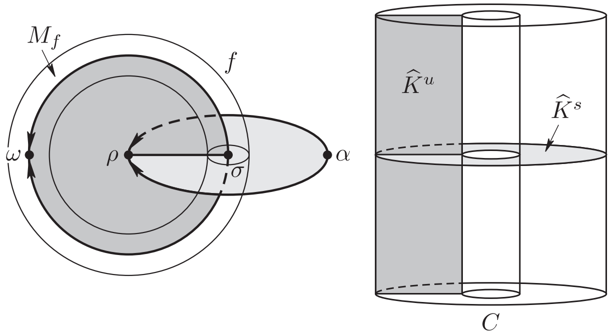


Рис. 18. Схема диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(\mathbb{S}^3)$

действия f на V_f гомеоморфна $\mathbb{T}^2 \times [-1,1]$ и пространство $\widehat{V}_f$ является трехмерным тором. Оно получается из многообразия C на рис. 18 отождествлением верхнего и нижнего колец, а также внешнего и внутреннего. После такой склейки из кольца $\widehat{K}^s$ получается тор $\widehat{L}^s_f$, а из прямоугольника $\widehat{K}^u$ – тор $\widehat{L}^u_f$.

В силу утверждения 1.7, необходимым условием топологической сопряженности диффеоморфизмов $f, f' \in \mathrm{MS}(M^3)$ является эквивалентность их схем в смысле следующего определения.

Определение 3.2. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in \mathrm{MS}(M^3)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}\colon \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

1) $\eta_f = \eta_{f'}\widehat{\varphi}_*$;
2) $\widehat{\varphi}(\widehat{L}^s_f) = \widehat{L}^s_{f'}$ и $\widehat{\varphi}(\widehat{L}^u_f) = \widehat{L}^u_{f'}$.

Теорема 3.1. *Диффеоморфизмы Морса–Смейла $f, f' \in \mathrm{MS}(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Идея доказательства достаточности условий теоремы 3.1 аналогична идее, использованной для класса Пикстона и состоит в том, что гомеоморфизм φ: $V_f \to V_f$, являющийся поднятием гомеоморфизма $\widehat{\varphi}$ и в общем случае не продолжающийся на множество $A_f \cup R_f$, можно модифицировать на объединении линеаризующих окрестностей N_σ так, чтобы он переводил двумерные линеаризующие слоения диффеоморфизма f в аналогичные слоения диффеоморфизма f'. Разница состоит в том, что для диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$, в отличие от диффеоморфизмов класса Пикстона, линеаризующие окрестности различных седловых точек могут пересекаться, что приводит к необходимости согласования линеаризующих слоений на таких пересечениях. Таким образом, основным техническим моментом является построение согласованной системы окрестностей, чему и посвящен следующий пункт.

3.2. Динамический порядок. Характеристические многообразия и пространства. Согласованная система окрестностей. Следуя С. Смейлу [71], введем на множестве периодических орбит отношение $\prec$:

$$\mathcal{O}_p \prec \mathcal{O}_r \quad \Leftrightarrow \quad W^s_{\mathcal{O}_p} \cap W^u_{\mathcal{O}_r} \neq \varnothing.$$

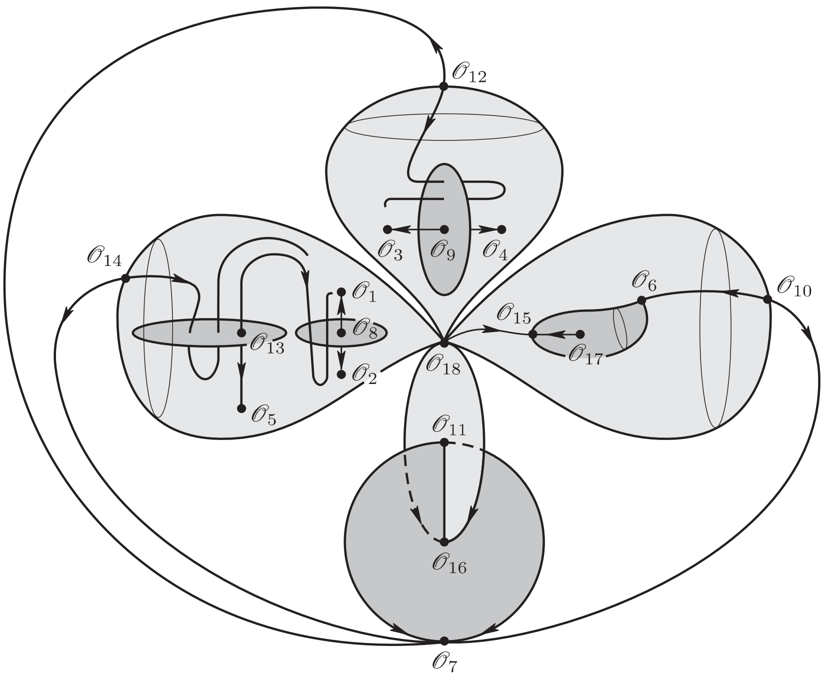


Рис. 19. Фазовый портрет диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с динамически упорядоченным множеством периодических орбит

В силу конечности периодических орбит и трансверсальности пересечения их инвариантных многообразий, отношение $\prec$ является отношением частичного порядка. Более того, отношение $\prec$ можно доопределить до отношения порядка, например, следующим образом.

Определение 3.3. Нумерацию периодических орбит $\mathscr{O}_1, \dots, \mathscr{O}_{k_f}$ диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ назовем *динамической*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) если $\mathscr{O}_i \prec \mathscr{O}_j$, то $i \leqslant j$;
2) если $q_{\mathscr{O}_i} < q_{\mathscr{O}_j}$, то $i < j$.

На рис. 19 представлен фазовый портрет диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ с динамическим порядком периодических орбит, в предположении, что неблуждающее множество Ω_f состоит из неподвижных точек. Нетрудно убедиться, что динамическая нумерация периодических орбит существует для любого диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$. Для этого достаточно заметить, что из условия $\mathscr{O}_i \prec \mathscr{O}_j$ следует, что $q_{\mathscr{O}_i} \leqslant q_{\mathscr{O}_j}$. Действительно, поскольку пересечение $W^s_{\mathscr{O}_i} \cap W^u_{\mathscr{O}_j}$ является трансверсальным, то из условия $W^s_{\mathscr{O}_i} \cap W^u_{\mathscr{O}_j} \neq \varnothing$ следует, что $\dim W^s_{\mathscr{O}_i} + \dim W^u_{\mathscr{O}_j} - n \geqslant 0$. Тогда $n - q_{\mathscr{O}_i} + q_{\mathscr{O}_j} - n \geqslant 0$ и, следовательно, $q_{\mathscr{O}_i} \leqslant q_{\mathscr{O}_j}$.

Если орбиты диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ динамически упорядочены, то для каждой периодической орбиты $\mathscr{O}_i$ положим $m_i = m_{\mathscr{O}_i}$, $q_i = q_{\mathscr{O}_i}$, $\nu_i = \nu_{\mathscr{O}_i}$,

$W_i^s = W_{\mathscr{O}_i}^s$ и $W_i^u = W_{\mathscr{O}_i}^u$. Для построения согласованной системы окрестностей используется последовательность представлений динамики диффеоморфизма f в виде “источник–сток”, связанная с динамическим порядком орбит. Именно, для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{i} W_j^u, \qquad R_i = \bigcup_{j=i+1}^{k_f} W_j^s, \qquad V_i = M^n \setminus (A_i \cup R_i).$$

Тогда множество A_i (R_i) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f и $V_i = W^s_{A_i \cap \Omega_f} \setminus A_i = W^u_{R_i \cap \Omega_f} \setminus R_i$. Положим $\widehat{V}_i = V_i/f$ и обозначим через $p_i \colon V_i \to \widehat{V}_i$ естественную проекцию. Будем называть многообразие V_i *характеристическим многообразием* и его пространство орбит $\widehat{V}_i$ *характеристическим пространством*. Введенные понятия существенно используются далее при решении проблемы реализации диффеоморфизмов класса $\mathrm{MS}(M^3)$, а также при построении для них глобальных функций Ляпунова.

В силу утверждения 1.3, у любой седловой орбиты $\mathscr{O}_i$, $i = k_0 + 1, \dots, k_2$, существует линеаризующая окрестность $N_{\mathscr{O}_i}$ с парой линеаризующих слоений $F^s_{\mathscr{O}_i}$, $F^u_{\mathscr{O}_i}$. Для любой седловой орбиты $\mathscr{O}_i$ положим $N_i = N_{\mathscr{O}_i}$, $F_i^u = F^u_{\mathscr{O}_i}$ и $F_i^s = F^s_{\mathscr{O}_i}$. Для любой точки $x \in N_i$ обозначим через $F^u_{i,x}$ $(F^s_{i,x})$ единственный слой слоения F_i^u (F_i^s), проходящий через точку x.

Определение 3.4. Пусть $f \in \mathrm{MS}(M^3)$. Набор N_f линеаризующих окрестностей $N_{k_0+1}, \dots, N_{k_2}$ всех орбит диффеоморфизма f назовем *согласованным* и линеаризующие слоения в них *согласованными*, если выполняются следующие условия:

1) если $W^s_{i_1} \cap W^u_{i_2} = \varnothing$ для $i_1 < i_2$, то $N_{i_1} \cap N_{i_2} = \varnothing$;

2) если $W^s_{i_1} \cap W^u_{i_2} \neq \varnothing$ и $q_{i_1} = q_{i_2}$, то $(F^s_{i_2,x} \cap N_{i_1}) \subset F^s_{i_1,x}$ и $(F^u_{i_1,x} \cap N_{i_2}) \subset F^u_{i_2,x}$ для $x \in (N_{i_1} \cap N_{i_2})$;

3) если множество $H = W^s_{\Omega_1} \cap W^u_{\Omega_2}$ непусто, то существует его f-инвариантная окрестность $N(H) \subset M^3$, оснащенная f-инвариантным слоением G, состоящим из двумерных дисков, трансверсальных H и таких, что для любой точки $x \in (N_{i_1} \cap N_{i_2} \cap N(H))$, $q_{i_1} < q_{i_2}$, имеют место включения $(F^s_{i_1,x} \cap G_x \cap N_{i_2}) \subset F^s_{i_2,x}$ и $(F^u_{i_2,x} \cap G_x \cap N_{i_1}) \subset F^u_{i_1,x}$, где G_x – слой слоения G, проходящий через точку x.

Согласованная система окрестностей является модификацией допустимой системы трубчатых семейств, построенной в работах [52], [55] и обладающей свойствами 1), 2). Условие 3) является техническим дополнением к определению, данному Ж. Палисом и С. Смейлом, и существенно используется при построении сопрягающего гомеоморфизма в доказательстве теоремы 3.1 и выделении множества абстрактных схем в п. 3.3. На рис. 20 изображена расслоенная окрестность точки A, принадлежащей гетероклинической кривой из пересечения $W^s_{i_1} \cap W^u_{i_2}$ для диффеоморфизмов Морса–Смейла, заданных на 3-многообразиях. В нижней части рисунка приведены фазовые портреты диффеоморфизмов $\mathbb{S}^3$ с гетероклиническими кривыми.

Теорема 3.2. *Для любого диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ существует согласованная система окрестностей.*

Доказательство теоремы 3.2 состоит в последовательном построении согласованных слоений по следующему плану.

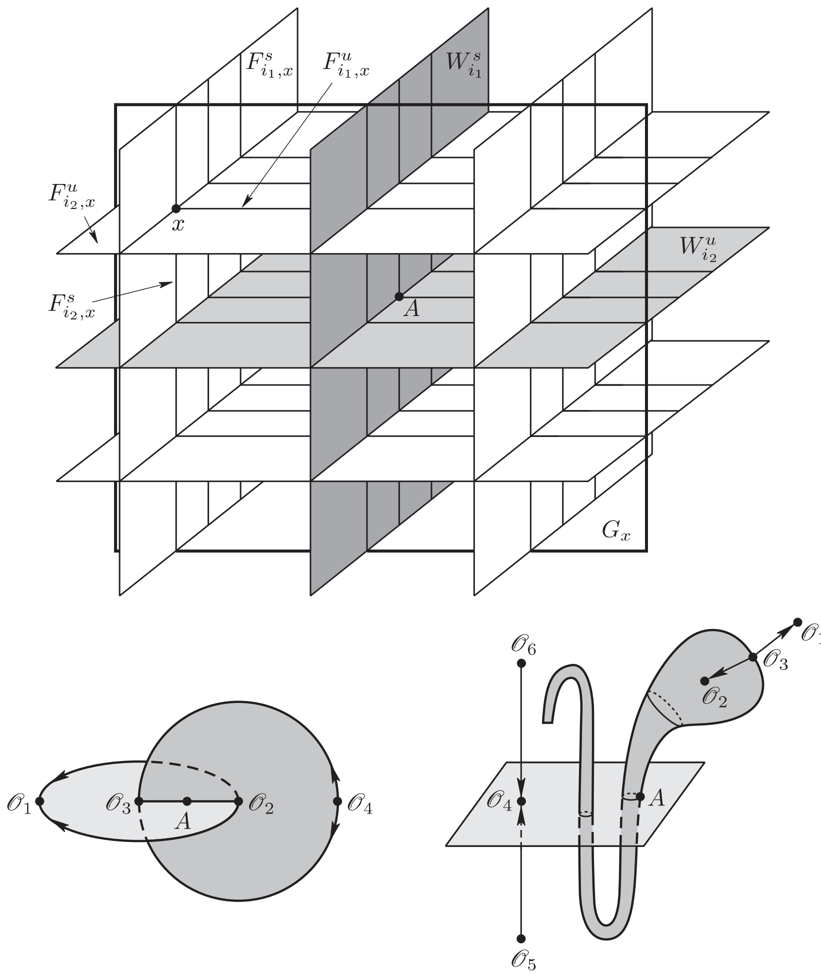


Рис. 20. Расслоенная окрестность точки на гетероклинической кривой

1. Индукцией по $i=k_0+1,\dots,k_1$, с помощью перехода к пространству орбит $\widehat{V}_i$, построим двумерное слоение F^s_i, удовлетворяющее свойству 2) определения 3.4. Для $i=k_0+1$ оно является прообразом расслоения трубчатой окрестности $\widehat{N}^u_i$ многообразия $p_i(W^u_i)$ на двумерные диски. Для $i>k_0+1$ расслоение в трубчатой окрестности $\widehat{N}^u_i$ модифицируется так, что любая компонента связности пересечения $p_i(F^s_i)\cap\widehat{N}^u_i$ для $k_0+1,\dots,i-1$ лежит на диске расслоения.

2. Аналогичным образом (переходом к диффеоморфизму f^{-1}) строится двумерное слоение F^u_i, удовлетворяющее свойству 2) определения 3.4 для $i=k_1+1,\dots,k_2$.

3. В пространстве $\widehat{V}_f$ рассматривается проекция $\widehat{H}$ гетероклинических кривых, которая совпадает с пересечением $\widehat{L}^s_f\cap\widehat{L}^u_f$. По построению множество $\widehat{H}$ является компактным, и в некоторой его окрестности $N(\widehat{H})$ существует сло-

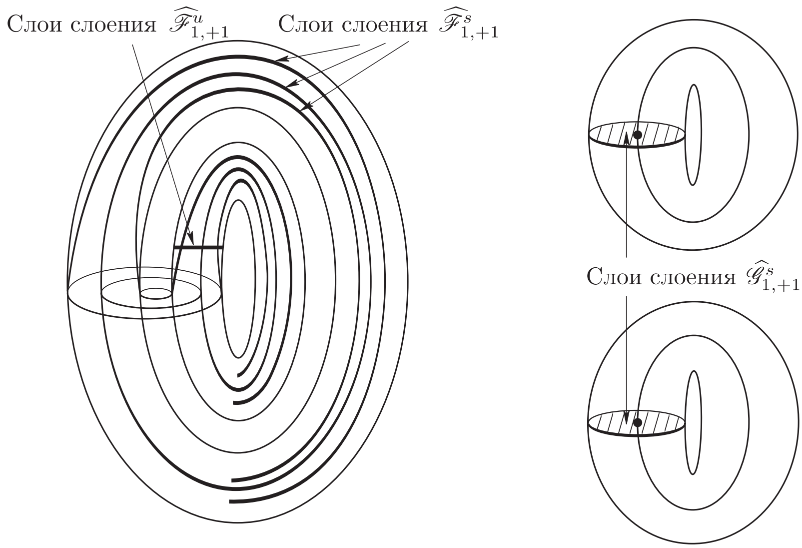


Рис. 21. Слои слоений $\widehat{\mathscr{F}}^s_{1,+1}$, $\widehat{\mathscr{F}}^u_{1,+1}$, $\widehat{\mathscr{G}}^s_{1,+1}$

ение $\widehat{G}$, состоящее из двумерных дисков, трансверсальных $\widehat{H}$ и двумерным слоениям, построенным в пунктах 1 и 2. Тогда слоение G является прообразом слоения $\widehat{G}$.

4. Индукцией по $i = k_1+1, \dots, k_2$, с помощью перехода к пространству орбит $\widehat{V}_{i-1}$, построим одномерное слоение F^s_i, удовлетворяющее свойствам 2) и 3) определения 3.4. Оно является прообразом расслоения трубчатой окрестности $\widehat{N}^u_i$ многообразия $p_{i-1}(W^u_i)$ на одномерные диски, модифицированного так, что любая компонента связности пересечения $p_{i-1}(G \cap F^s_j) \cap \widehat{N}^u_i$ для $j = k_0+1, \dots, k_1$ и пересечения $p_{i-1}(F^s_j) \cap \widehat{N}^u_i$ для $j = k_1+1, \dots, i-1$ лежит на диске расслоения.

5. Аналогичным образом (переходом к диффеоморфизму f^{-1}) строится одномерное слоение F^u_i, удовлетворяющее свойствам 2), 3) определения 3.4 для $i = k_1+1, \dots, k_2$.

3.3. Реализация по абстрактной схеме. Решение проблемы реализации базируется в первую очередь на возможности канонического описания множеств $\widehat{L}^s_f$, $\widehat{L}^u_f$ в схеме S_f диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$.

Напомним, что $a_{1,\nu}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – канонический диффеоморфизм, заданный формулой $a_{1,\nu}(x_1,x_2,x_3) = (\nu \cdot 2x_1, \nu \cdot x_2/2, x_3/2)$ и $a^s_{1,\nu} = a_{1,\nu}\big|_{W^s_O}$ – каноническое сжатие. При этом пространство орбит канонического сжатия $\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu} = (W^s_O \setminus O)/a^s_{1,\nu}$ является двумерным тором для $\nu = +1$ и бутылкой Клейна для $\nu = -1$. Множество $\mathscr{N}_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2(x_2^2+x_3^2) < 1\}$ является $a_{1,\nu}$-инвариантным, и $\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu} = (\mathscr{N}_1^s)/a_{1,\nu}$ – трубчатая окрестность поверхности $\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu}$, где $\mathscr{N}_1^s = \mathscr{N}_1 \setminus W^u_O$. Естественная проекция $p_{\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}}\colon \mathscr{N}_1^s \to \widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм $\eta_{\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}}\colon \pi_1(\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}) \to \mathbb{Z}$.

Обозначим через $\widehat{\mathscr{F}}^s_{1,\nu}$, $\widehat{\mathscr{F}}^u_{1,\nu}$ пару трансверсальных слоений на $\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}$, слои которых являются проекциями относительно $p_{\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}}$ слоев слоений $\mathscr{F}^s_1$, $\mathscr{F}^u_1$ соответственно (см. левую часть рис. 21). Пусть $X\subset\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu}$ – не более чем счетное множество и Z – объединение всех слоев слоения $\widehat{\mathscr{F}}^u_{1,\nu}$, проходящих через точки множества X. Положим

$$\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu,X}=\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu}\setminus X,\qquad \widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu,X}=\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}\setminus Z,$$
$$\widehat{\mathscr{F}}^s_{1,\nu,X}=\widehat{\mathscr{F}}^s_{1,\nu}\setminus Z,\qquad \widehat{\mathscr{F}}^u_{1,\nu,X}=\widehat{\mathscr{F}}^u_{1,\nu}\setminus Z.$$

Определение 3.5. Пусть $\widehat{V}$ – замкнутое 3-многообразие, оснащенное отображением η, состоящим из эпиморфизмов в группу $\mathbb{Z}$ на фундаментальных группах всех компонент связности пространства $\widehat{V}$. Компактное множество $\widehat{L}^s\subset\widehat{V}$ назовем *s-ламинацией*, если оно состоит из конечного числа n_s компонент линейной связности $\widehat{W}^s_1,\dots,\widehat{W}^s_{n_s}$ таких, что каждая компонента является гладким подмногообразием, компонента $\widehat{W}^s_1$ является замкнутой поверхностью, $(\operatorname{cl}\widehat{W}^s_i\setminus\widehat{W}^s_i)\subset\bigcup_{j=1}^{i-1}\widehat{W}^s_j$ для $i>1$ и, кроме того, для каждого $i=1,\dots,n_s$ существуют трубчатая окрестность $N(\widehat{W}^s_i)$ поверхности $\widehat{W}^s_i$, числа $m^s_i\in\mathbb{N}$, $\nu^s_i\in\{-1,+1\}$, множество $X^s_i\subset\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu^s_i}$ и гомеоморфизм $\widehat{\mu}^s_i\colon N(\widehat{W}^s_i)\to\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu^s_i,X^s_i}$ со следующими свойствами:

1) $\widehat{\mu}^s_i(\widehat{W}^s_i)=\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu^s_i,X^s_i}$;

2) $\eta([c])=m^s_i\cdot\eta_{\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu^s_i}}(\widehat{\mu}^s_i([c]))$ для любой замкнутой кривой $c\subset N(\widehat{W}^s_i)$;

3) для $j<i$ и любого слоя $\mathscr{D}$ слоения $\widehat{\mathscr{F}}^s_{1,\nu^s_i,X^s_i}$ множество $\widehat{\mu}^s_j(N(\widehat{W}^s_j)\cap(\widehat{\mu}^s_i)^{-1}(\mathscr{D}))$ либо пусто, либо является подмножеством слоя слоения $\widehat{\mathscr{F}}^s_{1,\nu^s_j,X^s_j}$.

Заметим, что s-ламинация является ламинацией в смысле классического определения[9]. Следующее предложение непосредственно вытекает из утверждения 1.1 и теоремы 3.2.

Предложение 3.1. *Множество $\widehat{L}^s_f$ в схеме S_f любого диффеоморфизма $f\in\mathrm{MS}(M^3)$ является s-ламинацией.*

Используя каноническое описание s-ламинации, можно ввести операцию перестройки многообразия $\widehat{V}$ вдоль s-ламинации $\widehat{L}^s$, обобщающую перестройку вдоль тора и выявляющую тонкое свойство вложения ламинации $\widehat{L}^s_f$ в многообразие $\widehat{V}_f$. Для этого рассмотрим каноническое растяжение $a^u_{1,\nu}=a_{1,\nu}\big|_{W^u_O}$. Его пространство орбит $\widehat{\mathscr{W}}^u_{1,\nu}=(W^u_O\setminus O)/a^u_{1,\nu}$ является парой узлов для $\nu=+1$ и одним узлом для $\nu=-1$. Множество $\widehat{\mathscr{N}}^u_{1,\nu}=(\mathscr{N}^u_1)/a_{1,\nu}$ является трубчатой окрестностью многообразия $\widehat{\mathscr{W}}^u_{1,\nu}$, где $\mathscr{N}^u_1=\mathscr{N}_1\setminus W^s_O$. Естественная

[9]Пусть X есть n-мерное многообразие ($n\geqslant 2$) и его подмножество $Y\subset X$ представляет собой объединение, $\bigcup_{j\in J}L_j$, попарно непересекающихся m-мерных ($1\leqslant m\leqslant n-1$) связных многообразий L_j (слоев). Говорят, что семейство $\mathscr{L}=\{L_j,j\in J\}$ является m-мерной ламинацией с носителем $Y=\operatorname{supp}\mathscr{L}$, если для любой точки $x\in Y$ существует окрестность $U_x\subset X$ и гомеоморфизм $\psi\colon U_x\to\mathbb{R}^n$ такой, что любая компонента связности пересечения $U_x\cap L_j$ (если это пересечение непусто) отображается посредством ψ в m-мерную гиперплоскость $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_{m+1}=c_{m+1},\dots,x_n=c_n\}$.

проекция $p_{\widehat{\mathscr{N}}^u_{1,\nu}}\colon \mathscr{N}^u_1 \to \widehat{\mathscr{N}}^u_{1,\nu}$ является накрытием, которое индуцирует отображение $\eta_{\widehat{\mathscr{N}}^u_{1,\nu}}$, состоящее из нетривиальных гомоморфизмов в группу $\mathbb{Z}$ на фундаментальной группе каждой компоненты связности многообразия $\widehat{\mathscr{N}}^u_{1,\nu}$. Обозначим через $\widehat{\mathscr{G}}^s_{1,\nu}$ слоение $\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}$, чьи слои являются проекциями в силу $p_{\widehat{\mathscr{N}}^u_{1,\nu}}$ слоев слоения $\mathscr{F}^s_1$ (см. рис. 21). Определим диффеоморфизм $\zeta_{1,\nu}\colon \widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}\setminus\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu} \to \widehat{\mathscr{N}}^u_{1,\nu}\setminus\widehat{\mathscr{W}}^u_{1,\nu}$ формулой $\zeta_{1,\nu} = p_{\widehat{\mathscr{N}}^u_{1,\nu}}(p_{\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}}\big|_{\widehat{\mathscr{N}}^s_{1,\nu}\setminus\widehat{\mathscr{W}}^s_{1,\nu}})^{-1}$.

Пусть $\widehat{L}^s = \bigcup_{i=1}^{n_s}\widehat{W}^s_i$ есть s-ламинация на многообразии $\widehat{V}$. Поскольку поверхность $\widehat{W}^s_1$ является замкнутой, то гомеоморфизм μ^s_1 можно считать диффеоморфизмом. Перестройку многообразия $\widehat{V}$ вдоль поверхности $\widehat{W}^s_1$ посредством диффеоморфизма $\zeta_{\widehat{W}^s_1} = \zeta_{1,\nu}\mu^s_1\big|_{N(\widehat{W}^s_1)\setminus\widehat{W}^s_1}$ назовем *перестройкой вдоль первой поверхности s-ламинации*. Для $i=1,\dots,n_s-1$ положим $\check{W}^s_i = p_{\widehat{W}^s_1}(\widehat{W}^s_{i+1}\cup(\widehat{\mathscr{W}}^u_{1,\nu}\cap G^s_i))$, где G^s_i – объединение слоев $\mathscr{D}$ слоения $\widehat{\mathscr{G}}^s_{1,\nu}$ таких, что $p_{\widehat{W}^s_1}(\widehat{L}^s\setminus\widehat{W}^s_1)\cap p_{\widehat{W}^s_1}(\mathscr{D})\neq\varnothing$. Положим $\check{L}^s = \bigcup_{i=1}^{n_s-1}\check{W}^s_i$. По построению множество $\check{L}^s$ вновь является s-ламинацией на многообразии $\widehat{V}_{\widehat{W}^s_1}$, назовем эту ламинацию *производной от s-ламинации $\widehat{L}^s$*. Мы говорим, что многообразие $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$ получено из многообразия $\widehat{V}$ *перестройкой вдоль s-ламинации $\widehat{L}^s$*, если оно получается из $\widehat{V}$ последовательными перестройками вдоль первых поверхностей производных ламинаций. Применяя те же рассуждения, что и при перестройке вдоль тора, получаем следующий факт.

Предложение 3.2. *Для любого диффеоморфизма $f\in\mathrm{MS}(M^3)$ каждая компонента связности многообразия $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$ диффеоморфна $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$.*

Аналогичным образом определяются u-ламинация на многообразии $\widehat{V}$ и многообразие $\widehat{V}_{\widehat{L}^u}$, полученное перестройкой многообразия $\widehat{V}$ вдоль u-ламинации $\widehat{L}^u$, и устанавливаются аналогичные предложениям 3.1, 3.2 факты. Оказывается, что выполнение необходимых свойств, описанных в этих предложениях, является достаточным условием, выделяющим множество $\mathscr{S}$ абстрактных схем.

Определение 3.6. Набор $S=(\widehat{V},\eta,\widehat{L}^s,\widehat{L}^u)$ называется *абстрактной схемой*, если:

1) $\widehat{V}$ является замкнутым 3-многообразием, чья фундаментальная группа допускает эпиморфизм $\eta\colon\pi_1(\widehat{V})\to\mathbb{Z}$;

2) $\widehat{L}^s$ и $\widehat{L}^u$ – трансверсальные s-ламинация и u-ламинация соответственно на многообразии $\widehat{V}$;

3) каждая компонента связности многообразия, полученного перестройкой многообразия $\widehat{V}$ вдоль s-ламинации $\widehat{L}^s$ (u-ламинации $\widehat{L}^u$), диффеоморфна $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^1$.

Теорема 3.3. *Для любой абстрактной схемы $S\in\mathscr{S}$ существует диффеоморфизм $f\in\mathrm{MS}(M^3)$, схема которого эквивалентна схеме S.*

Существование эпиморфизма η на многообразии $\widehat{V}$ приводит к существованию гладкого связного некомпактного 3-многообразия без края V, накрывающего пространство $\widehat{V}$, и диффеоморфизма $f_V\colon V \to V$, являющегося положительной образующей группы скольжений[10] $G(V,\ p\colon V \to \widehat{V},\ \widehat{V})$. Дальнейшее доказательство теоремы 3.3, как и в реализации диффеоморфизмов класса Пикстона, состоит в последовательном вклеивании n_s гиперболических седловых орбит индекса Морса 1 и n_u гиперболических седловых орбит индекса Морса 1 в многообразие V. Свойство 3) абстрактной схемы позволяет компактифицировать полученное многообразие конечным числом гиперболических стоковых и источниковых орбит, число которых совпадает с числом компонент связности многообразий $\widehat{V}_{\widehat{L}^s}$ и $\widehat{V}_{\widehat{L}^u}$ соответственно.

4. Взаимосвязь динамики с топологией объемлющего многообразия

В этом разделе устанавливаются некоторые соотношения, связывающие топологию объемлющего многообразия M^3 с количеством седловых и узловых периодических точек диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$.

4.1. Классификация 3-многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса–Смейла без гетероклинических кривых. Обозначим через $\mathrm{MS}_*(M^3)$ класс диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических кривых на 3-многообразиях. Классификационная теорема для фазовых пространств диффеоморфизмов этого класса имеет следующий вид.

Теорема 4.1. *Пусть f – диффеоморфизм из класса $\mathrm{MS}_*(M^3)$ такой, что Ω_f состоит из r_f седловых и l_f узловых точек. Тогда $g_f = (r_f - l_f + 2)/2$ является целым неотрицательным числом и справедливы следующие утверждения:*

1) *если $g_f = 0$, то M^3 – 3-сфера;*

2) *если $g_f > 0$, то M^3 – связная сумма g_f копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

Обратно, для любых неотрицательных целых чисел r, l, g таких, что число $g = (r - l + 2)/2$ является целым и неотрицательным, существует диффеоморфизм $f \in \mathrm{MS}_*(M^3)$ со следующими свойствами:

a) *M^3 – 3-сфера, если $g = 0$, и M^3 – связная сумма g копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, если $g > 0$;*

b) *неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из r седловых и l узловых точек.*

Непосредственным следствием теоремы 4.1 является следующий факт.

Следствие 4.1. *Если объемлющее 3-многообразие диффеоморфизма Морса–Смейла f отлично от $\mathbb{S}^3$ и связной суммы конечного числа копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то блуждающее множество f обязательно содержит гетероклинические кривые.*

Опишем идею доказательства теоремы 4.1.

[10] *Группой скольжений* накрытия $p\colon \bar{X} \to X$ называется группа всех гомеоморфизмов $\bar{h}\colon \bar{X} \to \bar{X}$, для которых $p\bar{h} = p$. Эта группа обозначается $G(\bar{X}, p, X)$.

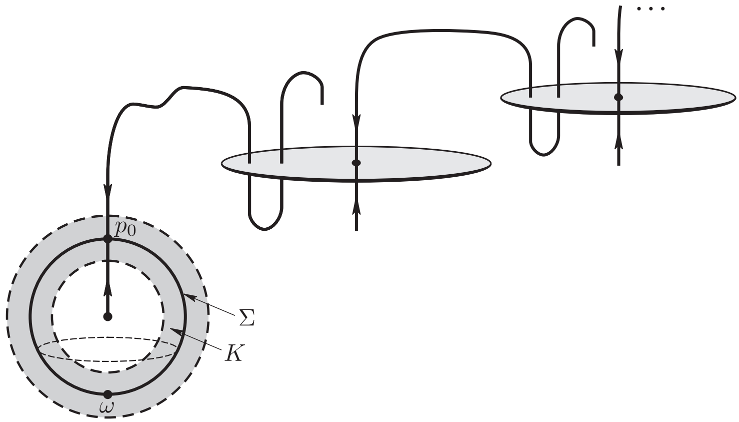


Рис. 22. Иллюстрация к доказательству прямого утверждения теоремы 4.1

Прямое утверждение. Для доказательства прямого утверждения достаточно рассмотреть диффеоморфизмы подкласса $\mathrm{MS}_{**}(M^3) \subset \mathrm{MS}_*(M^3)$, неблуждающее множество которых состоит только из неподвижных точек таких, что среди них есть хотя бы одно седло с индексом Морса 2 и все сепаратрисы седловых точек инвариантны относительно f [если $r_f = 0$, то $f \in \mathrm{MS}_*(M^3)$ является диффеоморфизмом "источник–сток" и многообразие M^3 гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^3$ (см., например, [34; теорема 2.2.1]), тогда $l_f = 2$, $g_f = 0$, так что теорема верна; если $r_f \neq 0$, то существует целое ненулевое число q такое, что $f^q \in \mathrm{MS}_{**}(M^3)$]. Доказательство проводится индукцией по числу $r_f > 0$ седловых точек диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}_{**}(M^3)$. Рассмотрим случай $r_f > 0$ и предположим, что лемма доказана для $r_{f'} < r_f$.

Поскольку у диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}_{**}(M^3)$ отсутствуют гетероклинические кривые, сепаратрисы седловых точек с разным индексом Морса не пересекаются. Тогда, в силу конечности неблуждающего множества Ω_f, среди седловых точек, принадлежащих $\Omega_2 \neq \varnothing$, имеется хотя бы одна точка p_0, чья двумерная неустойчивая сепаратриса не участвует в гетероклинических пересечениях. Согласно пункту 3) утверждения 1.1, существует сток $\omega \in \Omega_f$ такой, что сепаратриса $W^u_{p_0} \setminus p_0$ содержится в W^s_ω. Положим $\Sigma = W^u_{p_0} \cup \omega$. Согласно утверждению 1.4, Σ – топологически вложенная в M^3 сфера, гладкая всюду, кроме, быть может, одной точки ω. Согласно лемме 2.1, существует окрестность K сферы Σ, диффеоморфная $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ (см. рис. 22). Тогда Σ – аттрактор и, не уменьшая общности, можно считать, что $f(K) \subset \operatorname{int} K$.

Удалив область $\operatorname{int} K$ из многообразия M^3, мы получим компактное многообразие, имеющее две граничных компоненты S_1 и S_2. Обозначим через M_1 компактное многообразие без границы, полученное из $M^3 \setminus \operatorname{int} K$ приклеиванием к его границе двух замкнутых 3-шаров B_1 и B_2. Нетрудно построить диффеоморфизм Морса–Смейла $f_1\colon M_1 \to M_1$ такой, что f_1 совпадает с f на $M^3 \setminus f^{-1}(K)$ и имеет ровно две притягивающие неподвижные точки $\omega_1 \in B_1$, $\omega_2 \in B_2$ и не имеет никаких других периодических точек в $B_1 \cup B_2$. Тогда диффеоморфизм f_1 имеет то же число неподвижных точек, что и диффеоморфизм f, и число его неподвижных седловых точек равно $r_{f_1} = r_f - 1$, а число

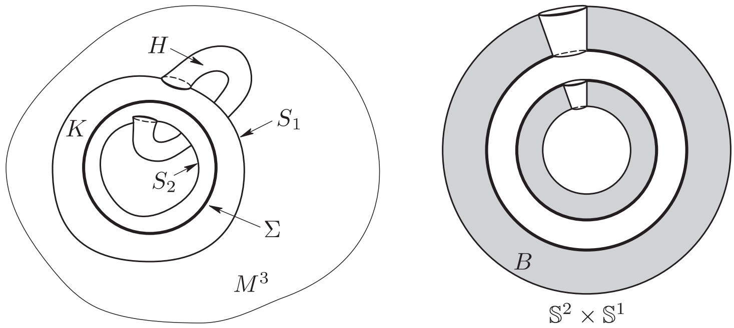


Рис. 23. Иллюстрация к случаю b)

стоков и источников равно $l_{f_1} = l_f + 1$. Далее рассмотрим две возможности: a) $M^3 \setminus K$ не связно и b) $M^3 \setminus K$ связно.

В случае a) многообразие M_1 является непересекающимся объединением двух многообразий $\tilde{M}_1$ и $\check{M}_1$, а M^3 есть связная сумма $\widetilde{M_1} \# \check{M}_1$. Обозначим через $\tilde{f}_1$ и $\check{f}_1$ ограничения диффеоморфизма f_1 на многообразия $\tilde{M}_1$ и $\check{M}_1$ соответственно. Так как $r_{\widetilde{f_1}} < r_f$ и $r_{\check{f}_1} < r_f$, то из предположения индукции следует, что многообразия $\widetilde{M_1}$ и $\check{M}_1$ являются связными суммами соответственно $g_{\widetilde{f_1}} = (r_{\widetilde{f_1}} - l_{\widetilde{f_1}} + 2)/2$ и $g_{\check{f}_1} = (r_{\check{f}_1} - l_{\check{f}_1} + 2)/2$ копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (под многообразием, состоящим из 0 копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, понимается многообразие $\mathbb{S}^3$). Как следствие, M^3 – связная сумма

$$\frac{r_{\widetilde{f_1}} - l_{\widetilde{f_1}} + 2}{2} + \frac{r_{\check{f}_1} - l_{\check{f}_1} + 2}{2} = \frac{r_{f_1} - l_{f_1} + 4}{2} = \frac{r_f - l_f + 2}{2}$$

копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Таким образом, теорема верна в этом случае.

В случае b) многообразие M_1 связно и, следовательно, $M^3 = M_1 \# M_*$, где M_* диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см., например, [43]). На рис. 23 дано пояснение этого факта, где схематично показано многообразие M^3, в котором изображена не разделяющая его сфера Σ с трубчатой окрестностью K, ограниченной сферами S_1, S_2. Тогда существует заполненный цилиндр H, пересекающийся с каждой сферой S_1, S_2 в точности по одному двумерному диску. В многообразии M_1 шары B_1, B_2 приклеиваются к сферам S_1, S_2, и объединение $B_1 \cup H \cup B_2$ является 3-шаром в M_1. Еще один 3-шар B выделен серым цветом в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. При этом многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus B$ гомеоморфно $K \cup H$. Тогда связная сумма $M_1 \# (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$, получаемая посредством именно этих 3-шаров, гомеоморфна многообразию M^3.

Как и выше, мы обозначаем через r_{f_1} число седел и через l_{f_1} число стоков и источников диффеоморфизма f_1. Так как $r_{f_1} = r_f - 1$, то из предположения индукции следует, что M_1 является либо $\mathbb{S}^3$, если $(r_{f_1} - l_{f_1} + 2)/2 = 0$, либо связной суммой $(r_{f_1} - l_{f_1} + 2)/2$ копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда M^3 – связная сумма $(r_{f_1} - l_{f_1} + 2)/2 + 1 = (r_f - l_f + 2)/2$ копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, так что теорема верна и в этом случае.

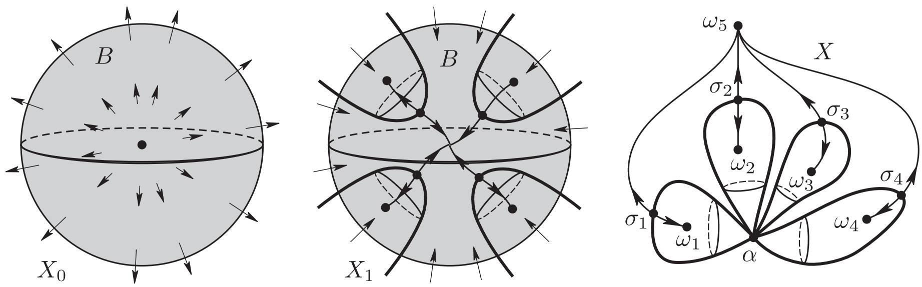


Рис. 24. Построение векторного поля X на сфере $\mathbb{S}^3$

Обратное утверждение. При доказательстве обратного утверждения теоремы 4.1 для любых неотрицательных целых чисел r, l, g таких, что число $g = (r - l + 2)/2$ является целым и неотрицательным, строится градиентоподобное векторное поле X на многообразии M^3 со следующими свойствами:

a) M^3 является 3-сферой, если $g = 0$, и связной суммой g копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, если $g > 0$;

b) неблуждающее множество потока X состоит из r седловых и l узловых состояний равновесия.

Тогда искомый диффеоморфизм будет сдвигом на единицу времени потока, порожденного построенным векторным полем.

a) В случае сферы выполнено равенство $l = r + 2$. Обозначим через X_0 векторное поле на 3-шаре B, направленное наружу трансверсально к S и имеющее единственный источник внутри (и не имеющий замкнутых траекторий). Обозначим через X_1 векторное поле Морса–Смейла на компактном 3-шаре B, трансверсальное границе шара $S = \partial B$ и имеющее точно один сток, r источников и r седел с двумерными неустойчивыми многообразиями (без замкнутых траекторий). Склеивая по границе две копии шара B: одну – оснащенную полем X_0, и другую – оснащенную полем X_1, мы получим 3-сферу $\mathbb{S}^3$, оснащенную векторным полем Морса–Смейла без гетероклинических пересечений и замкнутых траекторий, имеющим точно l источников и стоков и r седел (см. рис. 24, где поток X построен для значения $r = 4$).

b) В случае, когда многообразие M^3 является связной суммой $g > 0$ копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, оно получается склеиванием двух копий ручечных тел B_g рода g посредством изотопного тождественному диффеоморфизма его границы $S_g = \partial B_g$ (см., например, [23]). Представим число r в виде суммы $r = r_1 + r_2$, где $r_j \geqslant g$, $j = 1, 2$. Для $j = 1, 2$ построим векторные поля X_{r_1}, X_{r_2} на B_g как на рис. 25 (здесь векторные поля X_{r_1} и X_{r_2} изображены для значений $g = 3$, $r_1 = 5$, $r_2 = 4$).

Склеивая по границе две копии ручечного тела B_g: одну – оснащенную полем X_{r_1}, а другую – оснащенную полем X_{r_2}, мы получим связную сумму g копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, оснащенную векторным полем Морса–Смейла без гетероклинических пересечений и замкнутых траекторий, имеющим точно l источников и стоков и r седел.

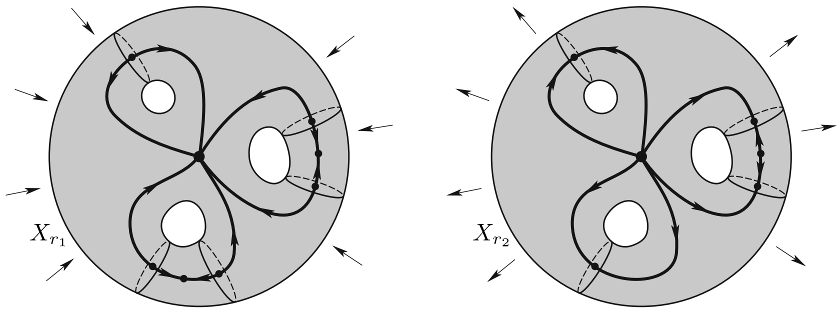


Рис. 25. Построение векторного поля X на связной сумме $g > 0$ копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$

4.2. Разбиение Хегора объемлющего 3-многообразия градиентоподобного диффеоморфизма. Обозначим через $\mathrm{MS}_0(M^n) \subset \mathrm{MS}(M^n)$ подкласс градиентоподобных диффеоморфизмов. Согласно утверждению 1.4, замыкание $\mathrm{cl}\,\ell$ любой одномерной неустойчивой сепаратрисы ℓ седловой точки σ диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}_0(M^n)$ гомеоморфно отрезку, который состоит из этой сепаратрисы и двух точек: σ и некоторого стока ω. Пусть L_ω – объединение неустойчивых одномерных сепаратрис седловых точек, которые содержат ω в своих замыканиях. Поскольку W^s_ω гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ (см. п. 2) утверждения 1.1) и множество $F_\omega = L_\omega \cup \omega$ является объединением простых дуг с единственной общей точкой ω, то по аналогии с пучком дуг в $\mathbb{R}^n$ мы назовем F_ω *пучком одномерных неустойчивых сепаратрис* и дадим следующее определение.

Определение 4.1. Пучок сепаратрис F_ω назовем *ручным*, если существует гомеоморфизм $\psi_\omega \colon W^s_\omega \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\psi_\omega(F_\omega)$ – пучок лучей в $\mathbb{R}^n$. В противном случае пучок сепаратрис назовем *диким*.

Если α – источник диффеоморфизма f, то аналогично определяется ручной (дикий) пучок F_α одномерных устойчивых сепаратрис. На рис. 26 изображен фазовый портрет диффеоморфизма на $\mathbb{S}^3$. Дикость пучка сепаратрис F_ω в этом случае доказана Г. Дебруннером и Р. Фоксом [20]. Такой тип пучков из $n > 1$ дуг они в своей работе назвали умеренно диким, поскольку извлечение из пучка любой дуги делает его ручным.

Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 4.2. *Если все пучки одномерных сепаратрис диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}_0(M^3)$ являются ручными, то объемлющее многообразие M^3 допускает разбиение Хегора рода g_f.*

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Ручность одномерных пучков сепаратрис диффеоморфизма f позволяет построить для аттрактора $A_f = W^u_{\Omega_0 \cup \Omega_1}$ связную захватывающую окрестность M_{A_f}, которая является гладким ручечным телом некоторого рода g_{A_f}, составленным из множеств B и C, где B – объединение $|\Omega_0|$ (здесь $|X|$ – мощность множества X) трехмерных шаров, содержащих стоки, а C – объединение $|\Omega_1|$ трехмерных шаров, содержащих седла индекса 1; каждая компонента связности множества C пересекает B

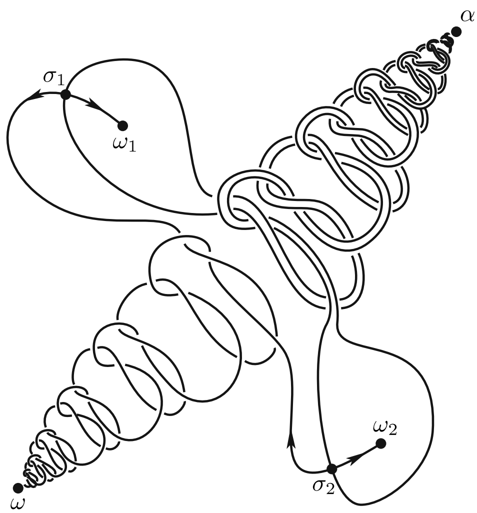


Рис. 26. Градиентоподобный диффеоморфизм на $\mathbb{S}^3$ с умеренно диким пучком сепаратрис

в точности по двум двумерным дискам, принадлежащим пересечению $\partial B \cap \partial C$, и $M_{A_f} \setminus A_f$ диффеоморфно многообразию $S_{g_{A_f}} \times (0,1]$, где $S_{g_{A_f}}$ – ориентируемая поверхность рода g_{A_f} (см. рис. 27).

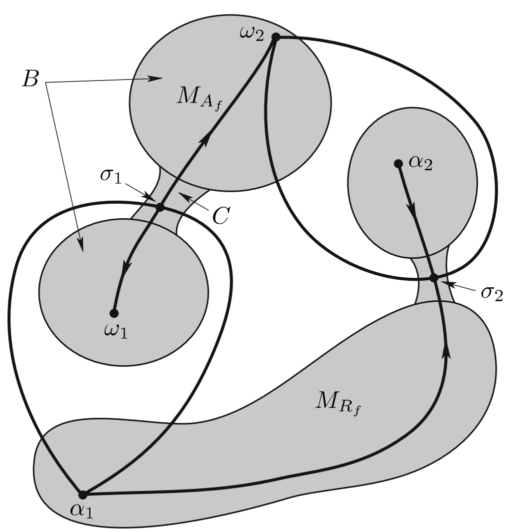


Рис. 27. Захватывающие окрестности одномерных аттрактора и репеллера

По построению среди компонент связности множества C имеется g_{A_f} шаров, после удаления которых из множества M_{A_f} получается связное многообразие. Дальнейшее удаление оставшихся $|\Omega_1| - g_{A_f}$ шаров приводит к многообразию B. Отсюда следует, что $1 + |\Omega_1| - g_{A_f} = |\Omega_0|$ и, значит, $g_{A_f} = 1 + |\Omega_1| - |\Omega_0|$.

Аналогично, переходом к диффеоморфизму f^{-1}, строится окрестность M_{R_f} репеллера R_f, которая является ручечным телом рода $g_{R_f} = 1+|\Omega_2|-|\Omega_3|$ и для которой $M_{R_f}\setminus R_f$ диффеоморфно $S_{g_{R_f}}\times(0,1]$, где $S_{g_{R_f}}$ – ориентируемая поверхность рода g_{R_f}. Поскольку множество A_f является аттрактором, то существует натуральное число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{n_0}(M_{A_f}) \subset \operatorname{int} M_{A_f}$. Тогда пространство $K = M_{A_f} \setminus \operatorname{int} f^{n_0}(M_{A_f})$ диффеоморфно $S_{g_{A_f}} \times [0,1]$ (см. [33; теорема 3.3]). По построению K – фундаментальная область ограничения диффеоморфизма f^{n_0} на V_f. Тогда V_f диффеоморфно $S_{g_{A_f}} \times \mathbb{R}$. Проведя аналогичные рассуждения для диффеоморфизма f^{-1}, получим, что характеристическое многообразие V_f диффеоморфно $S_{g_{R_f}} \times \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $g_{A_f} = g_{R_f}$. Положим $g = g_{A_f} = g_{R_f}$. Тогда

$$\begin{aligned} 2g &= g_{A_f} + g_{R_f} = 1 + |\Omega_1| - |\Omega_0| + 1 + |\Omega_2| - |\Omega_3| \\ &= 2 + |\Omega_1 + \Omega_2| - |\Omega_0 + \Omega_3| = 2 + r_f - l_f = 2g_f, \end{aligned}$$

и, следовательно, $g = g_f$.

Выберем натуральное число $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{n_1}(M_{A_f}) \cap M_{R_f} = \varnothing$. Тогда многообразие $K = M^3\setminus(f^{n_1}(M_{A_f})\cup M_{R_f})$ диффеоморфно $S_{g_f}\times[0,1]$. Поскольку многообразия $f^{n_1}(M_{A_f})$ и M_{R_f} являются ручечными телами рода g_f, то $M^3 = f^{n_1}(M_{A_f}) \cup (M_{R_f} \cup K)$ разбиение рода g_f для многообразия M^3.

5. Существование энергетической функции

Поскольку неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ конечно, естественно искать его функцию Ляпунова в классе функций Морса, что приводит к следующему определению.

Определение 5.1. Функция Морса $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* для $f \in \mathrm{MS}(M^n)$, если:

1) $\psi(f(x)) < \psi(x)$ для любого $x \notin \Omega_f$;

2) $\psi(f(x)) = \psi(x)$ для любого $x \in \Omega_f$.

Как показывает следующее утверждение, динамика диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ тесно связана со свойствами функции Ляпунова.

Утверждение 5.1 [61; предложение]. *Пусть $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}$ – функция Ляпунова для диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$. Тогда*:

1) *$-\psi$ является гладкой функцией Ляпунова для f^{-1}*;

2) *если p – периодическая точка диффеоморфизма f, то $\psi(x) < \psi(p)$ для любого $x \in W^u_p \setminus p$ и $\psi(x) > \psi(p)$ для любого $x \in W^s_p \setminus p$*;

3) *если p – периодическая точка диффеоморфизма f, то p – критическая точка функции ψ*;

4) *индекс критической точки*[11] *p равен* $\dim W^u_p$.

[11] *Индексом критической точки p* функции Морса $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}$ называется число отрицательных собственных значений матрицы Гесса $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_j}(p)$. Согласно *лемме Морса* (см., например, [46]), в некоторой окрестности $V(p)$ невырожденной критической точки p функции ψ существуют локальные координаты, называемые *координатами Морса*, $x_1,\dots,x_n$ ($x_j(p)=0$ для всех $j=1,\dots,n$), в которых функция ψ имеет вид $\psi(x) = \psi(p) - x_1^2 - \dots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2$, где q – индекс ψ в точке p.

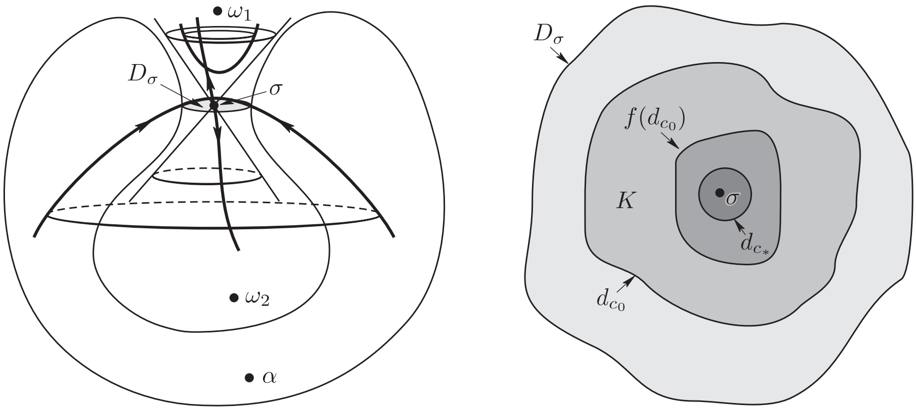


Рис. 28. Аргументы Д. Пикстона

В силу утверждения 5.1, любая периодическая точка p является максимумом ограничения функции Ляпунова ψ на W^u_p и минимумом ограничения ψ на W^s_p. При этом, если экстремум невырожден, то инвариантное многообразие трансверсально ко всем регулярным множествам уровня ψ в некоторой окрестности точки p. Это локальное свойство полезно для построения (глобальной) функции Ляпунова.

Определение 5.2. Функция Ляпунова $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ называется *функцией Морса–Ляпунова*, если каждая периодическая точка p является невырожденным максимумом (соответственно минимумом) ограничения ψ на неустойчивое (соответственно устойчивое) многообразие W^u_p (соответственно W^s_p).

Определение 5.3. Функция Морса–Ляпунова $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ называется *энергетической функцией*, если множество ее критических точек совпадает с неблуждающим множеством Ω_f.

Следствием гиперболичности любой периодической орбиты $\mathscr{O}$ диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ является существование функции Морса–Ляпунова в некоторой ее окрестности (см., например, [34; лемма 2.2.1]). Глобальную функцию Морса–Ляпунова для f можно построить с помощью перехода к надстройке с дальнейшим применением результатов работы [44] о существовании энергетической функции у потока Морса–Смейла. Д. Пикстон [61] показал, построив "пример Пикстона", что для $n = 3$ построенная таким образом функция не является в общем случае энергетической, опровергнув тем самым гипотезу М. Шуба [67] и Ф. Такенса [72] о существовании энергетической функции у любого диффеоморфизма Морса–Смейла.

Приведем аргументы Д. Пикстона (см. рис. 28 для дальнейших пояснений). Для этого предположим, что диффеоморфизм Пикстона f обладает энергетической функцией ψ. Тогда, в силу п. 2) утверждения 5.1, $\max\{\psi(\omega_1), \psi(\omega_2)\} < \psi(\sigma) < \psi(\alpha)$. В силу п. 4) утверждения 5.1 и леммы Морса, любая линия уровня $\psi^{-1}(c)$ для $c \in (\psi(\sigma), \psi(\alpha))$ является двумерной сферой. Поскольку σ – невырожденный минимум функции $\psi\big|_{W^s_\sigma}$, то существуют двумерный диск

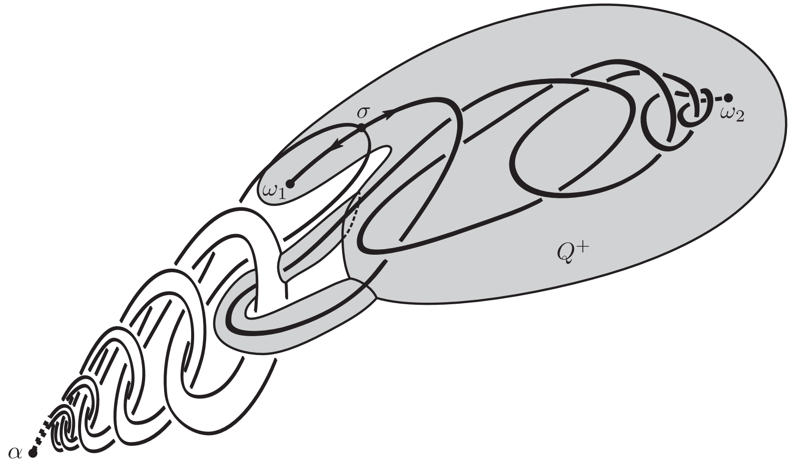


Рис. 29. Диффеоморфизм из класса $\mathscr{P}_1$

$D_\sigma \subset W^s_\sigma$, содержащий σ, и значение $c_0 \in (\psi(\sigma), \psi(\alpha))$ такие, что множество $d_c = \{x \in D_\sigma : \psi(x) \leqslant c\}$ является двумерным диском и $\psi^{-1}(c) \cap D_\sigma = \partial d_c$ для любого $c \in (\psi(\sigma), c_0)$. В силу свойства 1) определения функции Ляпунова, $f(d_{c_0}) \subset \operatorname{int} d_{c_0}$ и, следовательно, $K = d_{c_0} \setminus \operatorname{int} f(d_{c_0})$ – фундаментальная область ограничения f на $W^s_\sigma \setminus \sigma$. Выберем значение $c_* \in (\psi(\sigma), c_0)$ такое, что $d_{c_*} \subset \operatorname{int} f(d_{c_0})$, тогда $\psi(x) > c_*$ для любого $x \in K$, а в силу свойства 1) определения функции Ляпунова, $\psi(x) > c_*$ для любого $x \in f^{-k}(K)$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, сфера $\psi^{-1}(c_*)$ пересекает W^s_σ по единственной окружности, что противоречит утверждению 1.5.

5.1. Квазиэнергетическая функция. Как уже было отмечено выше, диффеоморфизмы класса Пикстона $\mathscr{P}$ в общем случае не обладают энергетической функцией, в связи с этим дадим следующее определение.

Определение 5.4. Назовем функцию Морса–Ляпунова $\psi\colon M^n \to \mathbb{R}$ *квазиэнергетической* для диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^n \to M^n$, если она имеет наименьшее возможное число критических точек среди всех функций Морса–Ляпунова для f.

Для диффеоморфизма Пикстона отсутствие энергетической функции связано с отсутствием какого-либо f^{-1}-сжимаемого 3-шара B ($f^{-1}(B) \subset \operatorname{int} B$) в W^u_α, граница которого пересекалась бы с W^s_σ по единственной окружности. С другой стороны, в примере Пикстона существует заполненный тор с описанными свойствами, дополнение до которого также является заполненным тором (см. рис. 29). Обозначим через $\mathscr{P}_1$ множество диффеоморфизмов $f \in \mathscr{P}$, для которых существует f^{-1}-сжимаемый заполненный тор $Q^- \subset W^u_\alpha$, граница которого пересекается с W^s_σ по единственной окружности и является поверхностью Хегора для $\mathbb{S}^3$. Положим $Q^+ = \mathbb{S}^3 \setminus \operatorname{int} Q^-$.

Теорема 5.1. *Каждая квазиэнергетическая функция диффеоморфизма $f \in \mathscr{P}_1$ имеет в точности шесть критических точек.*

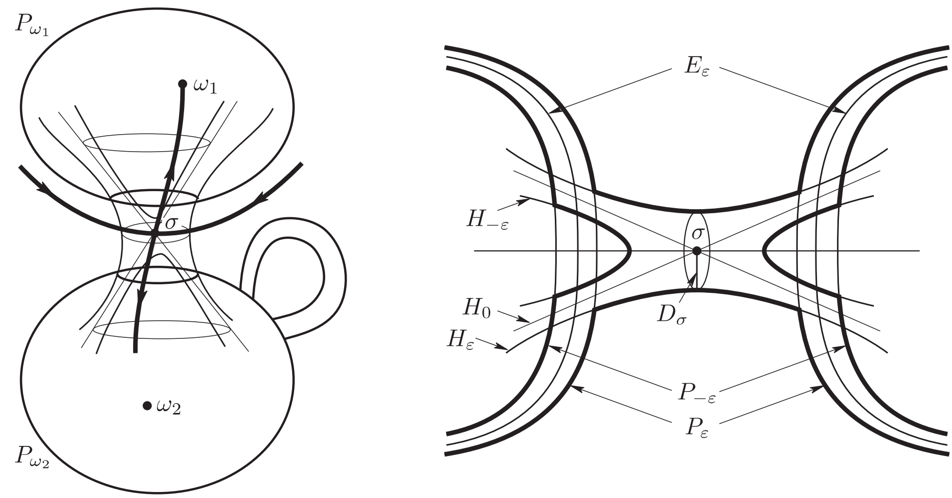


Рис. 30. Построение квазиэнергетической функции для диффеоморфизма $f \in \mathscr{P}_1$

Опишем схему построения квазиэнергетической функции для диффеоморфизма $f \in \mathscr{P}_1$.

1. Построим энергетическую функцию $\psi_p\colon U_p \to \mathbb{R}$ в окрестности каждой неподвижной точки p диффеоморфизма f так, что $\psi_p(p) = \dim W^u_p$.

2. Из определения класса $\mathscr{P}_1$ следует, что множество Q^+ является f-сжимаемым заполненным тором таким, что пересечение $W^s_\sigma \cap Q^+$ состоит из единственного 2-диска D_σ. Выберем окрестность $N(D^+)$ диска D_σ так, что $Q^+ \setminus N(D_\sigma) = P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2}$, где ∂P_{ω_i}, $i = 1, 2$, – ручечное тело рода $i-1$ такое, что $\omega_i \in f(P_{\omega_i}) \subset \operatorname{int} P_{\omega_i} \subset W^s_{\omega_i}$ и ∂P_{ω_i} трансверсальна к регулярной части критического уровня $C = \psi_\sigma^{-1}(1)$ функции ψ_σ. Тогда существует $\varepsilon \in (0, 1/2)$ такое, что ∂P_{ω_i} трансверсально пересекает по одной окружности каждое множество уровня функции ψ_σ со значением, принадлежащим интервалу $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ (см. рис. 30).

Для каждого $i = 1, 2$ выберем ручечное тело $\widetilde{P}_{\omega_i}$ рода $i-1$ со следующими свойствами:

a) $f(P_{\omega_i}) \subset \widetilde{P}_{\omega_i} \subset \operatorname{int} P_{\omega_i}$;

b) $\partial\widetilde{P}_{\omega_i}$ трансверсально пересекает по одной окружности каждое множество уровня функции ψ_σ со значением, принадлежащим интервалу $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$;

c) $P_{\omega_i} \setminus \operatorname{int} \widetilde{P}_{\omega_i}$ диффеоморфно $\partial P_{\omega_i} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ (далее мы отождествляем эти многообразия так, что $P_{\omega_i} = \partial P_{\omega_i} \times \{\varepsilon\}$).

3. Для $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ положим

$$P_{i,t} = \widetilde{P}_{\omega_i} \cup \partial P_{\omega_i} \times [-\varepsilon, t], \qquad H_t = \{x \in U_\sigma\colon \psi_\sigma(x) \leqslant 1 + t\},$$
$$Q_t = P_{1,t} \cup P_{2,t} \cup H_t, \qquad E_\varepsilon = (Q_\varepsilon \setminus \operatorname{int} Q_{-\varepsilon}) \cap (H_\varepsilon \setminus \operatorname{int} H_{-\varepsilon})$$

(см. рис. 30).

Не уменьшая общности, можно считать, что ε выбрано столь малым, что для любого $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ поверхность $\partial P_{i,t}$, $i = 1, 2$, трансверсально пересекает множества ∂H_t по одному двумерному диску и $f^{-1}(E_\varepsilon)\cap H_\varepsilon=\varnothing$ (это возможно, так как если ψ_σ – функция Ляпунова для $f\big|_{U_\sigma}$, то $\psi_\sigma(f^{-1}(\psi_\sigma^{-1}(1)\setminus\sigma))>1$ и, следовательно, $(H_0\setminus\sigma)\subset \operatorname{int} f^{-1}(H_0\setminus\sigma))$. Тогда на множестве $K=Q_\varepsilon\setminus\operatorname{int}Q_{-\varepsilon}$ соотношение $\psi_K(x)=1+t_x$, где $x\in Q_{t_x}$, определяет энергетическую функцию для f.

4. Поскольку $P_{1,-\varepsilon}$ есть 3-шар такой, что $\omega_1\in f(P_{1,-\varepsilon})\subset\operatorname{int}P_{1,-\varepsilon}\subset W^s_{\omega_1}$, то существует энергетическая функция $\psi_{P_{1,-\varepsilon}}\colon P_{1,-\varepsilon}\to\mathbb{R}$ диффеоморфизма f, которая принимает значение $1-\varepsilon$ на множестве $\partial P_{1,-\varepsilon}$ и совпадает с ψ_{ω_1} в некоторой окрестности стока ω_1. Существование такой функции следует из возможности замены некоторой уже построенной линии уровня S энергетической функции в многообразии, диффеоморфном $S\times\mathbb{R}$, на любую несжимаемую поверхность S'. Технически оно достигается последовательными модификациями поверхности S, уменьшающими число компонент связности в пересечении $S'\cap(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}f^k(S))$, $k\in\mathbb{Z}$, теоретически – опирается на гипотезу кольца в случае, когда S есть 2-сфера, и теорему Ф. Вальдхаузена, когда S – поверхность положительного рода[12].

Поскольку $P_{2,-\varepsilon}$ – заполненный тор такой, что $\omega_2\in f(P_{2,-\varepsilon})\subset\operatorname{int}P_{2,-\varepsilon}\subset W^s_{\omega_2}$, то существует 3-шар B_{ω_2} такой, что $f(P_{2,-\varepsilon})\subset B_{\omega_2}\subset\operatorname{int}P_{2,-\varepsilon}$. Такой шар можно построить следующим образом. Выберем меридианный диск D в торе $P_{2,-\varepsilon}$ так, что $\omega_2\notin D$. Не уменьшая общности, можно считать, что D трансверсален к $G=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}f^k(\partial P_{2,-\varepsilon})$ и пересечение $D\cap G$ не содержит кривых, гомотопных нулю на торе $f^k(\partial P_{2,-\varepsilon})$. Тогда существует кривая $c\subset(D\cap f^k(\partial P_{2,-\varepsilon}))$, ограничивающая 2-диск e_c в D, внутренность которого не содержит никаких кривых из множества $D\cap G$. Существуют два случая: (a) $e_c\subset f^k(P_{2,-\varepsilon})$ и (b) $\operatorname{int}e_c\cap f^k(P_{2,-\varepsilon})=\varnothing$.

В случае (a) диск e_c является меридианным диском в $f^k(P_{2,-\varepsilon})$ и, следовательно, $d=f^{-k}(e_c)$ является меридианным диском в $P_{2,-\varepsilon}$ таким, что $f(P_{2,-\varepsilon})\cap d=\varnothing$. Действительно, по построению $\operatorname{int}e_c\cap G=\varnothing$, следовательно, $\operatorname{int}d\cap G=\varnothing$. Таким образом, мы можем найти требуемый 3-шар B_{ω_2} внутри открытого 3-шара $\operatorname{int}P_{2,-\varepsilon}\setminus d$.

В случае (b) существует трубчатая окрестность $V(e_c)\subset\operatorname{int}P_{2,-\varepsilon}$ диска e_c такая, что $G\cap\operatorname{int}V(e_c)=\varnothing$ и $B_k=f^k(P_{2,-\varepsilon})\cup V(e_c)$ есть 3-шар. Тогда $f^k(P_{2,-\varepsilon})\subset B_k\subset\operatorname{int}f^{k-1}(P_{2,-\varepsilon})$. Таким образом, $B_{\omega_2}=f^{1-k}(B_k)$ – требуемый 3-шар.

---

[12] Гладкая поверхность F, вложенная в многообразие X, называется *сжимаемой* в X в одном из следующих двух случаев:

1) существуют нестягиваемая простая замкнутая кривая $c\subset\operatorname{int}F$ и гладко вложенный 2-диск $D\subset\operatorname{int}X$ такой, что $D\cap F=\partial D=c$;

2) существует 3-шар $B\subset\operatorname{int}X$ такой, что $F=\partial B$.

Поверхность F называется *несжимаемой* в X, если она не является сжимаемой в X.

Гипотеза кольца для $n=3$ (см. [47]). *Пусть S_1^2, S_2^2 – непересекающиеся 2-сферы, ручно вложенные в 3-сферу $\mathbb{S}^3$. Тогда замыкание области в $\mathbb{S}^3$, ограниченной сферами S_1^2 и S_2^2, является трехмерным кольцом.*

Теорема Вальдхаузена (см. [75; предложение 3.1]). *Пусть G – ориентируемая поверхность (возможно, с непустым краем ∂G), которая не является 2-сферой. Тогда для любой собственно вложенной ($\partial X\cap F=\partial F$) несжимаемой поверхности F в $G\times[0,1]$ такой, что $\partial F\subset G\times\{1\}$, существует поверхность $F_1\subset G\times\{1\}$, гомеоморфная F и такая, что $\partial F=\partial F_1$ и $F\cup F_1$ ограничивает область Δ в $G\times[0,1]$, замыкание которой гомеоморфно $F\times[0,1]$.*

Как и выше, существует энергетическая функция $\psi_{B_{\omega_2}}\colon B_{\omega_2} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизма f, которая принимает значение $1/2$ на множестве ∂B_{ω_2} и совпадает с ψ_{ω_2} в некоторой окрестности стока ω_2.

5. Известно, что заполненный тор может быть получен из 3-шара отождествлением пары непересекающихся 2-дисков на его границе. Так как с точностью до изотопии существует единственный 3-шар во внутренности заполненного тора, то на многообразии $R = P_{2,-\varepsilon} \setminus \operatorname{int} B_{\omega_2}$ существует функция Морса ψ_R только с одной критической точкой индекса 1 и такая, что $\psi_R(\partial B_{\omega_2}) = 1/2$, $\psi_R(\partial P_{2,-\varepsilon}) = 1 - \varepsilon$.

6. Определим гладкую функцию $\psi^+\colon Q_\varepsilon \to \mathbb{R}$ формулой

$$\psi^+(x) = \begin{cases} \psi_K(x), & x \in K; \\ \psi_{P_{1,-\varepsilon}}(x), & x \in P_{1,-\varepsilon}; \\ \psi_{B_{\omega_2}}(x), & x \in B_{\omega_2}; \\ \psi_R(x), & x \in R. \end{cases}$$

Тогда ψ^+ – функция Морса–Ляпунова для $f\big|_{Q_\varepsilon}$ с одной дополнительной критической точкой.

7. По построению Q^-_ε – заполненный тор такой, что $\alpha \in f^{-1}(Q^-_\varepsilon) \subset \operatorname{int} Q^-_\varepsilon \subset W^u_\alpha$. Поскольку α – сток для f^{-1}, то, как в предыдущем пункте, существует функция Морса–Ляпунова $\psi_{Q^-_\varepsilon}$ для f^{-1} только с одной критической точкой индекса 1 и такая, что $\psi_{Q^-_\varepsilon}(\partial Q^-_\varepsilon) = 2 - \varepsilon$ и $\psi_{Q^-_\varepsilon}(\alpha) = 3$.

Определим гладкую функцию $\psi^-\colon Q^-_\varepsilon \to \mathbb{R}$ формулой $\psi^-(x) = 3 - \psi_{Q^-_\varepsilon}(x)$. Тогда ψ^- – функция Морса–Ляпунова для $f\big|_{Q^-_\varepsilon}$ с одной дополнительной критической точкой.

Наконец, функция $\psi\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ такая, что $\psi\big|_{Q^+_\varepsilon} = \psi^+$ и $\psi\big|_{Q^-_\varepsilon} = \psi^-$, является искомой квазиэнергетической функцией для диффеоморфизма f.

5.2. Самоиндексирующаяся энергетическая функция.

Определение 5.5. Энергетическая функция ψ для диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ называется *самоиндексирующейся*, если $\psi(p) = \dim W^u_p$ для любой точки $p \in \mathrm{Per}_f$.[13]

Нетрудно убедиться, что если диффеоморфизм Морса–Смейла $f\colon M^3 \to M^3$ имеет самоиндексирующуюся энергетическую функцию, то он является градиентоподобным. Действительно, предположив, что диффеоморфизм f не является градиентоподобным и обладает самоиндексирующейся энергетической функцией $\psi\colon M^3 \to \mathbb{R}$, мы найдем точки $x, y \in \mathrm{Per}_f$ $(x \neq y)$ такие, что $W^u_x \cap W^s_y \neq \varnothing$ и $\dim W^s_x \geqslant \dim W^s_y$. Положим $\dim W^u_x = k$, $\dim W^u_y = m$ и пусть $z \in W^u_x \cap W^s_y$. Так как $n - k = \dim W^s_x \geqslant \dim W^s_y = n - m$, то $k \leqslant m$. В силу утверждения 5.1, $\varphi(z) < \varphi(x) = \dim W^u_x = k$, $\varphi(z) > \varphi(y) = \dim W^u_y = m$, следовательно, $k > m$. Получили противоречие.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия существования самоиндексирующейся энергетической функции в терминах специального разбиения Хегора многообразия M^3. Нам также понадобится следующее определение.

[13]Функция с аналогичными свойствами была построена С. Смейлом для градиентоподобных векторных полей в работе [69].

Определение 5.6. Пусть D – подмножество M^3 и S_g – замкнутая ориентируемая двумерная поверхность рода g. Тогда D называется (f,S_g)-*сжимаемым произведением*, если существует диффеоморфизм $q\colon S_g\times[0,1]\to D$ такой, что $q^{-1}(S_g\times\{t\})$ ограничивает f-сжимаемое ручечное тело для любого $t\in[0,1]$.

Теорема 5.2. *Градиентоподобный диффеоморфизм $f\colon M^3\to M^3$ имеет самоиндексирующуюся энергетическую функцию тогда и только тогда, когда M^3 представляется в виде объединения трех множеств с попарно непересекающимися внутренностями, $M^3=P^+\cup N\cup P^-$, где*:

1) P^+, P^- *– ручечные тела рода g_f такие, что $A_f\subset f(P^+)\subset\operatorname{int}P^+$, $R_f\subset P^-\subset\operatorname{int}f^{-1}(P^-)$*;

2) *для каждой седловой точки $\sigma_1\in\Sigma_1$ (соответственно $\sigma_2\in\Sigma_2$) пересечение $W^s_{\sigma_1}\cap P^+$ (соответственно $W^u_{\sigma_2}\cap P^-$) состоит в точности из одного двумерного замкнутого диска*;

3) *N есть (f,S_{g_f})-сжимаемое произведение.*

5.3. Динамически упорядоченная энергетическая функция. В этом пункте для диффеоморфизмов класса $\mathrm{MS}(M^n)$ мы вводим понятие динамически упорядоченной энергетической функции, тесно связанной с динамикой диффеоморфизма, и исследуем условия ее существования. При этом ключевую роль будут играть характеристические многообразия V_i, введенные в п. 3.2.

Определение 5.7. Пусть орбиты диффеоморфизма $f\in\mathrm{MS}(M^n)$ имеют динамическую нумерацию: $\mathscr{O}_1,\dots,\mathscr{O}_{k_f}$. Функцию Морса–Ляпунова ψ для диффеоморфизма f назовем *динамически упорядоченной*, если $\psi(\mathscr{O}_i)=i$ для $i\in\{1,\dots,k_f\}$.

Для лучшего понимания трехмерной ситуации полезно прокомментировать результат Д. Пикстона [61] о существовании энергетической функции у любого диффеоморфизма Морса–Смейла на поверхности. Конструкция основана на том, что для любого каскада $f\in\mathrm{MS}(M^2)$ каждая компонента связности характеристического многообразия V_i, $i=1,\dots,k_f-1$, гомеоморфна $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ и для $i=k_0+1,\dots,k_1$ содержит нестягиваемую окружность, пересекающуюся с любой устойчивой сепаратрисой седловой точки из орбиты $\mathscr{O}_i$ не более чем по одной точке. Это позволяет свести построение глобальной энергетической функции к индуктивному по i процессу слияния локальных функций Морса–Ляпунова. В связи с вышесказанным мы дадим следующее определение.

Определение 5.8. Пусть $f\in\mathrm{MS}(M^3)$. Двумерное устойчивое (неустойчивое) многообразие седловой орбиты $\mathscr{O}_i$, $i\in\{k_0+1,\dots,k_1\}$ ($i\in\{k_1+1,\dots,k_2\}$), назовем *просто вложенным*, если каждая компонента связности многообразия V_i (V_{i-1}) содержит несжимаемую замкнутую ориентируемую поверхность, пересекающуюся с W^s_i (W^u_i) не более чем по одной замкнутой кривой.

С использованием аргументов Д. Пикстона устанавливается, что простое вложение двумерных многообразий седловых орбит является необходимым условием существования динамически упорядоченной энергетической функции ψ для диффеоморфизма $f\in\mathrm{MS}(M^3)$. Действительно, в этом случае существует $\varepsilon>0$ такое, что компоненты связности линии уровня $\psi^{-1}(i+\varepsilon)$ (соответственно

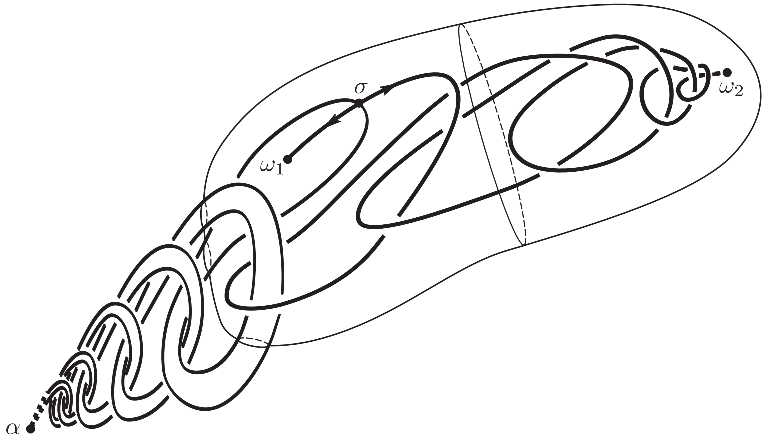


Рис. 31. Неправильно вложенное двумерное многообразие седловой точки

$\psi^{-1}(i+1-\varepsilon))$ являются поверхностями, удовлетворяющими условиям определения 5.8.

Примером непростого вложения двумерного многообразия седловой точки является пример Пикстона, где $\mathscr{O}_1 = \omega_1$, $\mathscr{O}_2 = \omega_2$, $\mathscr{O}_3 = \sigma$, $\mathscr{O}_4 = \alpha$. Здесь характеристическое пространство V_3 совпадает с многообразием $W^u_\alpha \setminus \alpha$ и, следовательно, оно гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. В силу теоремы Вальдхаузена, любая несжимаемая поверхность в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ является сферой. С другой стороны, любая такая сфера в V_3 пересекает W^s_σ более чем по одной компоненте связности (см. рис. 31) и, следовательно, многообразие W^s_σ не является просто вложенным.

Теорема 5.3. *Если любое характеристическое многообразие диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ гомеоморфно прямому произведению ориентируемой замкнутой поверхности на прямую и двумерное многообразие любой седловой орбиты является просто вложенным, то f обладает динамически упорядоченной энергетической функцией.*

В условиях теоремы 5.3 ситуация подобна двумерному случаю и индукцией по i построение по существу сводится к слиянию локальных энергетических функций, подобно тому, как это было сделано в п. 5.1 (см. рис. 30).

Следующее утверждение является обобщением теоремы 4.2 на случай произвольного диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$.

Предложение 5.1. *Если диффеоморфизм f из класса $\mathrm{MS}(M^3)$ обладает динамически упорядоченной энергетической функцией ψ, то объемлющее многообразие M^3 допускает разбиение Хегора g_f* [14].

Заметим, что требование гомеоморфности характеристического многообразия прямому произведению не является необходимым условием существования энергетической функции. Так, на рис. 32 изображено ручечное тело P^+ рода 1, состоящее из 3-шара B^+ и 1-ручки C^+. На P^+ определен диффеоморфизм на образ F^+, неблуждающее множество которого состоит из двух

[14] Поверхностью Хегора рода g_f является множество уровня $\psi^{-1}(k_1 + 1/2)$.

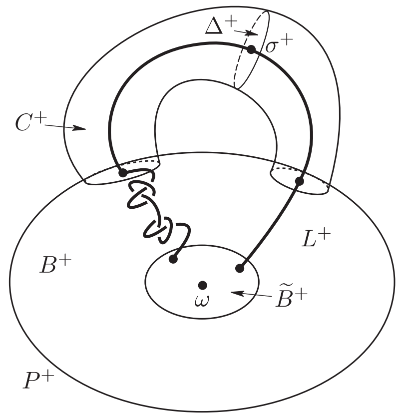


Рис. 32. Построение диффеоморфизма с характеристическим многообразием, не являющимся прямым произведением

неподвижных гиперболических точек: стока ω и седла σ^+ с локальным устойчивым многообразием Δ^+. При этом образом шара B^+ является шар $\widetilde{B}^+$, а образом ручки C^+ является трубчатая окрестность дуги L^+. Можно доказать, что $W^+ = P^+ \setminus \operatorname{int} F^+(P^+)$ не гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. В силу того, что узелки на дуге L^+ обладают симметрией относительно средней сферы кольца $B^+ \setminus \operatorname{int} B^+$, можно склеить P^+ с его копией P^-, на которой задан диффеоморфизм $F^- = (F^+)^{-1}$, так, что получится многообразие $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и градиентоподобный диффеоморфизм f на нем. При этом одно из характеристических пространств диффеоморфизма f гомеоморфно пространству W^+/F^+ и, следовательно, соответствующее характеристическое многообразие не является прямым. Заметим, что двумерные многообразия седловых точек построенного диффеоморфизма просто вложены в соответствующие характеристические многообразия. Более того, для него нетрудно построить энергетическую функцию.

В классе $\mathrm{MS}_*(\mathbb{S}^3)$ диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических кривых, заданных на сфере $\mathbb{S}^3$, благодаря соотношениям, установленным в теореме 4.1, можно доказать, что условие простой вложенности двумерных многообразий седловых орбит диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}_*(\mathbb{S}^3)$ приводит к тому, что любая компонента связности любого характеристического многообразия f гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Откуда получаем следующий критерий.

Теорема 5.4. *Диффеоморфизм Морса–Смейла $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ без гетероклинических кривых обладает динамически упорядоченной энергетической функцией тогда и только тогда, когда для любого $i \in \{k_0+1,\dots,k_1\}$ ($i \in \{k_1+1,\dots,k_2\}$) каждая компонента связности многообразия V_i (V_{i-1}) содержит несжимаемую двумерную сферу, пересекающуюся с W_i^s (W_i^u) не более чем по одной замкнутой кривой.*

В частности, из теоремы 5.4 следует, что диффеоморфизм $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, фазовый портрет которого изображен на рис. 26, обладает динамически упорядоченной энергетической функцией. При этом пучок одномерных сепаратрис диффеоморфизма f, содержащих сток ω в своем замыкании, не является ручным, а представляет собой умеренно дикий пучок Дебруннера–Фокса.

6. Включение в топологический поток

Проблема включения каскада Морса–Смейла в топологический поток восходит к работе Дж. Палиса [52]. Им были установлены следующие необходимые условия включения диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^n)$ в поток X^t:

1) неблуждающее множество Ω_f совпадает с множеством неподвижных точек Fix_f;
2) ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию;
3) если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто, то оно не содержит компактных компонент связности.

Поясним несложное доказательство необходимости этих условий. Для этого предположим, что диффеоморфизм f является сдвигом на единицу времени потока X^t. Если Ω_f содержит периодическую точку периода $m > 0$, то она принадлежит замкнутой орбите γ потока X^t. Тогда все точки этой орбиты являются периодическими точками периода m для f, что невозможно в силу конечности Ω_f, и, следовательно, справедливо условие 1). Условие 2) следует из факта совпадения неблуждающих множеств, $\Omega_f = \Omega_{X^t}$, и инвариантных многообразий неподвижных точек для потока и диффеоморфизма. Последнее означает, что ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ изотопно тождественному отображению и, следовательно, сохраняет его ориентацию. Условие 3) следует из того, что каждая компонента связности пересечения $W^s_p \cap W^u_q$ для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ является объединением траекторий потока X^t. В частности, из условия 3) следует, что любой включающийся в поток диффеоморфизм Морса–Смейла является градиентоподобным.

В дальнейшем условия 1)–3) будем называть *условиями Палиса*. В работе [52] также показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными. Доказательство базируется на том, что пучки сепаратрис диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}_0(M^2)$ обладают даже более сильным, чем ручность (см. определение 4.1), свойством вложения, описанным в следующем определении.

Определение 6.1. Пусть ω – неподвижный сток диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}_0(M^n)$. Пучок одномерных неустойчивых сепаратрис F_ω называется *тривиально вложенным*, если существует гомеоморфизм $\psi_\omega \colon W^s_\omega \to \mathbb{R}^n$ такой, что $f\big|_{W^s_\omega} = \psi_\omega^{-1} a^s_{n,+1} \psi_\omega\big|_{W^s_\omega}$ и $\psi_\omega(F_\alpha)$ – пучок прямолинейных лучей.

Аналогично определяется тривиально вложенный пучок одномерных устойчивых сепаратрис F_α для источниковой точки α.

Тривиальность вложения любого пучка F_ω на поверхности объясняется тем, что пространство орбит $(W^s_\omega \setminus \omega)/f$ гомеоморфно двумерному тору, а проекция в него пучка F_ω является объединением попарно непересекающихся нестягиваемых окружностей. Топология тора позволяет перевести такое объединение в семейство кривых вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$ (см., например, [65]). Это обстоятельство дает

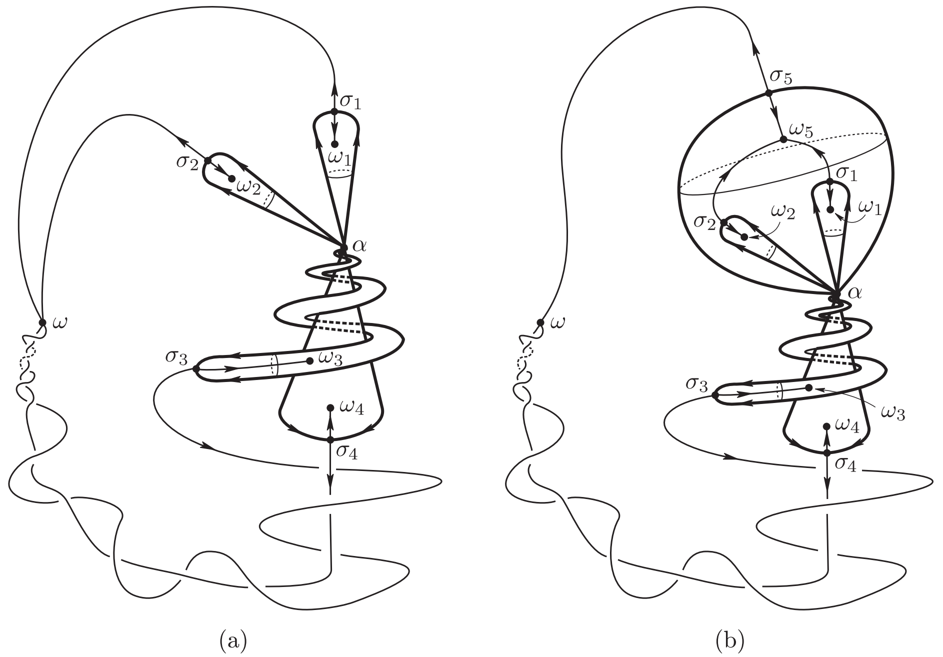


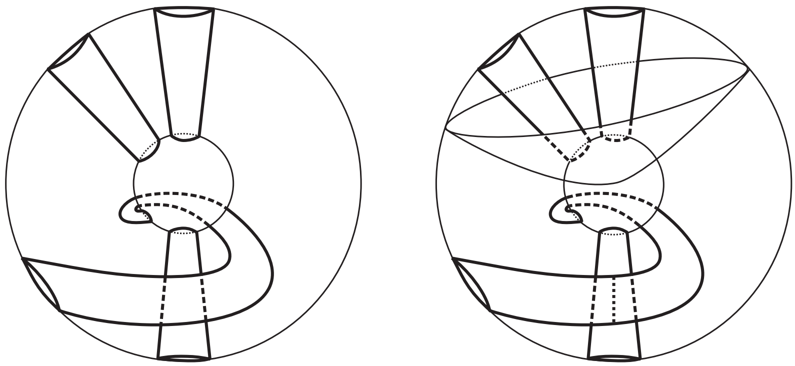
Рис. 33. Фазовые портреты диффеоморфизмов из класса $\mathrm{MS}\,(S^3)$, не включающихся ни в какие топологические потоки: a) диффеоморфизм, для которого все пучки одномерных сепаратрис являются ручными, но пучок F_ω не является тривиальным; b) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными

возможность включить диффеоморфизм $f\big|_{W^s_\omega}$ в линейный поток так, что сепаратрисы пучка F_ω становятся траекториями потока. В силу утверждения 1.1, $M^2 = \Omega_1 \cup \big(\bigcup_{\omega\in\Omega_0} W^s_\omega\big) \cup \big(\bigcup_{\alpha\in\Omega_2} F_\alpha\big)$. Тогда поток на бассейнах стоков можно модифицировать так, чтобы он продолжался на тривиальные пучки устойчивых сепаратрис, тем самым доказав результат Дж. Палиса.

В размерности 3 существуют нетривиальные вложения пучков одномерных сепаратрис; такой эффект, как мы уже видели, наблюдается у диффеоморфизма Пикстона (см. рис. 4) и у диффеоморфизма Дебруннера–Фокса (см. рис. 26). Однако, как будет следовать из леммы 6.1 ниже, тривиальность всех пучков одномерных сепаратрис является необходимым условием включения диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ в поток. Заметим, что в силу результатов работы К. Куперберг [38], дикая дуга может быть траекторией некоторого топологического потока на 3-многообразии.

Лемма 6.1. *Пусть диффеоморфизм f из класса* $\mathrm{MS}(M^3)$ *включается в топологический поток. Тогда все пучки его одномерных сепаратрис являются тривиальными.*

Сюрпризом оказался тот факт, что добавление к списку Палиса условия тривиальности всех пучков одномерных сепаратрис седловых точек диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ не приводит к достаточным условиям его включения



(a) (b)

Рис. 34. Схемы диффеоморфизмов, фазовые портреты которых представлены на рис. 33

в топологический поток. Иллюстрирующий этот факт пример приведен на рис. 33, где изображены фазовые портреты диффеоморфизмов, не включающихся ни в какие топологические потоки.

В действительности, ключом к решению проблемы Палиса о включении диффеоморфизма Морса–Смейла $f\colon M^3 \to M^3$ в поток является схема диффеоморфизма f (см. определение 3.1) и число $g_f = (|\Omega_1 \cup \Omega_2| - |\Omega_0 \cup \Omega_3| + 2)/2$, введенное в разделе 4.

Обозначим через $\mathbb{S}_{g_f}$ ориентируемую замкнутую поверхность рода g_f. Положим $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$. Множество $\widehat{\lambda} = c_{\widehat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$, где $c_{\widehat{\lambda}}$ – простая гладкая замкнутая кривая на поверхности $\mathbb{S}_{g_f}$, назовем *тривиальным тором* на многообразии $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$.

Определение 6.2. Схему S_f диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ назовем *тривиальной*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\psi}_f\colon \widehat{V}_f \to \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ такой, что каждая компонента связности множеств $\widehat{\psi}_f(\widehat{L}^s_f)$ и $\widehat{\psi}_f(\widehat{L}^u_f)$ является тривиальным тором на многообразии $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$.

На рис. 34 изображены схемы диффеоморфизмов, фазовые портреты которых представлены на рис. 33. Нетрудно показать, что обе изображенные схемы не являются тривиальными.

Основной результат настоящего пункта заключается в следующей теореме.

Теорема 6.1. *Диффеоморфизм $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его схема является тривиальной.*

Доказательство леммы 6.1 и доказательство необходимости условий теоремы 6.1 проводятся по единой схеме. Для определенности покажем, как из условия включения диффеоморфизма $f \in \mathrm{MS}(M^3)$ в топологический поток X^t следует, что схема S_f является тривиальной.

Обозначим через Y^t ограничение потока X^t на множество V_f. Из построения множества V_f следует, что для любой точки $x \in V_f$ имеют место включения $\lim_{t\to+\infty} Y^t(x) \in A_f$ и $\lim_{t\to-\infty} Y^t(x) \in R_f$. Таким образом, для любых точек

$p,q\in V_f$ существуют окрестности $U_p,U_q\subset V_f$ и константа $T>0$ такие, что $Y^t(U_p)\cap U_q=\varnothing$ для любого t, $|t|>T$. Это означает, согласно определению, данному в [22; с. 545], что поток Y^t является *дисперсивным*. Тогда из теоремы 3 работы [22] следует, что поток Y^t является *параллелизуемым*, т. е. существуют множество $\Sigma_f\subset V_f$ и гомеоморфизм $\xi_f\colon V_f\to\Sigma_f\times\mathbb{R}$ такие, что $\bigcup_{t\in\mathbb{R}}Y^t(\Sigma_f)=V_f$ и $\xi_f(Y^t(z))=(z,t)$ для любых $z\in\Sigma_f$, $t\in\mathbb{R}$.

Из [36] следует, что топологическая размерность Σ_f равна двум. Действительно, согласно теореме III.4 в [36], справедливо неравенство $\dim V_f\leqslant\dim\Sigma_f+\dim\mathbb{R}$ и, следовательно, $\dim\Sigma_f\geqslant 2$. Поскольку $\Sigma_f\subset V_f$, то $\dim\Sigma_f\leqslant 3$. Предположив, что $\dim\Sigma_f=3$, из теоремы IV.3 в [36] получаем, что в множестве Σ_f лежит открытый 3-шар U. Тогда $\xi_f^{-1}(U\times\mathbb{R})$ – четырехмерное подмножество трехмерного многообразия V_f, что противоречит тому, что $\dim V_f=3$. Таким образом, $\dim\Sigma_f=2$. Тогда, в силу [76], Σ_f является многообразием без края (в [76; теорема 2] доказано, что если декартово произведение $A\times B$ топологических пространств A и B является n-многообразием и $\dim A=1,2$, то A является многообразием и не имеет края, если его не имеет многообразие $A\times B$). Таким образом, Σ_f – замкнутая ориентируемая поверхность. Обозначим через ρ_f род этой поверхности. Покажем, что $\rho_f=g_f$.

По построению поверхность Σ_f делит многообразие на две части, замыкания которых обозначим через P_{A_f}, P_{R_f}, полагая, что $A_f\subset\operatorname{int}P_{A_f}$, $R_f\subset\operatorname{int}P_{R_f}$. Поскольку P_{A_f} есть 3-многообразие с краем Σ_f, то $\chi(\Sigma_f)=2\chi(P_{A_f})$ (см., например, [21; следствие 8.7]). Так как $\chi(\Sigma_f)=2-2\rho_f$, то $\chi(P_{A_f})=1-\rho_f$. С другой стороны, диффеоморфизм f изотопен тождественному отображению и, следовательно, по формуле Лефшеца, эйлерова характеристика $\chi(P_{A_f})$ совпадает с суммой индексов неподвижных точек $p\in\operatorname{Fix}_f$, где индекс p равен $(-1)^{\dim W^u_p}$. Следовательно, $\chi(A_f)=|\Omega_0|-|\Omega_1|$. Таким образом, $|\Omega_0|-|\Omega_1|=1-\rho_f$. Из аналогичных рассуждений для аттрактора получаем, что $|\Omega_3|-|\Omega_2|=1-\rho_f$. Складывая два последних равенства, приходим к равенству $|\Omega_0|-|\Omega_1|+|\Omega_3|-|\Omega_2|=2-2\rho_f$, откуда следует, что $\rho_f=(|\Omega_1\cup\Omega_2|-|\Omega_0\cup\Omega_3|+2)/2$ и, значит, $\rho_f=g_f$.

Поскольку каждая двумерная сепаратриса λ диффеоморфизма f гомеоморфна $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ и является объединением траекторий потока Y^t, то существует простая замкнутая кривая $\gamma_\lambda\subset\Sigma_f$ такая, что $\xi_f(\lambda)=\gamma_\lambda\times\mathbb{R}$. Тогда существует гомеоморфизм $h_f\colon\Sigma_f\to\mathbb{S}_{g_f}$ такой, что $c_\lambda=h_f(\gamma_\lambda)$ – простая гладкая замкнутая кривая для любой двумерной сепаратрисы λ. Определим поток $A^t_{g_f}$ на многообразии $\mathbb{V}_{g_f}=\mathbb{S}_{g_f}\times\mathbb{R}$ формулой $A^t_{g_f}(s,r)=(s,r+t)$ и гомеоморфизм $\psi_f\colon V_f\to\mathbb{V}_{g_f}$ соотношением $\psi_f(Y^t(z))=A^t_{g_f}(h_f(z))$, $z\in\Sigma_f$, $t\in\mathbb{R}$. По построению гомеоморфизм ψ_f сопрягает потоки Y^t и $A^t_{g_f}$, а следовательно, и их сдвиги на единицу времени. При этом $\psi_f(\lambda)=c_\lambda\times\mathbb{R}$. По построению $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}=\mathbb{V}_{g_f}/A^1_{g_f}$. Обозначим через $p_{g_f}\colon\mathbb{V}_{g_f}\to\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ естественную проекцию. Тогда, в силу утверждения 1.7, гомеоморфизм $\widehat{\psi}_f=p_{g_f}\psi_f p_f^{-1}\colon\widehat{V}_f\to\widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ удовлетворяет условию определения 6.2. Таким образом, схема S_f является тривиальной.

Доказательство достаточности условий теоремы состоит в построении градиентоподобного потока $\widetilde{X}^t$ по тривиальной схеме S_f диффеоморфизма f. Идейно конструкция является обобщением реализации диффеоморфизмов класса Пикстона. При этом диффеоморфизм $\widetilde{f}$, являющийся сдвигом на единицу времени построенного потока $\widetilde{X}^t$, имеет схему $S_{\widetilde{f}}$, эквивалентную схеме S_f. Тогда, согласно теореме 3.1, диффеоморфизмы f и $\widetilde{f}$ топологически сопряжены посредством некоторого гомеоморфизма $h\colon M^3 \to M^3$ такого, что $hf = \widetilde{f}h$. Отсюда следует, что диффеоморфизм f включается в топологический поток $X^t = h^{-1}\widetilde{X}^t h$.

Авторы выражают глубокую благодарность Д. В. Аносову за постоянное внимание к данной тематике и поддержку.

Список литературы

[1] В. С. Афраймович, Л. П. Шильников, “Об особых множествах систем Морса–Смейла”, Тр. ММО, **28**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1973, 181–214; англ. пер.: V. S. Afraĭmovič, L. P. Šil’nikov, “On critical sets of Morse–Smale systems”, Trans. Moscow Math. Soc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975, 179–212.

[2] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.

[3] R. H. Fox, E. Artin, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space”, *Ann. of Math.* (2), **49**:4 (1948), 979–990.

[4] D. Asimov, “Round handles and non-singular Morse–Smale flows”, *Ann. of Math.* (2), **102**:1 (1975), 41–54.

[5] A. Banyaga, “On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms”, *Topology*, **16**:3 (1977), 279–283.

[6] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентоподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Межвуз. темат. сб. научн. тр., ред. Е. А. Леонтович-Андронова, Горьковский гос. ун-т, Горький, 1984, 22–38; англ. пер.: A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. I”, *Selecta Math. Soviet.*, **11**:1 (1992), 1–11.

[7] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентоподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 2”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Межвуз. темат. сб. научн. тр., ред. Е. А. Леонтович-Андронова, Горьковский гос. ун-т, Горький, 1987, 24–31; англ. пер.: A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. II”, *Selecta Math. Soviet.*, **11**:1 (1992), 13–17.

[8] P. R. Blanchard, “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse–Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Math. J.*, **47**:1 (1980), 33–46.

[9] Ch. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3”, *J. Dyn. Control Syst.*, **6**:4 (2000), 579–602.

[10] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology Appl.*, **117**:3 (2002), 335–344.

[11] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.

[12] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Бифуркации диффеоморфизмов Морса–Смейла с дико вложенными сепаратрисами”, *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 54–69; англ. пер.: C. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Bifurcations of Morse–Smale diffeomorphisms with wildly embedded separatrices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256**:1 (2007), 47–61.

[13] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 5–53; англ. пер.: Ch. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 1–46.

[14] Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds”, *Foliations* 2005, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, 121–147.

[15] C. Bonatti, R. Langevin, *Difféomorphismes de Smale des surfaces*, with the collaboration of E. Jeandenans, Astérisque, **250**, Soc. Math. France, Paris, 1998, viii+235 pp.

[16] М. И. Брин, “О включении диффеоморфизма в поток”, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, № 8(123), 19–25.

[17] C. Camacho, A. Lins Neto, *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, vi+205 pp.

[18] J. Cerf, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois* ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Math., **53**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1968, xii+133 pp.

[19] C. Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978, iii+89 pp.

[20] H. Debrunner, R. Fox, “A mildly wild imbedding of an n-frame”, *Duke Math. J.*, **27**:3 (1960), 425–429.

[21] А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, Мир, М., 1976, 463 с.; пер. с англ.: A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Grundlehren Math. Wiss., **200**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1972, xi+377 pp.

[22] J. Dugundji, H. A. Antosiewicz, “Parallelizable flows and Lyapunov’s second method”, *Ann. of Math.* (2), **73**:3 (1961), 543–555.

[23] А. Т. Фоменко, *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*, 2-е изд., Библиотека “Математика”, **3**, Изд. дом “Удмуртский университет”, ред. журн. “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 1999, 252 с.

[24] J. Franks, “The periodic structure of non-singular Morse–Smale flows”, *Comment. Math. Helv.*, **53** (1978), 279–294.

[25] В. З. Гринес, “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Матем. заметки*, **54**:3 (1993), 3–17; англ. пер.: V. Z. Grines, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, *Math. Notes*, **54**:3 (1993), 881–889.

[26] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, “О диффеоморфизмах Морса–Смейла на многообразиях размерности большей трех”, *Докл. РАН*, **416**:1 (2007), 15–17; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, “On Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension higher than three”, *Dokl. Math.*, **76**:2 (2007), 649–651.

[27] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей трех”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 61–86; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, “Peixoto graph of Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261** (2008), 59–83.

[28] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, “О включении в поток диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей двух”, *Матем. заметки*, **91**:5 (2012), 791–794; англ. пер.: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “Embedding in a flow of Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension higher than two”, *Math. Notes*, **91**:5-6 (2012), 742–745.

[29] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, "О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток", *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 81–104.

[30] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, "Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами", *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 175–183; англ. пер.: V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, "Quasi-energy function for diffeomorphisms with wild separatrices", *Math. Notes*, **86**:1-2 (2009), 163–170.

[31] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, "Self-indexing function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds", *Mosc. Math. J.*, **9**:4 (2009), 801–821.

[32] В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, "О существовании энергетической функции для диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях", *Докл. РАН*, **440**:1 (2011), 7–10; англ. пер.: V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, "On the existence of an energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds", *Dokl. Math.*, **84**:2 (2011), 601–603.

[33] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами", **194**:7 (2003), 25–56; англ. пер.: V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, "New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices", *Sb. Math.*, **194**:7 (2003), 979–1007.

[34] В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевский институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2011, 424 с.

[35] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979, 279 с.; пер. с англ.: M. W. Hirsch, *Differential topology*, Grad. Texts in Math., **33**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1976, x+221 pp.

[36] В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, ИЛ, М., 1948, 232 с.; англ. пер.: W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Ser., **4**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941, vii+165 pp.

[37] Ч. Косневски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Современная математика: Вводные курсы, Мир, М., 1983, 304 с.; пер. с англ.: C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980, viii+269 pp.

[38] K. Kuperberg, "2-wild trajectories", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, suppl., 518–523.

[39] R. Langevin, "Quelques nouveaux invariants des difféomorphismes Morse–Smale d'une surface", *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **43**:1 (1993), 265–278.

[40] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, "О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории", *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557–560.

[41] S. Matsumoto, "There are two isotopic Morse–Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs", *Invent. Math.*, **51**:1 (1979), 1–7.

[42] А. Г. Майер, "Грубое преобразование окружности в окружность", *Уч. зап. Горьк. ун-та*, **12** (1939), 215–229.

[43] В. С. Медведев, Я. Л. Уманский, "О разложении n-мерных многообразий на простые многообразия", *Изв. вузов. Матем.*, 1979, № 1, 46–50; англ. пер.: V. S. Medvedev, Ya. L. Umanskii, "Decomposition of n-dimensional manifolds into simple manifolds", *Soviet Math.* (*Iz. VUZ*), **23**:1 (1979), 36–39.

[44] K. R. Meyer, "Energy functions for Morse Smale systems", *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

[45] Ж. Милнор, “О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере”, Математика. Сб. пер., **1**, М., ИЛ, 1957, 35–42; пер. с англ.: J. Milnor, “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Ann. of Math.* (2), **64**:2 (1956), 399–405.

[46] Дж. Милнор, *Теория Морса*, Изд-во “Платон”, Волгоград, 1996, 184 с.; пер. с англ.: J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Stud., **51**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963, vi+153 pp.

[47] E. E. Moise, “Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung”, *Ann. of Math.* (2), **56**:1 (1952), 96–114.

[48] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions* 2 *and* 3, Grad. Texts in Math., **47**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1977, x+262 pp.

[49] J. W. Morgan, “Non-singular Morse–Smale flows on 3-dimensional manifolds”, *Topology*, **18**:1 (1979), 41–53.

[50] S. Newhouse, M. M. Peixoto, “There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows”, *Trois études en dynamique qualitative*, Astérisque, **31**, Soc. Math. France, Paris, 1976, 15–41.

[51] А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140; англ. пер.: A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1205–1250.

[52] J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.

[53] Ж. Палис, В. ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, Современная математика: Вводные курсы, Мир, М., 1986, 302 с.; пер. с англ.: J. Palis, Jr., W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, translated from the Portuguese by A. K. Manning, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, xii+198 pp.

[54] J. Palis, C. C. Pugh, “Fifty problems in dynamical systems”, *Dynamical systems–Warwick* 1974 (Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974), Lecture Notes in Math., **468**, Springer, Berlin, 1975, 345–353.

[55] J. Palis, S. Smale, “Structural stability theorems”, *Global analysis* (Berkeley, CA, 1968), Proc. Sympos. Pure Math., **XIV**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 223–231; Дж. Пали, С. Смейл, “Теоремы структурной устойчивости”, Математика. Сб. пер., **13**, М., Мир, 1969, 145–155.

[56] M. M. Peixoto, “On structural stability”, *Ann. of Math.* (2), **69**:1 (1959), 199–222.

[57] M. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **1**:2 (1962), 101–120.

[58] M. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds: A further remark”, *Topology*, **2**:1-2 (1963), 179–180.

[59] M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, Proc. Sympos. (Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York, 1973, 389–419.

[60] С. Ю. Пилюгин, “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференц. уравнения*, **14**:2 (1978), 245–254; англ. пер.: S. Ju. Piljugin, “Phase diagrams determining Morse–Smale systems without periodic trajectories on spheres”, *Differ. Equ.*, **14** (1978), 170–177.

[61] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

[62] О. В. Починка, “Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности каскадов Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *Нелинейная динамика*, **7**:2 (2011), 227–238.

[63] О. В. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *Докл. РАН*, **440**:6 (2011), 747–750; англ. пер.: O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Dokl. Math.*, **84**:2 (2011), 722–725.

[64] О. В. Починка, *Глобальная динамика каскадов Морса–Смейла на 3-многообразиях*, Дисс. … докт. физ.-матем. наук, 2011.

[65] D. Rolfsen, *Knots and links*, corrected reprint of the 1976 original, Math. Lecture Ser., **7**, Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990, xiv+439 pp.

[66] Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, т. 1, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск, 2003, 428 с.; пер. с англ.: L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*, v. 1, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, **4**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.

[67] M. Shub, "Morse–Smale diffeomorphisms are unipotent on homology", *Dynamical Systems*, Proc. Sympos. (Univ. Bahia, Salvador, 1971), Academic Press, New York, 1973, 489–491.

[68] С. Смейл, "Неравенства Морса для динамических систем", Математика. Сб. пер., **11**, М., Мир, 1967, 79–87; англ. пер.: S. Smale, "Morse inequalities for a dynamical system", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**:4 (1960), 43–49.

[69] S. Smale, "On gradient dynamical systems", *Ann. of Math.* (2), **74**:1 (1961), 199–206.

[70] S. Smale, "A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points", *Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям*, т. II: *Качественные методы теории нелинейных колебаний* (Киев, 12–18 сентября 1961 г.), Изд-во АН УССР, Киев, 1963, 365–366; пер. с англ.: С. Смейл, "Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек", *Нелинейная динам.*, **3**:4 (2007), 445–446.

[71] S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817; пер. с англ.: С. Смейл, "Дифференцируемые динамические системы", *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185.

[72] F. Takens, "Tolerance stability", *Dynamical systems–Warwick* 1974, Proc. Sympos. Applications of Topology and Dynamical Systems, presented to E. C. Zeeman on his fiftieth birthday (Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974), Lecture Notes in Math., **468**, Springer, Berlin, 1975, 293–304.

[73] Я. Л. Уманский, "Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса–Смейла с конечным числом особых траекторий", *Матем. сб.*, **181**:2 (1990), 212–239; англ. пер.: Ya. L. Umanskii, "Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with a finite number of singular trajectories", *Math. USSR-Sb.*, **69**:1 (1991), 227–253.

[74] W. R. Utz, "The embedding of homeomorphisms in continuous flows", *Topology Proc.*, **6**:1 (1981), 159–177.

[75] F. Waldhausen, "On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large", *Ann. of Math.* (2), **87**:1 (1968), 56–88.

[76] G. S. Young, Jr., "On the factors and fiberings of manifolds", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 215–223.

Поступила в редакцию
14.06.2012

В. З. Гринес (V. Z. Grines)
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

О. В. Починка (O. V. Pochinka)
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru