

ЗАДАЧА О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ И ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ПРЕСНЫХ ВОДОЕМАХ¹

© 2016 г. А. Н. Вульфсон, О. О. Бородин

*Институт проблем нефти и газа РАН
117701 Москва, ГСП 1, ул. Губкина, 3
E-mail: vulfson@ipng.ru, borodin@ipng.ru*

Поступила в редакцию 25.07.2014 г.

Предложена постановка задачи о конвективном охлаждении как пресного, так и соленого озера. Для описания процесса промерзания рассмотрена нестационарная одномерная турбулентная модель с переменной глубиной слоя. Зависимость глубины слоя от времени определяется универсальным уравнением распространения конвективного слоя Дирдорффа. Показано, что сочетание основной формы уравнений теории Колмогорова–Обухова и известных экспериментальных данных позволяет построить универсальный, зависящий от высоты профиль коэффициента турбулентного обмена.

Ключевые слова: турбулентный конвективный слой, коэффициент турбулентного обмена.

DOI: 10.7868/S0321059616040179

Многие задачи геофизической гидродинамики связаны с описанием конвективных процессов вертикального турбулентного переноса.

В гидрологии такие процессы рассматриваются в задачах о промерзании пресных и соленых озер, а также в задаче о техногенном выбросе электростанциями холодной воды на поверхность более теплых водоемов.

В метеорологии такие процессы лежат в основе параметризации конвективного слоя в задаче численного прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы.

Для решения научных задач о турбулентном течении жидкости разработаны модели замыкания второго, третьего и четвертого порядка [9].

Однако в инженерной практике для пространственно-одномерных задач широко используются модели замыкания первого порядка. Эти модели опираются на локальные потоково-градиентные соотношения, связывающие турбулентные потоки импульса и тепла с соответствующими градиентами скорости и температуры.

Неотъемлемая часть потоково-градиентных соотношений – коэффициент турбулентного об-

мена K . Согласно теории Колмогорова–Обухова, коэффициент турбулентного обмена имеет вид: $K = l_K \sqrt{b}$ (l_K – путь перемешивания, b – кинетическая энергия турбулентных пульсаций).

Согласно [21, 29], параметры l_K и b вычисляются по дифференциальным уравнениям, вид которых определяет ту или иную форму универсальной теории турбулентности (подробнее – в [20]).

Для решения одномерных задач с пространственной координатой z более удобны “профильные” модели, в которых коэффициент турбулентного обмена задается некоторым известным соотношением $K = K(z)$. Это соотношение либо представляет собой некоторую априорную аппроксимацию [36], либо соответствует аппроксимации результатов вихреразрешающей модели с высоким порядком замыкания [16].

Профильные модели турбулентности широко используются для параметризации пограничного слоя в задачах прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы [17, 34].

В настоящей работе предложена постановка задачи о конвективном промерзании пресного озера. Для описания процесса промерзания предложена специфическая профильная модель с переменной глубиной слоя. Зависимость глубины

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-05-068491-а).

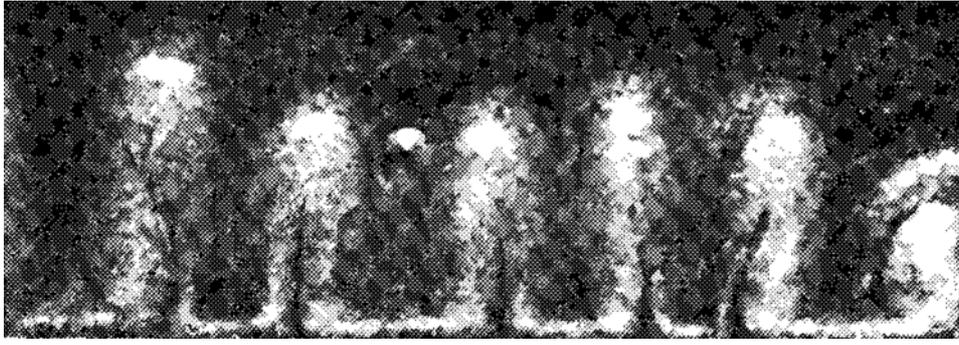


Рис. 1. Развитие течения в слое силиконового масла при высоких числах Рэлея после внезапного увеличения температуры на нижней границе жидкости, согласно [13].

охлаждающегося слоя от времени определяется универсальным уравнением распространения конвективного слоя [11]. Коэффициент турбулентного обмена задается в соответствии с [16]. В рамках теории Колмогорова–Обухова выполнено физическое обоснование выбранного профиля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕЙ СЛОЯ

Пусть t – время; x, y, z – декартова система координат, в которой направление оси z совпадает с направлением силы тяжести g ; оси x, y лежат на плоской охлаждаемой поверхности.

Будем предполагать, что неограниченный слой однородной жидкости расположен в поле силы тяжести и ограничен сверху плоской горизонтальной поверхностью: $z = 0$.

Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$ поверхность жидкости начинает охлаждаться и в слой поступает положительный поток плавучести: $gS_\theta = gS_\theta(t) \geq 0$. Такая задача возникает в гидрологии зимой при образовании льда на поверхности пресных озер. В условиях интенсивного охлаждения поверхности в слое жидкости формируется нестационарный конвективный слой, глубина которого h зависит от времени t . Типичная картина конвекции в жидкости, наблюдаемая в лабораторном эксперименте [13], представлена на рис. 1.

Под глубиной слоя здесь и далее понимается уровень минимального среднего потока плавучести. Закон перемещения глубины конвективного слоя: $h = h(t)$ – зависит от мощности теплового потока на нижней поверхности [2, 11]. Нестационарное уравнение, способное описать эволюцию глубины конвективного слоя, было впервые

предложено в [11] (см. также [2]). Следуя [11], будем считать, что

$$\frac{dh}{dt} = 0.2(gS_\theta h)^{1/3}. \quad (1)$$

Здесь $gS_\theta = gS_\theta(t) \geq 0$ – нестационарный поток плавучести на охлаждаемой поверхности ($[gS_\theta] = \text{м}^2/\text{с}^3$).

Уравнение (1) соответствует случаю нестационарной “непроникающей” конвекции, когда тепловой поток на подвижной границе конвективного слоя намного меньше теплового потока на подстилающей поверхности [6].

Пусть \bar{u}, w – компоненты вектора скорости вдоль плоскости x, y и оси z соответственно; ρ, p – локальные значения плотности и давления. Допустим, что $\bar{\rho} = \text{const}$, $\bar{p} = \bar{p}(z)$ – фоновые статические значения плотности и давления, связанные уравнением статики; $\rho' = \rho - \bar{\rho}$, $p' = p - \bar{p}$ – отклонения плотности и давления от их статических фоновых значений.

Для значений модифицированного давления Φ и безразмерной пульсации плотности θ используем обозначения

$$\Phi = \frac{p'}{\bar{\rho}}, \quad \theta = \frac{\rho'}{\bar{\rho}}. \quad (2)$$

В качестве исходных уравнений примем уравнения теории мелкой конвекции Буссинеска в форме [30] с нейтральной стратификацией плотности:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = -\bar{\nabla} \Phi, & \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + g\theta \\ \nabla \bar{u} + \frac{\partial}{\partial z} w = 0, & \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{cases}. \quad (3)$$

Уравнения (3) – для области с переменной верхней границей: $\Omega = \{-\infty < x, y < \infty, 0 < z < h(t)\}$.

Усредняя по единице площади различные произведения степеней θ и w , получим различные турбулентные моменты конвективного слоя. В частности, $\overline{g\theta w} = gS_\theta > 0$ при $z = 0$. Здесь и далее знак черты “ $\bar{}$ ” обозначает операцию усреднения по единице площади. При этом из системы (3) следует уравнение вертикального турбулентного теплообмена:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z}, \quad 0 < z < h(t), \quad (4)$$

где $\bar{\theta}$ – среднее по площади значение безразмерной пульсации плотности θ .

В нейтрально стратифицированной жидкости отсутствует контр-градиент Дирдорфа. Поэтому справедливо потоко-градиентное соотношение Буссинеска:

$$\overline{w\theta} = -K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad (5)$$

где $K_H > 0$ – коэффициент турбулентного теплообмена.

Подстановка (5) в соотношение (4) приводит к уравнению теплопроводности, заданному в слое с переменной глубиной:

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = 0.2(gS_\theta h)^{1/3} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad 0 < z < h(t) \\ K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0} = gS_\theta, \quad K_H \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Условия Неймана краевой задачи (6) соответствуют потокам плавучести на границах конвективного слоя.

Для замыкания системы (6) необходимо задание коэффициента турбулентного обмена K_H .

Аналитические исследования систем типа (6) при некоторых специально заданных профилях K_H представлены в [1, 4, 31, 34].

ВТОРЫЕ МОМЕНТЫ ТУРБУЛЕНТНОГО КОНВЕКТИВНОГО СЛОЯ

Существование параметров gS_θ и h позволяет ввести в конвективном слое параметры Дирдорфа для скорости и плавучести [10]:

$$w_D = h^{1/3} (gS_\theta)^{1/3}, \quad g\theta_D = h^{-1/3} (gS_\theta)^{2/3}. \quad (7)$$

Турбулентность конвективного слоя характеризуется теорией подобия [39]. Согласно этой теории, в нижней части конвективного слоя:

$0 < z/h < 0.5$ – безразмерные турбулентные моменты, образованные с помощью параметров w_D и θ_D , являются функциями только z/h . В частности, для первых турбулентных моментов

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{\bar{\theta}}{\theta_D} = f_\theta(z/h), \quad (8)$$

где f_θ – положительная гладкая функция.

Соответственно, для вторых турбулентных моментов

$$\frac{\overline{w^2}}{w_D^2} = f_{ww}(z/h), \quad \frac{\overline{\theta^2}}{\theta_D^2} = f_{\theta\theta}(z/h), \quad \frac{\overline{w\theta}}{w_D\theta_D} = f_{w\theta}(z/h), \quad (9)$$

где $f_{ww}, f_{\theta\theta}, f_{w\theta}$ – положительные гладкие функции.

Согласно экспериментальным полевым измерениям, вторые моменты в конвективном слое можно аппроксимировать соотношениями, предложенными в [14, 22, 23]:

$$\begin{cases} \frac{\overline{\theta^2}}{\theta_D^2} = \lambda_{\theta\theta}(z/h)^{-2/3}, \quad \frac{\overline{w\theta}}{w_D\theta_D} = 1 - (z/h) \\ \frac{\overline{w^2}}{w_D^2} = \lambda_{ww}(z/h)^{2/3} (1 - 0.8z/h)^2 \end{cases} \quad (10)$$

Коэффициенты $\lambda_{ww} = 1.8$ и $\lambda_{\theta\theta} = 1.8$ получены в процессе прямых измерений вторых моментов w и θ конвективного приземного слоя атмосферы в экспериментах Kansas 1968; Minnesota 1973; AMTEX 1975 [38, 19, 23]. Данные натурных измерений теплового потока и второго момента плавучести в атмосферном конвективном слое, полученные в [14, 23] и их аппроксимации (10) представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

В конвективном поверхностном слое при $0 < z/h < 0.1$ выражения (8)–(10) переходят в предельную форму, соответствующую теории свободно-конвективного слоя:

$$\begin{cases} \frac{\bar{\theta}}{\theta_D} = 3\lambda_\theta(z/h)^{-1/3}, \\ \frac{\overline{\theta^2}}{\theta_D^2} = \lambda_{\theta\theta}(z/h)^{-2/3}, \quad \frac{\overline{w\theta}}{w_D\theta_D} = 1, \quad \frac{\overline{w^2}}{w_D^2} = \lambda_{ww}(z/h)^{2/3} \end{cases}, \quad (11)$$

где $\lambda_\theta, \lambda_{\theta\theta}, \lambda_{ww}$ – постоянные положительные коэффициенты.

Преобразование (11) с учетом (7) приводит к эквивалентным уравнениям:

$$\begin{cases} \overline{g\theta w} = gS_\theta = \text{const}, \quad g \frac{d\bar{\theta}}{dz} = -\lambda_\theta (gS_\theta)^{2/3} z^{-4/3} \\ \overline{\theta^2} = \lambda_{\theta\theta} (gS_\theta)^{4/3} z^{-2/3}, \quad \overline{w^2} = \lambda_{ww} (gS_\theta)^{2/3} z^{2/3} \end{cases} \quad (12)$$

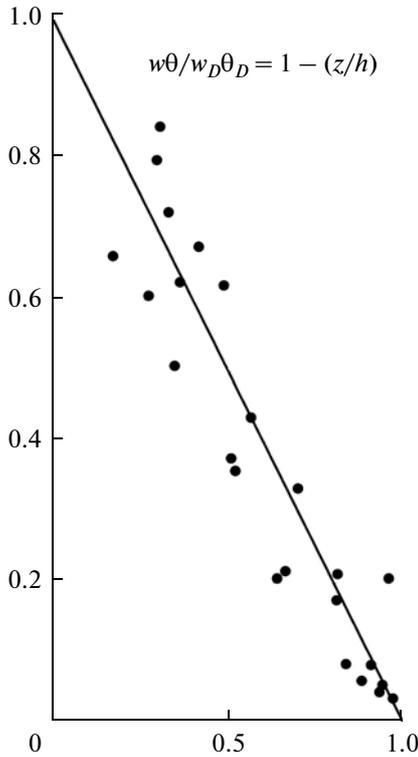


Рис. 2. Значения безразмерного теплового потока в зависимости от безразмерной высоты в конвективном слое по данным [14]. Черные точки и сплошная линия соответствуют атмосферным измерениям [14] и аппроксимации (10) соответственно.

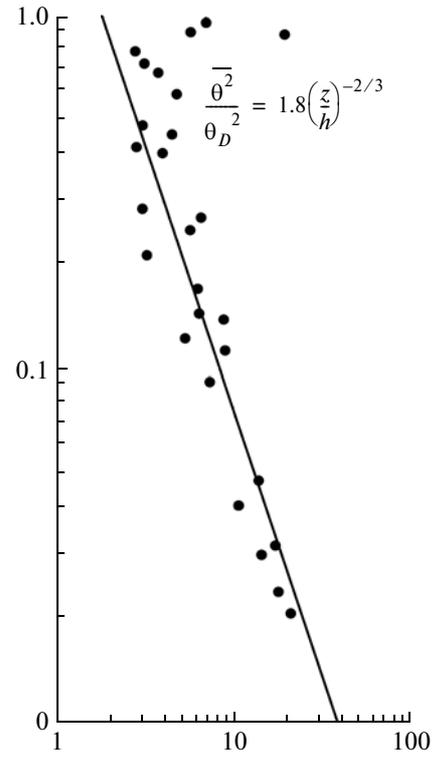


Рис. 3. Значения безразмерного второго момента плавучести в зависимости от безразмерной высоты в конвективном слое, по данным [22]. Черные точки и сплошная линия соответствуют атмосферным измерениям [22] и аппроксимации (10) соответственно.

Первые два равенства (12) – основной результат классической теории турбулентности свободно-конвективного слоя [33], а также теории подобия [5]. Последнее равенство (12) следует из теории подобия [38].

Из соотношений (12) следует предельная форма коэффициента турбулентного обмена:

$$K_H = -g\overline{\theta}w \left(g \frac{d\overline{\theta}}{dz} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda_\theta} (gS_\theta)^{1/3} z^{4/3} = \frac{1}{\lambda_\theta} w_D h (z/h)^{4/3}, \quad (13)$$

подробнее – в [5].

КОЭФФИЦИЕНТ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА В ТЕОРИИ КОЛМОГорова–ОБУХОВА

Базовые уравнения полуэмпирической теории турбулентности Колмогорова–Обухова в горизонтально неподвижном слое имеют следующий вид [27]:

$$K_H = l_K \sqrt{b}, \quad -gK_H \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} - \frac{b^{3/2}}{l_K} = 0. \quad (14)$$

Второе соотношение – (14) соответствует упрощенной форме уравнения турбулентной энергии Колмогорова–Обухова, в котором все остальные слагаемые выражены через $gK_H \partial \overline{\theta} / \partial z$ и $b^{3/2} / l_K$.

Из соотношений (14) следует выражение для коэффициента турбулентного обмена:

$$K_H = l_K^2 \left(g \left| \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} \right| \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Простейшую эмпирическую аппроксимацию пути перемешивания Колмогорова l_K в конвективном слое можно получить из следующих соображений. Согласно Прандтлю, путь перемешивания вблизи стенки растет пропорционально высоте, т.е. $l_K \sim z$. Модифицируем классическую теорию Прантля для слоя жидкости, ограниченного двумя горизонтальными поверхностями. Для этого аппроксимируем l_K многочленом Тейлора второй степени с учетом нулевых условий на

поверхности водоема и на подвижной границе слоя, т.е. $l_K = 0$ при $z = 0$ и $z = h$. Тогда с учетом теории размерности, получим:

$$\frac{l_K}{h} = \alpha_K \frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad (16)$$

где $\alpha_K \sim 1$ – неопределенный постоянный параметр, соответствующий коэффициенту разложения Тейлора.

Обзоры распространенных аппроксимаций пути перемешивания приведены в [25, 32]. Трехчленная ярусная аппроксимация пути перемешивания с нулевыми значениями l_K на границах области использовалась в [15, 25, 37]. Эта аппроксимация имеет вид

$$\frac{1}{l_K} = \alpha_K^{-1} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{h-z} + \frac{1}{L_M} \right), \quad (17)$$

где $L_M > 0$ – постоянный параметр длины, характеризующий путь перемешивания в центральной части конвективного слоя. Очевидно, что равенство (16) является пределом выражения (17) при $L_M \rightarrow \infty$.

Идея интерпретации пути перемешивания l_K как некоторого “доминирующего” внутреннего масштаба турбулентности Λ_w , связанного со спектром поля вертикальной скорости, обсуждалась в [8, 24].

В [8, 24] в качестве доминирующего масштаба $\Lambda_w = \Lambda_w(z/h)$ использовалась длина волны, реализующая максимум в спектре вертикальной скорости. Заметим, что выбор аппроксимации (16) обеспечивает подобие профилей $l_K = l_K(z/h)$ и $\Lambda_w = \Lambda_w(z/h)$.

Подставляя путь перемешивания (16) в (15), получим:

$$K_H = \alpha_K^2 h^2 \left(g \left| \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right| \right)^{1/2} \left[\frac{z}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \right]^2. \quad (18)$$

Соотношение (18) соответствует коэффициенту турбулентного обмена в теории Колмогорова–Обухова.

Использование в системе (6) соотношения (18) приводит к нелинейному уравнению теплопроводности, которое трудно исследовать аналитически.

Рассмотрим естественное упрощение выражения (18). Очевидно, что величины $\bar{\theta} = \bar{\theta}(z/h)$ и $\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}^2(z/h)$ соответствуют средним по единице площади локальным значениям θ и θ^2 . При турбулентном течении локальную переменную

$\eta = \theta / (\bar{\theta}^2)^{1/2}$ следует считать случайной величиной и характеризовать плотностью вероятности $F = F(\eta, z/h)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\eta, z/h) d\eta = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \eta F(\eta, z/h) d\eta = \mu_1(z/h), \quad (19)$$

где μ_1 – первый момент распределения случайной величины $\eta = \theta / (\bar{\theta}^2)^{1/2}$.

Из второго равенства следует, что $\langle \theta \rangle = \mu_1 (\bar{\theta}^2)^{1/2}$. В силу гипотезы пространственной эргодичности $\langle \theta \rangle = \bar{\theta}$, поэтому $\bar{\theta} = \mu_1 (\bar{\theta}^2)^{1/2}$, где $\mu_1(z/h)$ первый момент распределения случайной величины $\eta = \theta / (\bar{\theta}^2)^{1/2}$.

В конвективном слое выделяют структурные ярусы: поверхностный слой, слой перемешивания, инверсионный слой. Предположим, что в каждом i -м ярусе конвективного слоя $F(\eta, z/h) = f_i(\eta)$. Иными словами, каждый ярус характеризуется собственным распределением $f_i(\eta)$, форма которого не зависит от высоты z/h . Это предположение подтверждается многочисленными экспериментальными данными, приведенными в [3]. В этой ситуации функция $\mu_1(z/h)$ – ступенчатая функция по высоте.

Так как функции $\bar{\theta}$ и $\bar{\theta}^2$ непрерывны по высоте, то равенство $\bar{\theta} = \mu_1 (\bar{\theta}^2)^{1/2}$ должно быть непрерывно на границе слоев. Это означает, что ступенчатая функция $\mu_1(z/h)$ непрерывна по высоте. Но единственной непрерывной ступенчатой функцией является постоянная, поэтому $\mu_1(z/h) = \mu_S$ во всем конвективном слое $0 < z/h < 1$. Величину μ_S легко вычислить по профилям поверхностного слоя, при этом $\mu_S = 3\lambda_\theta \lambda_{\theta\theta}^{-1/2}$.

Дифференцируя по высоте равенство $\bar{\theta} = \mu_S (\bar{\theta}^2)^{1/2}$ с учетом экспериментальных данных (10) и параметров Дирдорфа (7), получим:

$$\begin{aligned} -g \frac{\partial}{\partial z} \bar{\theta} &= -\mu_S g \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\theta}^2)^{1/2} = \frac{1}{3} \mu_S \lambda_{\theta\theta}^{1/2} g \theta_D h^{1/3} z^{-4/3} = \\ &= \lambda_\theta \frac{g \theta_D}{h} \left(\frac{z}{h} \right)^{-4/3} = \lambda_\theta \frac{w_D^2}{h^2} \left(\frac{z}{h} \right)^{-4/3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (20) в соотношение (18), найдем:

$$K_H = (\alpha_K^2 \lambda_\theta^{1/2}) w_D h (z/h)^{4/3} (1 - z/h)^2. \quad (21)$$

Выбирая неопределенный параметр α_K так, чтобы выполнялся поверхностный предел (13), получим:

$$K_H = \frac{1}{\lambda_\theta} w_D h (z/h)^{4/3} (1 - z/h)^2. \quad (22)$$

Сопоставляя (21) и (22), найдем, что $\alpha_K = \lambda_\theta^{-3/4} \approx 1$.

Соотношение (22) с коэффициентом $\lambda_\theta = 1$ было впервые предложено в [16] как результат аппроксимации численных расчетов. В работе [16] коэффициент турбулентного обмена K_H вычислялся непосредственно из потоково-градиентного соотношения (5) с использованием вихре-разрешающей численной модели. Таким образом, приведенные рассуждения следует рассматривать как теоретическое обоснование аппроксимации численных расчетов [16] в рамках полуэмпирической теории турбулентности Колмогорова—Обухова.

ДРУГИЕ ПРОФИЛИ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА

В соответствии с теорией размерности и с учетом предельной формы (13) общая форма профиля коэффициента турбулентного обмена должна иметь вид:

$$\frac{K_H}{w_D h} = \frac{1}{\lambda_\theta} (z/h)^{4/3} G(z/h), \quad \lim_{z/h \rightarrow 0} G(z/h) = 1, \quad (23)$$

где $G(z/h)$ — положительная функция, форма которой определяется либо из численного эксперимента, либо из натуральных наблюдений.

Многоярусная аппроксимация коэффициента турбулентного обмена в форме (23) была рассмотрена в [26].

Ярусная аппроксимация, согласованная с (23) и использующая в качестве пути перемешивания l_K доминирующий турбулентный масштаб Λ_w , была предложена в [12].

Следует упомянуть также распространенную аппроксимацию коэффициента турбулентного обмена, предложенную в [36]:

$$\frac{K_H}{h w_D} = 0.64 (z/h) (1 - z/h)^p, \quad (24)$$

где $1 < p < 3$.

Для устойчиво стратифицированных слоев аппроксимация (24) с коэффициентом $p = 3/2$ рассматривалась в [31, 35, 28].

Для неустойчиво стратифицированных слоев аппроксимация (24) с коэффициентом $p = 2$ рассматривалась в [31, 35, 28].

Существенно, что аппроксимация (24) не согласована с (23) так как в поверхностном слое аппроксимация (24) не удовлетворяет предельной

форме теории Колмогорова—Обухова (13). Поэтому для турбулентной конвекции без ветра эта аппроксимация хуже обоснована физически.

ВЫВОДЫ

Дополнение теории Колмогорова—Обухова эмпирической аппроксимацией турбулентных моментов позволяет построить профиль коэффициента теплового обмена в условиях турбулентной конвекции.

Построенное соотношение идентично известному профилю [16]. Теоретическая обоснованность и аналитическая простота выделяют этот профиль из ряда аналогичных соотношений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И., Бенилов А.Ю. Закономерности проникающей турбулентной конвекции в стратифицированной жидкости // Океанология. 1983. Т. 23. № 5. С. 743–752.
2. Вульфсон А.Н. О суточном ходе высоты пограничного конвективного слоя атмосферы // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1988. Т. 24. № 1. С. 89–92.
3. Вульфсон А.Н., Бородин О.О. Вариационный метод Больцмана–Джейниса и распределение термиклов по температурам в турбулентном приземном конвективном слое атмосферы. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 6. С. 674–681
4. Вульфсон А.Н., Ингель Л.Х. Нелинейные тепловые волны от горизонтальных источников в нейтрально стратифицированной среде. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18. № 3. С. 233–239.
5. Обухов А.М., Монин А.С. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Тр. Геофизического ин-та АН СССР. 1954. № 24 (151). С. 163–187.
6. Adrian R.J., Ferreira R.T.D.S., Boberg B. Turbulent thermal convection in wide horizontal fluid layers // Experiments in Fluids. 1986. № 4. P. 121–141.
7. Brost R.A., Wyngaard J.C. A model study of the stable stratified planetary layer // J. Atmos. Sci. 1978. V. 35. № 8. P. 1427–1440.
8. Caughey S.J., Palmer S.G. Some aspects of turbulence structure through the depth of the convective boundary layer // Q J Roy. Meteorol. Soc. 1979. V. 105. P. 811–827.
9. Cheng Y., Canuto V.M., Howard A.M. Nonlocal Convective PBL Model on New Third-and Fourth-Order Moments // J. Atmos. Sci. 2005. V. 62. № 7. P. 2189–2204.
10. Deardorff J.W. Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for

- Rayleigh convection // *J. Atmos. Sci.* 1970. V. 27. № 8. P. 1211–1212.
11. *Deardorff J.W.* Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer // *Boundary-Layer Meteorol.* 1974. V. 7. № 1. P. 81–106.
 12. *Degrazia G.A., Campos Velho H.F., Carvalho J.C.* Non-local exchange coefficients for the convective boundary layer derived from spectral properties // *Contrib. Atmos. Phys.* 1997. V.70. № 1. P. 57–64.
 13. *Elder J.W.* The unstable thermal interface // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. Pt 1. P. 69–96.
 14. *Gryanik V.M., Hartman J.* A turbulence closure for the convective boundary layer based on a two-scale mass-flux approach // *J. Atmos. Sci.* 2002. V. 59. № 18. P. 2729–2744.
 15. *Gryning, S.-E., Batchvarova E., Brummer B., Jorgensen H., Larsen S.* On the extension of the wind profile over homogeneous terrain beyond the surface layer. // *Bound.-Layer Meteorol.* 2007. V. 124. P. 251–268.
 16. *Holtslag A.A.M., Moeng C.-H.* † Eddy Diffusivity and Countergradient Transport in the Convective Atmosphere Boundary Layer // *J. Atmos. Sci.* 1991. V. 48. № 14. P. 1690–1698.
 17. *Hong S.-Y., Noh Y., Dudhia J.* † A new vertical diffusion package with an explicit treatment of entrainment processes // *Mon. Wea. Rev.* 2006. V. 134. № 9. P. 2318–2341.
 18. *Kader B.A., Yaglom A.M.* Mean and fields and fluctuation moments in unstably stratified turbulent boundary layers // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 212. P. 637–662.
 19. *Kaimal J.C., Wyngaard J.C., Haugen D.A., Cote O.R., Izumi Y., Caughey S.J., Readings C.J.* Turbulence structure in the convective boundary layer // *J. Atmos. Sci.* 1976. V. 33. № 11. P. 2152–2169.
 20. *Kollmann W.* Prediction Methods for Turbulent Flows, V. II // *Vki-Book.* Hemisphere Publishing Corp. Washington, 1980.
 21. *Kolmogorov A.N.* The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1941. V. 30. P. 301–305.
 22. *Lenschow D.H., Lothon M., Mayor S.D., Sullivan P.P., Canut G.* A Comparison of Higher-Order Vertical Velocity Moments in the Convective Boundary Layer from Lidar with In Situ Measurements and Large-Eddy Simulation // *Boundary-Layer Meteorol.* 2012. V. 143. P. 107–123.
 23. *Lenschow D.H., Wyngaard J.C., Pennell W.T.* Mean field and second-moment budgets in a baroclinic, convective boundary layer // *J. Atmos. Sci.* 1980. V. 37. № 6. P. 1313–1336.
 24. *Lothon M., Lenschow D.H., Mayor S.D.* Coherence and scale of vertical velocity in the convective boundary layer from a Doppler lidar // *Boundary-Layer Meteorol.* 2006. V. 121. P. 521–536.
 25. *Mahrt L., Vick D.* Formulation of Turbulent Fluxes in the Stable Boundary Layer // *J. Atmos. Sci.* 2003. V. 60. № 20. P. 2538–2548.
 26. *McRae G.J., Shair F.H., Seinfeld J.H.* Convective downmixing of plumes in a coastal environment // *J. Appl. Meteorol.* 1981. V. 20. № 11. P. 1312–1324.
 27. *Musson-Genon L.* Numerical Simulation of a Fog Event with a One-Dimensional Boundary Layer Model // *Month. Weath. Rev.* 1987. V. 115. № 2. P. 592–607.
 28. *Noh Y., Cheon W.G., Hong S.-Y., Raasch S.* Improvement of the K-profile model for the planetary boundary layer based on large eddy simulation data // *Boundary-Layer Meteorol.* 2003. V. 107. № 2. P. 401–427.
 29. *Obukhov A.M.* Turbulence in thermally inhomogeneous atmosphere // *Trudy Inst. Teor. Geofiz. Akad. Nauk SSSR.* № 1. P. 95–115. *Transl. Boundary-Layer Meteorol.* 1971. V. 3. P. 7–29.
 30. *Ogura Y., Phillips N.A.* Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. // *J. Atmos. Sci.* 1962. V. 19. № 2. P. 173–179.
 31. *Otte M., Wyngaard J.C.* A General Framework for an “Unmixed Layer” PBL Model // *J. Atmos. Sci.* 1996. V. 53. № 18. P. 2652–2670.
 32. *Pena A., Gryning S.-E., Mann J., Hasager C.B.* Length Scales of the Neutral Wind Profile over Homogeneous Terrain // *J. Appl. Meteorol. and Climatol.* 2010. V. 49. № 4. P. 792–806.
 33. *Prandtl L.* Meteorologische anwendung der stromungslehre // *Beitr. Phys. fr. Atmosphere.* 1932. V. 19. № 3. S. 188–202.
 34. *Shin H.H., Hong S.-Y., Noh Y., Dudhia J.* Derivation of Turbulent Kinetic Energy from a First-Order Nonlocal Planetary Boundary Layer Parameterization // *J. Atmos. Sci.* 2013. V. 70. № 6. P. 1795–1805.
 35. *Stevens B.* Quasi-steady analysis of a PBL model with an eddy-diffusivity profile and nonlocal fluxes // *Month. Weath. Rev.* 2000. V. 128. P. 824–836.
 36. *Troen I., Mahrt L.* – A simple model of the atmospheric boundary layer: Sensitivity to surface evaporation // *Boundary-Layer Meteorol.* 1980. V. 37. № 1/2. P. 129–148.
 37. *van de Wiel B.J.H., Moene A.F., De Ronde W.H., Jonker H.J.J.* Local Similarity in the Stable Boundary Layer and Mixing-Length Approaches: Consistency of Concepts // *Boundary-Layer Meteorol.* 2008. V. 128. P. 103–116.
 38. *Wyngaard J.C., Cote O. R., Izumi Y.* Local free convection, similarity and budgets of shear stress and heat flux // *J. Atmos. Sci.* 1971. V. 28. № 7. P. 1171–1182.
 39. *Zeman O., Lamley J.L.* Modeling buoyancy-driven mixed layers // *J. Atmos. Sci.* 1976. V. 33. № 10. P. 1974–1988.