Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, № 5, с. 41–54 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0046*

Ю.В. ТРЕТЬЯЧЕНКО

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХЕЛЛИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В РАВНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. В работе представлено достаточное условие существования поточечно сходящейся подпоследовательности у последовательности функций, определенных на подмножестве вещественной прямой и принимающих значения в хаусдорфовом равномерном пространстве. Показано, что это обобщение теоремы Хелли включает в себя многие результаты недавних исследований в этом направлении, а само достаточное условие является, кроме того, необходимым для равномерно сходящейся последовательности функций. Получено также описание правильных функций со значениями в равномерном пространстве.

Ключевые слова: принцип выбора, поточечная сходимость, правильные функции относительно плотного множества, равномерное пространство.

УДК: 515.123 : 517.52.2 : 517.51

Abstract. In this paper we consider sequences of functions that are defined on a subset of the real line with values in a uniform Hausdorff space. For such sequences we obtain a sufficient condition for the existence of pointwise convergent subsequences. We prove that this generalization of the Helly theorem includes many results of the recent research. In addition, we prove that the sufficient condition is also necessary for uniformly convergent sequences of functions. We also obtain a representation for regular functions whose values belong to the uniform space.

Keywords: selection principle, pointwise convergence, proper functions with respect to a dense set, uniform space.

1. Введение

Классический принцип выбора Хелли [1] ([2], с. 208, лемма 2), утверждает, что всякое бесконечное равномерно ограниченное семейство монотонных вещественных функций, заданных на отрезке $[a, b]$ из $\mathbb{R}$, содержит поточечно сходящуюся на $[a, b]$ подпоследовательность. Эта теорема Хелли справедлива и для произвольного непустого подмножества T из $\mathbb{R}$, как было установлено, например, в [3], и для равномерно ограниченной последовательности функций, жордановы вариации которых равномерно ограничены. Условие равномерной ограниченности последовательности функций и их обобщенных вариаций лежит в основе большинства обобщений принципа выбора Хелли (для действительнозначных функций [4]–[7]; для функций со значениями в метрическом или банаховом пространстве [3], [8]–[16]). Такие принципы выбора имеют многочисленные применения [3], [8]–[10], [12]–[14], поскольку являются эффективным инструментом при доказательстве теорем существования; например, они широко используются в теории сходимости рядов Фурье и теории стохастических

Поступила 07.04.2008

процессов. Обобщения теоремы Хелли также находят свое приложение в многозначном анализе при доказательстве существования регулярных селекций для мультифункций ограниченной обобщенной вариации и исследовании нелинейных операторов суперпозиции [3].

В работах [17], [18] впервые представлен принцип выбора для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве, из которого как следствия вытекает большинство известных обобщений теоремы Хелли с ограничениями на обобщенные вариации [3]–[16]. Более того, ограничение на *модуль вариации* функций исходной последовательности, лежащее в основе принципа выбора из [17], [18], является не только достаточным условием существования поточечно сходящейся подпоследовательности, но и необходимым для равномерно сходящейся последовательности функций в отличие от ранее известных принципов выбора [3]–[16].

В данной работе получено обобщение теоремы Хелли для последовательности функций со значениями в хаусдорфовом равномерном пространстве, которое включает в себя принцип выбора из [17], [18].

В разделе 2 содержатся основные определения и формулировки результатов. В разделе 3 приводятся некоторые вспомогательные утверждения и изучаются правильные функции относительно плотного подмножества области определения. Доказательства основных теорем, а также сравнение основного результата (теоремы 1) с принципом выбора из [17], [18] приведены в разделе 4.

Результаты данной работы анонсированы в [19], [20].

2. Основные определения и результаты

Всюду ниже предполагаем, что $(X,\mathcal{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство с комплектом псевдометрик $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ равномерности $\mathcal{U}$ ([21], гл. 6), где $\mathcal{P}$ — некоторое индексное множество; в частности, каждая псевдометрика d_p равномерно непрерывна на $X\times X$ относительно равномерности произведения ([21], с. 243, теорема 11), т. е. $V_{p,r}\in\mathcal{U}$ для каждого $r>0$, где $V_{p,r}=\{(x,y)\in X\times X \mid d_p(x,y)<r\}$. Напомним, что если $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ есть комплект псевдометрик равномерности $\mathcal{U}$, то семейство $\{V_{p,r}\mid p\in\mathcal{P},\ r>0\}$ является базой равномерности $\mathcal{U}$, т. е. для любого $U\in\mathcal{U}$ найдутся $p\in\mathcal{P}$ и $r>0$ такие, что $V_{p,r}\subset U$ ([21], с. 250, теорема 19). Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется *хаусдорфовым* (*или отделимым*), если из условий $x,y\in X$ и $d_p(x,y)=0$ для всех $p\in\mathcal{P}$ следует $x=y$. Последовательность элементов $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ сходится к элементу $x\in X$ (при $j\to\infty$), если $\lim\limits_{j\to\infty} d_p(x_j,x)=0$ для всех $p\in\mathcal{P}$. В силу хаусдорфовости X такой предел x определен однозначно. Подмножество $Y\subset X$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ называется *относительно секвенциально компактным*, если в каждой последовательности элементов из Y имеется подпоследовательность, сходящаяся в X к некоторому элементу из X.

Обозначим через X^T множество всех функций $f:T\to X$, действующих из непустого подмножества $T\subset\mathbb{R}$ в X. Напомним также, что последовательность функций $\{f_j\}\equiv\{f_j\}_{j=1}^{\infty}\subset X^T$ *сходится поточечно на* T к некоторой функции $f\in X^T$, что записывается в виде $f_j\to f$ на T при $j\to\infty$, если $\lim\limits_{j\to\infty} d_p(f_j(t),f(t))=0$ для всех $p\in\mathcal{P}$ и $t\in T$; если же $\lim\limits_{j\to\infty}\sup\limits_{t\in T} d_p(f_j(t),f(t))=0$ для всех $p\in\mathcal{P}$, то $\{f_j\}$ *сходится равномерно на* T к функции f. Последовательность $\{f_j\}\subset X^T$ называется *поточечно относительно секвенциально компактной*, если последовательность $\{f_j(t)\}$ относительно секвенциально компактна при любом $t\in T$.

Для того чтобы сформулировать обобщение теоремы Хелли и другие результаты работы, введем понятие величины $\{N_p(\varepsilon, f, T)\}_{p\in\mathcal{P}}$.

Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\{I_i\}_1^n \prec T$ упорядоченный набор из n неналегающих отрезков $I_i = [s_i, t_i] \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, концы s_i и t_i которых лежат в T так, что $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \dots \le s_{n-1} < t_{n-1} \le s_n < t_n$ (при $n = 1$ для краткости пишем $I = \{I_i\}_1^1$ и $I \prec T$). Если $I_i \in \{I_i\}_1^n$, $f \in X^T$ и $p \in \mathcal{P}$, то полагаем $|f(I_i)|_p \equiv d_p(f(s_i), f(t_i))$.

Для $p \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$ и $f \in X^T$ определим величину $N_p(\varepsilon, f, T) \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ по следующему правилу:

$$N_p(\varepsilon, f, T) = \sup\bigl\{n \in \mathbb{N} \mid \ \exists \{I_i\}_1^n \prec T \text{ такой, что } |f(I_i)|_p > \varepsilon \quad \forall\, i = 1, \dots, n\bigr\}, \tag{1}$$

где $\sup \emptyset = 0$; при этом если $\emptyset \ne E \subset T$ и $f \in X^T$, то полагаем $N_p(\varepsilon, f, E) = N_p(\varepsilon, f|_E, E)$, где $f|_E : E \to X$ есть сужение функции f на множество E. В случае, когда $T = [a, b]$ и $X = \mathbb{R}$, величина (1) рассматривалась в ([22], часть III).

Одним из важнейших свойств величины $\{N_p(\varepsilon, f, T)\}_{p\in\mathcal{P}}$ является то, что с ее помощью можно описывать правильные функции, т. е. имеющие односторонние левый и правый пределы (в смысле, указанном ниже). Пусть S — всюду плотное подмножество $[a, b]$. Обозначим через $U_S([a, b]; X)$ множество, состоящее из всех функций $f : [a, b] \to X$, для которых выполнены условия Коши относительно S

$$\lim_{S\ni s,t\to\tau-0} d_p(f(s), f(t)) = 0 \ \forall\, p \in \mathcal{P} \text{ в каждой точке } \tau \in (a, b] \tag{2}$$

и

$$\lim_{S\ni s,t\to\tau+0} d_p(f(s), f(t)) = 0 \ \forall\, p \in \mathcal{P} \ \text{ в каждой точке } \tau \in [a, b). \tag{3}$$

Тогда справедливо следующее равенство (его доказательство приведено ниже в разделе 3):

$$U_S([a, b]; X) = \bigl\{f : [a, b] \to X \mid \ N_p(\varepsilon, f, S) < \infty \text{ для всех } p \in \mathcal{P} \text{ и } \varepsilon > 0\bigr\}. \tag{4}$$

Основными результатами работы являются следующие три теоремы. Первая из них — принцип выбора для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве в терминах величины $\{N_p(\varepsilon, f, T)\}_{p\in\mathcal{P}}$.

Теорема 1. *Пусть $\emptyset \ne T \subset \mathbb{R}$ и $(X, \mathcal{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство с не более чем счетным комплектом псевдометрик $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ равномерности $\mathcal{U}$. Пусть $\{f_j\} \subset X^T$ — поточечно относительно секвенциально компактная последовательность функций такая, что*

$$N_p(\varepsilon) \equiv \limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T) < \infty \textit{ для всех } p \in \mathcal{P} \textit{ и } \varepsilon > 0. \tag{5}$$

Тогда $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая сходится поточечно на T к некоторой функции $f \in X^T$, удовлетворяющей условию $N_p(\varepsilon, f, T) \le N_p(\varepsilon)$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$.

В следующей теореме показано, что условие (5) является необходимым для равномерно сходящейся последовательности $\{f_j\}$.

Теорема 2. *Пусть $\emptyset \ne T \subset \mathbb{R}$ и $(X, \mathcal{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство с (не обязательно счетным) комплектом псевдометрик $\{d_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ равномерности $\mathcal{U}$. Если последовательность $\{f_j\} \subset X^T$ сходится равномерно на T к функции $f \in X^T$ такой, что $N_p(\varepsilon, f, T) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$, то выполнено условие (5), а точнее*

$$\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T) \le \lim_{\delta\to\varepsilon-0} N_p(\delta, f, T) \quad \textit{для всех } p \in \mathcal{P} \textit{ и } \varepsilon > 0.$$

Напомним, что последовательность $\{f_j\} \subset X^T$ *сходится почти всюду* (*п. в.*) *на* T к функции $f \in X^T$ (при $j \to \infty$), если существует множество $E \subset T$ меры (Лебега) нуль такое, что $\lim\limits_{j\to\infty} d_p(f_j(t), f(t)) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $t \in T \setminus E$. Из теоремы 1 непосредственно вытекает, что если для последовательности $\{f_j\} \subset X^T$ условие (5) выполнено с заменой T на $T \setminus E$, где $E \subset T$ — некоторое множество меры (Лебега) нуль, то некоторая подпоследовательность в $\{f_j\}$ сходится п. в. на T к такой функции $f \in X^T$, что $N_p(\varepsilon, f, T \setminus E) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$. Следующая теорема представляет собой принцип выбора для сходимости почти всюду в терминах величины $\{N_p(\varepsilon, f, T)\}_{p\in\mathcal{P}}$ для функции одной переменной со значениями в равномерном пространстве.

Теорема 3. *Пусть T и $(X, \mathcal{U})$ удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Предположим, что последовательность функций $\{f_j\} \subset X^T$ такова, что для п. в. $t \in T$ множество $\{f_j(t)\}$ относительно секвенциально компактно и для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $E_\delta \subset T$ меры Лебега $\mathcal{L}(E_\delta) \le \delta$ такое, что*

$$\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T \setminus E_\delta) < \infty \quad \text{для всех } p \in \mathcal{P} \text{ и } \varepsilon > 0.$$

Тогда в $\{f_j\}$ существует подпоследовательность, которая сходится п. в. на T к некоторой функции $f \in X^T$, обладающей свойством: *для любого $\delta > 0$ найдется измеримое множество $E'_\delta \subset T$ меры Лебега $\mathcal{L}(E'_\delta) \le \delta$ такое, что $N_p(\varepsilon, f, T \setminus E'_\delta) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$.*

3. Основные свойства величины $N_p(\varepsilon, f, T)$

Для доказательства представленных теорем и последующего сравнения теоремы 1 с принципом выбора из [17], [18] нам потребуются свойства величины $\{N_p(\varepsilon, f, T)\}_{p\in\mathcal{P}}$. Отметим, что принятие величиной $N_p(\varepsilon, f, T)$ значений 0 и ∞ выражается соответственно условиями

$$N_p(\varepsilon, f, T) = 0 \iff |f(I)|_p \le \varepsilon \text{ для всех } I \prec T \tag{6}$$

и

$$N_p(\varepsilon, f, T) = \infty \iff \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists \{I_i\}_1^n \prec T \text{ такой, что } |f(I_i)|_p > \varepsilon \text{ для всех } i = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Если же $N_p(\varepsilon, f, T) \in \mathbb{N}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ в силу определения (1) справедливы соотношения

$$n \le N_p(\varepsilon, f, T) \iff \exists \{I_i\}_1^n \prec T \text{ такой, что } |f(I_i)|_p > \varepsilon \text{ для всех } i = 1, \dots, n; \tag{8}$$

$$n > N_p(\varepsilon, f, T) \iff \forall \{I_i\}_1^n \prec T \quad \exists \{I_{i_k}\}_{k=1}^{n-N_p(\varepsilon,f,T)} \prec T \text{ и } \{I_{i_k}\}_{k=1}^{n-N_p(\varepsilon,f,T)} \subset \{I_i\}_1^n \\ \text{такой, что } \max_{1\le k\le n-N_p(\varepsilon,f,T)} |f(I_{i_k})|_p \le \varepsilon. \tag{9}$$

Основные свойства величины (1) для произвольной функции $f \in X^T$ и $p \in \mathcal{P}$ собраны в следующей лемме.

Лемма. (a) *Если $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $N_p(\varepsilon_2, f, T) \le N_p(\varepsilon_1, f, T)$.*

(b) *Если $\emptyset \ne E_1 \subset E_2 \subset T$, то $N_p(\varepsilon, f, E_1) \le N_p(\varepsilon, f, E_2)$ для любого $\varepsilon > 0$.*

(c) *Если $\{f_j\} \subset X^T$ и $f_j \to f$ на T при $j \to \infty$, то $N_p(\varepsilon, f, T) \le \liminf\limits_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T)$ для всех $\varepsilon > 0$.*

(d) *Если $s, t \in T$ и $s < t$, то $n_t = N_p(\varepsilon, f, (-\infty, t] \cap T) < \infty$ тогда и только тогда, когда $n_s = N_p(\varepsilon, f, (-\infty, s] \cap T) < \infty$ и $n_{s,t} = N_p(\varepsilon, f, [s, t] \cap T) < \infty$, и в этом случае существует $n_* \in \{0, 1\}$ такое, что $n_t = n_s + n_{s,t} + n_*$.*

Доказательство. Свойства (a) и (b) сразу следуют из определения (1).

(c) Без ограничения общности будем считать, что $N_p(\varepsilon, f, T) > 0$.

Если $N_p(\varepsilon, f, T) < \infty$ и $n = N_p(\varepsilon, f, T)$, то согласно свойству (8) существует набор $\{I_i\}_1^n \prec T$ такой, что $|f(I_i)|_p > \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\varepsilon' = \varepsilon'(n, p) > 0$ такое, что $\min\limits_{1 \le i \le n} |f(I_i)|_p > \varepsilon' > \varepsilon$. Благодаря поточечной сходимости f_j к f на T найдем номер $J \in \mathbb{N}$, зависящий от набора $\{I_i\}_1^n$ и $p \in \mathcal{P}$, такой, что

$$d_p(f(s_i), f_j(s_i)) \le \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} \ \text{ и } \ d_p(f_j(t_i), f(t_i)) \le \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} \ \text{ для всех } j \ge J \text{ и } i = 1, \ldots, n.$$

В силу неравенства треугольника для таких j и i получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon' < |f(I_i)|_p \le d_p(f(s_i), f_j(s_i)) + d_p(f_j(s_i), f_j(t_i)) + d_p(f_j(t_i), f(t_i)) \le \\ \le \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} + d_p(f_j(s_i), f_j(t_i)) + \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} = |f_j(I_i)|_p + \varepsilon' - \varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, $|f_j(I_i)|_p > \varepsilon$ для всех $j \ge J$ и $i = 1, \ldots, n$. В соответствии со свойством (8) это означает, что $n \le N_p(\varepsilon, f_j, T)$ для всех $j \ge J$, поэтому $n \le \inf\limits_{i \ge J} N_p(\varepsilon, f_j, T) \le \liminf\limits_{j \to \infty} N_p(\varepsilon, f_j, T)$.

Если же $N_p(\varepsilon, f, T) = \infty$, то выберем $n \in \mathbb{N}$ произвольно и воспользуемся свойством (7). Рассуждая как выше, находим, что $n \le \liminf\limits_{j \to \infty} N_p(\varepsilon, f_j, T)$, и остается учесть произвольность n.

(d) Без ограничения общности будем считать, что $n_t > 0$.

1. Покажем сначала, что если $n_t < \infty$, то $n_s + n_{s,t} \le n_t$.

Из утверждения (b) вытекает, что $n_s \le n_t$ и $n_{s,t} \le n_t$, поэтому если $n_s = 0$ или $n_{s,t} = 0$, то неравенство очевидно. Если же $n_s > 0$ и $n_{s,t} > 0$, то согласно свойству (8) существуют наборы $\{I_i\}_1^{n_s} \prec (-\infty, s] \cap T$ и $\{J_k\}_1^{n_{s,t}} \prec [s, t] \cap T$ такие, что $|f(I_i)|_p > \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, n_s$ и $|f(J_k)|_p > \varepsilon$ для всех $k = 1, \ldots, n_{s,t}$. Замечая, что $\{I_i\}_1^{n_s} \cup \{J_k\}_1^{n_{s,t}} \prec (-\infty, t] \cap T$ и что указанные выше $n_s + n_{s,t}$ d_p-расстояний больше ε, на основании свойства (8) получаем необходимое неравенство $n_s + n_{s,t} \le n_t$.

2. Пусть $n_s < \infty$ и $n_{s,t} < \infty$. Покажем, что если $n \in \mathbb{N}$ и набор $\{I_i\}_1^n \prec (-\infty, t] \cap T$ такой, что $|f(I_i)|_p > \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (такие I_i всегда существуют, поскольку $n_t > 0$), то $n \le n_s + n_{s,t} + 1$, откуда в силу произвольности n из определения (1) будет следовать $n_t \le n_s + n_{s,t} + 1$, а вместе с этим и искомое равенство.

При $n = 1$ неравенство очевидно, поэтому всюду ниже считаем $n \ge 2$. Если точка $s \in T$ расположена так, что набор $\{I_i\}_1^n$ целиком лежит в $(-\infty, s] \cap T$ или $[s, t] \cap T$, то соответственно $n \le n_s$ или $n \le n_{s,t}$. Если точка s является концом одного и началом другого отрезков из набора $\{I_i\}_1^n$, т. е. $s \in I_k \cap I_{k+1}$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, то $\{I_i\}_1^k \prec (-\infty, s] \cap T$ и $\{I_i\}_{k+1}^n \prec [s, t] \cap T$, поэтому в соответствии со свойством (8) получаем $k \le n_s$ и $n - k \le n_{s,t}$ такие, что $n \le n_s + n_{s,t}$. Наконец, если s лежит внутри некоторого отрезка I_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, то $\{I_i\}_1^{k-1} \prec (-\infty, s] \cap T$ и $\{I_i\}_{k+1}^n \prec [s, t] \cap T$, где $\{I_i\}_1^0 = \emptyset = \{I_i\}_{n+1}^n$. Отсюда в силу свойства (8) находим $k - 1 \le n_s$ и $n - k \le n_{s,t}$, а потому $n \le n_s + n_{s,t} + 1$. $\square$

Для того чтобы доказать равенство (4), нам потребуется понятие ступенчатой функции. Напомним, что функция $g : [a, b] \to X$ называется *ступенчатой*, если существуют такие разбиение $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{m-1} < c_m = b$ отрезка $[a, b]$ и элементы $x_1, \ldots, x_m \in X$ (зависящие от g), что $g(t) = x_i$ для всех $t \in (c_{i-1}, c_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Для такой функции g имеем

$$N_p(\varepsilon, g, [a, b]) \le 2m < \infty \ \text{ для всех } p \in \mathcal{P} \text{ и } \varepsilon > 0. \tag{11}$$

Доказательство равенства (4). *Включение* "$\supset$". Пусть точка $\tau \in (a, b]$ произвольна (рассуждения для $\tau \in [a, b)$ аналогичны). Покажем, что для любых $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, p) \in (0, \tau - a)$ такое, что $d_p(f(s), f(t)) \le \varepsilon$ для всех $s, t \in S \cap [\tau - \delta(\varepsilon, p), \tau)$. Будем рассуждать от противного. Пусть $p_0 \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon_0 > 0$ таковы, что предыдущее высказывание нарушается. Тогда для произвольного $\delta_1 \in (0, \tau - a)$ найдутся точки $s_1, t_1 \in S \cap [\tau - \delta_1, \tau)$, $s_1 < t_1$, такие, что $d_{p_0}(f(s_1), f(t_1)) > \varepsilon_0$. Далее по индукции, если $i \in \mathbb{N}$, $i \ge 2$, и уже выбраны $\delta_{i-1} \in (0, \tau - a)$ и точки $s_{i-1}, t_{i-1} \in S \cap [\tau - \delta_{i-1}, \tau)$, $s_{i-1} < t_{i-1}$, то положим $\delta_i = \tau - t_{i-1}$ и найдем такие точки $s_i, t_i \in S \cap [\tau - \delta_i, \tau) = S \cap [t_{i-1}, \tau)$, $s_i < t_i$, что $d_{p_0}(f(s_i), f(t_i)) > \varepsilon_0$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $I_i = [s_i, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда по построению $\{I_i\}_1^n \prec S \cap (a, \tau) \subset S$ и $|f(I_i)|_{p_0} > \varepsilon_0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. В силу произвольности n и свойства (7) это означает, что $N_{p_0}(\varepsilon_0, f, S) = \infty$, что противоречит условию.

Включение "$\subset$". Пусть $f \in U_S([a, b]; X)$. По лемме 4 из ([18], § 4) для любого $p \in \mathcal{P}$ существует последовательность ступенчатых функций $\{f_j\} \subset X^{[a,b]}$ (зависящая от p) такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{t \in S} d_p(f_j(t), f(t)) = 0$. Зафиксируем $p \in \mathcal{P}$ произвольно. Тогда исходя из неравенства (11) величина $N_p(\varepsilon, f_j, [a, b])$ конечна для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку $S \subset [a, b]$, то в силу утверждения (b) леммы $N_p(\varepsilon, f_j, S) < \infty$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Покажем, что $N_p(\varepsilon, f, S) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует набор $\{I_i\}_1^n \prec S$ такой, что $|f(I_i)|_p > \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (в противном случае $N_p(\varepsilon, f, S) = 0$ и утверждение очевидно). Как и при доказательстве утверждения (c) леммы, выберем $\varepsilon' = \varepsilon'(n, p) > 0$ так, чтобы $\min\limits_{1 \le i \le n} |f(I_i)|_p > \varepsilon' > \varepsilon$. Тогда в силу равномерной сходимости f_j к f на S найдется номер $j_0 = j_0(\varepsilon', \varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $d_p(f_j(s), f(s)) \le (\varepsilon' - \varepsilon)/2$ для всех $j \ge j_0$ и $s \in S$. Значит, соотношение (10) справедливо для всех $j \ge j_0$ и $i = 1, \ldots, n$. В частности, при $j = j_0$ получаем $|f_{j_0}(I_i)|_p > \varepsilon$ для всех $i = 1, \ldots, n$ или, в соответствии со свойством (8), $n \le N_p(\varepsilon, f_{j_0}, S) < \infty$. Таким образом, в силу произвольности n из определения (1) вытекает, что величина $N_p(\varepsilon, f, S)$ конечна для всех $\varepsilon > 0$. $\square$

Равенство (4) представляет собой описание множества $U_S([a, b]; X)$ в терминах величин $\{N_p(\varepsilon, f, T)\}_{p \in \mathcal{P}}$. Множество $U_S([a, b]; \mathbb{R})$ впервые было рассмотрено в [23]; в других терминах множество $U_S([a, b]; X)$ описывалось в работах [18], [24]–[27].

4. Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\mathrm{Mon}(T; \mathbb{N})$ множество всех неубывающих ограниченных функций, отображающих T в $\mathbb{N}$. Заметим, что для $p \in \mathcal{P}$ и заданного $\varepsilon > 0$ в силу утверждения (b) леммы функция $t \mapsto N_p(\varepsilon, f_j, (-\infty, t] \cap T)$ является неубывающей по $t \in T$ для каждого $j \in \mathbb{N}$.

Всюду в доказательстве без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{P} = \mathbb{N}$.

1. Покажем, что существуют подпоследовательность в $\{f_j\}$, также обозначаемая через $\{f_j\}$, и функция $n_{k,p} \in \mathrm{Mon}(T; \mathbb{N})$ для любых $k \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathcal{P}$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} N_p(1/k, f_j, (-\infty, t] \cap T) = n_{k,p}(t) \quad \text{для всех } t \in T. \tag{12}$$

Для этого несколько раз применим канторовский диагональный процесс.

Из условия (5) при $p = 1$ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $J_1(\varepsilon), M_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такие, что $N_1(\varepsilon, f_j, T) \le M_1(\varepsilon) < \infty$ для всех $j \ge J_1(\varepsilon)$. Тогда в силу утверждения (b) леммы последовательность неубывающих функций $\{t \mapsto N_1(1, f_j, (-\infty, t] \cap T)\}_{j=J_1(1)}^\infty$ равномерно ограничена на T постоянной $M_1(1)$, поэтому по принципу выбора Хелли существуют подпоследовательность $\{f_{J_1^1(j)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{f_j\}_{j=J_1(1)}^\infty$, где $J_1^1:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ строго возрастающая подпоследовательность в $\{J_1(1)+j-1\}_{j=1}^\infty$, и функция $n_{1,1}\in\mathrm{Mon}(T;\mathbb{N})$ такие, что

$$N_1(1,f_{J_1^1(j)},(-\infty,t]\cap T)\to n_{1,1}(t)\ \text{ при }\ j\to\infty\ \text{ для всех }\ t\in T.$$

Выберем наименьший номер $j_1^1\in\mathbb{N}$ такой, что $J_1^1(j_1^1)\ge J_1(1/2)$.

Далее по индукции, если $k\ge 2$ и подпоследовательность $\{f_{J_{k-1}^1(j)}\}_{j=1}^\infty$ в исходной последовательности $\{f_j\}$ и номер $j_{k-1}^1\in\mathbb{N}$ такой, что $J_{k-1}^1(j_{k-1}^1)\ge J_1(1/k)$, уже выбраны, то, применяя теорему Хелли к последовательности неубывающих функций $\{t\mapsto N_1(1/k,f_{J_{k-1}^1(j)},(-\infty,t]\cap T)\}_{j=j_{k-1}^1}^\infty$, равномерно ограниченных на T постоянной $M_1(1/k)$, получим, что существуют подпоследовательность $\{f_{J_k^1(j)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{f_{J_{k-1}^1(j)}\}_{j=j_{k-1}^1}^\infty$ и функция $n_{k,1}\in\mathrm{Mon}(T;\mathbb{N})$ такие, что

$$N_1(1/k,f_{J_k^1(j)},(-\infty,t]\cap T)\to n_{k,1}(t)\ \text{ при }\ j\to\infty\ \text{ для всех }\ t\in T.$$

Тогда диагональная последовательность $\{f_{J_j^1(j)}\}_{j=1}^\infty$, которую обозначим через $\{f_j^1\}\equiv\{f_j^1\}_{j=1}^\infty$, удовлетворяет условию

$$\lim_{j\to\infty}N_1(1/k,f_j^1,(-\infty,t]\cap T)=n_{k,1}(t)\ \text{ для всех }\ k\in\mathbb{N}\ \text{ и }\ t\in T. \tag{13}$$

Исходя из равенства (13) снова воспользуемся индукцией: если $p\in\mathcal{P}$, $p\ge 2$, и подпоследовательность $\{f_j^{p-1}\}\equiv\{f_j^{p-1}\}_{j=1}^\infty$ последовательности $\{f_j^1\}$ уже выбрана, то в силу условия (5) для каждого $\varepsilon>0$ найдутся номера $J_p(\varepsilon),M_p(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такие, что $N_p(\varepsilon,f_j^{p-1},T)\le M_p(\varepsilon)<\infty$ для всех $j\ge J_p(\varepsilon)$. Тогда в соответствии с утверждением (b) леммы последовательность неубывающих функций $\{t\mapsto N_p(1,f_j^{p-1},(-\infty,t]\cap T)\}_{j=J_p(1)}^\infty$ равномерно ограничена на T постоянной $M_p(1)$. Отсюда по теореме Хелли получаем, что существуют подпоследовательность $\{f_{J_1^p(j)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{f_j^{p-1}\}_{j=J_p(1)}^\infty$, где $J_1^p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ строго возрастающая подпоследовательность в $\{J_p(1)+j-1\}_{j=1}^\infty$, и функция $n_{1,p}\in\mathrm{Mon}(T;\mathbb{N})$ такие, что

$$N_p(1,f_{J_1^p(j)},(-\infty,t]\cap T)\to n_{1,p}(t)\ \text{ при }\ j\to\infty\ \text{ для всех }\ t\in T.$$

Выберем наименьший номер $j_1^p\in\mathbb{N}$ такой, что $J_1^p(j_1^p)\ge J_p(1/2)$.

Далее по индукции, если $k\ge 2$ и подпоследовательность $\{f_{J_{k-1}^p(j)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{f_j^{p-1}\}$ и номер $j_{k-1}^p\in\mathbb{N}$ такой, что $J_{k-1}^p(j_{k-1}^p)\ge J_p(1/k)$, уже выбраны, то согласно теореме Хелли для последовательности неубывающих функций $\{t\mapsto N_p(1/k,f_{J_{k-1}^p(j)},(-\infty,t]\cap T)\}_{j=j_{k-1}^p}^\infty$, которая равномерно ограничена на T постоянной $M_p(1/k)$, существуют подпоследовательность $\{f_{J_k^p(j)}\}_{j=1}^\infty$ в $\{f_{J_{k-1}^p(j)}\}_{j=j_{k-1}^p}^\infty$ и функция $n_{k,p}\in\mathrm{Mon}(T;\mathbb{N})$ такие, что

$$N_p(1/k,f_{J_k^p(j)},(-\infty,t]\cap T)\to n_{k,p}(t)\ \text{ при }\ j\to\infty\ \text{ для всех }\ t\in T.$$

Тогда диагональная последовательность $\{f_{J_j^p(j)}\}_{j=1}^\infty$, которую обозначим через $\{f_j^p\}\equiv\{f_j^p\}_{j=1}^\infty$, обладает свойством

$$\lim_{j\to\infty}N_p(1/k,f_j^p,(-\infty,t]\cap T)=n_{k,p}(t)\ \text{ для всех }\ k\in\mathbb{N}\ \text{ и }\ t\in T.$$

Из приведенных рассуждений следует, что диагональная последовательность $\{f_j^j\}_{j=1}^\infty$, вновь обозначаемая через $\{f_j\}$, удовлетворяет условию (12).

2. Обозначим через Q не более чем счетное всюду плотное подмножество T, т. е. $Q\subset T\subset\overline{Q}$, где $\overline{Q}$ — замыкание множества Q в $\mathbb{R}$. Заметим, что любая точка $t\in T$, не являющаяся предельной для T, принадлежит Q ([18], доказательство теоремы 1). При любых $k\in\mathbb{N}$ и

$p \in \mathcal{P}$ функция $n_{k,p}$ монотонна на T, поэтому множество $S_{k,p} \subset T$ ее точек разрыва (все из которых первого рода) не более чем счетно. Положим $S = Q \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\in\mathcal{P}} S_{k,p}$. Тогда S — не более чем счетное всюду плотное подмножество T, причем если $T \setminus S \neq \emptyset$, то

$$\text{функция } n_{k,p} \text{ непрерывна в точках } t \in T \setminus S \text{ для всех } k \in \mathbb{N} \text{ и } p \in \mathcal{P}. \tag{14}$$

Так как последовательность $\{f_j\}$ поточечно относительно секвенциально компактна и множество $S \subset T$ не более чем счетно, то без ограничения общности предполагаем (при необходимости переходя к подпоследовательности в $\{f_j\}$ при помощи стандартного диагонального процесса), что при каждом $s \in S$ последовательность $\{f_j(s)\}$ сходится в X к некоторому элементу, обозначаемому через $f(s) \in X$, такому, что $\lim_{j\to\infty} d_p(f_j(s), f(s)) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

Если $S = T$, то доказательство завершено. Если же $S \neq T$, то покажем, что для любой точки $t \in T \setminus S$ последовательность $\{f_j(t)\}$ является последовательностью Коши в X:

$$\lim_{j,l\to\infty} d_p(f_j(t), f_l(t)) = 0 \text{ для всех } p \in \mathcal{P}.$$

Пусть $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. Выберем и зафиксируем номер $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $1/k \leq \varepsilon/3$. Так как S всюду плотно в T и, благодаря свойству (14), t есть точка непрерывности функции $n_{k,p}$, то найдется точка $s = s(k,p,t) \in S$, таким образом зависящая лишь от ε, что $n_{k,p}(t) = n_{k,p}(s)$. Пусть для определенности $s < t$ (случай $t < s$ аналогичен). Исходя из соотношения (12), выберем номера $J_1 = J_1(k,p,t)$, $J_2 = J_2(k,p,s) \in \mathbb{N}$, также зависящие лишь от ε, такие, что $N_p(1/k, f_j, (-\infty, t] \cap T) = n_{k,p}(t)$ для всех $j \geq J_1$ и $N_p(1/k, f_j, (-\infty, s] \cap T) = n_{k,p}(s)$ для всех $j \geq J_2$. Тогда из утверждения (d) леммы вытекает

$$\begin{aligned} N_p(1/k, f_j, [s,t] \cap T) \leq N_p(1/k, f_j, (-\infty, t] \cap T) - N_p(1/k, f_j, (-\infty, s] \cap T) = \\ = n_{k,p}(t) - n_{k,p}(s) = 0 \ \text{ для всех } j \geq \max\{J_1, J_2\}, \end{aligned}$$

откуда получаем $N_p(1/k, f_j, [s,t] \cap T)=0$, а потому на основании свойства (6)

$$d_p(f_j(s), f_j(t)) \leq 1/k \leq \varepsilon/3.$$

Поскольку последовательность $\{f_j(s)\}$ сходится в равномерном пространстве X, то ([21], с. 252, теорема 21) она является последовательностью Коши. Поэтому существует номер $J_3 = J_3(\varepsilon, p, s) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$d_p(f_j(s), f_l(s)) \leq \varepsilon/3 \ \text{ для всех } \ j, l \geq J_3.$$

Тогда номер $J = \max\{J_1, J_2, J_3\}$ зависит лишь от ε и p, и для всех $j, l \geq J$ имеем

$$d_p(f_j(t), f_l(t)) \leq d_p(f_j(t), f_j(s)) + d_p(f_j(s), f_l(s)) + d_p(f_l(s), f_l(t)) \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$ это означает, что $\{f_j(t)\}$ есть последовательность Коши в X. По условию теоремы последовательность $\{f_j(t)\}$ относительно секвенциально компактна, следовательно, она имеет предельную точку, которую обозначим через $f(t) \in X$. Согласно ([21], с. 252, теорема 21) любая последовательность Коши в равномерном пространстве сходится к своей предельной точке, поэтому $\lim_{j\to\infty} d_p(f_j(t), f(t)) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}$.

3. Благодаря хаусдорфовости пространства X однозначная функция $f : T = S \cup (T \setminus S) \to X$ корректно определена на T и является поточечным пределом на T последовательности $\{f_j\}$, по построению являющейся подпоследовательностью исходной последовательности. Применяя утверждение (c) леммы, заключаем

$$N_p(\varepsilon, f, T) \leq \liminf_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T) \leq \limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T) \leq N_p(\varepsilon)$$

для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$. $\square$

Замечание 1. Справедлив и локальный вариант теоремы 1: если заменить в этой теореме условие (5) на следующее:

$$\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T\cap[a,b]) < \infty \ \text{ для всех } a,b\in T,\ a<b,\ p\in\mathcal{P} \text{ и } \varepsilon>0,$$

то некоторая подпоследовательность $\{f_j\}$ сходится поточечно на T к такой функции $f\in X^T$, что $N_p(\varepsilon,f,T\cap[a,b])<\infty$ для всех $a,b\in T$, $a<b$, $p\in\mathcal{P}$ и $\varepsilon>0$. Это утверждение сразу следует, если на основе теоремы 1 применить диагональный процесс по расширяющимся отрезкам.

Замечание 2. Без предположения (5) теорема 1 не имеет места. Покажем это в простейшем случае, когда $X=\mathbb{R}$. Как известно, последовательность функций $\{f_j\}\subset\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$, где $f_j(t)=|\sin(jt)|$, не имеет ни одной подпоследовательности, сходящейся всюду на $[0,2\pi]$. В силу определения (1) $N(\varepsilon,f_j,[0,2\pi])=0$ при всех $\varepsilon\geq 1$. Покажем, что для любого номера $j\in\mathbb{N}$

$$4j\leq N(\varepsilon,f_j,[0,2\pi])\leq\frac{4j}{\varepsilon} \ \text{ для всех } 0<\varepsilon<1, \tag{15}$$

отсюда $\limsup\limits_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[0,2\pi])=\infty$ для всех $0<\varepsilon<1$.

Известно, что $V(f_j,[0,2\pi])=4j$ $(j\in\mathbb{N})$, где $V(f,T)$ обозначает обычную вариацию по Жордану функции f на T. Исходя из этого и того факта, что для функции $f\in\mathbb{R}^T$ ограниченной вариации справедлива оценка $N(\varepsilon,f,T)\leq V(f,T)/\varepsilon$, получаем неравенство справа в (15). Если для любого $j\in\mathbb{N}$ положить $t_i^j=\pi i/(2j)$ и $I_i=[t_{i-1}^j,t_i^j]$ для всех $i=0,1,\ldots,4j$, то найдем, что

$$|f_j(I_i)|=\left|\sin\left(\frac{\pi i}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi(i-1)}{2}\right)\right|=1 \ \text{ для всех } i=1,\ldots,4j.$$

Откуда на основании определения (1) вытекает неравенство слева в (15).

Вернемся к рассмотрению хаусдорфового равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$. Напомним, что *осцилляцией функции* $f\in X^T$ *относительно псевдометрики* d_p называется величина $\operatorname{osc}_p(f,T)=\sup\limits_{I\prec T}|f(I)|_p\equiv\sup\limits_{s,t\in T}d_p(f(s),f(t))$. *Модулем вариации функции* $f\in X^T$ *относительно псевдометрики* d_p называется последовательность $\{\nu_p(n,f,T)\}_{n=1}^\infty\subset[0,\infty]$, которая для $p\in\mathcal{P}$ и $n\in\mathbb{N}$ определяется по следующему правилу ([18], [24]):

$$\nu_p(n,f,T)=\sup\left\{\sum_{i=1}^n|f(I_i)|_p\ \middle|\ \{I_i\}_1^n\prec T\right\}. \tag{16}$$

Точнее, равенство (16) используется при $n_T=\sup\bigl\{n\in\mathbb{N}\mid\exists\{I_i\}_1^n\prec T\bigr\}=\infty$, а если $n_T<\infty$, то $\nu_p(n,f,T)$ определяется согласно (16) при $n\leq n_T$ и $\nu_p(n,f,T)=\nu_p(n_T,f,T)$ при $n>n_T$. Из определения (16) вытекает $\nu_p(1,f,T)=\operatorname{osc}_p(f,T)$. Кроме того, для $\emptyset\neq E\subset T$ полагаем $\nu_p(n,f,E)=\nu_p(n,f|_E,E)$.

В работе ([18], теорема 1) установлен следующий поточечный принцип выбора: если в предположениях теоремы 1 вместо условия (5) выполняется условие

$$\mu_p(n)\equiv\limsup_{j\to\infty}\nu_p(n,f_j,T)=o(n) \ \text{ для всех } p\in\mathcal{P}, \tag{17}$$

то утверждение теоремы 1 остается справедливым, а предельная функция извлеченной подпоследовательности $f\in X^T$ удовлетворяет условию: $\nu_p(n,f,T)\leq\mu_p(n)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $p\in\mathcal{P}$. В (17) запись $\nu_p(n,f,T)=o(n)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\nu_p(n,f,T)/n=0$.

Этот результат вытекает из теоремы 1, если учесть, что (17) эквивалентно сразу паре условий — условию (5) и $\limsup_{j\to\infty} \mathrm{osc}_p(f_j,T) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$, как это установлено в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть* $\{f_j\} \subset X^T$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) *для некоторого* $p \in \mathcal{P}$ *условие* $\limsup_{j\to\infty} \nu_p(n,f_j,T) = o(n)$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $\limsup_{j\to\infty} \mathrm{osc}_p(f_j,T) < \infty$ *и* $\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon,f_j,T) < \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$;

(b) *условие* $\limsup_{j\to\infty} \nu_p(n,f_j,T) = o(n)$ *для любого* $p \in \mathcal{P}$ *эквивалентно выполнению условий*: $\limsup_{j\to\infty} \mathrm{osc}_p(f_j,T) < \infty$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$ *и* $\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon,f_j,T) < \infty$ *для всех* $p \in \mathcal{P}$ *и* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Утверждения (a) и (b) доказываются аналогично, поэтому установим для определенности (b).

(b) *Необходимость.* Зафиксируем $\varepsilon > 0$ произвольно. Из условия на модули вариации следует, что для любого $p\in\mathcal{P}$ существует такой номер $n_0(\varepsilon,p)\in\mathbb{N}$, что $\lim_{k\to\infty}\sup_{j\ge k} \nu_p(n_0(\varepsilon,p),f_j,T) < \varepsilon n_0(\varepsilon,p)$. Следовательно, найдется номер $j_0 = j_0(\varepsilon,p) \in \mathbb{N}$ такой, что $\nu_p(n_0(\varepsilon,p),f_j,T) < \varepsilon n_0(\varepsilon,p)$ для всех $j \ge j_0(\varepsilon,p)$. Поскольку

$$\mathrm{osc}_p(f_j,T) = \nu_p(1,f_j,T) \le \nu_p(n_0(\varepsilon,p),f_j,T) < \varepsilon n_0(\varepsilon,p) \text{ для всех } j \ge j_0(\varepsilon,p), \tag{18}$$

то $\limsup_{j\to\infty} \mathrm{osc}_p(f_j,T) \le \sup_{j\ge j_0(\varepsilon,p)} \mathrm{osc}_p(f_j,T) \le \varepsilon n_0(\varepsilon,p) < \infty$.

В силу свойства (18) для любого $j \ge j_0(\varepsilon,p)$ функция f_j является ограниченной, поэтому последовательность $\{\nu_p(n,f_j,T)/n\}_{n=1}^\infty$ является невозрастающей для всех $j \ge j_0(\varepsilon,p)$ ([18], замечание после леммы 2). Отсюда находим, что

$$\nu_p(n,f_j,T)/n \le \nu_p(n_0(\varepsilon,p),f_j,T)/n_0(\varepsilon,p) < \varepsilon \text{ для всех } n \ge n_0(\varepsilon,p) \text{ и } j \ge j_0(\varepsilon,p),$$

а это означает, что $\sup_{j\ge j_0(\varepsilon,p)} \nu_p(n,f_j,T) < \varepsilon n$ для всех $n \ge n_0(\varepsilon,p)$. Покажем, что тогда $\sup_{j\ge j_0(\varepsilon,p)} N_p(\varepsilon,f_j,T) \le n_0(\varepsilon,p)$.

В самом деле, пусть номер $k \in \mathbb{N}$, $k \ge j_0(\varepsilon,p)$ такой, что $N_p(\varepsilon,f_k,T) > 0$. Тогда для любого натурального n и набора $\{I_i\}_1^n \prec T$ такого, что $|f_k(I_i)|_p > \varepsilon$ для всех $i = 1,\dots,n$, выполняется неравенство $n \le n_0(\varepsilon,p)$; в противном случае, если $n > n_0(\varepsilon,p)$, то $\sup_{j\ge j_0(\varepsilon,p)} \nu_p(n,f_j,T) \ge \nu_p(n,f_k,T) \ge \sum_{i=1}^n |f_k(I_i)|_p > n\varepsilon$, что приводит к противоречию. Итак, в соответствии с определением (1) величина $N_p(\varepsilon,f_j,T) \le n_0(\varepsilon,p)$ для всех $j \ge j_0(\varepsilon,p)$, откуда окончательно получаем

$$\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon,f_j,T) \le \sup_{j\ge j_0(\varepsilon,p)} N_p(\varepsilon,f_j,T) \le n_0(\varepsilon,p) < \infty.$$

Достаточность. Пусть $\limsup_{j\to\infty} \mathrm{osc}_p(f_j,T) < M_p < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Тогда для $p \in \mathcal{P}$ найдется номер $j_1(p) \in \mathbb{N}$ такой, что $\sup_{j\ge j_1(p)} \mathrm{osc}_p(f_j,T) < M_p$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. По условию $\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon,f_j,T) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$, поэтому для $p \in \mathcal{P}$ найдется номер $j_2(\varepsilon,p) \in \mathbb{N}$ такой, что $N(\varepsilon,p) \equiv \sup_{j\ge j_2(\varepsilon,p)} N_p(\varepsilon,f_j,T) < \infty$. Положим $j_3 = \max\{j_1(p), j_2(\varepsilon,p)\}$.

В силу свойства (9) для произвольных номеров $j \geq j_3$, $n \geq N_p(\varepsilon, f_j, T)+1$ и набора $\{I_i\}_1^n \prec T$ существует по меньшей мере $n - N_p(\varepsilon, f_j, T)$ отрезков I_{i_k} ($i_k \in \{1, \dots, n\}$ все различные) таких, что $|f_j(I_{i_k})|_p \leq \varepsilon$ для всех $k = 1, \dots, n - N_p(\varepsilon, f_j, T)$. Отсюда вытекает

$$\sum_{i=1}^{n} |f_j(I_i)|_p = \sum_{m=1}^{N_p(\varepsilon,f_j,T)} |f_j(I_{i_m})|_p + \sum_{k=1}^{n-N_p(\varepsilon,f_j,T)} |f_j(I_{i_k})|_p \leq N_p(\varepsilon, f_j, T)M_p + n\varepsilon \ \text{ для всех } \ j \geq j_3,$$

где $\{i_m\}_{m=1}^{N_p(\varepsilon,f_j,T)} = \{i\}_{i=1}^n \setminus \{i_k\}_{k=1}^{n-N_p(\varepsilon,f_j,T)}$. Переходя к супремуму по всем $\{I_i\}_1^n \prec T$ в последнем выражении, получаем $\nu_p(n, f_j, T) \leq N_p(\varepsilon, f_j, T)M_p + n\varepsilon$ для всех $j \geq j_3$. Следовательно, $\sup\limits_{j \geq j_3} \nu_p(n, f_j, T) \leq N(\varepsilon, p)M_p + n\varepsilon$, поэтому

$$\limsup_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) \leq \sup_{j \geq j_3} \nu_p(n, f_j, T) \leq N(\varepsilon, p)M_p + n\varepsilon \leq 2n\varepsilon$$

при $n \geq \max\{N(\varepsilon, p) + 1, N(\varepsilon, p)M_p/\varepsilon\}$, а это означает, что $\limsup\limits_{j\to\infty} \nu_p(n, f_j, T) = o(n)$. □

Приведем пример поточечно сходящейся на $[0, 1]$ последовательности функций $\{f_j\}$, для которой выполняются предположения теоремы 1, а условия существования поточечно сходящейся подпоследовательности принципа выбора из [17], [18] нарушаются. Для этого рассмотрим банахово пространство всех суммируемых последовательностей $l_1 = \Big\{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R};\ \|x\| = \sum\limits_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\Big\}$. Обозначим через $e_i \in l_1$ единичный базисный вектор $e_i = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, для которого $x_n = 0$ при $n \neq i$ и $x_i = 1$. Определим функции $f_j : [0, 1] \to l_1$ следующим образом: $f_j(t) = je_j$ при $t = 1/(j + 1)$ и $f_j(t) = 0 \in l_1$ при $t \neq 1/(j + 1)$. Тогда $\{f_j\}$ всюду сходится к $f(t) \equiv 0 \in l_1$. Более того, в силу определения $\{f_j(t)\} = \{0\} \in l_1$ при $t \notin \{1/(n + 1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{f_j(t)\} = \{0, ne_n\} \in l_1$ при $t = 1/(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$, и, как следствие, $\{f_j\}$ является поточечно компактной. Далее, $\operatorname{osc}(f_j, [0, 1]) = j$ (стремится к бесконечности при $j \to \infty$); $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 2$ при $0 < \varepsilon < j$ и $N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 0$ при $\varepsilon \geq j$. Таким образом, $\limsup\limits_{j\to\infty} N(\varepsilon, f_j, [0, 1]) = 2$ для всех $\varepsilon > 0$, а $\limsup\limits_{j\to\infty} \nu(n, f_j, [0, 1]) = \infty$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. Без ограничения общности будем считать, что для всех $j \in \mathbb{N}$ величина $N_p(\varepsilon, f_j, T) > 0$. Благодаря равномерной сходимости $\{f_j\}$ к f для любого δ, $0 < \delta < \varepsilon$, найдется номер $j_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $j \geq j_0(\varepsilon, \delta)$ справедливо неравенство

$$d_p(f_j(t), f(t)) < (\varepsilon - \delta)/2 \ \text{ для всех } \ t \in T. \tag{19}$$

Из определения (1) для $n_j \equiv N_p(\varepsilon, f_j, T) > 0$ при $j \geq j_0(\varepsilon, \delta)$ вытекает, что существует набор $\{I_i\}_1^{n_j} \prec T$ такой, что $|f_j(I_i)|_p > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n_j$. Тогда в силу неравенства треугольника и неравенства (19) для всех отрезков I_i из $\{I_i\}_1^{n_j}$ имеем

$$\varepsilon < |f_j(I_i)|_p \leq d_p(f_j(s_i), f(s_i)) + d_p(f(s_i), f(t_i)) + d_p(f(t_i), f_j(t_i)) \leq \varepsilon - \delta + |f(I_i)|_p.$$

Таким образом, $|f(I_i)|_p > \delta$ для всех $i = 1, \dots, n_j$, а это в соответствии со свойством (8) означает, что

$$N_p(\varepsilon, f_j, T) \equiv n_j \leq N_p(\delta, f, T) \ \text{ для всех } \ j \geq j_0(\varepsilon, \delta).$$

Отсюда получаем

$$\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T) \leq \sup_{j \geq j_0(\varepsilon,\delta)} N_p(\varepsilon, f_j, T) \leq N_p(\delta, f, T) \ \text{ для всех } \ 0 < \delta < \varepsilon,$$

и, принимая во внимание тот факт (утверждение (a) леммы), что функция $\delta \mapsto N_p(\delta, f, T)$ является неубывающей, остается перейти к пределу при $\delta \to \varepsilon - 0$. □

Доказательство теоремы 3. Воспользуемся идеей доказательства теоремы 6 из [26]. Пусть $T_0 \subset T$ есть (возможно пустое) множество меры нуль такое, что последовательность $\{f_j(t)\}$ относительно секвенциально компактна для всех $t \in T \setminus T_0$. Применим теорему 1 и диагональный процесс.

По предположению существует измеримое множество $E_1 \subset T$ меры $\mathcal{L}(E_1) \le 1$ такое, что $\limsup\limits_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T \setminus E_1) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$. Последовательность $\{f_j\}$ относительно секвенциально компактна на $T \setminus (T_0 \cup E_1)$ и в силу утверждения (b) леммы

$$\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T \setminus (T_0 \cup E_1)) \le \limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T \setminus E_1) < \infty.$$

Тогда в соответствии с теоремой 1 существуют подпоследовательность $\{f_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{f_j\}$ и функция $f^1 : T \setminus (T_0 \cup E_1) \to X$ такие, что $f_j^{(1)} \to f^1$ на $T \setminus (T_0 \cup E_1)$ при $j \to \infty$ и $N_p(\varepsilon, f^1, T \setminus (T_0 \cup E_1)) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$.

Если $k \ge 2$ и подпоследовательность $\{f_j^{(k-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{f_j\}$ уже выбрана, то по условию найдется измеримое множество $E_k \subset T$ меры $\mathcal{L}(E_k) \le 1/k$ такое, что

$$\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T \setminus E_k) < \infty \ \text{ для всех } \ p \in \mathcal{P} \text{ и } \varepsilon > 0.$$

Последовательность $\{f_j^{(k-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ относительно секвенциально компактна на множестве $T \setminus (T_0 \cup E_k)$, поэтому по утверждению (b) леммы получаем

$$\limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j^{(k-1)}, T \setminus (T_0 \cup E_k)) \le \limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j^{(k-1)}, T \setminus E_k) \le \\ \le \limsup_{j\to\infty} N_p(\varepsilon, f_j, T \setminus E_k) < \infty.$$

Согласно теореме 1 найдутся подпоследовательность $\{f_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ в $\{f_j^{(k-1)}\}_{j=1}^{\infty}$ и функция $f^k : T\setminus(T_0\cup E_k) \to X$ такие, что $f_j^{(k)} \to f^k$ на $T\setminus(T_0\cup E_k)$ при $j\to\infty$ и $N_p(\varepsilon, f^k, T\setminus(T_0\cup E_k))<\infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$.

Положим $E = T_0 \cup \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, тогда множество E измеримо, его мера $\mathcal{L}(E)$ равна 0, и $T \setminus E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \big(T \setminus (T_0 \cup E_k)\big)$. Определим функцию $f : T \setminus E \to X$ следующим образом: для каждого $t \in T \setminus E$ существует номер $k \in \mathbb{N}$ такой, что $t \in T \setminus (T_0 \cup E_k)$, поэтому полагаем $f(t) = f^k(t)$. Определение функции f корректно, т. е. не зависит от номера k: пусть номер $k_1 \in \mathbb{N}$ такой, что $t \in T \setminus (T_0 \cup E_{k_1})$ и $k \le k_1$ (без ограничения общности), тогда последовательность $\{f_j^{(k_1)}\}_{j=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью $\{f_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ такой, что

$$f^{k_1}(t) = \lim_{j\to\infty} f_j^{(k_1)}(t) = \lim_{j\to\infty} f_j^{(k)}(t) = f^k(t) \ \text{ в } \ X.$$

Покажем, что диагональная последовательность $f_j^{(j)}$ (которая является подпоследовательностью $\{f_j\}$) сходится поточечно к f на $T \setminus E$. Действительно, если $t \in T \setminus E$, то $t \in$

$T \setminus (T_0 \cup E_k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $f(t) = f^k(t)$. Поскольку $\{f_j^{(j)}\}_{j=k}^{\infty}$ является подпоследовательностью $\{f_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$, то

$$\lim_{j\to\infty} f_j^{(j)}(t) = \lim_{j\to\infty} f_j^{(k)}(t) = f^k(t) = f(t) \text{ в } X.$$

Продолжим f произвольно с $T \setminus E$ на все T и обозначим продолжение снова через f. Для данного $\delta > 0$ выберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $1/k \le \delta$, и положим $E' = E'(\delta) = T_0 \cup E_k$. Тогда $\mathcal{L}(E') = \mathcal{L}(E_k) \le 1/k \le \delta$, $f = f^k$ на $T \setminus (T_0 \cup E_k) = T \setminus E'$ и $N_p(\varepsilon, f^k, T \setminus E') = N_p(\varepsilon, f^k, T \setminus (T_0 \cup E_k)) < \infty$ для всех $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$. □

Автор выражает благодарность В.В. Чистякову за постановку задачи, полезные обсуждения и внимание к работе.

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. За время нахождения статьи в печати вышли работы [28] и [29]. Отметим, что в [28] поточечный принцип выбора установлен для вещественнозначных функций, а в работе [29] — для функций со значениями в метрическом пространстве.

Литература

[1] Helly E. *Über lineare Functionaloperationen* // Wien. Ber. – 1912. – Bd. 121. – S. 265–297.
[2] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.
[3] Chistyakov V.V. *Selections of bounded variation* // J. Appl. Anal. – 2004. – V. 10. – № 1. – P. 1–82.
[4] Musielak J., Orlicz W. *On generalized variations.* I // Stud. Math. – 1959. – V. 18. – № 1. – P. 11–41.
[5] Waterman D. *On Λ-bounded variation* // Stud. Math. – 1976. – V. 57. – № 1. – P. 33–45.
[6] Gniłka S. *On the generalized Helly's theorem* // Funct. Approx. Comment. Math. – 1976. – V. 4. – P. 109–112.
[7] Schramm M. *Functions of Φ-bounded variation and Riemann–Stieltjes integration* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – V. 287. – № 1. – P. 49–63.
[8] Belov S.A., Chistyakov V.V. *A selection principle for mappings of bounded variation* // J. Math. Anal. Appl. – 2000. – V. 249. – № 2. – P. 351–366.
[9] Chistyakov V.V. *On mappings of bounded variation* // J. Dynam. Control Syst. – 1997. – V. 3. – № 2. – P. 261–289.
[10] Чистяков В.В. *К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной* // Матем. сб. – 1998. – Т. 189. – № 5. – С. 153–176.
[11] Chistyakov V.V. *Mappings of bounded variation with values in a metric space: generalizations* // J. Math. Sci. – 2000. – V. 100. – № 6. – P. 2700–2715.
[12] Chistyakov V.V. *Generalized variation of mappings with applications to composition operators and multifunctions* // Positivity. – 2001. – V. 5. – № 4. – P. 323–358.
[13] Chistyakov V.V. *Metric space-valued mappings of bounded variation* // J. Math. Sci. – 2002. – V. 111. – № 2. – P. 3387–3429.
[14] Chistyakov V.V. *Mappings of generalized variation and composition operators* // J. Math. Sci. – 2002. – V. 110. – № 2. – P. 2455–2466.
[15] Чистяков В.В. *О многозначных отображениях ограниченной обобщенной вариации* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71. – № 4. – С. 611–632.
[16] Barbu V., Precupanu Th. *Convexity and optimization in Banach spaces.* – Reidel: Dordrecht, 1986. – 301 p.
[17] Чистяков В.В. *Принцип выбора для функций со значениями в равномерном пространстве* // Докл. РАН. – 2006. – Т. 409. – № 5. – С. 591–593.
[18] Чистяков В.В. *Поточечный принцип выбора для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве* // Матем. тр. – 2006. – Т. 9. – № 1. – С. 176–204.
[19] Третьяченко Ю.В. *Условие существования поточечно сходящейся подпоследовательности* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Тез. докл. – Казань, 2007. – Т. 35. – С. 246–247.
[20] Третьяченко Ю.В. *Об одном принципе выбора для поточечно ограниченных последовательностей функций* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Лобачевские чтения–2007. Тез. докл. – Казань, 2007. – Т. 36. – С. 219–221.
[21] Келли Дж. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 432 с.

[22] Dudley R.M., Norvaiša R. *Differentiability of six operators on nonsmooth functions and p-variation.* – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 277 p.

[23] Jeffery R.L. *Generalized integrals with respect to functions of bounded variation* // Canad. J. Math. – 1958. – V. 10. – № 4. – P. 617–628.

[24] Чантурия З.А. *Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 214. – № 1. – С. 63–66.

[25] Chistyakov V.V. *A selection principle for functions of a real variable* // Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia. – 2005. – V. 53. – № 1. – P. 25–43.

[26] Chistyakov V.V. *The optimal form of selection principles for functions of a real variable* // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – V. 310. – № 2. – P. 609–625.

[27] Толстоногов А.А. *О некоторых свойствах пространства правильных функций* // Матем. заметки. – 1984. – Т. 35. – № 6. – С. 803–812.

[28] Третьяченко Ю.В., Чистяков В.В. *Принцип выбора для поточечно ограниченных последовательностей функций* // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84. – № 3. – С. 428–439.

[29] Chistyakov V.V., Maniscalco C., Tretyachenko Y.V. *Variants of a selection principle for sequences of regulated and non-regulated functions* // In: Topics in Classical Analysis and Applications in Honor of Professor Daniel Waterman. Singapore: World Scientific. – 2008. – P. 45–72.

Ю.В. Третьяченко

преподаватель, кафедра прикладной математики и информатики,
Государственный университет–Высшая школа экономики (Нижний Новгород),
ул. Большая Печерская, д. 23/12, г. Нижний Новгород, 603155,

`e-mail:` tretyachenko_y_v@mail.ru

Yu.V. Tret'yachenko

Lecturer, Chair of Applied Mathematics and Information Science,
State University of Higher School of Economics in Nizhni Novgorod,
23/12 Bol'shaya Pecherskaya str., Nizhni Novgorod, 603155 Russia,

`e-mail:` tretyachenko_y_v@mail.ru