

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

**РАСЧЕТ ГАРАНТИЙНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ
ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ АКТИВНЫХ ЗАЯВОК**

Препринт WP16/2010/02
Серия WP16

Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Редакторы серии WP16
«Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука»
С.Н. Смирнов, А.Г. Шоломицкий

Расчет гарантийного обеспечения для портфеля активных заявок : Препринт WP16/2010/02 [Текст] / А. С. Долматов, О. А. Котенко, А. Ю. Лукина, С. Н. Смирнов ; Гос. ун-т – Высшая школа экономики. – М.: Изд. дом Гос. ун-та – Высшей школы экономики, 2010. – 24 с. – 150 экз.

Либерализация финансового сектора экономики стимулировала развитие рынка производных финансовых инструментов, позволяющих участникам рыночных отношений хеджировать свои инвестиции от рисков возможных потерь. Был разработан целый ряд методик, предназначенных для работы с портфелями деривативов и учитывающих специфику данных инструментов. Стандартом индустрии в этой области стала система «Стандартный портфельный анализ риска». В соответствии со стандартной биржевой методикой расчет риска производится для фиксированного портфеля производных финансовых инструментов. Однако в случае частичного исполнения торговой стратегии для опционов величина залогового требования может существенно отличаться от вычисленной для фиксированного портфеля. В связи с этим возникает интерес к решению задачи расчета начального залога для портфеля с учетом активных заявок. В работе сформулирована задача оптимизации, позволяющая оценить размер обеспечения для портфеля фьючерсов и опционов, которого будет достаточно при любом варианте исполнения активных заявок.

Препринты Государственного университета – Высшей школы экономики размещаются по адресу: <http://www.hse.ru/org/hse/wp>

© Долматов А. С., 2010
© Котенко О. А., 2010
© Лукина А. Ю., 2010
© Смирнов С. Н., 2010
© Оформление. Издательский дом
Государственного университета –
Высшей школы экономики, 2010

Введение

Либерализация финансового сектора экономики стимулировала развитие рынка производных финансовых инструментов, позволяющих участникам рыночных отношений хеджировать свои инвестиции от рисков возможных потерь. Производные финансовые инструменты можно определить как финансовые инструменты, стоимость которых зависит от значений других более существенных базисных величин. Чаще всего базисные величины производных финансовых инструментов – это цены торгуемых активов. Однако производные финансовые инструменты могут зависеть почти от любых величин, начиная от цены на свинину вплоть до количества снега, выпавшего на каком-либо горнолыжном курорте [5].

Каким должен быть оптимальный размер залогового требования для портфеля производных финансовых инструментов? С точки зрения агентов, торгующих на бирже, маржа должна быть минимальной, с точки зрения клиринговой организации – совсем наоборот. Главная задача заключается в установлении такого размера маржи, который был бы не слишком малым, чтобы клиринговые организации не столкнулись с потерями, и не слишком большим, чтобы игроки на бирже не отказались от участия в торгах. Существует несколько подходов к расчету залогового требования, каждый из которых обладает своими особенностями: SPAN (Standard Portfolio Analyses of Risk), разработанный Чикагской биржей, Theoretical Intermarket Margin System – TIMS (Options Clearing Corporation – OCC), “Window method” – OMS (OM Technology).

Целью данной работы не является сравнительный анализ этих методов, их подробное описание можно найти в [6]. Однако рассмотрим существенные отличия трех указанных подходов.

В целом каждый подход рассматривает проблему расчета залогового требования с одной и той же точки зрения: как сумму, которую необходимо потратить для того, чтобы немедленно закрыть все позиции определенного портфеля бумаг. Соответственно, на эту сумму влияют следующие показатели: изменения стоимости базисного ак-

тива (для производных финансовых инструментов), волатильность цен и корреляции цен бумаг в портфеле. Согласно каждому подходу маржа рассчитывается как сумма наибольших потерь по какому-либо сценарию. Однако при более близком рассмотрении три вышеперечисленных метода различаются.

Явные отличия подходов заключаются в количестве сценариев, наличии сценариев, учитывающих экстремальные изменения цен, а также волатильности. Наибольшее количество сценариев рассматривается в OMS, далее в SPAN, и в TIMS их наименьшее число. Также TIMS в своем базовом виде не учитывает волатильность цен бумаг. Существуют некоторые модификации, устраняющие этот недостаток, но, тем не менее, первоначально это условие не было включено в метод. В связи с этим результат расчетов маржи с помощью TIMS, при прочих равных условиях, меньше величин, вычисленных другими двумя методами. Однако все три подхода учитывают взнос за короткие опционы, а также дополнительно в SPAN учитываются экстремальные изменения цен.

В случае, когда в портфеле более одного контракта или существуют контракты на разные базисные активы, необходимо учитывать корреляцию цен этих контрактов. Аналогично, если в портфеле присутствуют контракты на разные даты погашения, то существует неполная корреляция цен этих контрактов. Рассматриваемые три метода учитывают корреляцию разным образом. TIMS, например, не учитывает неполную корреляцию между опционами с разными месяцами погашения. И OMS, и SPAN учитывают эту особенность, но в методике SPAN происходит более гибкий учет корреляции, в связи с тем, что контракты группируются строго по отдельным месяцам погашения, в то время как в OMS контракты с соседними месяцами погашения могут попасть в одну группу. Mattias Vylund провел численный эксперимент, сравнив расчеты залогового требования по трем методикам. В соответствии с полученными им результатами, если в SPAN заменить некоторые производные финансовые инструменты на подобные им, но с другим месяцем погашения, залоговое требование меняется, в то время как при использовании других методик этого не происходит. Так как TIMS хуже всего учитывает корреляцию и не учитывает волатильность, полученная с помощью этой методики маржа может быть почти в три 3 раза ниже, чем полученная по SPAN.

Таким образом, система SPAN является наиболее гибкой и наряду с параметрами, оцениваемыми в других методиках, учитывает такие немаловажные показатели, как корреляция между контрактами с разными месяцами погашения и экстремальные изменения цен. Система используется более чем 50 биржами и клиринговыми организациями, а также более чем 1500 крупных финансовых институтов по всему миру [3]. Однако недостатком системы SPAN является используемое при расчетах предположение о высокой ликвидности рынка, то есть возможности ликвидировать портфель без существенных потерь. В условиях же низкой ликвидности рынка ликвидационная стоимость портфеля может отличаться от формально определенной рыночной стоимости. Пренебрежение данным обстоятельством может привести к дефициту маржи на низколиквидном рынке. Существуют разработки, совместимые с системой SPAN и позволяющие справляться с подобными проблемами за счет эффективно управления «ликвидируемым» портфелем [8].

В 2005 году Чикагская торговая биржа и ММВБ подписали соглашение, в соответствии с которым ММВБ разрешалось использовать методологию SPAN. В 2007 году ММВБ признавала систему SPAN наиболее прогрессивной, называя ее «негласным стандартом». Предполагалось, что введение системы будет частью целого комплекса мер по развитию срочного рынка ММВБ, наряду с расширением линейки инструментов, введением маркетинговых периодов с пониженными ставками комиссионных сборов и других мер. В итоге весной 2009 года осуществлен запуск специальной программы MICEX Margin Calc FO, аналогичной своему прототипу PC-SPAN – программе, разработанной Чикагской биржей. Она так же позволяет рассчитывать залоговые требования на основе специальных архивов с параметрами риска. Но MICEX Margin Calc FO не является полной копией оригинальной программы, в ней присутствуют некоторые отличия. Например, существует возможность не только просмотра, но и изменения данных параметров риска с целью сценарного анализа и прогнозирования величин залоговых требований, что позволяет более эффективно управлять обеспечением. Также была разработана программа для удаленного рабочего места участника торгов – MICEX Trade FO. Предполагается, что введение новой, более эффективной системы управления рисками позволит снизить размер маржи по изолированным позициям до 30%, по спредовым – в 5 раз.

Кроме того, ММВБ заявляет, что «значительно снизились совокупные требования к обеспечению под открытые позиции участников срочного рынка Группы ММВБ: с 16 до 11 млрд рублей». Таким образом, внедрение системы SPAN должно оказать положительное влияние на торговую активность на ММВБ и уже привело к значительным позитивным сдвигам [7].

С другой стороны, из-за большей гибкости система SPAN имеет менее прозрачный алгоритм расчета залогового требования.

Расчеты в SPAN базируются на фиксированном predetermined наборе входных данных (параметров), предоставляемых биржей или клиринговой организацией [2]. Система позволяет оценить возможные потери стоимости портфеля производных инструментов и установить на этой основе выраженные в деньгах залоговые требования для портфеля, покрывающие данные потери. Данная денежная сумма взимается с участника торгов в целях недопущения накопления им убытков.

В соответствии со стандартной биржевой методикой расчет риска производится для фиксированного портфеля производных финансовых инструментов [1]. Однако в случае частичного исполнения заявок, присутствующих в портфеле, величина залогового требования может существенно отличаться от вычисленной для фиксированного портфеля. В связи с этим возникает интерес к решению задачи расчета начального залога для портфеля с учетом активных заявок. Другими словами, в задаче расчета маржи по методике SPAN мы будем оперировать уже не постоянными величинами, а переменными, значения которых колеблются в рамках определенных диапазонов.

На развитых биржах не возникает проблем, связанных с активными заявками, благодаря гарантийным фондам, обеспечивающим дополнительную финансовую защиту клиринговой системы за счет клиринговых членов и внешних источников, а также благодаря частому в течение торгового дня предъявлению требований к обеспечению участникам торгов (margin call). На российских же торговых площадках, как правило, нет дневного клиринга, и гарантийные фонды формируются в основном за счет самой биржи. На ММВБ проблема активных заявок на данный момент решена путем грубого оценивания с целью упрощения расчетов. В работе предлагается аналитическое решение, базирующееся на методе линейного программи-

рования, а также инструментальное средство, самостоятельно рассчитывающее маржу для портфелей большого размера.

Принципы системы SPAN

В данной работе рассматриваются портфели из таких производных финансовых инструментов, как фьючерсы и опционы. Фьючерс – срочный контракт на бирже, обязывающий продавца фьючерса поставить, а покупателя – приобрести определенное количество базисного актива через определенное время по определенной цене. Опционов, в свою очередь, существует множество, но нас интересует только то, что опционы различают по виду сделки: типа call – на покупку и типа put – на продажу. Опцион call дает право (но не обязанность) его обладателю на покупку базисного актива (которым может являться фьючерс). Опцион put дает право на продажу базисного актива. Более подробную информацию о фьючерсах и опционах, а также других производных финансовых инструментах можно найти в [5].

В стандартных моделях ценообразования опционов можно выделить три фактора, оказывающих наиболее существенное влияние на цену опциона:

- цена базисного актива;
- волатильность цены базисного актива;
- время до исполнения.

В SPAN моделируются сценарии изменения цен базисных активов и волатильностей в течение одного торгового дня и оцениваются потери стоимости портфеля фьючерсов и опционов на этих сценариях.

После закрытия каждого торгового дня на CME генерируются специальные *файлы рисковых параметров* (SPAN parameter file), которые содержат *рисковые массивы* (SPAN risk arrays) по каждому фьючерсу и опциону, торгуемому на бирже [2]. Каждый рисковый массив содержит потери стоимости конкретного фьючерса или опциона на рассматриваемых сценариях изменения цены базисного актива и волатильности. Данные потери всегда выражаются в определенной базисной валюте. Файлы рисковых параметров могут быть свободно

получены конечными пользователями [3] и использованы для проведения собственных расчетов по оценке риска. Таким образом, для конечного пользователя расчет залоговых требований по системе SPAN представляет собой последовательность несложных арифметических операций, поскольку наиболее сложная часть вычислений проводится самой биржей и оформляется в виде рискованных массивов. Этим обусловлены популярность и эффективность системы SPAN.

Одним из важнейших в SPAN является понятие *комбинированного товара* (combined commodity), который представляет собой множество различных финансовых инструментов, объединенных в одну группу с целью расчета риска. Комбинированные товары удовлетворяют следующим правилам:

- каждый фьючерс или опцион принадлежит одному и только одному комбинированному товару;
- каждый комбинированный товар может включать любое число фьючерсов и опционов;
- оценка риска производится на уровне комбинированных товаров, а не на уровне индивидуальных контрактов.

Каждый производный финансовый инструмент на бирже имеет свой собственный рискованный массив. Все рискованные массивы на СМЕ пересчитываются несколько раз в течение торгового дня. Элементы любого рискованного массива выражаются в базисной валюте, заданной на уровне комбинированного товара, к которому относится соответствующий индивидуальный контракт.

Каждый элемент рискованного массива представляет собой оценку потерь стоимости заданного контракта при реализации одного из predetermined *рисковых сценариев* (risk scenarios). Любой рискованный сценарий является конкретным вариантом изменения цены базисного актива и волатильности в течение одного торгового дня. Данные изменения специфицируются в терминах *допустимых диапазонов цен базисных активов и волатильностей* (future price and volatility scan ranges), которые устанавливаются и периодически пересчитываются биржей. Всего в SPAN используется 16 рискованных сценариев (табл. 1).

По отношению к элементам рискованных массивов используется соглашение о том, что положительные значения в массиве представляют потери для одной длинной позиции по контракту, а отрицательные значения – прибыль по одной длинной позиции. Термины «длинная позиция» (long position) и «короткая позиция» (short position) в

Таблица 1

Номер сценария	Изменение цены базисного актива (в долях допустимого диапазона)	Изменение волатильности (в долях допустимого диапазона)	Процент покрытия убытков
1	0	+1	100
2	0	-1	100
3	+1/3	+1	100
4	+1/3	-1	100
5	-1/3	+1	100
6	-1/3	-1	100
7	+2/3	+1	100
8	+2/3	-1	100
9	-2/3	+1	100
10	-2/3	-1	100
11	+1	+1	100
12	+1	-1	100
13	-1	+1	100
14	-1	-1	100
15	+2	0	35
16	-2	0	35

SPAN относятся к контрактам, а не к рынку. Контракт считается длинным, если объем покупки этого контракта превышает объем продажи (а не в том случае, если контракт приносит прибыль на растущем рынке). Аналогично контракт считается коротким, если объем его продажи превышает объем покупки. Таким образом, купленный опцион Put – это длинная позиция, а проданный опцион Put – это короткая позиция. Будем говорить, что длинные и короткие позиции имеют противоположные направления (являются противоположно направленными).

Рисковые массивы, вычисленные для каждого контракта в отдельности, позволяют рассчитать потери или прибыль по каждому рискованному сценарию для всего комбинированного товара в целом. Наибольшее из полученных 16 чисел называется *сканируемым риском* (scanning risk) для комбинированного товара.

Помимо рискованных массивов файлы рискованных параметров содержат также значения *композитной дельты* (composite deltas) для каждого контракта. Параметр дельта определяет чувствительность цены производного инструмента к изменению цены базисного актива. Композитная дельта представляет собой среднее взвешенное по массиву значений дельта, каждое из которых соответствует своему рисковому сценарию. В качестве весов используются вероятности сценариев. Таким образом, композитная дельта, по сути, является оценкой параметра дельта для контракта на один торговый день вперед.

В системе SPAN используется допущение, что изменение цены фьючерса вне зависимости от даты его погашения всегда равно изменению цены базисного актива. Поэтому дельта любого длинного фьючерса в SPAN равна 1 (за исключением тех фьючерсов, по которым закончились торги – для них дельта равна 0). Дельта опциона Call меняется в пределах от 0 до 1, дельта опциона Put меняется в пределах от –1 до 0. Поскольку на практике отсутствует абсолютная корреляция между ценами фьючерсов с различными датами погашения, то противоположно направленные позиции по производным контрактам разных сроков погашения не полностью компенсируют друг друга по прибылям и убыткам. Поэтому в SPAN к величине сканируемого риска добавляется *взнос за спрэды внутри комбинированного товара* (intra-commodity spread charge), который предназначен для покрытия дополнительных рисков портфеля, связанных с наличием в нем фьючерсов и опционов с различными датами погашения. Для расчета этого взноса используются *суммарные композитные дельты* (net deltas) для каждого *месяца погашения фьючерсов* (futures contract-month) и таблица возможных спрэдов внутри комбинированного товара. Итоговый взнос за спрэды внутри комбинированного товара вычисляется как сумма взносов за каждый отдельный спред.

Система SPAN учитывает, что по некоторым фьючерсным и/или опционным контрактам могут возникать дополнительные риски, связанные с приближением даты поставки. Для покрытия этих рисков в SPAN вводится дополнительный *взнос за поставку* (delivery-month charge). Данный взнос рассчитывается с использованием части суммарной композитной дельты, участвующей в спрэдах, и оставшейся ее части, которая в спрэдах не участвует.

Между ценами родственных базисных активов существует довольно хорошая положительная корреляция. Поэтому потери по одному

комбинированному товару могут компенсироваться выигрышами по другому связанному с ним комбинированному товару. Для того чтобы учесть компенсацию рисков между близкими комбинированными товарами в SPAN вводятся *кредиты за спрэды между комбинированными товарами* (inter-commodity spread credits). Файлы рискованных параметров содержат таблицу всех возможных спрэдов, каждый из которых имеет свой приоритет. Для портфеля в общем случае можно сформировать несколько спрэдов. В системе SPAN старшие приоритеты назначаются тем спрэдам, которые дают наибольшие значения кредитов, компенсирующих риски. В расчетах кредитов за спрэды используются значения суммарных композитных дельта для комбинированных товаров, участвующих в этих спрэдах.

С находящимися в портфеле короткими опционами, являющимися «глубоко-не-в-деньгах» (deep-out-of-money), то есть имеющими нулевую или почти нулевую рыночную стоимость, ассоциированы дополнительные риски, обусловленные тем, что при существенном движении рынка данные контракты могут стать опционами «в-деньгах» (in-the-money). Для покрытия этих рисков в SPAN вводится *взнос за короткие опционы* (short option minimum charge). Данный взнос устанавливает минимальный уровень залоговых требований для комбинированного товара, то есть залог не может быть меньше этого уровня.

Рыночный риск в SPAN оценивается на уровне комбинированных товаров. По каждому комбинированному товару, представленному в портфеле, оценка риска определяет биржевые залоговые требования к открытым позициям по этому товару. Общая формула SPAN для расчета *поддерживающего залога* (maintenance margin) по i -му комбинированному товару выглядит следующим образом:

$$m_i = \max(s_i + t_i + d_i - c_i; 0) + l_i,$$

где m_i – поддерживающая маржа по i -му комбинированному товару;

s_i – сканируемый риск для i -го комбинированного товара;

t_i – взнос за спрэды внутри i -го комбинированного товара;

d_i – взнос за поставку для i -го комбинированного товара;

c_i – кредиты за спрэды между i -м комбинированным товаром и другими товарами;

o_i — взнос за короткие опционы для i -го комбинированного товара;

l_i — ликвидационная стоимость опционов для i -го комбинированного товара.

Для обычных биржевых игроков (speculators) в SPAN предъявляются более строгие требования по залого — так называемый *начальный залог* (initial margin), который получается из поддерживающего залога путем умножения рискованных требований на специальный *повышающий коэффициент* (risk maintenance performance bond adjustment factor):

$$r_i = \alpha \max(s_i + t_i + d_i - c_i; o_i) + l_i,$$

где r_i — начальный залог по i -му комбинированному товару, α — повышающий коэффициент.

Залоговые требования по всему портфелю рассчитываются как сумма требований по всем комбинированным товарам, представленным в портфеле:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i,$$

$$r = \sum_{i=1}^n r_i,$$

где m — поддерживающий залог по всему портфелю;

r — начальный залог по всему портфелю;

n — число разных комбинированных товаров в портфеле.

Постановка задачи

Предположение о фиксированности портфеля является одним из ключевых в методике SPAN. В связи с этим расчет риска, связанного с активными заявками в портфеле, может быть произведен с помощью системы SPAN лишь в предположении, что все активные заявки исполнятся в полном объеме. Однако на практике существует возможность частичного исполнения заявок, в случае которого риск по портфелю может существенно отличаться от величины маржи, вычисленной системой SPAN. В данной работе предлагается ал-

горитм расчета залоговых требований, базирующийся на методике SPAN, с учетом этой возможности.

Предположим, что рассматриваемый портфель представлен одним комбинированным товаром, так как опциональные стратегии строятся, как правило, на один базисный актив. Поэтому мы можем не учитывать при расчете начальной маржи кредиты за спреды между комбинированными товарами и рассматривать новую функцию:

$$\hat{r} = \alpha \max(s + t + d; o) + l \geq r.$$

Обозначим $\bar{x} = [x_1 \dots x_n]^T$ — множество заявок на покупку и/или продажу фьючерсов и опционов и коротких и длинных позиций по ним, относящихся к одному комбинированному товару, причем:

$$0 \leq x_j \leq n_j \quad \forall j \in B \text{ — множество заявок на покупку (Buy);}$$

$$-n_j \leq x_j \leq 0 \quad \forall j \in S \text{ — множество заявок на продажу (Sell);}$$

$-n_j < x_j < -n_j \quad \forall j \in P^s$ — множество всех коротких позиций в портфеле;

$$n_j < x_j < n_j \quad \forall j \in P^l \text{ — множество всех длинных позиций в портфеле,}$$

где n_j — объем заявки/позиции, $n_j > 0 \quad \forall j$.

Первые два ограничения отражают возможность частичного исполнения заявок, последние два — фиксированные позиции в портфеле.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти начальную маржу \hat{r} , покрывающую возможные потери по портфелю при наличии в нем активных заявок, то есть при любой комбинации x_j :

$$\alpha \max\{s(\bar{x}) + t(\bar{x}) + d(\bar{x}); o(\bar{x})\} + l(\bar{x}) \rightarrow \max_{x_j}.$$

Сведение к задаче линейного программирования

Разбиение области допустимых значений

Согласно методике SPAN слагаемые $o(\bar{x})$ и $l(\bar{x})$ функции \hat{r} линейно зависят от \bar{x} . Поэтому функция для вычисления начальной маржи является кусочно линейной.

В связи с этим область допустимых значений функции \hat{r} можно разбить на подобласти, в которых она линейна, и на каждой из них решить задачу линейного программирования:

$$\hat{r}_1 = \alpha o + l \rightarrow \max_{x_j}$$

$$\hat{r}_2 = \alpha s + \alpha t + \alpha d + l \rightarrow \max_{x_j}$$

Тогда $\hat{r} = \max(\hat{r}_1, \hat{r}_2)$ – итоговая величина маржи.

Решение первой задачи

Решим первую задачу.

Первая функция состоит из двух слагаемых – вноса за короткие опционы и ликвидационной стоимости опционов. Ликвидационная стоимость, по сути, является суммой, которую необходимо затратить на закрытие всех позиций по опционам в портфеле, и потому для коротких опционов она положительна, для длинных – отрицательна. Следовательно, формулу для ликвидационной стоимости можно записать следующим образом:

$$l = - \sum_{j \in J^o \cup K^o} p_j x_j,$$

где J^o – множество всех позиций по опционам в портфеле, а K^o – соответствующие заявки на эти опционы, относящиеся к заданному комбинированному товару, p_j – расчетная цена (settlement price) опциона, определяемая биржей и публикуемая в файлах рискованных параметров [3].

Взнос за короткие опционы покрывает риск, связанный с тем, что короткие опционы, находящиеся «глубоко-не-в-деньгах», могут быстро нелинейно менять свою стоимость при существенном движении рынка. Так что существует вероятность, что с течением времени данные короткие опционы станут «в-деньгах», и потому, так как позиция короткая, инвестор может понести значительные убытки. Таким образом, данный риск влияет на величину поддерживающего залога. Если дополнительно учитывать активные заявки в портфеле, то во взнос за короткие опционы необходимо также включить риск по коротким заявкам и по опционам, сумма объема позиции и заявки на

которые отрицательна. Формула для вноса за короткие опционы выглядит следующим образом:

$$o = -\eta \sum_{j \in J^o, k \in K^o} \xi_j \min(0; x_j + x_k),$$

где J^o – множество всех позиций по опционам в портфеле, а K^o – соответствующие заявки на эти опционы, относящиеся к заданному комбинированному товару, при этом возможен случай, когда $|J^o| \neq |K^o|$, η – ставка за короткие опционы, ξ_j – масштабный множитель.

Тогда задача оптимизации выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} -\alpha \eta \sum_{j \in J^o, k \in K^o} \xi_j \min(0; x_j + x_k) - \sum_{j \in J^o \cup K^o} p_j x_j \rightarrow \max_{x_j} \\ 0 \leq x_j \leq n_j \quad \forall j \in B^o, \\ -n_j \leq x_j \leq 0 \quad \forall j \in S^o, \\ -n_j < x_j < -n_j \quad \forall j \in J^s, \\ n_j < x_j < n_j \quad \forall j \in J^l, \end{cases}$$

где S^o – множество заявок на продажу опциона, B^o – множество заявок на покупку опциона, J^s – множество всех коротких позиций по опционам в портфеле, J^l – множество всех длинных позиций по опционам в портфеле, J^o – множество всех позиций по опционам в портфеле, а K^o – соответствующие заявки на эти опционы, относящиеся к заданному комбинированному товару.

Очевидно, функция $\alpha o + l$ монотонно убывает с ростом объема заявок. Поэтому \hat{r}_1 достигает своего максимального значения при минимальном объеме заявок x_j , в случае коротких заявок $x_{j_{max}} = -n_j$, в случае длинных $-x_{j_{max}} = 0$. Таким образом, получено решение первой задачи.

Решение второй задачи

Решение второй задачи вызывает трудности, связанные с методикой расчета SPAN. Рассмотрим поочередно составные части целевой функции.

Сканируемый риск

Сканируемый риск является основной составляющей поддерживающего залога. Для каждого комбинированного товара он представляет собой максимальную потерю суммарной стоимости всех позиций в портфеле, относящихся к данному комбинированному товару, вычисленную по всем рисковым сценариям SPAN. Сканируемый риск можно вычислить следующим образом: $s = \max(\max_{k=1, \dots, 16} q_k; 0)$, где

$$\begin{cases} q_1 &= \rho_{1,1}x_1 + \dots + \rho_{1,n}x_n, \\ \vdots & \\ q_{16} &= \rho_{16,1}x_1 + \dots + \rho_{16,n}x_n, \end{cases}$$

ρ_{ij} – значения рискового массива. Так как сканируемый риск зависит от $x_j, j = 1, \dots, n$ значения которых колеблются в рамках заданного диапазона, то необходимо рассмотреть 16 вариантов: $q_{k^*} \geq q_k, s = q_{k^*}, k \in \{1, \dots, 16\} \setminus \{k^*\}$ и в качестве 17-го варианта – условие: $s = 0$, если $q_k \leq 0, k = \{1, \dots, 16\}$.

Взнос за спрэды внутри комбинированного товара

Упорядочим все контракты в портфеле по срокам до погашения. Предположим, что в комбинированный товар входят производные финансовые инструменты f разных сроков погашения. Тогда с каждой заявкой x_j связана композитная дельта δ_{ij} , где j – номер заявки, i – номер месяца погашения фьючерса. Пусть в заданном комбинированном товаре к каждому месяцу погашения фьючерса относятся сам фьючерс и все опционы на него. Как уже упоминалось выше, композитная дельта определяет чувствительность цены производного финансового инструмента к изменению цены базисного актива. Поэтому $\delta_{ij} = 1$ для фьючерса (предполагается, то стоимость фьючерса изменяется точно на столько, на сколько изменилась стоимость базисного актива), $0 < \delta_{ij} < 1$ для опциона Call, $-1 < \delta_{ij} < 0$ для опциона Put, где $i = 1, \dots, f$.

Расчет вноса за спрэды внутри комбинированного товара всегда начинается с вычисления суммарной композитной дельты для каж-

дого месяца погашения фьючерсов, входящих в данный комбинированный товар:

$$\Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^f)^T,$$

$$\Delta^i = \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^i \xi_j^i x_j^i,$$

где Δ – массив суммарных композитных дельт по всем месяцам погашения фьючерсов, входящих в комбинированный товар (всего f разных месяцев),

Δ^i – суммарная композитная дельта для i -го месяца погашения фьючерсов, $i \in \{1, \dots, f\}$,

δ_j^i – композитная дельта для j -го производного инструмента, относящегося к сроку погашения фьючерса $i \in \{1, \dots, f\}$ (фьючерс со сроком погашения i и опционы, для которых этот фьючерс является базисным активом), индекс $j = 1, \dots, m_i$,

m_i – число разных производных контрактов (фьючерсов и опционов), относящихся к месяцу i ,

ξ_j^i – масштабированный множитель (delta scaling factor) для j -го производного инструмента, относящегося к сроку погашения i (тоже содержится в файле рисковых параметров).

Таким образом, для каждого месяца погашения рассчитывается суммарная дельта: Δ^i . Видно, что знак суммарной дельты зависит от знака x_j и δ_j^i . Так как в портфеле присутствуют активные заявки и нам не известно, какие из них исполняются и в каком объеме, то мы не можем с уверенностью указать знак x_j , а следовательно и знак Δ_j^i . Однако все месяцы погашения необходимо распределить по специальным рядам (tiers) (каждый из которых состоит из нескольких последовательных месяцев погашения фьючерсов), определяемым биржей. Внутри каждого ряда необходимо вычислить соответствующие суммарные положительные и отрицательные дельты, а для этого нужно отдельно найти суммы всех $\Delta_j^i \geq 0$ и $\Delta_j^i \leq 0$ соответственно. В связи с этим мы вынуждены рассмотреть все возможные комбинации знаков Δ^i , при этом будем считать, что все суммарные дельты знакопеременные. В общем случае знак некоторых Δ^i можно определить однозначно с самого начала (например, если на месяц i поданы только заявки на продажу фьючерса – $\Delta^i \leq 0$). Получим 2^f вариантов (так как всего f , и каждая из них может принимать либо положительный, либо отрицательный знак).

Пусть имеем τ рядов месяцев погашения (tiers): T_1, \dots, T_τ . Обозначим T_i^+ – множество номеров месяцев из T_i , для которых полагаем $\Delta^j \geq 0, j \in T_i^+, T_i^-$ – множество номеров месяцев из T_i , для которых полагаем $\Delta^j \leq 0, j \in T_i^-$. Тогда имеем Δ_i^+ и Δ_i^- ($\Delta_i^+ = \sum_{j \in T_i^+} \Delta^j$ и $\Delta_i^- = \sum_{j \in T_i^-} \Delta^j$).

Данные величины, полученные для всех рядов, необходимы для выполнения расчета взноса за спрэды внутри комбинированного товара. В общем случае внутри одного комбинированного товара может формироваться несколько спрэдов. Таблицы всех возможных спрэдов для всех комбинированных товаров содержатся в файле рисковых параметров.

Каждый спрэд имеет свой собственный уникальный порядковый номер $k \in \{1, \dots, s\}$, где s – общее число спрэдов для комбинированного товара. Для спрэда задается специальная *ставка* (charge rate per spread formed), пропорционально которой начисляется взнос за данный спрэд. Все спрэды состоят как минимум из двух *ветвей* (spread legs) (в работе сделано допущение, что ветвей во всех спрэдах не больше двух, так как на практике спрэды с большим количеством ветвей встречаются крайне редко), каждая из которых связана с определенным рядом месяцев погашения фьючерсов. Для ветвей спрэдов задаются два дополнительных параметра: *отношение дельты к спрэду* (delta/spread ratio) и *сторона рынка* (market-side indicator), которые также используются для расчета взносов за спрэды. Итоговый взнос за спрэды для комбинированного товара будет равен сумме взносов по всем возможным спрэдам. Более подробно с методикой расчета взноса за спрэды можно ознакомиться в [1]. В целом вычисление данного параметра SPAN представляет собой выполнение ряда последовательных шагов, причем в строгом порядке: от меньшего номера спрэда к большему. На каждом этапе данной процедуры можно получить ограничения на суммарные композитные дельты, что впоследствии позволило вывести общий вид ограничений на параметры задачи. В соответствии с этим задача расчета залоговых требований, помимо вышеперечисленных ограничений на позиции, активные заявки и сканируемый риск, дополняется необходимыми ограничениями на суммарные композитные дельты.

Так как из методики расчета сканируемого риска было получено 17 вариантов ограничений, а при вычислении взноса за спрэды возникает 2^f комплектов ограничений, то в целом вторая задача разбивается на $16 \cdot 2^f$ подзадач. Пример одной из них в общем виде выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(q_{k^*} + \sum_{j \in N^s} \xi_j(\Delta_j^A + \Delta_j^B)) - \sum_{j \in P^o \cup K^o} p_j x_j \rightarrow \max_{x_j} \\ q_{k^*} \geq q_k, k = 1, \dots, 16, k \neq k^*, \\ q_1 = \rho_{1,1} x_1 + \dots + \rho_{1,n} x_n, \\ \vdots \\ q_{16} = \rho_{16,1} x_1 + \dots + \rho_{16,n} x_n, \\ \Delta_i^+ - \sum_n \Delta_n^A \varphi_n(k) - \sum_m \Delta_m^B \varphi_m(l) \geq \Delta_j^A \varphi_j(p), A - \text{длинная}, B - \text{короткая}, \\ -\Delta_i^- - \sum_n \Delta_n^A \varphi_n(k) - \sum_m \Delta_m^B \varphi_m(l) \geq \Delta_j^A \varphi_j(p), A - \text{длинная}, B - \text{короткая}, \\ \Delta_i^+ - \sum_n \Delta_n^A \varphi_n(k) - \sum_m \Delta_m^B \varphi_m(l) \geq \Delta_j^B \varphi_j(p), B - \text{длинная}, A - \text{короткая}, \\ -\Delta_i^- - \sum_n \Delta_n^A \varphi_n(k) - \sum_m \Delta_m^B \varphi_m(l) \geq \Delta_j^B \varphi_j(p), B - \text{длинная}, A - \text{короткая}, \\ \Delta_i^+ = \sum_{j \in T_i^+} \Delta^j, \\ \Delta_i^- = \sum_{j \in T_i^-} \Delta^j, \\ \Delta^i = \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^i \xi_j^i x_j^i, \\ \Delta^i \geq 0 \forall i \in I^+, \\ \Delta^i \leq 0 \forall i \in I^-, \\ 0 \leq x_j \leq n_j \forall j \in B, \\ -n_j \leq x_j \leq 0 \forall j \in S, \\ -n_j < x_j < -n_j \forall j \in P^s, \\ n_j < x_j < n_j \forall j \in P^l, \end{array} \right.$$

где J^o – множество всех позиций по опционам в портфеле, а K^o – соответствующие заявки на эти опционы, относящиеся к заданному комбинированному товару, B – множество заявок на покупку, S – множество заявок на продажу, P^s – множество всех коротких позиций в портфеле, P^l – множество всех длинных позиций в портфеле, I^+ – множество номеров месяцев i , для которых полагаем $\Delta^i \geq 0$, I^- – множество номеров месяцев i , для которых полагаем $\Delta^i \leq 0$, N^s – множество номеров спрэдов в таблице.

Первая строка – целевая функция, следующие семнадцать – ограничения на сканируемый риск, уравнения 19–27 – ограничения на композитные дельты, последние четыре неравенства – ограничения на позиции и активные заявки.

Взнос за поставку

Взнос за поставку стоит оговорить отдельно, так как это скорее специфический, нежели обычный случай. Взнос за поставку применяется только для поставочных контрактов, то есть только для таких контрактов, по которым предполагается реальная поставка базисного актива при наступлении даты исполнения контракта. Для расчетных контрактов, по которым в момент их исполнения производятся расчеты в деньгах, взнос за поставку просто полагается равным 0. В ходе расчетов также фигурируют композитные дельты, в связи с этим возникают дополнительные ограничения, которые могут быть включены в основную задачу.

Инструментарий

В связи с большим количеством ограничений, а также подзадач, решить полученную задачу для портфелей большого размера за разумное время аналитически не представляется возможным. Для автоматизации решения, самостоятельно рассчитывающего величину обеспечения для портфеля фьючерсов и опционов с учетом пакета активных заявок, было написано инструментальное средство в среде MatLab, которое затем было протестировано на реальных данных с биржи CME. Написанное компьютерное приложение обрабатывает файл рискованных параметров, публикуемый в Интернете Чикагской товарной биржей, и создает все необходимые массивы и структуры для

работы программы. С помощью данной программы можно провести расчет маржи для заданного портфеля с учетом заданного пакета активных заявок. Приложение было протестировано на реальных данных с Чикагской товарной биржи, и результаты, полученные в случае фиксированного портфеля, соответствуют величине маржи, рассчитанной системой SPAN.

Заключение

В работе была решена задача численной оптимизации обеспечения для портфеля производных финансовых инструментов с учетом пакета активных заявок. Были изучены составные части системы SPAN, алгоритм расчета обеспечения для портфелей фьючерсов и опционов системы SPAN был представлен в виде кусочно линейной функции, зависящей от набора активных заявок и фиксированного портфеля. Была сформулирована задача оптимизации, позволяющая оценить размер обеспечения для портфеля фьючерсов и опционов, которого будет достаточно при любом варианте исполнения активных заявок. Данная задача была сведена к совокупности задач линейного программирования. Было написано инструментальное средство, позволяющее решать задачу за реальное время. Результат может быть использован как клиринговой организацией, так и брокерами, которые должны требовать обеспечение не ниже того, которое задает биржа, поэтому брокеру надежнее использовать полученное инструментальное средство, так как в таком случае он точно выполнит требования биржи.

Длительность работы написанного приложения, осуществляющего расчет маржи, составляет около минуты. За это время ситуация на рынке может существенно измениться, поэтому представляется необходимым усовершенствовать алгоритм и использовать параллельные вычисления для осуществления расчетов. Исследования в этом направлении производятся в данный момент.

Авторы благодарят научного сотрудника лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту Лапшина Виктора за предоставление реальных данных по сделкам, осуществляемым на Чикагской товарной бирже и консультацию по особенностям проведения параллельных вычислений.

Литература

- [1] Долматов А.С. Математические методы риск-менеджмента. М.: Экзамен, 2007.
- [2] CME SPAN Risk Parameter File Layouts.
- [3] <http://www.cme.com>.
- [4] Голембиовский Д.Ю., Долматов А.С. Модель оптимизации производных финансовых инструментов с учетом залоговых ограничений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 3. С. 75–85.
- [5] Hull J.C. Options, Futures and Other Derivatives. Fifth ed. Prentice Hall.
- [6] Bylund M. A Comparison of Margin Calculation Methods for Exchange Traded Contracts. February 2002.
- [7] <http://www.micex.ru>.
- [8] Способ электронной биржевой торговли производными финансовыми инструментами, способы определения уровня депозитной маржи, способы урегулирования ситуации с дефицитом маржи: пат. 2226714 Рос. Федерация: МПК7 G 06 Q 30/00 / Смирнов С.Н., Захаров А.В., Полиматиди И.В., Балабушкин А.Н. ; заявитель и патентообладатель Смирнов Сергей Николаевич – № 2002116491/09 ; заявл. 20.06.2002 ; опубл. 10.04.2004, Бюл. № 10.

*Препринт WP16/2010/02
Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука*

Долматов А. С., Котенко О. А., Лукина А. Ю., Смирнов С. Н.

Расчет гарантийного обеспечения для портфеля активных заявок

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии Государственного университета –
Высшей школы экономики с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 1,4
Усл. печ. л. 1,4. Заказ № . Изд. № 1180.

Государственный университет – Высшая школа экономики
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Государственного университета – Высшей школы экономики
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73

Для заметок
