

PACS 02.30.Yy

© 2009 г. М.Г. ЗОТОВ, д-р техн. наук
(Московский институт электроники и математики)

О НЕГРУБОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ОБЪЕКТОВ И СПОСОБАХ ЕЕ УСТРАНЕНИЯ

В практике конструирования систем управления встречаются случаи, когда некоторые из корней передаточной функции объекта управления располагаются на мнимой оси комплексного переменного. Построенный для таких объектов оптимальный регулятор, несмотря на его реализуемость, не будет обеспечивать в системе свойства грубости. Приводятся способы устранения этого явления. Дана сравнительная оценка решения этой задачи как в пространстве состояний, так и в соотношениях вход – выход (в пространстве операторов).

1. Введение

Многочисленные работы, посвященные конструированию систем управления из условия минимума квадратичной оценки, образуют два направления. Первое для описания объектов использует пространство операторов, второе – пространство состояний. С появлением двух направлений встала задача их сравнительной оценки.

Несмотря на то, что использование пространства состояний позволило решить нестационарные задачи, которые безрезультатно пытались решить в пространстве операторов, при проектировании стационарных систем выявились некоторые преимущества конструирования регуляторов в пространстве операторов [1–6]. Заметим, что сконструированный в результате решения нестационарной задачи регулятор также является нестационарным и, как следствие, имеет высокую себестоимость, сложен в эксплуатации. В подавляющем числе реальных нестационарных задач без большой потери качества используются робастные регуляторы.

В настоящей статье будут выявлены трудности конструирования в пространстве состояний регулятора для объекта с полюсами и нулями, расположенными в левой полуплоскости и на мнимой оси. Если часть нулей и полюсов находятся также и в правой полуплоскости, в функционал вводятся соответствующие ограничения [7]. Этот вопрос в статье не затрагивается.

В [8] было показано что, если при проектировании оптимальных систем в функционале не предусмотреть ограничения на реализуемость регулятора [9, 10], то такая система может оказаться негрубой за счет обращения в нуль коэффициентов при старших производных в уравнении замкнутой системы. Другой случай негрубости системы возникает вследствие компенсации оптимальным регулятором лежащих на мнимой оси полюсов передаточной функции объекта управления. Сказанное будет ниже продемонстрировано примерами и приведены способы устранения этого недостатка.

2. Постановка задачи

Провести сравнительную оценку двух упомянутых выше подходов к конструированию оптимальных регуляторов, обеспечивающих свойство грубости системы для класса объектов с нулями и полюсами, расположенными на мнимой оси плоскости комплексного переменного.

2.1. Постановка задачи в пространстве состояний и пространстве операторов

Для сравнительной оценки сформулируем постановку одной и той же задачи, как в пространстве состояний, так и в пространстве операторов.

Сформулируем постановку и алгоритм решения задачи в пространстве состояний [11, 12].

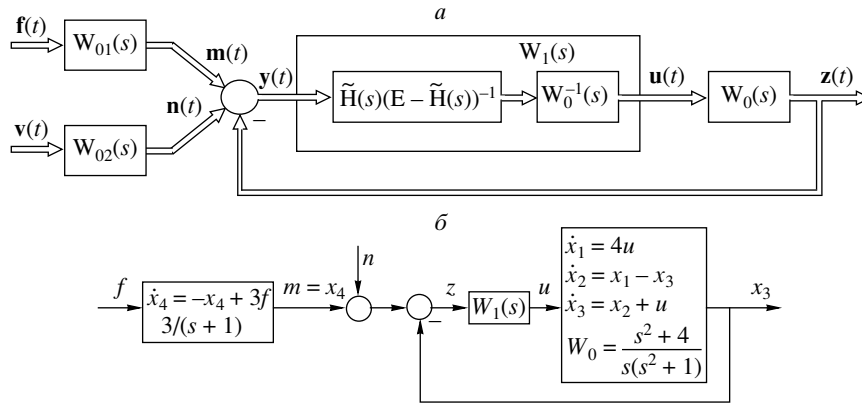


Рис. 1.

Объект с расширением (помимо системы дифференциальных уравнений адекватной передаточной функции объекта управления $\mathbf{W}_0(s)$ в нее входят системы, описывающие согласно рис. 1,а формирующие фильтры $\mathbf{W}_{01}(s)$ и $\mathbf{W}_{02}(s)$) записывается в виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{f},$$

доступно только измерение вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta},$$

$\boldsymbol{\theta}$ – вектор из линейной комбинации случайных стационарных процессов типа белого шума \mathbf{f} и \mathbf{v} (рис. 1,а) таких, что

$$(1) \quad \begin{aligned} M(\mathbf{f}(t)\mathbf{f}^T(t+\tau)) &= \overline{\mathbf{F}}\delta(\tau), \\ M(\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t+\tau)) &= \overline{\mathbf{V}}\delta(\tau), \\ M(\mathbf{f}(t)\mathbf{v}^T(t+\tau)) &= \overline{\boldsymbol{\Psi}}\delta(\tau), \end{aligned}$$

пары матриц $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ (\mathbf{A}, \mathbf{B}) и (\mathbf{A}, \mathbf{G}) невырождены, а матрица интенсивностей $\overline{\mathbf{V}}$ положительно определенная. Тогда закон управления

$$(2) \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

доставляет минимум показателю

$$(3) \quad I = \lim_{T \rightarrow \infty} M \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_1 \mathbf{u}(t)) dt.$$

Матрица коэффициентов усиления в обратной связи \mathbf{K} находится из соотношения

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{R}_1^T),$$

где \mathbf{K} – положительно определенное решение уравнения

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_1^T) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_1^T)^T \mathbf{P} + (\mathbf{Q} - \mathbf{R}_1\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_1^T) - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0,$$

а матрица \mathbf{L} коэффициентов в устройстве оценивания – по соотношению

$$\mathbf{L} = (\mathbf{D}\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\bar{\mathbf{V}}) \bar{\mathbf{N}}^{-1},$$

где \mathbf{D} – положительно определенное решение уравнения

$$(4) \quad \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\bar{\mathbf{F}}\mathbf{G}^T - (\mathbf{D}\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\bar{\mathbf{V}}) \bar{\mathbf{N}}^{-1} (\mathbf{D}\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\bar{\mathbf{V}})^T = 0,$$

Условие управляемости пары (\mathbf{A}, \mathbf{B}) не по состояниям, а по выходам имеет вид [13]:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} = \text{rank}(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Изложим постановку и алгоритм решения в пространстве операторов задачи, сформулированной выше в пространстве состояний.

На рис. 1,а приведена классическая схема многомерной системы управления. На нем $\mathbf{W}_0(s)$ – квадратная матрица передаточных функций объекта управления; $\mathbf{W}_{01}(s)$ – матрица передаточных функций фильтра, формирующего вектор случайного задающего воздействия $\mathbf{m}(t)$ из случайного стационарного процесса $\mathbf{f}(t)$ вида белого шума; $\mathbf{W}_{02}(s)$ – матрица передаточных функций фильтра, формирующего из случайного стационарного процесса $\mathbf{v}(t)$ вида белого шума вектор помехи $\mathbf{n}(t)$, наложенной на управляющее воздействие $\mathbf{m}(t)$; $\mathbf{W}_1(s)$ – передаточная функция регулятора; $\mathbf{u}(t)$ – управление; $\mathbf{z}(t)$ – выход; $\mathbf{y}(t)$ – наблюдаемый вход в регулятор.

Классический подход к решению этой задачи заключается в отыскании передаточной функции $\tilde{\mathbf{H}}(s)$, обеспечивающей минимум ошибки воспроизведения на выходе системы задающего воздействия $\mathbf{m}(t)$. $\tilde{\mathbf{H}}(s)$ – матрица передаточных функций системы относительно задающего воздействия и выхода $\mathbf{z}(t)$. По найденной матрице $\tilde{\mathbf{H}}(s)$ и известной $\mathbf{W}_0(s)$ определяется искомая матрица $\mathbf{W}_1(s)$. Передаточная функция регулятора имеет вид:

$$(5) \quad \mathbf{W}_1(s) = \mathbf{W}_0^{-1}(s) \tilde{\mathbf{H}}(s) (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s))^{-1} = \mathbf{W}_0^{-1}(s) (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s))^{-1} \tilde{\mathbf{H}}(s).$$

В функционале может фигурировать мощность сигнала управления $\mathbf{u}(t)$, что не обязательно. Существуют такие задачи, в которых введение ограничения на управление лишено практического смысла, так как ограничение уже имеется и без введения или оно не предусмотрено постановкой задачи.

В пространстве состояний передаточной функции (5) соответствует система уравнений (2).

Из рис. 1,а видно, что регулятор компенсирует объект управления, что согласно [7] приводит к появлению в системе неуправляемой и ненаблюдаемой части и замкнутая система потеряет устойчивость, если все полюсы $\mathbf{W}_0^{-1}(s)\mathbf{W}_0(s)$ не будут находиться в левой полуплоскости. В рассматриваемом же случае некоторые из них находятся на мнимой оси.

2.2. Предварительный анализ

Потеря устойчивости не произойдет, если на искомую передаточную функцию $\mathbf{W}_1(s)$ наложить ограничения: матрицы передаточных функций $\mathbf{W}_1(s)$ и $\mathbf{W}_1^{-1}(s)$ не имеют полюсов на мнимой оси. Такое имеет место, если полюсов на мнимой оси не имеют входящие в состав $\mathbf{W}_1(s)$ матрицы передаточных функций $\mathbf{W}_0^{-1}(s)\tilde{\mathbf{H}}(s)$, $(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s))\mathbf{W}_0(s)$.

Таким образом, сформулированная выше задача по поиску регулятора, обеспечивающего минимум ошибки воспроизведения задающего воздействия должна решаться при условии, что матрицы передаточных функций $\mathbf{W}_0^{-1}(s)\tilde{\mathbf{H}}(s)$, $(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s))\mathbf{W}_0(s)$ полюсов на мнимой оси не имеют.

На основе схемы на рис. 1,а и полученных в Приложении матриц передаточных функций системы составим функционал, оценивающий ошибку воспроизведения задающего воздействия $\mathbf{m}(t)$ и мощность сигнала управления:

$$(6) \quad I = Sp \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left(\tilde{\mathbf{H}}(s)\tilde{\mathbf{H}}(-s)\mathbf{S}_{\varphi\varphi}(s) - \left(\tilde{\mathbf{H}}(s) + \tilde{\mathbf{H}}(-s) \right) \mathbf{S}_{mm}(s) + \mathbf{S}_{mm}(s) \right) ds + \\ + Sp \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(\mathbf{W}_0^{-1}(s)\tilde{\mathbf{H}}(s) \right) \right|^2 \mathbf{S}_{\varphi\varphi}(s) ds;$$

здесь $\varphi(t) = \mathbf{m}(t) + \mathbf{n}(t)$, $\mathbf{S}_{aa}(s)$ – спектральная матрица векторного сигнала $\mathbf{a}(t)$.

Предполагается, что сигналы некоррелированы. Диагональные матрицы весовых коэффициентов, желаемый оператор воспроизведения задающего воздействия опущены. Первый интеграл в (6) оценивает качество слежения, второй – мощность сигнала управления.

Рассмотрим функционал (6). Обратим внимание на вторую составляющую. Она конечна, если подынтегральная функция $\mathbf{W}_0^{-1}(s)\tilde{\mathbf{H}}(s)$ не имеет полюсов на мнимой оси. Таким образом, одно из ограничений, а именно: регулятор не компенсирует правых нулей объекта управления, выполняется как при решении задачи в пространстве состояний, так и в пространстве операторов.

Сказанное продемонстрируем примером.

Пример 1. Передаточная функция объекта управления задана:

$$W_0(s) = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 1)}.$$

Задающее воздействие $m(t)$ случайное с нулевым математическим ожиданием. Имеет спектральную плотность

$$S_{mm}(s) = \frac{9}{1 - s^2}.$$

На задающее воздействие наложен белый шум $n(t)$ единичной интенсивности. Структурная схема такой системы приведена на рис. 1,б. Оптимальная система должна воспроизводить задающее воздействие $x_4(t) = m(t)$. Управление $u(t)$ ограничено.

Проведем решение этой задачи в пространстве состояний.

Объект с расширением описывается системой уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}f,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} f,$$

$f(t)$ – белый шум единичной интенсивности.

Наблюдается координата

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + n,$$

$n(t)$ – белый шум единичной интенсивности.

Согласно исходным данным и соотношениям (1)

$$\bar{\mathbf{F}} = 1, \quad \bar{\mathbf{V}} = 1, \quad \bar{\Psi} = 0.$$

$$\text{rank}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T) = 4, \quad \text{rank}(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1, \quad \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{G}) = 1.$$

Как видно, оговоренное в постановке задачи ограничение $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{G}) = 4$ не выполняется. Доведем решение до конца.

Критерий качества согласно (3) имеет вид:

$$(7) \quad I = \lim_{T \rightarrow \infty} M \frac{1}{T} \int_0^T \left(\left((x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) + u^2 \right) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} M \frac{1}{T} \int_0^T \left((x_4 - x_3)^2 + u^2 \right) dt.$$

Для решаемой задачи закон управления, определяемый соотношением (2), переписывается так:

$$(8) \quad u = - (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4) \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \\ \dot{\hat{x}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} (y - (\hat{x}_4 - \hat{x}_3)).$$

Значения параметров \mathbf{K} найдены с использованием стандартной процедуры *lqr* [14]

$$\mathbf{K} = (0,4953 \quad 0,8633 \quad 0,5057 \quad -0,4514).$$

Однако попытка определить параметры \mathbf{L} с использованием процедуры *lqe* к успеху не привели. Процедура *lqe* выдала сообщение:

Error using \Rightarrow lqe

(A-G*N/R*C,G*(Q-N/R*N')*G') or (C,A) has non minimal modes near jw axis.

Параметры \mathbf{L} пришлось искать из системы матричных уравнений (4).

Решение весьма трудоемко, так как необходимо было решить систему из десяти нелинейных уравнений. Конечный результат:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{10} - 1 \end{pmatrix}^T.$$

Решение (8), переведенное в пространство операторов, имеет вид:

$$W_1(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{0,9760s(s^2 + 1)}{s^4 + 5,6492s^3 + 10,4781s^2 + 15,3663s + 8,7575}.$$

Из него видно: регулятор компенсирует в передаточной функции объекта управления лежащие на мнимой оси полюсы, что приводит к их наличию в характеристическом полиноме замкнутой системы и, как следствие, к негрубости системы; в то же время не компенсирует его нули, что обусловлено второй составляющей функционала (6), а в функционале (3) конечностью мощности сигнала управления.

3. Решение задачи

3.1. Введение в функционал дополнительной составляющей

Попытаемся избавиться от негрубости системы вводом в функционал с малым весом составляющей $(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s)) \mathbf{W}_0(s)$. Для рассматриваемого примера это могут быть добавки вида

$$(9) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| (1 - \tilde{H}(s)) W_0(s) \right|^2 ds, \\ & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| (1 - \tilde{H}(s)) \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right|^2 ds, \\ & 1 - \tilde{H}(s) = \frac{N(s) - M(s)}{N(s)}. \end{aligned}$$

Решение проведем в пространстве операторов.

Пример 2. Скорректированный функционал (6) для рассматриваемого примера будет иметь вид:

$$(10) \quad I_1 = I + \varepsilon \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| (1 - \tilde{H}(s)) \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right|^2 ds.$$

Если $\mathbf{W}_0(s) = \mathbf{P}_0^{-1}(s)\mathbf{Q}_0(s)$, то в выражении $(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s))\mathbf{P}_0^{-1}(s)\mathbf{Q}_0(s)$ матрица $\mathbf{Q}_0(s)$ может быть отброшена. Это только упростит решение задачи, что и сделано в (10).

Уравнение Винера-Хопфа, если $\varepsilon = 0,5$, запишется так:

$$\begin{aligned} & \left(\left(1 + \left(\frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 1)} \right)^{-1} \left(\frac{(-s)^2 + 4}{(-s)((-s)^2 + 1)} \right)^{-1} \right) \left(\frac{9}{1 - s^2} + 1 \right) + \right. \\ & + 0,5 \left(\frac{1}{s(s^2 + 1)} \frac{1}{(-s)((-s)^2 + 1)} \right) \tilde{H}(s) - \\ & \left. - \left(\frac{9}{1 - s^2} + 0,5 \left(\frac{1}{s(s^2 + 1)} \frac{1}{(-s)((-s)^2 + 1)} \right) \right) \right) = \Gamma(s). \end{aligned}$$

Его решение имеет вид $\tilde{H}(s) = M(s)/N(s)$, где

$$\begin{aligned} M(s) &= 2,0952(s^2 + 4)(s^3 + 0,6285s^2 + 0,62169s + 0,3375), \\ N(s) &= s^7 + 6,1412s^6 + 15,3572s^5 + 27,5693s^4 + 34,3863s^3 + 26,0856s^2 + \\ &+ 17,6511s + 2,8284. \end{aligned}$$

Характерной особенностью полученного значения $\tilde{H}(s)$ является наличие в числителе полинома $s^2 + 4$ и наличие в разности $N(s) - M(s)$ полинома $s(s^2 + 1)$. Эти полиномы в передаточной функции регулятора, определяемого формулой

$$W_1(s) = \frac{P_0(s)}{P_0(s)} \frac{M(s)}{N(s) - M(s)},$$

компенсируют лежащие на мнимой оси нули и полюсы модели объекта, входящей в состав $W_1(s)$, и их необходимо сократить. Наличие этих полиномов в соотношениях $M(s)$ и $N(s) - M(s)$ может служить индикатором правильности полученного решения.

Передаточная функция регулятора будет иметь вид:

$$W_1(s) = \frac{2,0952s^3 + 1,3168s^2 + 1,3026s + 0,7071}{s^4 + 6,1412s^3 + 12,2621s^2 + 20,1113s + 12,4409}.$$

Корни характеристического полинома:

$$\begin{aligned} & -0,3676 - 1,4679j; -0,3676 + 1,4679j; -0,1446 - 1,0220j; -0,1446 + 1,0220j; \\ & -1,7445; -3,1622; -0,2101 \end{aligned}$$

обеспечивают достаточную степень устойчивости в системе.

Попытка решения этого примера в пространстве состояний из-за наличия в функционале (10) добавок вида (9) успехом не увенчалась. Пришлось констатировать, что поставленная задача не может быть сформулирована в рамках методики решения задач в пространстве состояний. Трансформируем добавки (9) с учетом специфики функционала качества, принятого при решении задач в пространстве состояний:

$$(11) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(1 - \tilde{H}(s) \right) W_0(s) \right|^2 S_{\varphi\varphi}(s) ds, \\ & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(1 - \tilde{H}(s) \right) \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right|^2 S_{\varphi\varphi}(s) ds, \quad \varphi(t) = m(t) + n(t). \end{aligned}$$

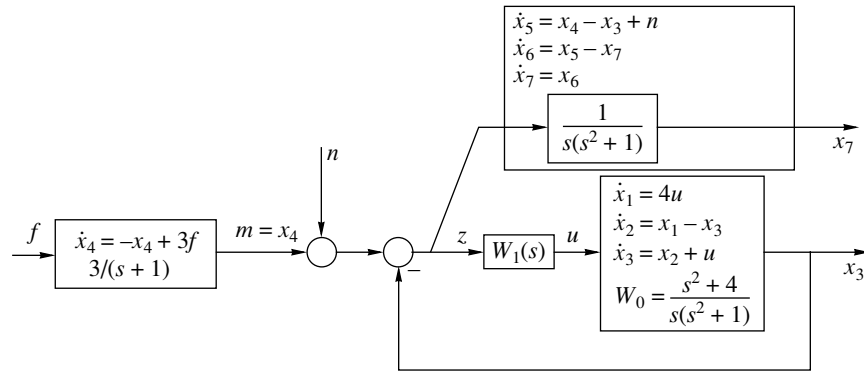


Рис. 2.

Пример 3. На рис. 2 приведена схема, соответствующая критерию

$$(12) \quad I_1 = I + \varepsilon \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(1 - \tilde{H}(s)\right) \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right|^2 S_{\varphi\varphi}(s) ds.$$

На ней

$$\int_0^{\infty} x_7^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(1 - \tilde{H}(s)\right) \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right|^2 S_{\varphi\varphi}(s) ds.$$

Таким образом, критерий оптимизации, записанный в пространстве состояний, имеет вид:

$$I_1 = \int_0^{\infty} (x_4 - x_3)^2 dt + \int_0^{\infty} u^2 dt + 0,5 \int_0^{\infty} x_7^2 dt,$$

что соответствует критерию (12), если $\varepsilon = 0,5$.

Исходные данные для отыскания параметров \mathbf{K} и \mathbf{L} в математической модели регулятора (2) имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y} = (0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{x} + n, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}} = 1, \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим выполнимость ограничений:

$$\text{rank}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T) = 4, \quad \text{rank}(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1, \quad \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{G}) = 4.$$

Из приведенных величин видно, что получить приемлемое решение не удастся, но доведем его до конца.

При отыскании коэффициентов \mathbf{K} с использованием процедуры *lqr* проблем не возникло:

$$\mathbf{K} = (0,4398 \quad 1,4758 \quad 1,8021 \quad -1,2533 \quad -1,4138 \quad 0,0241 \quad 0,7067).$$

Однако попытка определения параметра \mathbf{L} с использованием стандартной процедуры *lqe* к успеху не привела. Процедура *lqe* выдала сообщение, приведенное в примере 1. Решение при размерности 7 уравнений Риккати приводит к системе нелинейных уравнений 28-го порядка. Попытка ее решения способом, использованным в примере 1, окончилась неудачей. Пришлось искать стационарное решение матричного дифференциального уравнения Риккати. Был получен следующий результат:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,1602 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = (\mathbf{D}\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\bar{\mathbf{V}}) \bar{\mathbf{N}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2,1602 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Параметры \mathbf{K} и \mathbf{L} подставим в (2). Найденную математическую модель регулятора представим в виде передаточной функции:

$$W_1(s) = \frac{4,1212s^6 + 4,4438s^5 + 7,4595s^4 + 6,6784s^3 + 3,3383s^2 + 2,2346s}{s^7 + 4,5613s^6 + 23,7660s^5 + 33,6774s^4 + 34,3094s^3 + 27,3646s^2 + 11,6996s + 2,8284}.$$

В числитель $W_1(s)$ входит полином $s(s^2 + 1)$. Сконструированный регулятор компенсирует лежащие на мнимой оси полюсы объекта управления. Таким образом, система свойством грубости не обладает.

Однако при решении этой задачи с тем же функционалом качества, но в пространстве операторов был получен ожидаемый результат: система приобрела свойство грубости

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s) &= \frac{M(s)}{N(s)} = \\ &= \frac{4,1238s^5 + 4,4467s^4 + 19,8361s^3 + 20,0228s^2 + 13,3632s + 8,9443}{s^7 + 6,7235s^6 + 19,1026s^5 + 37,3002s^4 + 51,3323s^3 + 46,1529s^2 + 30,8805s + 8,9443}, \end{aligned}$$

так как $M(s)$ в своем составе содержит полином $s^2 + 4$, а $N(s) - M(s)$ – полином $s(s^2 + 1)$.

$$W_1(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} \frac{M(s)}{N(s) - M(s)} = \frac{4,1238s^3 + 4,4467s^2 + 3,3408s + 2,2361}{s^4 + 6,7235s^3 + 13,9788s^2 + 26,1301s + 17,5173},$$

корни характеристического полинома

$$\begin{aligned} &-0,3567 - 1,4632j; \quad -0,3567 + 1,4632j; \quad -0,2799 - 1,1071j; \\ &-0,2799 + 1,1071j; \quad -1,7375; \quad -0,5504; \quad -3,1623 \end{aligned}$$

обеспечивают достаточную степень устойчивости в системе.

Из приведенного примера следует. Введение в функционал добавок вида (11) приводит к решению задачи в пространстве операторов. Они не противоречат и постановке задачи в пространстве состояний, но входят в противоречие с возможностями алгоритма ее решения.

3.2. Введение дополнительного фиктивного воздействия

Введение дополнительного фиктивного воздействия приводит к появлению в функционале добавок вида $(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s)) \mathbf{W}_0(s)$. Таким фиктивным воздействием может быть $\mathbf{f}_1(t)$ на схеме рис. 3. Для простоты его можно задать белым шумом единичной интенсивности.

С учетом этого воздействия функционал (6) с использованием соотношений из Приложения переписывается так:

$$\begin{aligned}
 (13) \quad I = & Sp \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left(\tilde{\mathbf{H}}(s) \tilde{\mathbf{H}}(-s) \mathbf{S}_{\varphi\varphi}(s) - \left(\tilde{\mathbf{H}}(s) + \tilde{\mathbf{H}}(-s) \right) \mathbf{S}_{mm}(s) + \mathbf{S}_{mm}(s) \right) ds + \\
 & + Sp \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(\mathbf{W}_0^{-1}(s) \tilde{\mathbf{H}}(s) \right) \right|^2 \mathbf{S}_{\varphi\varphi}(s) ds + \\
 & + Sp \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s) \right) \mathbf{W}_0(s) \right|^2 S_{f_1 f_1}(s) ds + \\
 & + Sp \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \mathbf{W}_0^{-1} \tilde{\mathbf{H}}(s) \mathbf{W}_0(s) \right|^2 S_{f_1 f_1}(s) ds.
 \end{aligned}$$

Функционал записан с использованием соотношений из Приложения без учета диагональной матрицы весовых коэффициентов и желаемого оператора воспроизведения задающего воздействия.

Заметим, если задачу решать в пространстве операторов, то последнюю составляющую в функционале (13) можно было бы опустить и получить решение, удовлетворяющее условию грубости. При решении же задачи в пространстве состояний она вводится автоматически и избавиться от нее невозможно. Последнее обстоятельство может исказить постановку задачи.

Из сказанного и материалов раздела 3.1 следует вывод: не все функционалы, полно отражающие существо поставленной задачи, могут быть использованы при решении задачи в пространстве состояний.

Сказанное проиллюстрируем примером.

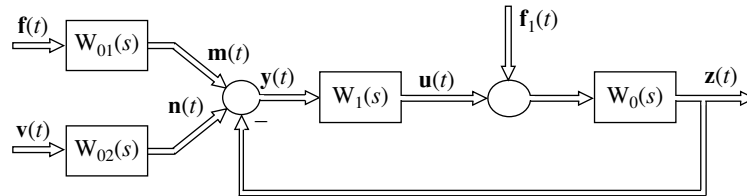


Рис. 3.

Пример 4. Для исходных данных примера 1 сконструировать регулятор, обеспечивающий системе свойство грубости.

Требование на грубость системы при условии, что передаточная функция объекта имеет полюсы на мнимой оси, вынуждает вводить в систему фиктивное воздействие f_1 . Составляющую, порожденную воздействием f_1 , в функционал введем с весом $\varepsilon = 0,5$, тогда объект с расширением будет описываться системой уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}f,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{0,5} \\ 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{0,5} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f_1 \end{pmatrix},$$

$f(t), f_1(t)$ – белые шумы единичной интенсивности.

Наблюдается координата

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + n,$$

$n(t)$ – белый шум единичной интенсивности.

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}} = 1, \quad \bar{\Psi} = 0.$$

Рассмотрим ограничения

$$\text{rank}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T) = 4, \quad \text{rank}(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1, \quad \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{G}) = 4.$$

Из их выполнимости следует возможность получения приемлемого решения, т.е. решения, обладающего свойством грубости.

Критерий качества совпадает с критерием (7). Закон управления имеет вид (8).

Значения параметров \mathbf{K} совпадают с найденными в примере 1. Параметры вектора \mathbf{L} найдены с использованием стандартной процедуры *lqe*:

$$\mathbf{L} = (-2,8284 \quad -2,1086 \quad -2,5967 \quad 0,8655).$$

Таким образом, математическая модель регулятора с точностью до параметров l_i совпадает с найденной моделью в примере 1, т.е. с (8). Переведем ее в пространство операторов:

$$W_1(s) = \frac{4,9251s^3 + 5,8008s^2 + 4,4883s + 2,8312}{s^4 + 6,9491s^3 + 14,4671s^2 + 28,2640s + 19,4378}.$$

Корни характеристического полинома

$$\begin{aligned} & -0,3711 - 1,4688j; \quad -0,3711 + 1,4688j; \quad -0,2986 - 1,1712j; \\ & -0,2986 + 1,1712j; \quad -0,5914; \quad -1,7447; \quad -3,2735 \end{aligned}$$

обеспечивают достаточную степень устойчивости в системе.

В отличие от задачи 1 в решаемой пара матриц \mathbf{A} и \mathbf{G} невырожденная, что и дало возможность решить поставленную задачу.

Приведем решение этой задачи в пространстве операторов.
Найденная из минимума критерия

$$\begin{aligned}
(14) \quad I_1 = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left\{ \left| \tilde{H}(s) \right|^2 (S_{mm}(s) + S_{nn}(s)) - (\tilde{H}(s) - \tilde{H}(-s)) S_{mm}(s) + S_{mm}(s) \right\} ds + \\
& + 0,5 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| (1 - \tilde{H}(s)) W_0(s) \right|^2 S_{f_1 f_1}(s) ds + \\
& + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \tilde{H}(s) W_0^{-1}(s) \right|^2 (S_{mm}(s) + S_{nn}(s)) ds + \\
& + 0,5 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \tilde{H}(s) \right|^2 S_{f_1 f_1}(s) ds, \quad S_{f_1 f_1}(s) = 1
\end{aligned}$$

передаточная функция $\tilde{H}(s)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(s) &= \frac{M(s)}{N(s)} = \\
&= \frac{4,9225s^5 + 5,7961s^4 + 24,1735s^3 + 26,0129s^2 + 17,9336s + 11,3137}{s^7 + 6,9480s^6 + 20,3877s^5 + 41,0040s^4 + 58,0688s^3 + 54,2727s^2 + 37,3638s + 11,3137},
\end{aligned}$$

полином $M(s)$ содержит в своем составе $s^2 + 4$, а $N(s) - M(s)$ – полином $s(s^2 + 1)$.
Далее следует передаточная функция регулятора:

$$\begin{aligned}
W_1(s) &= \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} \frac{M(s)}{N(s) - M(s)} = \\
&= \frac{4,9225s^3 + 5,7961s^2 + 4,4834s + 2,8284}{s^4 + 6,9480s^3 + 14,4651s^2 + 28,2598s + 19,4302},
\end{aligned}$$

достаточно точно совпадающая с полученной ранее.

В критерии (14) каждая из входящих в него составляющих несет соответствующую нагрузку:

- первая составляющая оценивает дисперсию ошибки воспроизведения задающего воздействия $m(t)$;
- вторая обеспечивает ограничение на компенсацию регулятором лежащих на мнимой оси полюсов передаточной функции объекта управления;
- третья ограничивает мощность сигнала управления, а также обеспечивает ограничение на компенсацию регулятором правых нулей полюсов передаточной функции объекта управления;
- последняя составляющая, порожденная фиктивным воздействием $f_1(t)$, никакой полезной нагрузки не несет и может быть из функционала изъята. Такое изъятие никаких осложнений при решении задачи в пространстве операторов не вызовет, что нельзя сказать при решении задачи в пространстве состояний. Это продемонстрировано примерами 2 и 3.

4. Заключение

1. Рассмотрен класс объектов, полюсы передаточных функций которых находятся на мнимой оси. Показано, что для таких объектов оптимальный регулятор может не обеспечить грубость системы управления.

2. Введение в функционал дополнительных составляющих вида (9) и (11) обеспечивает грубость в системе, но решение можно получить лишь в пространстве операторов. Использование при решении стандартных процедур lqr и lqe , а также других подходов к результату не приводит.

3. Введение в систему дополнительного фиктивного воздействия $\mathbf{f}_1(t)$ позволяет найти решение как в пространстве состояний, так и в пространстве операторов, но в функционале появляется составляющая, не несущая никакой полезной нагрузки, способствующей решению задачи. Если ее опустить, то это приведет к практической невозможности решения такой задачи в пространстве состояний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем вывод значений всех передаточных функций систем, представленных на рис. 1, а и 3.

Относительно входа $\varphi(t)$ и выхода $\mathbf{z}(t)$

$$(П.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{Z}(s) &= \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s)(\Phi(s) - \mathbf{Z}(s)), \\ (\mathbf{E} + \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s))\mathbf{Z}(s) &= \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s)\Phi(s), \\ \tilde{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{Z}(s)\Phi^{-1}(s) &= (\mathbf{E} + \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s))^{-1}\mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s) = \\ &= \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s)(\mathbf{E} + \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s))^{-1}. \end{aligned}$$

Относительно входа $\mathbf{f}_1(t)$ и выхода $\mathbf{z}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(s) &= \mathbf{W}_0(s)(\mathbf{F}_1(s) - \mathbf{W}_1(s)\mathbf{Z}(s)), \\ (\mathbf{E} + \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s))\mathbf{Z}(s) &= \mathbf{W}_0(s)\mathbf{F}_1(s), \\ \mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{F}_1^{-1}(s) &= (\mathbf{E} + \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s))^{-1}\mathbf{W}_0(s). \end{aligned}$$

Относительно входа $\varphi(t)$ и выхода $\mathbf{u}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(s) &= \mathbf{W}_1(s)(\Phi(s) - \mathbf{W}_0(s)\mathbf{U}(s)), \\ (\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s))\mathbf{U}(s) &= \mathbf{W}_1(s)\Phi(s), \\ \bar{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{U}(s)\Phi^{-1}(s) &= (\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s))^{-1}\mathbf{W}_1(s). \end{aligned}$$

Относительно входа $\mathbf{f}_1(t)$ и выхода $\mathbf{u}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(s) &= -\mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s)(\mathbf{F}_1(s) + \mathbf{U}(s)), \\ (\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s))\mathbf{U}(s) &= -\mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s)\mathbf{F}_1(s), \\ \tilde{\mathbf{H}}^*(s) = \mathbf{U}(s)\mathbf{F}_1^{-1}(s) &= -(\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s))^{-1}\mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s). \end{aligned}$$

Из соотношения (П.1) найдем передаточную функцию регулятора:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} + \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s))\tilde{\mathbf{H}}(s) &= \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s), \\ \tilde{\mathbf{H}}(s) &= \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s)(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s)), \\ \mathbf{W}_1(s) &= \mathbf{W}_0^{-1}(s)\tilde{\mathbf{H}}(s)(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s))^{-1} = \mathbf{W}_0^{-1}(s)(\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s))^{-1}\tilde{\mathbf{H}}(s). \end{aligned}$$

Выразим $\mathbf{H}(s)$, $\bar{\mathbf{H}}(s)$, $\tilde{\mathbf{H}}^*(s)$ через функцию $\tilde{\mathbf{H}}(s)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(s) &= (\mathbf{E} + \mathbf{W}_0(s)\mathbf{W}_1(s))^{-1} \mathbf{W}_0(s) = \tilde{\mathbf{H}}(s)\mathbf{W}_0^{-1}(s) = \\ &= \tilde{\mathbf{H}}(s)\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(s) (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s)) \mathbf{W}_0(s) = (\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s)) \mathbf{W}_0(s); \\ \bar{\mathbf{H}}(s) &= (\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s))^{-1} \mathbf{W}_1(s) = (\mathbf{W}_1^{-1}(s) + \mathbf{W}_0(s))^{-1} = \\ &= \left((\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s)) \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(s)\mathbf{W}_0(s) + \mathbf{W}_0(s) \right)^{-1} = \\ &= \mathbf{W}_0^{-1}(s) \left((\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s)) \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(s) + \mathbf{E} \right)^{-1} = \mathbf{W}_0^{-1}(s)\tilde{\mathbf{H}}(s); \\ \tilde{\mathbf{H}}^*(s) &= -(\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s))^{-1} \mathbf{W}_1(s)\mathbf{W}_0(s) = \\ &= -(\mathbf{W}_1^{-1}(s) + \mathbf{W}_0(s))^{-1} \mathbf{W}_0(s) = \\ &= -\left((\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{H}}(s)) \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(s)\mathbf{W}_0(s) + \mathbf{W}_0(s) \right)^{-1} \mathbf{W}_0(s) = \\ &= -\left(\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(s)\mathbf{W}_0(s) - \mathbf{W}_0(s) + \mathbf{W}_0(s) \right)^{-1} \mathbf{W}_0(s) = \\ &= -\mathbf{W}_0^{-1}(s)\tilde{\mathbf{H}}(s)\mathbf{W}_0(s).\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horowitz I.M., Shaked U.* Superiority of transfer function over state variable methods // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. № 2. P. 84–97.
2. *Youla D.C., Jabr H.F., Bongiorno J.J.* Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part 11: The multivariable case // IEEE Trans. Automat. Control. 1976. № 3. P. 319–338.
3. *Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Суицев В.Н.* Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления. Киев: Наук. думка, 1978.
4. *Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б.* H-оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов. Баку: Элм, 1991.
5. *Зотов М.Г.* О связи качества системы с конфигурацией структуры ее управляющего устройства // Изв. РАН ТиСУ. 2006. № 5. С. 39–42.
6. *Морозовский В.Т.* Многосвязанные системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1970.
7. *Полужтков Р.А.* Ограничения, вызванные объектом в задачах синтеза многомерных замкнутых систем // АиТ. 1966. № 3. С. 26–33.
8. *Надеждин П.В.* О практической неустойчивости (негрубости) систем, получаемых по методу статьи [1] // АиТ. 1973. № 5. С. 196–198.
9. *Кухтенко В.И.* К расчету корректирующих цепей систем автоматического управления по критерию минимума среднеквадратичной ошибки // АиТ. 1959. № 9. С. 1180–1187.
10. *Зотов М.Г.* Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2004.
11. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
12. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
13. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983.
14. *Медведев В.С., Потемкин В.Г.* Control system toolbox. М.: Диалог МИФИ, 1999.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Буковым.

Поступила в редакцию 24.05.2007