ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 51 : 621 : 891 + 06

К.С. Ахвердиев, Н.С. Задорожная, М.А. Мукутадзе, Б.М. Флек, Е.В. Поляков

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕНТРАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО ДЕМПФЕРА СО СДАВЛИВАЕМОЙ ПЛЕНКОЙ И ПОРИСТОЙ ОБОЙМОЙ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ АНИЗОТРОПИИ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТОГО СЛОЯ И ИСТОЧНИКА СМАЗКИ

Как известно, роликовые подшипники отличаются высокой несущей способностью и малым трением. В работах [1, 2] дана оценка влияния установки роликового подшипника в демпфере со сдавливаемой, соответственно, однослойной двухслойной пористой обоймой на уменьшение колебаний и влияния дисбаланса на опорную поверхность подшипника (рис. 1).

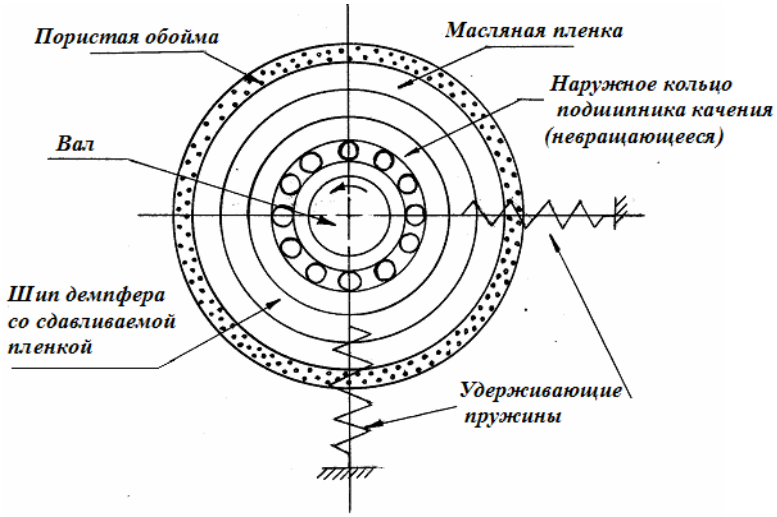

Рис. 1. Схема демпфера со сдавливаемой пленкой и пористой обоймой

Существенным недостатком предложенных в этих работах расчетных моделей является то, что проницаемости пористых слоев считаются постоянными и, кроме того, не учитывается влияние источника смазки. Ниже нами приводится решение рассматриваемой задачи с учетом анизотропии проницаемости пористого слоя, а также наличия источника смазки. Здесь последовательно рассматриваются два случая подачи смазки: когда смазка подается в направлении оси *Oy* (рис. 2), и когда смазка подается в осевом направлении (рис. 3). В этом случае пористая втулка запрессована в непроницаемый корпус.

Целью исследования является оценка влияния анизотропии проницаемости пористого слоя и способа подачи смазки на усилие, передаваемое жестким ротором. Поскольку дисбаланс ротора может вызвать резонанс опорной поверхности и возбудить колебания ротора на критических скоростях, целесообразно как можно сильнее снизить передачу воздействия дисбаланса на корпус.

Постановка задачи. На рис. 1 показана схема демпфера со сдавливаемой пленкой и пористой обоймой [3]. Исследование системы, рассматриваемой в [3], в случае зависимости вязкости от давления, основывается на допущениях, приведенных в работе [3].

Уравнения движения ротора в направлениях *r* и *t* (рис. 1) могут быть записаны, соответственно, в виде [3]

$$m\left[\frac{d^2e}{dt^2}-e\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]=F_r-\left[W-K_Y\left(Y+\delta_Y\right)\right]\sin\varphi-$$
$$-K_X\left(X+\delta_X\right)\cos\varphi+\omega^2\cos\left(\varphi-\omega t\right), \tag{1}$$

$$m\left[e\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\left(\frac{de}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\right]=F_t-\left[W-K_Y\left(Y+\delta_Y\right)\right]\cos\varphi+$$
$$+K_X\left(X+\delta_X\right)\sin\varphi-u\omega^2\sin\left(\varphi-\omega t\right). \tag{2}$$

Здесь m – масса ротора, приходящаяся на подшипник, кг; e – эксцентриситет, м; φ – угол между линиями центров и положительным направлением оси x, отсчитываемой против часовой стрелки, рад; F_t – составляющая усилия пленки, нормальная к линии центров, Н; F_r – составляющая усилия пленки вдоль линии центров, Н; W – вес ротора, приходящийся на подшипник, H; K_X, K_Y – жесткость пружин, удерживающих подшипник в направлении X и Y, соответственно, Н/м; δ_X, δ_Y – начальные смещения удерживающих пружин, соответственно, в направлениях X и Y, м; ω – угловая частота ротора, рад/с; t – время, с; C – радиальный зазор в демпфере, $\varepsilon = \dfrac{e}{C}$ – относительный эксцентриситет; u – момент дисбаланса, Н$\cdot c^2$.

Замечая, что $X = e\cos\varphi$ и $Y = e\sin\varphi$, переписываем уравнения (1) и (2), соответственно, в виде

$$m\left[\frac{d^2e}{dt^2} - e\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = F_r - \left[W + K_Y\left(e\sin\varphi - \delta_Y\right)\right]\sin\varphi - \\ -K_X\left(e\cos\varphi + \delta_X\right)\cos\varphi + u\omega^2\cos\left(\varphi - \omega t\right), \tag{3}$$

$$m\left[e\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\left(\frac{de}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = F_t - \left[W + K_Y\left(e\sin\varphi - \delta_Y\right)\right]\cos\varphi + \\ +K_X\left(e\cos\varphi + \delta_X\right)\sin\varphi - u\omega^2\sin\left(\varphi - \omega t\right). \tag{4}$$

Примем, что нагрузка W не вращается и направлена, как показано на рис. 2. Тогда условие центральной пригрузки демпфера со сдавливаемой пленкой требует $\delta_X = 0$ и $\delta_Y = \dfrac{W}{K_Y}$. Полагая $K_X = K_Y = K$, $T = \omega_r \cdot t$, можно представить уравнения (3) и (4) следующим образом:

$$\ddot{\varepsilon} - \varepsilon\dot{\varphi}^2 = \frac{F_r}{mC\omega_r^2} - \frac{K_\varepsilon}{m\omega_r^2} + \frac{u}{mC}\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\cos\left[\varphi - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)T\right], \tag{5}$$

$$\ddot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon}\dot{\varphi} = \frac{F_t}{mC\omega_r^2} - \frac{u}{mC}\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\sin\left[\varphi - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)T\right], \tag{6}$$

где точкой обозначено дифференцирование по T.

Силы F_r и F_t получаются интегрированием давления масляной пленки по площади обоймы, соответственно, в направлениях r и t. Для определения давления масляной пленки нужно решить уравнение давлений в пористой обойме и в пленке и согласовать решение вдоль общей поверхности раздела.

Рассмотрим уравнения, определяющие давления, и их решения при следующих допущениях.

1 Толщина пористого слоя считается малой по сравнению с радиусом подшипника и в конечной модели используется короткий подшипник. Уравнение, определяющее течение смазки, в пористой матрице представляется в виде [1, 2]

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{H}\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

где y, z – прямоугольные координаты (рис. 2); p^* – гидродинамическое давление в пористом слое.

2 Для определения распределения давления в пленке смазки между шипом и подшипником будем исходить из модифицированного уравнения Рейнольдса в рамках модели короткого подшипника [3–6].

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \varepsilon\mu\left(\left(\omega_b + \omega_j - 2\omega_L - 2\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{dh}{d\theta} + 2\frac{de}{dt}\cos\theta\right) - 12\mu v_0\big|_{y=0}, \tag{8}$$

где $h = C\left(1 + \varepsilon\cos\theta\right)$ – толщина пленки смазки; C – радиальный зазор; ε – относительный эксцентриситет; θ – угловая координата; p – давление в пленке смазки; μ – динамический коэффициент

вязкости, $\omega_b, \omega_j, \omega_L$ – угловые скорости, соответственно, подшипника, шипа и нагрузки; φ – угол положения, t – время, v_0 – компонента скорости в направлении y на внутренней границе пористого слоя, прилегающая к зазору:

$$v_0 = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p^*}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0}, \tag{9}$$

где k – проницаемость материала пористого слоя.

Здесь вначале рассматривается случай, когда смазка принудительно подается в направлении оси Oy, а затем в осевом направлении. Проницаемость задается в виде (10) (рис. 2).

$$k' = Ae^{\lambda\frac{y}{H}}. \tag{10}$$

Здесь A – заданная постоянная величина; H – толщина пористого слоя; λ – безразмерный параметр, характеризующий распределение проницаемости в направлении оси Oy.

Система уравнений (7)–(8) в случае подачи смазки через поры пористого слоя в направлении оси Oy решается при граничных условиях (рис. 2)

$$p^* = p \quad \text{при} \quad y = 0; \qquad -\frac{\kappa}{\mu}\frac{\partial p^*}{\partial y} = V_g \quad \text{при} \quad y = -H;$$

$$p^* = p = p_a \quad \text{при} \quad z = -\frac{L}{2}; \qquad p^* = p = p_a \quad \text{при} \quad z = \frac{L}{2}, \tag{11}$$

где V_g – скорость подачи смазки, p_a – атмосферное давление.

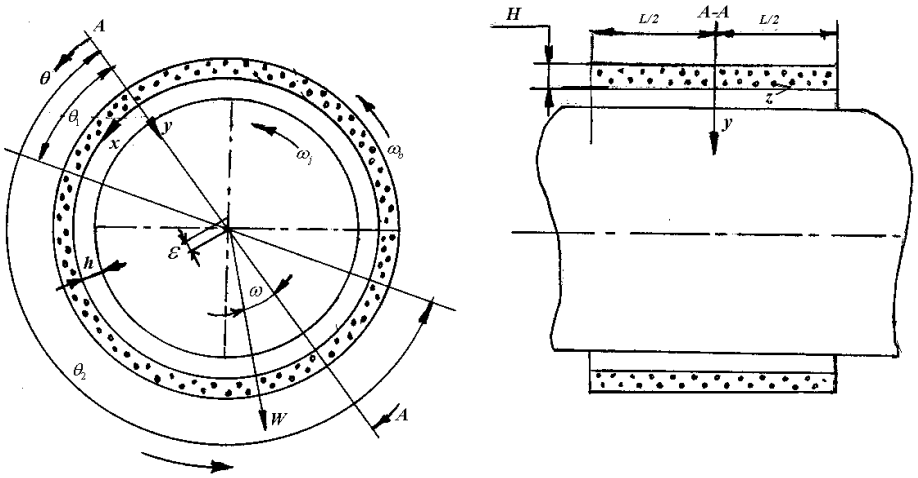

Рис. 2. Радиальный подшипник конечной длины с пористой обоймой

В случае подачи смазки в осевом направлении граничные условия запишутся в следующем виде (рис. 3, начало координат в этом случае выбрано в левом конце подшипника):

$$p^* = p \quad \text{при} \quad y = 0; \qquad \frac{\partial p^*}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = -H;$$

$$p^* = p = p_H \quad \text{при} \quad z = 0; \qquad p^* = p = p_K \quad \text{при} \quad z = L. \tag{6}$$

Здесь p_H – давление в начальном сечении; p_K – в конечном сечении.

Переход к безразмерным переменным

В дальнейшем предполагается, что $\omega_b = 0;\ \omega_L = 0$.

Перейдем к безразмерным величинам по формулам [1]:

$$P^* = \frac{p^* C^2}{\mu R_0^2 \omega_j},\ P = \frac{pC^2}{\mu R_0^2 \omega_j},\ Z = \frac{2z}{L},\ Y = \frac{y}{H};\ \varepsilon = \frac{\dot{e}}{C},\ T = \omega_j t;\ \Phi = \frac{kH}{C^3}. \tag{13}$$

Тогда уравнения (7) и (8) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial Y^2} + 4\left(\frac{H}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 P^*}{\partial Z^2} + \lambda\frac{\partial P^*}{\partial Y} = 0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 P^*}{\partial Z^2} = \frac{12(L/D)^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left[\varepsilon\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]+\frac{3\Phi}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3\left(\frac{H}{L}\right)^2}\left(\frac{\partial P^*}{\partial Y}\right)\Bigg|_{Y=0}, \qquad (15)$$

где $D = 2R$; точкой обозначено дифференцирование по *T*.

Граничные условия (11) и (12), соответственно, примут следующий вид:

$$P^* = P \text{ при } Y = 0; \frac{\partial P^*}{\partial Y} = -V_g\alpha \text{ при } Y = -1;$$

$$P^* = P = \tilde{P}_a \text{ при } Z = -1; \quad P^* = P = \tilde{P}_a \text{ при } Z = 1; \qquad (16)$$

$$P^* = P \text{ при } Y = 0; \quad \frac{\partial P^*}{\partial Y} = 0 \text{ при } Y = -1;$$

$$P^* = P = \tilde{P}_H \text{ при } Z = 0; \quad P^* = P = \tilde{P}_K \text{ при } Z = 1, \qquad (17)$$

где $\alpha = \frac{HC^2}{\mu R^2\omega_j}$, $\tilde{P}_a = \frac{p_a C^2}{\mu R^2\omega_j}$, $\tilde{P}_H = \frac{p_H C^2}{\mu R^2\omega_j}$, $\tilde{P}_K = \frac{p_K C^2}{\mu R^2\omega_j}$.

Перейдем к решению системы (7)–(8) с граничными условиями (16).

Установим закон подачи смазки в виде

$$-V_g\alpha = C(Z). \qquad (18)$$

Полагая толщину пористого слоя малой, уравнение (14) осредним по толщине смазочного слоя. Тогда уравнение (14) запишется в виде

$$\cdot\int_0^{-1}\left(\frac{\partial^2 P^*}{\partial Y^2}+4\left(\frac{H}{L}\right)^2\frac{\partial^2 P^*}{\partial Z^2}+\lambda\frac{\partial P^*}{\partial Y}\right)dY = 0\cdot \qquad (19)$$

Решение уравнения (19), удовлетворяющее граничным условиям (16), будем искать в виде

$$P^* = A_1Y^3 + A_2Y^2 + A_3Y + \tilde{P}_a + P_1(Z,0). \qquad (20)$$

Подставляя (20) в (19), приходим к следующему уравнению

$$3A_1 - 2A_2 - \lambda A_1 + \lambda A_2 - \lambda A_3 + 4\left(\frac{H}{L}\right)^2\left(\frac{A_1''}{4}-\frac{A_2''}{3}+\frac{A_3''}{2}-P_1''\right) = 0. \qquad (21)$$

Выполняя граничные условия (16), будем иметь:

$$A_3 = C(Z),\ 3A_1 - 2A_2 = 0,$$

$$\frac{2}{3}\lambda A_2 - C(Z) + 4\left(\frac{H}{L}\right)^2\left(-\frac{A_2''}{6}+\frac{C''}{2}-P_1''\right) = 0. \qquad (22)$$

Решение уравнения (15) можно найти после определения функции P_1, удовлетворяющей условию

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial Z^2} = \frac{12(L/D)^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left[\varepsilon\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]+\frac{3\Phi C_2(Z)}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3\left(\frac{H}{L}\right)^2}. \qquad (23)$$

Уравнение решается при граничных условиях

$$P_1 = 0 \text{ при } Z = \pm 1. \qquad (24)$$

Полагая $C_2(Z) = A_0\cos\frac{\pi Z}{2}$, с учетом граничных условий (24), для P_1 окончательно получим следующее выражение:

$$P_1 = \frac{12(L/D)^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left[\varepsilon\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]\left(\frac{Z^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{12A_0\cos\frac{\pi Z}{2}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3\left(\frac{H}{L}\right)^2\pi^2}. \qquad (25)$$

С учетом (25) уравнение (22) решается при граничных условиях

$$A_2 = 0 \text{ при } Z = \pm 1.$$

При определении основных рабочих характеристик явный вид функций A_1 и A_2 нам не понадобится.

Перейдем к случаю осевой подачи смазки (рис. 3).

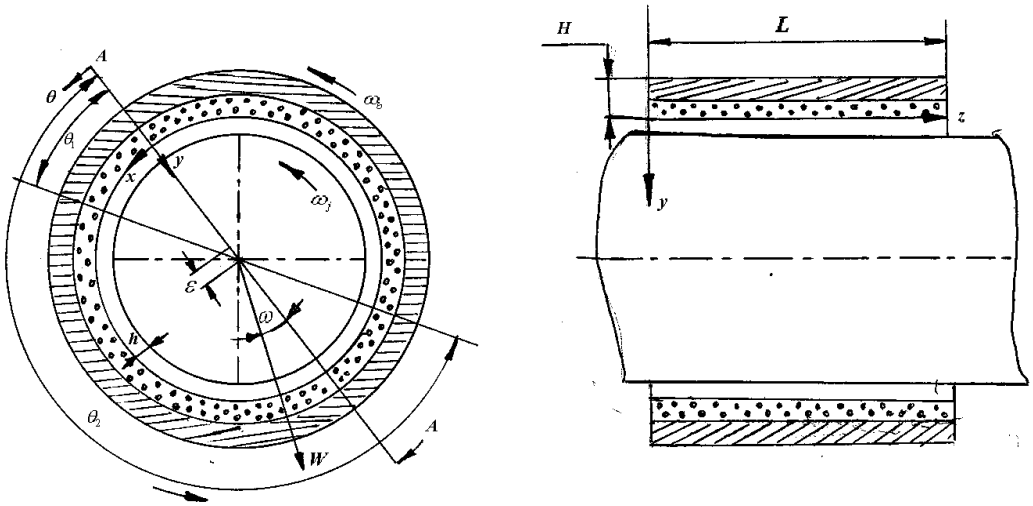

Рис. 3. Радиальный подшипник конечной длины с пористой обоймой при осевой подаче смазки

Решение уравнений (15) и (19), удовлетворяющих граничным условиям (17), будем искать в виде

$$P = aZ + b + P_1(Z,0), \qquad P^* = A_1Y^3 + A_2Y^2 + A_3Y + aZ + b + P_1. \qquad (26)$$

С учетом граничных условий (17), для определения A_3 приходим к следующему уравнению

$$\frac{\lambda+6}{12\lambda}A_3'' - P_1'' = 0. \qquad (27)$$

Функции A_1 и A_2 выражаются через функцию A_3 в виде

$$A_1 = A_3\left(1+\frac{2}{\lambda}\right), \qquad A_2 = A_3\left(2+\frac{3}{\lambda}\right). \qquad (28)$$

Константы a и b определяются выражениями

$$a = \tilde{P}_K - \tilde{P}_H, \qquad b = \tilde{P}_H. \qquad (29)$$

Решая уравнение (27) с граничными условиями $A_3 = 0$, $P_1 = 0$ при $Z = 0$, $Z = 1$, для A_3 получим следующее выражение

$$A_3 = \frac{12\lambda}{\lambda+6}P_1(Z,\theta) = \Delta_1 P_1(Z,\theta), \qquad \Delta_1 = \frac{12\lambda}{\lambda+6}. \qquad (30)$$

С учетом (30), для определения уравнения $P_1(Z,\theta)$ приходим к следующему уравнению

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial Z^2} = \frac{12(L/D)^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left[\varepsilon\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]+\frac{3\Phi\Delta_1 P_1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3\left(H/L\right)^2}. \qquad (31)$$

Решая уравнение (31) с граничными условиями $P_1 = 0$ при $Z = 0$, $Z = 1$, для P_1 окончательно получим следующее выражение:

$$P_1 = \frac{4\left(H/D\right)^2\left[\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]}{\Phi\Delta_1}\left[\frac{e^{-\sqrt{\Delta_2}Z}}{e^{\sqrt{\Delta_2}}+1}+\frac{e^{\sqrt{\Delta_2}Z}}{e^{\sqrt{\Delta_2}}+1}-1\right], \tag{32}$$

где $\Delta_2 = \dfrac{3\Phi\Delta_1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3\left(H/L\right)^2}$.

Перейдем к определению усилий масляной пленки.

При неполном заполнении смазкой зазора область положительных давлений, ограниченная углами θ_1 и θ_2, определяется из условий

$$\dot{\varepsilon}\cos\theta_1+\varepsilon\dot{\varphi}\sin\theta_1=0;$$

$$\dot{\varepsilon}\sin\theta_2-\varepsilon\dot{\varphi}\cos\theta_1>0,\quad \theta_2=\theta_1+\pi.$$

В случае подачи смазки в направлении перпендикулярной оси подшипника через поры пористого слоя с заданной скоростью, усилия масляной пленки вычисляются интегрированием по положительной области распределения давления, определяемые формулой

$$F^{(e)} = R\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}P\cos\theta d\theta dz = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\int_{-1}^{1}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}\left[\tilde{P}_a+P_1\right]\cos\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\times$$

$$\times\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}\left\{2\tilde{P}_a-\frac{8(L/D)^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left[\varepsilon\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]-\frac{48A_0}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3\left(\frac{H}{L}\right)^2\pi^3}\right\}\cos\theta d\theta; \tag{33}$$

$$F^{(\varphi)} = R\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}P\sin\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\int_{-1}^{1}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}\left[\tilde{P}_a+P_1\right]\sin\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\times$$

$$\times\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}\left\{2\tilde{P}_a-\frac{8(L/D)^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\left[\varepsilon\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]-\frac{48A_0}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3\left(\frac{H}{L}\right)^2\pi^3}\right\}\sin\theta d\theta; \tag{34}$$

В случае осевой модели смазки

$$F^{(e)} = R\int_{0}^{L}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}P\cos\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\int_{0}^{1}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}\left[(aZ+b)+P_1\right]\cos\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\times$$

$$\times\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}\left\{\frac{a}{2}+b+\frac{4H^2\left[\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]}{D^2\Phi\Delta_1}\left[\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_2}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_2}\left(e^{\sqrt{\Delta_2}}+1\right)}-1\right]\right\}\cos\theta d\theta. \tag{35}$$

$$F^{(\varphi)} = R\int_{0}^{L}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}P\sin\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\int_{0}^{1}\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}\left[(aZ+b)+P_1\right]\sin\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\times$$

$$\times\int_{\theta_1}^{\theta_1+\pi}\left\{\frac{a}{2}+b+\frac{4H^2\left[\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta+\dot{\varepsilon}\cos\theta\right]}{D^2\Phi\Delta_1}\left[\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_2}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_2}\left(e^{\sqrt{\Delta_2}}+1\right)}-1\right]\right\}\cos\theta d\theta. \tag{36}$$

В случае полного заполнения смазкой зазора и подачи смазки в направлении оси *Oy* будем иметь

$$F^{(e)} = R\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} P\cos\theta d\theta dZ = \frac{\mu R^3\omega_j}{C^2}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\left(\tilde{P}_a + P_1\right)\cos\theta d\theta dZ = \frac{\mu R^3\omega_j}{C^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left\{2\tilde{P}_a - \frac{8\left(L/D\right)^2}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3}\left[\varepsilon\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta + \dot{\varepsilon}\cos\theta\right] - \frac{48A_0}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3\left(H/L\right)^2\pi^3}\right\}\cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{8L^3\mu\omega R^3\pi\varepsilon}{C^2D^2} + \frac{288L^3\mu\omega R^3\varepsilon}{\pi^2H^2C^2}; \qquad (37)$$

$$F^{(\varphi)} = R\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_0^{2\pi} P\sin\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\left(\tilde{P}_a + P_1\right)\sin\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left\{2\tilde{P}_a - \frac{8\left(L/D\right)^2}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3}\left[\varepsilon\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta + \dot{\varepsilon}\cos\theta\right] - \frac{48A_0}{\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^3\left(H/L\right)^2\pi^3}\right\}\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{8\mu R^3\omega L^3\pi\varepsilon\left(\dot{\varphi}-1/2\right)}{C^2D^2}. \qquad (38)$$

Рассмотрим случай полного заполнения смазкой зазора и осевой подачи смазки. Используя формулу (32), будем иметь

$$F^{(e)} = R\int_0^{L}\int_0^{2\pi} P\cos\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\int_0^{1}\int_0^{2\pi}\left[(aZ+b)+P_1\right]\cos\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left\{\frac{a}{2} + b + \frac{4H^2\left[\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta + \dot{\varepsilon}\cos\theta\right]}{D^2\Phi\Delta_1}\left[\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_2}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_2}\left(e^{\sqrt{\Delta_2}}+1\right)} - 1\right]\right\}\cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{8L^3R^3\mu\omega\pi\dot{\varepsilon}}{D^2C^2\Phi\Delta_1}\left(\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_4}\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}+1\right)} - 1\right); \qquad \Delta_4 = \frac{3\Phi\Delta_1}{\left(\frac{H}{L}\right)^2} + \theta\left(\Phi\cdot\varepsilon\right). \qquad (39)$$

$$F^{(\varphi)} = R\int_0^{L}\int_0^{2\pi} P\sin\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\int_0^{1}\int_0^{2\pi}\left[(aZ+b)+P_1\right]\sin\theta d\theta dZ = \frac{2L\mu R^3\omega}{C^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left\{\frac{a}{2} + b + \frac{4H^2\left[\left(\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\right)\sin\theta + \dot{\varepsilon}\cos\theta\right]}{D^2\Phi\Delta_1}\left[\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_2}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_2}\left(e^{\sqrt{\Delta_2}}+1\right)} - 1\right]\right\}\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{8\mu R^3\omega H^3\left(\dot{\varphi}-1/2\right)}{C^2D^2\Phi\Delta_1}\left(\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_4}\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}+1\right)} - 1\right). \qquad (40)$$

Подстановка $F^{(e)}$ и $F^{(\varphi)}$, определяемых формулами (37) и (38), в уравнения (5) и (6) дает

$$\ddot{\varepsilon}-\varepsilon\dot{\varphi}^2=\frac{8L^3\mu\omega R^3\pi\dot{\varepsilon}}{mC^3\omega_r{}^2D^2}+\frac{288L^3\mu\omega R^3\varepsilon}{\pi^2mC^3H^2\omega_r^2}+\frac{u}{mC}\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\cos\left[\varphi-\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)T\right]-\frac{K\varepsilon}{m\omega_r{}^2}. \quad (41)$$

$$\varepsilon\ddot{\varphi}+2\dot{\varepsilon}\dot{\varphi}=\frac{8\mu\omega R^3L^3\pi\varepsilon\left(\dot{\varphi}-1/2\right)}{mC^3\omega_r^2D^2}-\frac{u}{mC}\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\sin\left[\varphi-\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)T\right]. \quad (42)$$

Подстановка $F^{(e)}$ и $F^{(\varphi)}$, определяемых формулами (39) и (40), в уравнения (5) и (6) дает

$$\ddot{\varepsilon}-\varepsilon\dot{\varphi}^2=\frac{8L^3\omega R^3\mu\pi\dot{\varepsilon}}{mC^3D^2\omega_r^2\Phi\Delta_1}\left(\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_4}\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}+1\right)}-1\right)+$$

$$+\frac{u}{mC}\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\cos\left[\varphi-\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)T\right]-\frac{K\varepsilon}{m\omega_r{}^2}\ ; \quad (43)$$

$$\varepsilon\ddot{\varphi}+2\dot{\varepsilon}\dot{\varphi}=\frac{8\mu R^3\omega H^3}{mC^2D^2\omega_r^2\Phi\Delta_1}\left(\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_4}\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}+1\right)}-1\right)-$$

$$-\frac{u}{mC}\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\sin\left[\varphi-\left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)T\right]. \quad (44)$$

Введем обозначения

$$B=\frac{\mu R^3L}{2m\omega_rC^3},\quad U=\frac{u}{mC},\quad \omega_s=\sqrt{K/m},$$

$$\Omega_s=\frac{\omega_s}{\omega_r},\quad \Omega=\frac{\omega_j}{\omega_r},\quad \beta=\varphi-\Omega T, \quad (45)$$

где B – параметр демпфера; U – безразмерный дисбаланс; ω_s – собственная частота ротора; Ω_s – безразмерная собственная частота; Ω – безразмерная рабочая угловая скорость.

С учетом (45) уравнения (41) и (42) примут вид

$$\ddot{\varepsilon}-\varepsilon\left(\dot{\beta}+\Omega\right)^2=4\Omega\pi\varepsilon\frac{L^2B}{D^2}+\frac{144\Omega L^2B}{\pi^2H^2}+U\Omega^2\cos\beta-\Omega_s{}^2\varepsilon\ ; \quad (46)$$

$$\varepsilon\ddot{\beta}+2\dot{\varepsilon}\left(\dot{\beta}+\Omega\right)=\frac{4\Omega\pi\varepsilon H^2\left(\dot{\beta}+\Omega-1/2\right)B}{D^2}-U\Omega^2\sin\beta\,. \quad (47)$$

Уравнения (43) и (44) преобразуются к виду

$$\ddot{\varepsilon}-\varepsilon\left(\dot{\beta}+\Omega\right)^2=\frac{4\Omega\pi\varepsilon L^2B}{D^2\Phi\Delta_1}\left(\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_4}\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}+1\right)}-1\right)+U\Omega^2\cos\beta-\Omega_s^2\varepsilon\ ; \quad (48)$$

$$\varepsilon\ddot{\beta}+2\dot{\varepsilon}\left(\dot{\beta}+\Omega\right)=\frac{4\Omega\pi H^2B\left(\dot{\beta}+\Omega-1/2\right)}{D^2\Phi\Delta_1}\left(\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_4\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}+1\right)}}-1\right)-U\Omega^2\sin\beta\,. \quad (49)$$

Уравнения (46) и (47) описывают нестационарное движение ротора при полном заполнении смазкой зазора и подаче смазки в направлении оси Oy, а уравнения (48)–(49) – при подаче смазки в осевом направлении.

Уравнения, описывающие стационарное движение ротора при неполном заполнении смазкой зазора и подаче смазки в направлении оси Oy, записываются в виде

$$-\Omega^2=\frac{4\Omega\pi\varepsilon L^2B}{D^2}+\frac{144\Omega L^2B}{\pi^2H^2}+U\Omega^2\cos\beta-\Omega_s^2\varepsilon\ ; \quad (50)$$

$$\frac{4\Omega\pi\varepsilon L^2\left(\Omega-1/2\right)B}{D^2}-U\Omega^2\sin\beta=0\,, \quad (51)$$

а в случае подачи смазки в осевом направлении

$$-\Omega^2 = \frac{4\Omega\pi\varepsilon L^2 B}{D^2\Phi\Delta_1}\left(\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_4}\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}+1\right)}-1\right)+U\Omega^2\cos\beta-\Omega_s^2\varepsilon; \tag{52}$$

$$\frac{4\Omega\pi H^2 B\left(\Omega-\frac{1}{2}\right)}{D^2\Phi\Delta_1}\left(\frac{2\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}-1\right)}{\sqrt{\Delta_4}\left(e^{\sqrt{\Delta_4}}+1\right)}-1\right)-U\Omega^2\sin\beta=0\cdot \tag{53}$$

Исследование коэффициента передачи

Коэффициент передачи определяется как отношение модуля силы, передаваемой на корпус (за вычетом пригрузки) к модулю силы дисбаланса. При жестком опирании, коэффициент передачи равен единице. При некоторых условиях работы демпфер со сдавливаемой пленкой может даже усиливать действие силы дисбаланса. Поэтому важно определить рабочий режим и проницаемость обоймы, которые приводили бы к ослаблению передаваемого усилия.

Пусть i и j – единичные векторы, соответственно, в направлениях X и Y. Согласно рис. 1 силу F_{mp}, передаваемую на корпус, можно записать в виде

$$F_{mp} = \left(-K_x X + F_r\cos\varphi - F_t\sin\varphi\right)i + \left(-K_y Y - F_r\sin\varphi - F_t\cos\varphi\right)j\,. \tag{54}$$

Подставляя в (49) $X = e\cos\varphi,\quad Y = -e\sin\varphi$, $K_x = K_y = K$, получаем

$$F_{mp} = \left(-Ke\cos\varphi + F_r\cos\varphi - F_t\sin\varphi\right)i + \left(Ke\sin\varphi - F_r\sin\varphi - F_t\cos\varphi\right)j\,. \tag{55}$$

Извлекая квадратный корень из суммы квадратов, составляющих F_{mp}, получим модуль передаваемого усилия

$$\left|F_{mp}\right| = \left[\left(F_r - Ke\right)^2 + F_t^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{56}$$

Поскольку модуль дисбаланса равен $u\omega^2$, то коэффициент передачи T_r равен

$$T_r = \frac{\left|F_{mp}\right|}{u\omega^2} = \frac{\left[\left(F_r - Ke\right)^2 + F_t^2\right]^{\frac{1}{2}}}{u\omega^2}\,. \tag{57}$$

Полагая в формулах (37)–(38), а также (39)–(40), $\dot{\varepsilon}=0, \dot{\varphi}=0$, получим стационарные значения $F^{(e)}$ и $F^{(\varphi)}$ при установившемся движении в случае подачи смазки, соответственно, в направлении оси Oy и при осевой подаче.

Уравнения (41)–(44), описывающие нестационарное движение ротора при полном заполнении смазкой зазора, рассчитывались численным методом [6]. Интегралы в этих уравнениях вычислялись методом Гаусса. Поскольку неустановившиеся колебания ротора зависят от начальных условий, используемых при решении системы (41)–(44), то сравнение пористых демпферов при наличии подачи смазки и при ее отсутствии, а также при учете анизотропии проницаемости пористого слоя и при налагаемом значении проницаемости пористого слоя, проводились при одинаковых начальных условиях. Результаты численного анализа приведены на рис. 4–7.

Уравнения движения (41)–(44) для случая полного заполнения смазкой зазора решались численным методом. В случае неполного заполнения смазкой зазора уравнения движения, с учетом (33)–(36), также решались численно. Интегралы, входящие в эти уравнения вычислялись методом Гаусса.

При установившемся движении в случае полного заполнения смазкой зазора и при подаче смазки в направлении оси Oy, $F^{(e)}$ и $F^{(\varphi)}$ определялись выражениями (37) и (38), где $\dot{\varphi}=0$, а в случае осевой подачи смазки, (39) и (40), где $\dot{\varepsilon}=0, \dot{\varphi}=0$.

Уравнения движения (41) и (42), описывающие неустановившееся движение ротора при подаче смазки в направлении оси Oy, а также (43) и (44), описывающие неустановившееся движение ротора при осевой подаче смазки, решались численно методом, предложенным в работе [7]. Так же численно этим же методом решались уравнения движения ротора с учетом условий (33)–(36) в случае неполного заполнения смазкой зазора. Интегралы, входящие в эти уравнения, вычислялись методом Гаусса.

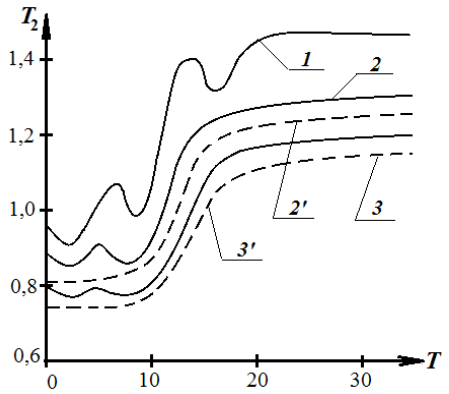

Рис. 4. Характеристики нестационарного движения шипа при возмущении начального положения для демпфера с параметрами:
B = 0,12, U = 0,4, Ω =1, Ω_ρ = 0,4, ε (0) = 0,6, ε (0) = 0, β (0) = –2,8, β (0) = 0, H/L = 0,1
1 – Φ = 0;
2 – Φ = 0,001; λ = 0; A_0 = 0,2 (подача смазки в направлении оси Oy);
3 – Φ = 0,001; λ = 0; P_u = 0,2; $P_к$ = 0,15 (осевая подача смазки);
2′ – Φ = 0,001; λ = 0,1; A_0 = 0,1 (подача смазки в направлении оси Oy);
3′ – Φ = 0,001; λ = 0,1; P_u = 0,2; $P_к$ = 0,15 (осевая подача смазки)

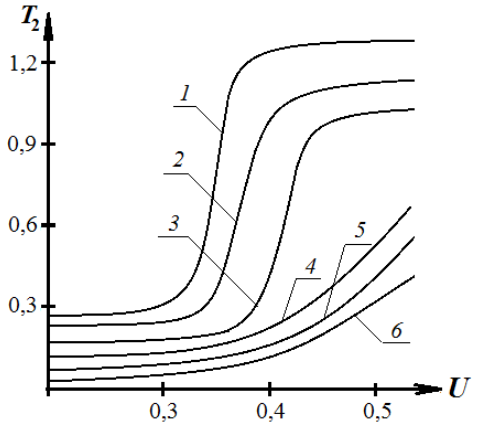

Рис. 5. Зависимость стационарного коэффициента подачи от эксцентриситета дисбаланса при B = 0,04, Ω =1, H/L = 0,1:
1 – Φ = 0;
2 – Φ = 0,001; λ = 0,1; A_0 = 0,1; Ω_ρ = 0,4;
3 – Φ = 0,001; λ = 0,1; P_u = 0,2; $P_к$ = 0,15 (осевая подача смазки);
4 – Φ = 0,01; λ = 0; A_0 = 0,1, Ω_ρ = 0 (подача смазки в направлении оси Oy);
5 – Φ = 0,01; λ = 0,1; A_0 = 0,1, Ω_ρ = 0 (подача смазки в направлении оси Oy)

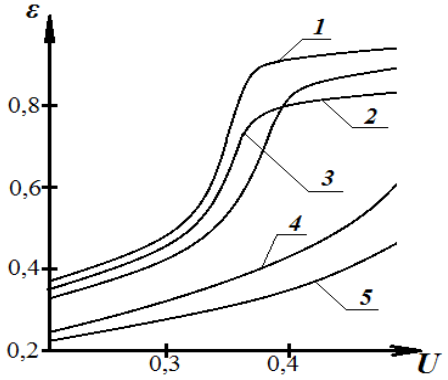

Рис. 6. Зависимость стационарного относительного эксцентриситета демпфера от эксцентриситета дисбаланса B = 0,12, Ω = 1, H/L = 0,1:
1 – Φ = 0;
2 – Φ = 0,001; λ = 0,1; A_0 = 0,1; Ω_ρ = 0,4;
3 – Φ = 0,001; λ = 0,1; P_u = 0,2; $P_к$ = 0,15; Ω_ρ = 0,4;
4 – Φ = 0,01; λ = 0,1; A_0 = 0,1; Ω_ρ = 0;
5 – Φ = 0,01; λ = 0,1; P_u = 0,2; $P_к$ = 0,15; Ω_ρ = 0

Поскольку неустановившиеся колебания ротора зависят от начальных условий, то при решении выше указанных задач начальные условия были одни и те же как при подаче смазки в направлении оси *Oy*, так и при осевой подаче смазки; а также при учете анизотропии проницаемости пористого слоя и при постоянном значении проницаемости пористого слоя.

Результаты численного анализа, приведенные на рис. 4–7, показывают, что:

1 Из зависимости нестационарного коэффициента передачи T_r от параметра *T* (рис. 4), следует, что с увеличением значения *T* коэффициент передачи резко возрастает. При этом максимальное значение T_r в случае пористого демпфера значительно меньше, чем в случае сплошного демпфера. При учете анизотропии проницаемости пористого слоя и подачи смазки, значение T_r в случае осевой подачи смазки значительно меньше, чем при подаче смазки в направлении оси *Oy*.

2 Из зависимости стационарного коэффициента передачи от эксцентриситета дисбаланса (рис. 5) следует, что увеличение проницаемости обоймы сдвигает вправо «скачок» в этой зависимости. В случае учета анизотропии проницаемости пористого слоя и подачи смазки «скачок» вправо значительно ощутимее, чем в случае начальной проницаемости пористой обоймы и отсутствия подачи смазки. В случае осевой подачи смазки максимальное значение «скачка» значительно меньше, чем при подаче смазки в направлении оси *Oy*.

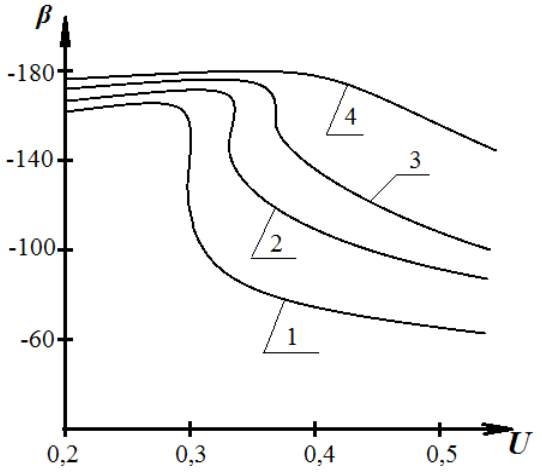

Рис. 7. Зависимость стационарного фазового сдвига от эксцентриситета дисбаланса при *B* = 0,04, Ω = 1, *H*/*L* = 0,1:

1 – Ф = 0;
2 – Ф = 0,001; λ = 0,1; A_0 = 0,1; Ω_ρ = 0,4;
3 – Ф = 0,001; λ = 0,1; $P_и$ = 0,2; $P_к$ = 0,15; Ω_ρ = 0,4;
4 – Ф = 0,01; λ = 0,1; $P_и$ = 0,2; $P_к$ = 0,15; Ω_ρ = 0

3 Из зависимости стационарного относительного эксцентриситета от эксцентриситета дисбаланса (рис. 6) следует, что относительный эксцентриситет пористых демпферов меньше, чем у сплошных демпферов, особенно при учете анизотропии проницаемости пористого слоя, а также влияния подачи смазки.

4 Из зависимости стационарного фазового сдвига от эксцентриситета дисбаланса (рис. 7) следует, что линия центров отстает от вектора силы дисбаланса, и при одинаковых условиях работы значение фазового сдвига для пористых демпферов больше, чем для демпферов со сплошной обоймой, особенно при учете анизотропии проницаемости пористого слоя.

Выводы

Показано, что в рассматриваемой в работе при вышеуказанном диапазоне изменения параметров, пористые демпферы, с учетом анизотропии проницаемости пористого слоя, а также подачи смазки, эффективнее ослабляют передаваемые усилия дисбаланса, чем демпферы со сплошной обоймой и однородной пористой обоймой при отсутствии подачи смазки.

Библиографический список

1 **Конри, Кузано.** Об устойчивости пористых радиальных подшипников. Конструирование и технология машиностроения / Кузано Конри, – 1974. – № 2. – С. 206–216.

2 **Ахвердиев, К.С.** Об устойчивости двухслойных пористых радиальных подшипников / К.С. Ахвердиев, О.В. Муленко // Вестник РГУПС. – 2002. – № 3. – С. 5–7.

3 **Кузано К., Фанк.** Исследование коэффициента передачи упругой опоры качения в демпфере со сдавливаемой пленкой и пористой обоймой / К. Фанк Кузано // Проблемы трения и смазки. – 1974. – № 1. – С. 54.

4 **Ахвердиев, К.С.** Разработка математической модели гидродинамического расчета конических подшипников / К.С. Ахвердиев, Б.Е. Копотун // Вестник РГУПС. – 2005. – № 3.

5 **Ахвердиев, К.С.** Нестационарная математическая модель гидродинамической смазки сложнонагруженного составного конического подшипника с пористым слоем на его рабочей поверхности с учетом его конструктивной особенности / К.С. Ахвердиев, С.Ф. Кочетова, М.А. Мукутадзе // Вестник РГУПС. – 2009. – № 1. – С. 135–143.

6 **Ахвердиев, К.С.** Устойчивость движения шипа в коническом подшипнике с пористым слоем на рабочей поверхности / К.С. Ахвердиев, Б.Е. Копотун, М.А. Мукутадзе // Трение и износ. – 2007. – Т. 28. – № 4. – С. 361–366.

7 **Gear, C.W.** Numarical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations / C.W. Gear // Prentice-Hall, Inc. – Englewood Cliffs N.J., 1972.

Bibliography

1 **Konri, Kuzano.** About stability of porous radial bearings. Designing and technology of mechanical engineering / Kuzano Konri. – 1974. – № 2. – P. 206–216.

2 **Akhverdiev, K.S.** About stability of two-layer porous radial bearings / K.S. Akhverdiev, O.V. Mulenko / Vestnik RGUPS. – 2002. – № 3. – P. 5–7.

3 **Kuzano, K. Funk.** Research of coefficient of transfer of an elastic support of swing in a damper with a squeezed film and a porous holder, friction and greasing / K. Funk Kuzano // Problems of friction and lubrication. – 1974. – № 1. – P. 54.

4 **Akhverdiev, K.S.** Development of mathematical model of hydrodynamic calculation of conic bearings / K.S. Akhverdiev, B.E. Kopotun // Vestnik RGUPS. – 2005. – № 3.

5 **Akhverdiev, K.S.** Non-stationary mathematical model of hydrodynamic greasing of the **slozhnonagruzhenny** compound conic bearing with a porous layer on its working surface taking into account its design feature / K.S. Akhverdiev, C.F. Kochetova, M.A. Mukutadze / Vestnik RGUPS. – 2009. – № 1. – C. 135–143.

6 **Akhverdiev, K.S.** Stability of movement of a thorn in the conic bearing with a porous layer on a working surface // K.S. Akhverdiev, B.E. Kopotun, M.A. Mukutadze // Friction and wear. – 2007 . – T. 28. – № 4. – P. 361–366.

7 **Gear, C.W.** Numarical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations / C.W. Gear // Prentice-Hall, Inc. – Englewood Cliffs N.J., 1972.

УДК 519.217

И.В. Павлов, О.В. Назарько

ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ МАРТИНГАЛОВ И ИХ ВОЗМОЖНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ*

Введение

Актуальность научного направления, в рамках которого выполнена настоящая работа, подробно обоснована во введении статьи [1], которая посвящена моделированию деформаций (см. также работы [2–3]). Довольно часто возникает необходимость в изучении работы финансовой, информационной, транспортной или какой-либо другой системы, в которую вмешивается некоторый плохо предсказуемый фактор (экономический кризис, перегрузка сети в информационной системе, периодические задержки поездов в системе железнодорожного транспорта и т.д.). Основная идея такова: моделировать процессы функционирования системы в указанный период при условии, что на каждом (возможно, достаточно коротком) участке времени действует своя вероятность возникновения различных событий. Вероятностные меры $Q^{(n)}$, определенные на σ-алгебрах F_n, образующих возрастающий информационный поток, математически реализуют данную идею. Совокупность $\left(Q^{(n)}, F_n\right)_{n=0}^{\infty}$ таких мер и названа авторами деформацией (по поводу этого еще не вполне устоявшегося термина также см. [1]). Аксиомы, накладываемые на вероятности $Q^{(n)}$, а также основные свойства деформированного стохастического базиса $\left(\Omega, F_n, Q^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$, подробно изучены в статье [4].

* Данная работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 13-01-00637а и (для первого соавтора) № 13-07-13159.