

В завершении следует отметить, что несмотря на наличие различных методов и подходов к анализу причинно-следственных отношений, «никакой формальный логико-математический анализ не может нам доказать, что какой-то признак (признаки) являются причиной такого-то явления. Тем не менее, использование логико-математического формализма — это «единственный подход, позволяющий... изучать причинно-следственные отношения»¹.

Обобщение модели Изинга для анализа поляризации мнений в сообществе с тремя превалирующими предпочтениями

Рыжова Анастасия Валентиновна, *НИУ ВШЭ*

В качестве математического аппарата для моделирования социальных процессов традиционно применяются преимущественно дифференциальные уравнения. Также очень широкое распространение имеет метод аналогий, когда в качестве основы берется модель физического процесса и с естественными уточнениями используется при моделировании социальных процессов. В настоящее время в рамках этой схемы быстро набирает силу статистическое направление, в котором для моделирования социальных и экономических явлений применяются методы статистической физики, т.е. за основу берется модель физического процесса, в качестве математического аппарата используются статистические методы. Направление достаточно новое, основной импульс оно получило после выхода работ Мантенья и Стэнли².

В частности, статистические методы оказываются очень продуктивными в задачах, где необходимо ответить на вопрос, каким образом возникает упорядоченное состояние из первоначально неупорядоченного. Под упорядоченным состоянием мы понимаем состояние общества, при котором существуют четко выделенные культурные и политические предпочтения, взгляды, интересы, которые разделяются большинством представителей данной группы. Общие взгляды формируются за счет обмена мнениями между составляющими группу индивидами (взаимодействия между ними), которое при некоторых условиях имеет тенденцию делать этих индивидов более похожими в определенных аспектах друг на друга. Очевидно, что при отсутствии взаимодействия каждый индивид сделает свой собственный выбор, не обусловленный влиянием его окружения. Это состояние мы называем неупорядоченным.

Одной из наиболее простых моделей формирования единого мнения является модель Изинга³. Пусть группа состоит из N объектов; имеется дихотомическая переменная S (два возможных состояния), обозначим ее значения через 1 и -1 , тогда уравнение модели можно записать следующим образом:

$$H = -J \sum_{i < j} S_i S_j - h \sum_i S_i \quad (1)$$

В этой формуле J — параметр, характеризующий интенсивность контактов между объектами внутри группы (взаимодействие между ними), h — внешнее воздействие, H — энергия системы. Рассмотрим немного подробнее интерпретацию некоторых параметров. Мы указали, что переменная S характеризует два возможных состояния, в которых могут находиться объекты системы. Это может применяться как для простых ситуаций, где под состояниями подразумеваются значения наблюдаемой переменной (скажем, посещает ли студент спецкурсы), так и для более интересных задач, в которых переменная рассматривается как латентная и представляет собой некоторую общую направленность, установку. Параметр h характеризует внешнее воздействие. При этом подразумевается, что оно является внешним не по отношению к системе в целом, а по отношению к объектам системы. Т.е. источник воздействия может находиться как вне группы,

¹ Толстова Ю.Н. Математико-статистические модели в социологии. М.: ГУ-ВШЭ, 2008. С. 154–155.

² Mantegna R.N., Stanley H.E. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

³ Давыдов А.А.. Инновационный климат в стране и инновационная энергия предпринимателей // http://www.ssa-rss.ru/index.php?page_id=22&id=53#5 (2010); Castellano C., Fortunato S., Loreto V. Statistical physics of social dynamics // Reviews of Modern Physics. 2007. Vol. 81. Iss. 2. P. 591–646 (<http://arxiv.org/pdf/0710.3256>); Chakrabarti B., Chakrabarti A., Chatterjee A. (eds.) Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives. Berlin: Wiley-VCH, 2006.

так и внутри, во втором случае можно говорить об определенных *условиях среды*. Если в качестве примера вновь рассмотрим студенческое сообщество, то под внешним воздействием можно подразумевать как влияние преподавателей (источник находится вне студенческих групп), так и общий *климат* внутри системы, скажем, располагает ли он к тому, чтобы хорошо учиться, или хорошая учеба не ценится.

Отметим, что в состоянии равновесия энергия системы минимальна. Рассмотрим, при каких сочетаниях значений параметров уравнения (1) H будет стремиться к минимуму. Во-первых, при совпадении состояний (мнений) составляющих систему объектов. В этом случае величина $-J \sum_{i < j} S_i S_j$ принимает свое наименьшее значение; чем больше пар взаимодействующих объектов, находящихся в различных состояниях, чем выше значение данной величины. Второе слагаемое, $-h \sum_i S_i$ принимает свое минимальное значение, когда все объекты системы находятся в состоянии 1; при повышении количества объектов в состоянии -1 будет увеличиваться значение этой величины. Это можно проинтерпретировать таким образом, что объекты, находящиеся в состоянии 1, сонаправлены с внешним воздействием, а объекты, находящиеся в состоянии -1 , направлены противоположным образом. При $h < 0$, наоборот, состояние -1 сонаправлено с внешним воздействием. Таким образом, мы получаем картину, которая полностью согласуется с представлениями, основанными на здравом смысле: система находится в стабильном состоянии или близка к нему, если большинство составляющих ее индивидов придерживаются одного и того же мнения, и направление внешнего воздействия с ним совпадает.

Вероятность реализации состояния (S_1, S_2, \dots, S_N) подчиняется закону распределения Гиббса:

$$P(S_1, S_2, \dots, S_N) = A \exp(-H(S_1, S_2, \dots, S_N)/T) \quad (2)$$

В формуле (2) A — нормировочная постоянная, T — температура. Применительно к нашей задаче температура интерпретируется как способность объектов хаотично и самопроизвольно менять свое состояние. Таким образом, высокие значения параметра T будут соответствовать ситуации «тревожности», когда большинство составляющих группу индивидов не имеют постоянного мнения.

Модель Изинга позволяет рассматривать только те задачи, где для объектов есть только два потенциальных состояния. Это серьезное ограничение, поэтому, на наш взгляд, полезно и интересно рассмотреть обобщение модели на случай, когда число возможных состояний больше чем два; также есть много ситуаций, когда эти состояния не «равноправны», на них накладывается определенная структура, исходя из содержательного смысла задачи. Нас интересует обобщение модели Изинга на случай, когда в системе существует выбор из трех возможных вариантов, при этом два из этих вариантов равноправны, а третий выделен. Когда мы говорим о том, что варианты равноправны, мы подразумеваем, что они эквивалентны с точки зрения одной или нескольких характеристик, на которые опирается индивид, когда делает выбор. В качестве примера можно рассмотреть ситуацию, когда при выборе ВУЗа абитуриент рассматривает два института естественнонаучного направления и один институт гуманитарного направления.

При построении обобщенной модели вместо изинговских переменных S_i мы возьмем новые переменные вида $Q_i = Z_i^2 - q$, где Z_i может принимать значения 0, 1, или -1 ; параметр q характеризует, насколько сильно с содержательной точки зрения два эквивалентных состояния отличаются от выделенного. В этом случае характеристическая функция имеет вид:

$$H = -J \sum_{i < j} Q_i Q_j - h_1 \sum_i Z_i - h_2 \sum_i Q_i \quad (3)$$

Параметр h_1 характеризует внешнее воздействие, сонаправленное с одним из состояний $Z = \pm 1$ (с состоянием $Z = 1$ при $h_1 > 0$ и состоянием $Z = -1$ при $h_1 < 0$), параметр h_2 характеризует воздействие, направленное на оба эквивалентных состояния одновременно (в соответствующее слагаемое входит Q_i а не Z_i).

С содержательной точки зрения наиболее интересен вопрос о том, какое состояние в системе преобладает. Сначала проанализируем зависимость количества объектов в каждом из состояний

от параметра взаимодействия J при различных значениях параметра q , затем рассмотрим, как меняется ситуация при учете внешнего воздействия (h_1 и h_2).

Рассмотрим зависимость относительного количества объектов в каждом из состояний от J при $q=0.5$ и $q=1$ (рис. 1 и 2). При малых значениях J система находится в неупорядоченном состоянии ($N_{+1}/N=N_{-1}/N=N_0/N$). При возрастании J в зависимости от величины q начинает превалировать один из возможных вариантов: в первом случае возрастают N_{+1} и N_{-1} и убывает N_0 , во втором случае ситуация обратная. Было найдено критическое значение $q=2/3$ (рис. 3), при котором есть довольно большой диапазон J , в рамках которого изменение значений этого параметра не оказывает влияния на поведение системы и в ней сохраняется неупорядоченное состояние.

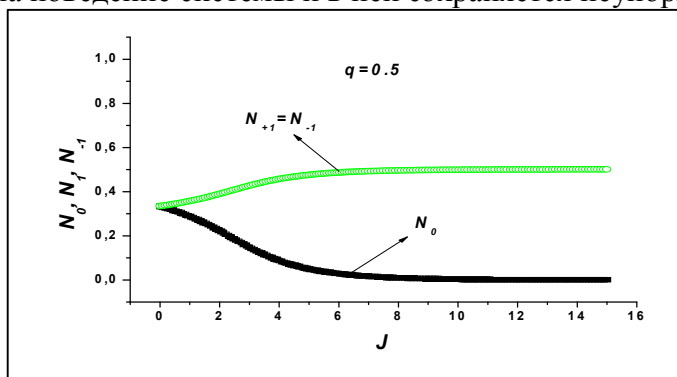


Рис. 1. Зависимость от J относительного количества объектов в каждом из состояний при $q=0.5$, $h_1=h_2=0$.

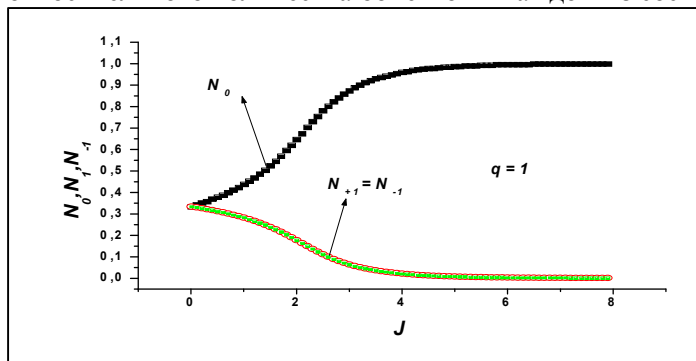


Рис. 2. Зависимость от J относительного количества объектов в каждом из состояний при $q=1$, $h_1=h_2=0$.

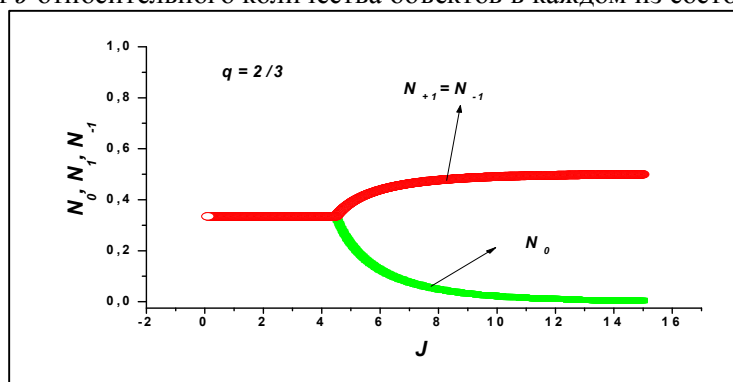


Рис. 3. Зависимость от J относительного количества объектов в каждом из состояний при $q=2/3$, $h_1=h_2=0$.

Далее рассмотрим воздействие на систему параметра h_1 (рис. 4). Здесь ситуация отличается от предыдущих, так как уже при малых значениях J система находится в упорядоченном состоянии, при этом преобладает N_{+1} . Это согласуется со смыслом параметра h_1 , который характеризует внешнее воздействие, сонаправленное с одним из состояний $+1$, -1 . В нашем случае $h_1=1>0$, т.е. это воздействие «поддерживает» состояние $Z=1$, что мы и наблюдаем. При возрастании значений параметра J преобладание состояния $Z=1$ ослабевает, и ситуация сводится к представленной на рис. 2. Таким образом, эффект от взаимодействия между объектами оказывается более сильным, чем эффект внешнего воздействия.

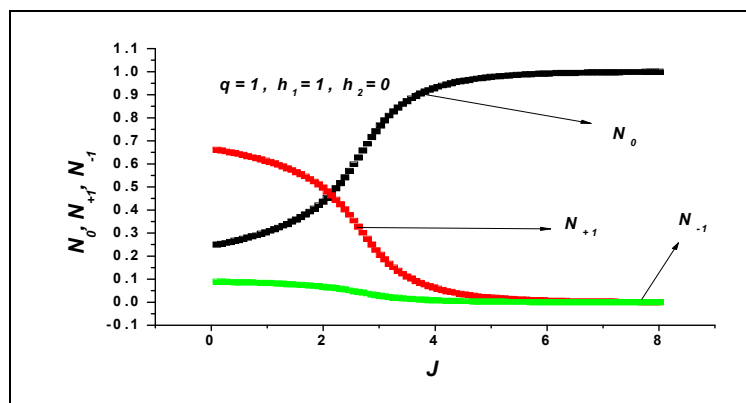


Рис. 4. Зависимость от J относительного количества объектов в каждом из состояний при $q=1, h_1=1, h_2=0$.

Теперь перейдем к рассмотрению воздействия на систему параметра h_2 (рис. 5). Здесь ситуация очень похожа на рассмотренную на рис. 2, за исключением того что при малых значениях J преобладают состояния $Z = \pm 1$, в соответствии со смыслом параметра h_2 (характеризуемое этим параметром воздействие при $h_2 > 0$ «поддерживает» указанные состояния). Как и при рассмотрении эффекта параметра h_1 , здесь при увеличении интенсивности взаимодействия внутри группы эффект от внешнего воздействия ослабевает.

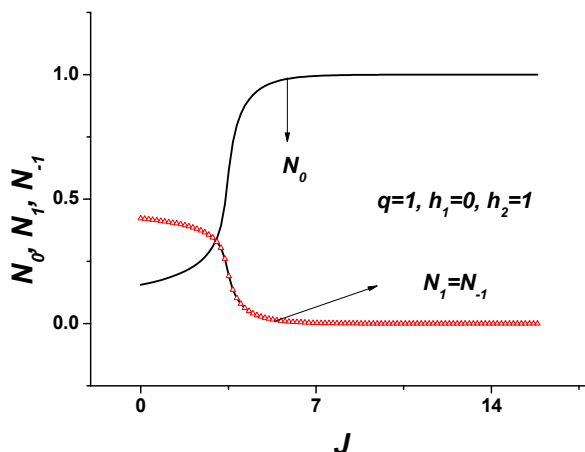


Рис. 5. Зависимость от J относительного количества объектов в каждом из состояний при $q=1, h_1=0, h_2=1$.

Таким образом, нами было получено точное решение для случая, когда в системе все индивиды взаимодействуют друг с другом с одинаковой интенсивностью. В рамках полученного решения проанализировано поведение системы в зависимости от интенсивности взаимодействия между объектами, степени внешнего воздействия и разницы между потенциальными состояниями.