

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Асимптотические методы
в механике деформируемого
твёрдого тела**

**Санкт-Петербург
2006**

УДК 534.1+539.3

Редактор: проф. С.Б. Филиппов

Асимптотические методы в механике деформируемого твердого тела. Сборник трудов, посвященный 70-летию профессора П.Е. Товстика — СПб.: Изд-во ВВМ, 2006. — 116 с.

ISBN

В сборнике трудов, посвященном 70-летию профессора П.Е. Товстика, представлены результаты исследований в области механики деформируемого твердого тела, полученные с помощью асимптотических и численных методов. Наряду с решением фундаментальных теоретических проблем рассматриваются вопросы использования механических моделей в биомеханике и технике.

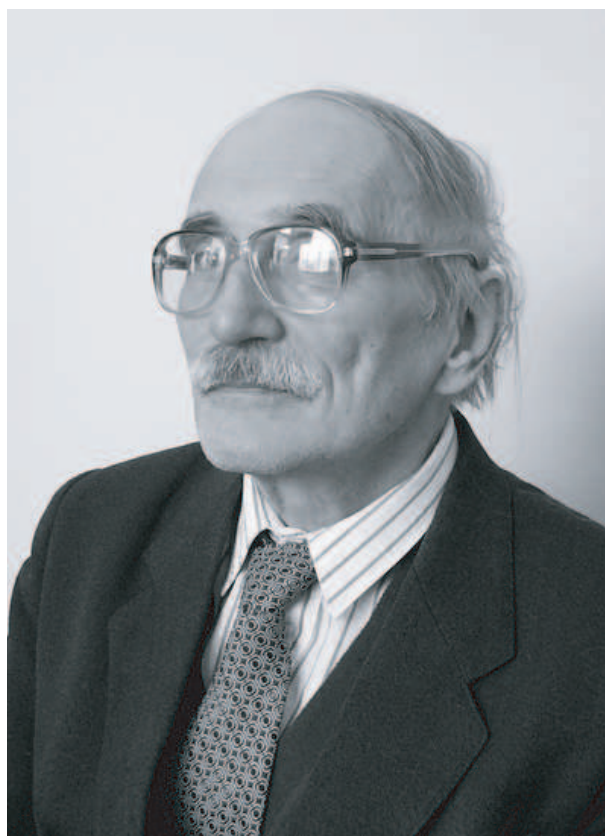
Книга предназначена для научных работников и инженеров, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела.

ISBN

© Коллектив
авторов, 2006
© Изд-во ВВМ, 2006

Предисловие

28 декабря 2005 года заведующему кафедрой теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, заслуженному деятелю науки РФ, лауреату государственной премии РФ, доктору физико-математических наук, профессору Петру Евгеньевичу Товстику исполнилось 70 лет. Этому событию посвящен предлагаемый читателю сборник.



В 1958 году Петр Евгеньевич с отличием окончил математико-механический факультет ЛГУ и был оставлен в аспирантуре. После защиты в 1963 году кандидатской диссертации он работал в лаборато-

рии вибраций НИИ математики и механики ЛГУ. Защитив в 1968 году докторскую диссертацию, он стал доцентом, а затем профессором кафедры теоретической и прикладной механики. С 1978 года он заведует этой кафедрой.

П.Е. Товстику принадлежит около 200 научных публикаций, в том числе 6 монографий. Краткий обзор научных трудов Петра Евгеньевича приведен во вступительной статье С.Б. Филиппова.

П.Е. Товстик создал научную школу по применению асимптотических методов для изучения колебаний и устойчивости тонких оболочек. Почти все авторы работ данного сборника являются учениками Петра Евгеньевича или учениками его учеников. В своих исследованиях они развивают разработанные П.Е. Товстиком асимптотические методы или используют их для решения теоретических и прикладных задач механики деформируемого твердого тела.

Асимптотический анализ играет большую роль в современной механике, так как позволяет проверять и уточнять гипотезы, с помощью которых создаются упрощенные модели механических систем. И.В. Андрианов исследует асимптотическую природу гипотез, применяемых в теории нелинейных колебаний балок. Асимптотический анализ уравнений оболочек, проведенный Б.Н. Квасниковым, позволяет использовать упрощенные уравнения для построения напряженных состояний с различными свойствами. В работе М.Е.Кобченко и С.Б.Филиппова установлены условия применимости стержневой модели шпангоута в задаче об устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки. А.В. Михеевым сравниваются результаты расчетов критических нагрузок для оболочек на упругом основании, полученные с использованием моделей Тимошенко и Кирхгоффа-Лява.

Асимптотические методы постоянно используются при решении прикладных задач. Важнейшее их преимущество по сравнению с численными методами состоит в том, что наряду с количественными результатами они дают качественную картину поведения рассматриваемой системы.

В работе С.М. Бауэр и Е.Б. Воронковой исследована потеря устойчивости неоднородной тонкой круглой решетчатой пластины глаза под действием нормального давления. Показано, что критическая нагрузка снижается при увеличении степени неоднородности пластины и может

достигать значения, близкого к внутриглазному давлению. В этом случае потеря устойчивости ведет к образованию складок по краю решетчатой пластины, которые иногда наблюдаются при глаукоме.

В статье Г.И. Михасева и С.А. Ермоченко разработана модель хирургически реконструированного среднего уха человека в случае установки в центре барабанной перепонки протеза, заменяющего звено молоточек-наковальня. Даны рекомендации по выбору оптимальных параметров протеза. При смещении места крепления протеза от центра барабанной перепонки исследование колебаний рассматриваемой модели реконструированного среднего уха существенно усложняется. Первоначальный этап решения этой задачи, состоящий в определении частот колебаний круговой кольцевой пластины с эксцентрическим вырезом, выполнен в работе М.А. Фирсова и Г.И. Михасева. Асимптотический анализ системы уравнений малых колебаний пластины показал, что формы ее колебаний локализуются вблизи наиболее слабого радиуса. Найдены два первых члена разложения частоты колебаний в ряд по степеням малого параметра.

Работа О.С. Букашкиной посвящена исследованию нелинейных осесимметричных колебаний конической оболочки, которая может использоваться в качестве модели диафрагмы динамического громкоговорителя. Перемещения оболочки представлены в виде линейной комбинации двух первых собственных функций линейной системы, имеющих точки поворота на промежутке интегрирования. Решение, полученное асимптотическим методом многих масштабов сравнивается с численным решением.

В статье А.Л. Смирнова метод конечных элементов используется для качественного анализа свободных колебаний и устойчивости круговых цилиндрических оболочек с отверстиями. Численное решение большого количества задач позволило сделать интересные выводы о влиянии размера, формы и расположения отверстий на частоты и формы колебаний а также критические нагрузки и формы потери устойчивости оболочек.

Результаты большинства работ данного сборника были представлены на Международной научной конференции по механике "Четвертые Поляховские чтения" проходившей в Санкт-Петербурге в феврале 2006 года.

О НАУЧНЫХ ТРУДАХ П.Е. ТОВСТИКА

С.Б. Филиппов

Первые научные исследования выполнены П.Е. Товстиком в лаборатории вибраций НИИ математики и механики ЛГУ под руководством заведующего лабораторией доцента Г.Н. Бухаринова. Асимптотический анализ уравнений колебаний криволинейного стержня, имеющего форму винтовой линии, позволил обосновать некоторые явления, наблюдаемые при колебаниях пружин.

Научные результаты, полученные Петром Евгеньевичем, принадлежат к различным областям механики твердого деформируемого тела. Особенно велик его вклад в теорию колебаний и устойчивости тонких оболочек.

1. Свободные колебания тонких оболочек

Исследования П.Е. Товстика в области колебаний оболочек вращения внесли существенный вклад не только в теорию оболочек, но и в теорию асимптотического интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих интересных для практики случаях классическая асимптотика оказывается непригодной. Это происходит при наличии на промежутке интегрирования так называемых точек поворота, в которых обращается в нуль один из коэффициентов уравнения колебаний.

В случае осесимметричных колебаний асимптотические выражения для интегралов в окрестности точек поворота построены с помощью эталонных функций, не зависящих от формы оболочки и частоты колебаний. Сорок лет спустя эти результаты были повторены китайскими учеными в подготовленной к печати работе Zhi-Liang Zhang, Chang-Jun Cheng, Uniform solutions for vibration of revolution shells in turning-point range.

На основании полученных результатов П.Е. Товстик разработал более простой, чем известные ранее, общий метод асимптотического интегрирования целого класса дифференциальных уравнений, включаю-

щего уравнение Орра-Зоммерфельда [1].

Асимптотическое поведение интегралов при неосесимметричных колебаниях оболочки вращения существенно зависит от числа волн в окружном направлении. В случае небольшого числа волн точки поворота будут такими же, как и при осесимметричных колебаниях. При большом числе волн происходит качественное изменение асимптотических свойств интегралов. Для этого случая П.Е. Товстик провел подробный анализ решений, получены приближенные уравнения для определения частот колебаний как при наличии, так и при отсутствии точек поворота.

Перечисленные результаты, а также исследования Петра Евгеньевича по устойчивости оболочек вращения, вошли в его докторскую диссертацию "Свободные колебания и устойчивость оболочек вращения". В 1970 году за цикл работ по теории оболочек он был удостоен первой премии Ленинградского университета.

В дальнейшем П.Е. Товстик получил приближенные асимптотические формулы для определения частот и форм низкочастотных и высокочастотных колебаний. Низкочастотными называют колебания, частоты которых стремятся к нулю вместе с толщиной оболочки. Эти частоты образуют нижнюю часть спектра, представляющую наибольший интерес для приложений. Частоты высокочастотных колебаний стремятся к бесконечности при стремлении толщины оболочки к нулю. Результаты исследований П.Е. Товстика по теории колебаний оболочек вращения содержатся в книге [2].

В середине 1980-х годов Петром Евгеньевичем был разработан новый эффективный метод приближенного определения низших частот колебаний некруговых цилиндрических и конических оболочек. С его помощью получены решения большого числа задач теории колебаний оболочек, для которых характерна локализация форм колебаний вблизи так называемых наиболее слабых образующих. В частности, для цилиндрической оболочки с косо срезанным краем наиболее слабой оказалась наиболее длинная образующая, а для оболочки в форме эллиптического цилиндра наиболее слабыми являются две образующие, проходящие через концы меньшей оси эллипса (рис. 1).

В указанных задачах не удается провести разделение переменных и свести решение уравнений в частных производных к решению обыкно-

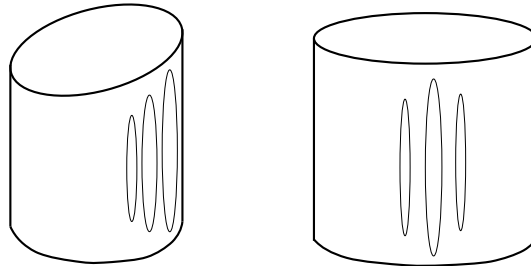


Рис. 1. Локализованные формы колебаний цилиндрической оболочки с косым краем и оболочки в форме эллиптического цилиндра.

венных дифференциальных уравнений. Петр Евгеньевич получил приближенное асимптотическое решение краевой задачи для системы уравнений в частных производных путем решения последовательности краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Применению и развитию этого метода посвящены докторские диссертации его учеников Г.И. Михасева и С.Б. Филиппова.

2. Линейная теория устойчивости тонких оболочек

Задачи устойчивости, рассматриваемые в линейном приближении, по используемому математическому аппарату близки к задачам о свободных колебаниях. И те, и другие сводятся к решению краевых задач на собственные значения. Основное различие заключается в том, что в задачах устойчивости представляют интерес лишь наименьшие собственные значения.

В работах П.Е. Товстика проведена оценка порядка критических нагрузок и качественный анализ форм потери устойчивости для произвольной гладкой оболочки. Эти оценки служат ориентиром при построении асимптотических разложений и оказываются различными для оболочек положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Исследована также зависимость порядка критической нагрузки от закрепления краев оболочки.

Размеры и расположение вмятин, возникающих на срединной поверхности оболочки при потере устойчивости, зависят от функций, определяющих радиусы кривизны, толщину, начальные безмоментные

усилия и др. В классических задачах теории устойчивости оболочек эти функции считаются постоянными, а вмятины покрывают всю срединную поверхность оболочки. Если же определяющие функции меняются при переходе от одной точки срединной поверхности к другой ее точке, то возникает локализация форм потери устойчивости.

В работах П.Е. Товстика изучены три типа локализации. Первый из них характеризуется тем, что вмятины сосредоточены в окрестности некоторой линии на поверхности оболочки. Он встречается, в частности, в задачах с разделяющимися переменными. Так, например, выпуклые оболочки вращения могут иметь форму потери устойчивости, локализованную вблизи параллели, расположенной между двумя точками поворота. При неоднородном осевом сжатии цилиндрической оболочки, локализация формы потери устойчивости происходит вблизи наиболее слабой образующей цилиндра.

При втором типе локализации малые вмятины сосредоточены вблизи наиболее слабой точки на срединной поверхности. К этому типу относятся задачи устойчивости оболочек при комбинированном нагружении и задача об изгибе моментом цилиндрической оболочки переменной толщины. Асимптотический анализ, основанный на двумерном варианте алгоритма В.П. Маслова, позволил получить в явном виде приближенные формулы для критических нагрузок и обнаружить интересные качественные особенности форм потери устойчивости.

Третий тип локализации возможен у оболочек нулевой гауссовой кривизны (конических и цилиндрических) и сопровождается образованием вмятин, вытянутых вдоль наиболее слабой образующей (см. рис. 2). Для задач такого типа Петр Евгеньевич разработал новый метод асимптотического интегрирования, с помощью которого получены простые приближенные решения множества актуальных задач теории устойчивости оболочек, для которых ранее были известны лишь отдельные численные результаты.

В работах Петра Евгеньевича рассмотрена также потеря устойчивости оболочек, при которой вмятины локализуются в окрестности слабо закрепленного края и экспоненциально убывают при удалении от него. Наличие слабо закрепленного края приводит к снижению критической нагрузки. Впервые эффект снижения критической нагрузки при сжатии пластины в связи с наличием свободного края был обнаружен

академиком А.Ю.Ишлинским. Для оболочек этот эффект проявляется значительно сильнее, чем для пластин.

Результаты своих исследований по теории устойчивости оболочек Петр Евгеньевич изложил в монографиях [3] и [4]. В 1998 году за труды по теории оболочек ему была присуждена Государственная премия РФ.

3. Нелинейная теория оболочек

Погрешность линейной теории оболочек имеет порядок безразмерной толщины оболочки. В нелинейных задачах погрешность теории оболочек возрастает с увеличением деформаций, причем основную неточность вносят соотношения упругости, связывающие усилия и моменты с деформациями. В работах П.Е. Товстика из трехмерных уравнений теории упругости выведены уточненные соотношения упругости, при использовании которых погрешность нелинейной теории оболочек имеет порядок безразмерной толщины оболочки в достаточно широком диапазоне изменения деформаций. Уточненные соотношения упругости позволили, в частности, исследовать большие осесимметричные деформации оболочки вращения.

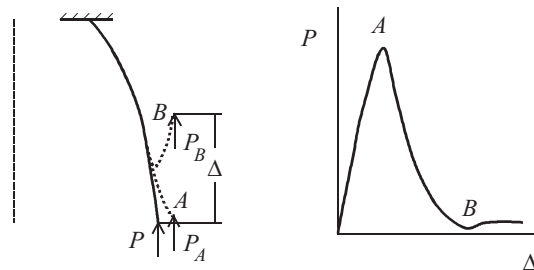


Рис. 2. Осесимметричное деформирование оболочки вращения.

На рис. 2 слева показана форма меридиана оболочки до (сплошная линия) и после (пунктир) деформации под действием силы P . Ее зависимость от осевого укорочения оболочки Δ схематически изображена на рис. 3 справа. В точке A сжимающая сила максимальна. Дальнейшее увеличение Δ приводит к уменьшению силы P . Выбор соотношений упругости не оказывает существенного влияния на величину силы

P_A , соответствующей точке A . Для силы P_B , соответствующей точке B , главный член асимптотического разложения оказывается равным нулю, и выбор соотношений упругости играет решающую роль при ее вычислении. Использование недостаточно точных соотношений упругости, основанных на использовании модифицированных гипотез Кирхгофа-Лява, может привести к завышению истинного значения силы P_B более, чем на 40%.

Уточненные соотношения упругости являются новым фундаментальным результатом нелинейной теории оболочек. Они вошли в монографию [5], за которую ее авторам и, в том числе, Петру Евгеньевичу в 2002 году присуждена Университетская премия первой степени.

4. Прикладные задачи

Научные интересы П.Е. Товстика никогда не ограничивались исследованиями в области теории оболочек. Многие его труды посвящены решению самых разнообразных прикладных задач механики. Отметим здесь только некоторые из них.

Результатом многолетнего сотрудничества с ГОИ стал большой цикл работ, связанных с расчетом облегченных металлических зеркал телескопов. Зеркало телескопа моделировалось кольцевой слоистой пластиной переменной толщины. Для успешной эксплуатации телескопа должны быть выполнены жесткие ограничения на прогиб отражающей поверхности зеркала, который существенно зависит от расположения точек крепления опор зеркала. Разработаны приближенные методы расчета деформации зеркал, а также методы определения оптимального расположения опор. Основные результаты этих исследований отражены в монографии [6].

В связи с задачей расчета колебаний кварцевых резонаторов Петр Евгеньевич проанализировал сложную проблему определения высокочастотного спектра пластины переменной толщины. Используя асимптотический метод интегрирования трехмерных динамических уравнений теории упругости, он нашел высокочастотные формы колебаний пластины, локализованные в окрестности максимума ее толщины [7].

П.Е. Товстик принимает участие в построении механических моделей глаза. Модели, предложенные им и его ученицей С.М. Бауэр,

используются при разработке методики хирургических глазных операций, описания процессов развития патологических изменений глаза, различных способов измерения внутриглазного давления. Некоторые результаты, полученные в этой области, отражены в монографии [8].

Ряд работ Петра Евгеньевича посвящен исследованию механических систем со случайными силами. Изучено движение центрифуги на воздушной подушке под действием случайных импульсов. Для совершенствования проектирования и расчета морских стационарных платформ проведен анализ нелинейных колебаний стержневых конструкций, находящихся под действием случайного волнового давления.

5. Неклассические модели в теории оболочек

В последние годы внимание Петра Евгеньевича привлекают неклассические модели в задачах динамики и устойчивости тонких оболочек. К ним относятся модели многослойных оболочек, оболочек армированных нитями и оболочек, лежащих на упругом основании.

Уточненные соотношения упругости, выведенные первоначально для однослойных оболочек [5], получены теперь и для многослойных оболочек. Проведено сравнение двумерной и трехмерной теорий многослойных оболочек, исследована устойчивость многослойной оболочки при осевом сжатии.

П.Е. Товстиком совместно с его учеником А.Л. Смирновым разработана двумерная теория анизотропных оболочек вращения, армированных нитями. Найдены значения критических нагрузок и формы потери устойчивости для анизотропной цилиндрической оболочки и эллипсоида вращения. Исследован и случай нелинейно упругих нитей, не воспринимающих сжимающих усилий. В качестве примера решена задача о равновесии цилиндрической оболочки под действием равномерного внутреннего давления. Анизотропия проявляется в окрестности краев оболочки, где имеют место деформации сжатия.

При локальном подходе к задачам устойчивости переменные коэффициенты уравнений замораживаются, граничные условия игнорируются, а решение ищется в виде двояко-периодической функции. При определенных ограничениях этот подход дает хорошее приближение к точному решению задачи. Локальный подход использован П.Е. Тов-

стиком при исследовании устойчивости оболочек и пластин, лежащих на упругом основании [9]. Для ряда задач получены явные аналитические решения. Основной качественный результат состоит в том, что для оболочек на упругом основании область применимости локального подхода существенно шире, чем при отсутствии основания.

В этот краткий обзор научных достижений Петра Евгеньевича Товстика не включены многие интересные и важные его результаты, так как даже простое их перечисление потребовало бы существенного увеличения объема данной работы.

Указатель литературы

1. *Товстик П. Е.* Интегралы линейного уравнения порядка $m + n$ с малым параметром при производных // Дифференциальные уравнения, 1970, № 6, С. 989–999.
2. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
3. *Товстик П. Е.* Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.
4. *Tovstik P. E., Smirnov A. L.* Asymptotic methods in the buckling theory of elastic Shells. World Scientific Publishing Co Ltd., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001. 347 p.
5. *Кабриц С. А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Черных К. Ф., Шамина В. А.* Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд. СПбГУ, 2002. 388 с.
6. *Бауэр С. М., Ковалев А. М., Петров М. Б., Тихомиров В. В., Товстик П. Е., Улитин М. И., Филиппов С. Б.* Расчет и оптимизация металлических зеркал телескопов. СПб.: Изд. СПбГУ, 1997, 228 с.
7. *Товстик П. Е.* Свободные высокочастотные колебания пластин переменной толщины // Изв. РАН. Мех. тверд. тела, 1994, № 4. С. 162–170.
8. *Бауэр С. М., Зимин Б. А., Товстик П. Е.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд. СПбГУ, 2000. 92 с.
9. *Товстик П. Е.* Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН. Мех. тверд. тела, 2005, № 1, С. 147–160.

УТОЧНЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КИРХГОФФА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК

И.В. Андрианов

П.Е. Товстику в связи с его 70-летием

Напомним, что представляет собой приближение Кирхгоффа [1]. Запишем исходные уравнения нелинейных колебаний балки в виде

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(T\theta) = 0, \quad (1)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где

$$M = EI\kappa, \quad \varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2, \quad \kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad T = EF\varepsilon, \quad \theta = \frac{\partial W}{\partial x},$$

E — модуль Юнга, F , I — площадь и статический момент поперечного сечения балки, U , W — продольное и нормальное перемещения балки, ρ — удельная плотность материала балки, t — время, x — пространственная координата.

Граничные условия примем в виде

$$U = 0, \quad \text{при } x = 0, L, \quad (3)$$

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x = 0, L. \quad (4)$$

Если отбросить продольную инерцию в уравнении (2), то получаем

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 = N \equiv const. \quad (5)$$

Уточненное уравнение Кирхгоффа в теории нелинейных колебаний ...15

Интегрирование соотношения (5) с учетом граничных условий (3) дает

$$N = \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{EF}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает приближенную модель Кирхгоффа. Несмотря на то, что название "модель Кирхгоффа" укоренилось в литературе [1], в оригинальной работе Кирхгоффа [2] его нет. Кирхгофф [2, с.443,444], наряду с отбрасыванием в уравнении (2) продольной инерции, опускал также и второй член в уравнении (1), так что оригинальное "уравнение Кирхгоффа" имеет вид

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{EF}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, выражение "гипотеза Кирхгоффа", под которой обычно понимают пренебрежение только продольной инерцией, не совсем точно, однако в силу его общепринятости не будем нарушать традицию.

Уравнение (6) широко применяется в современной нелинейной механике. Оно позволяет, в частности, аналитически строить нормальные формы нелинейных колебаний распределенной системы для граничных условий (4), разделяя пространственную и временную переменные следующим образом [3]:

$$W = T(t) \sin \frac{m\pi x}{L}.$$

Для защемленных краев, когда граничные условия (4) заменяются следующими

$$W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = 0, L,$$

нормальные формы нелинейных колебаний строятся при помощи метода Болотина [4]. Используется уравнение (6) и для более сложных задач [5]–[8]. Однако нигде мы не встречаем выписанных в явном виде ограничений, накладываемых "гипотезой Кирхгоффа". Между тем получить их нетрудно.

Для оценки области применимости уравнения (6) приведем уравнения (1), (2) к безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\} = 0, \quad (8)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2, \quad (9)$$

где

$$w = \frac{W}{h}, \quad u = \frac{UL}{h^2}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{\sqrt{EI}t}{\sqrt{\rho FL}}, \quad h = \sqrt{\frac{I}{F}}, \quad \alpha = \frac{h}{L}. \quad (10)$$

Величина α играет роль малого параметра. Если изменямости искомого решения по пространственной и временной координатам невелики, то из (9) видна возможность пренебречь продольной инерцией. Отсюда же, кстати, видна и необоснованность оригинального "уравнения Кирхгоффа" (7).

Предположим теперь, что изменямость решения по пространственной координате увеличивается. Из уравнения (8) видно, что изменямость по временной координате растет пропорционально квадрату изменямости по пространственной координате. Теперь оценим, когда члены в левой части уравнения (9) будут иметь один и тот же порядок. Нетрудно видеть, что это будет, когда изменямость по пространственной координате имеет порядок α^{-1} . Это и есть искомое ограничение. Следовательно, применять уравнение (6) при любой изменямости по пространственной координате, как это сделано, например, в [5], неверно.

Другая распространенная ошибка — введение в уравнение (6) некоторых "уточняющих" членов, например, попытки учесть влияние нелинейных членов кривизны. При этом, как правило, оказывается, что искусственно введенные члены имеют порядок отброшенной продольной

Уточненное уравнение Кирхгоффа в теории нелинейных колебаний ...17

инерции, поэтому их учет на базе уравнения Кирхгоффа необоснован.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда на величину углов поворота не накладывается никаких ограничений. Исходные уравнения таковы

$$\rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \theta + \frac{\partial M}{\partial x} \cos \theta) = 0, \quad (11)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (T \cos \theta - \frac{\partial M}{\partial x} \sin \theta) = 0. \quad (12)$$

Здесь

$$M = EI\kappa, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2} - 1, \quad T = EF\varepsilon,$$

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \theta = \arctg \left[\frac{\partial W}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x}\right)^{-1} \right].$$

Применяя обезразмеривание (10), из уравнений (11), (12) получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha^{-3} \varepsilon \sin \theta + \alpha^{-1} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \cos \theta \right) = 0, \quad (13)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\alpha^{-2} \varepsilon \cos \theta - \alpha \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} \sin \theta \right) = 0, \quad (14)$$

$$\theta = \arctg \left[\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(1 + \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^{-1} \right], \quad (15)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \alpha^2 \left[2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 \right]} - 1. \quad (16)$$

Отбрасывая члены порядка α^2 по сравнению с 1 и учитывая, что θ имеет порядок α , а ε — порядок α^2 , получаем из уравнений (14)–(16)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon \cos \theta) = 0, \quad \text{или} \quad \varepsilon \cos \theta = N \equiv \text{const}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \xi} \cos \theta \right) + \alpha^{-2} N \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad (18)$$

где

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right), \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \alpha^2 \left[2 \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right]} - 1, \quad (19)$$

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (20)$$

Если выполняются условия (3), то можно определить величину N :

$$N = \frac{a}{b} \left\{ -1 + \left[1 + \frac{\alpha^2 b}{a^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right]^{1/2} \right\}, \quad (21)$$

$$a = \int_0^1 \cos^{-1} \theta d\xi, \quad b = \int_0^1 \cos^{-2} \theta d\xi, \quad \cos \theta = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (22)$$

Уравнение (18) с условиями (19)–(22) представляют собой обобщенные уравнения Кирхгоффа. К сожалению, проинтегрировать точно эти уравнения невозможно, однако понижение порядка исходной нелинейной задачи дает возможность эффективно использовать численные методы. Если перейти к теории с малыми углами поворота, то уравнение (18) переходит в обычное уравнение Кирхгоффа. Если же применять метод возмущений, то уравнения (18)–(22) дают возможность последовательно учесть члены порядка α^2 . Этим они отличаются от уравнений, используемых в [5,8].

Общий вывод сводится к следующему: без четкого понимания асимптотической природы той или иной гипотезы ее правильное применение невозможно [9].

Уточненное уравнение Кирхгофа в теории нелинейных колебаний ...19

Указатель литературы

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1985, 777 с.
2. *Kirchhoff G.* Vorlesungen über Mathematische Physik. Erster Band. Mechanik. Leipzig: V.G.Teubner, 1897, 464 p. (рус. перев.: Г.Р. Кирхгофф. Механика. Лекции по математической физике. Пер. с немецкого под ред. А.Г. Григоряна и Л.С. Поллака. Изд. 2-е, стереотипное. Москва.: КомКнига, 2006, 392 с.)
3. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных форм для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989, 216 с.
4. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991, 416 с.
5. *Suweken G., van Horssen W.T.* On the weakly nonlinear transversal vibrations of a conveyor belt with a low and time-varying velocity // *Nonlinear Dynamics*, 2003, vol. 31, P. 197–203.
6. *Avramov K.V.* Non-linear beam oscillations excited by lateral force at combined resonance // *J. Sound Vibr.*, 2002, vol. 257 (2), P. 337–359.
7. *Болотин В.В.* Динамическая теория упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1956, 600 с.
8. *Avramov K.V.* Bifurcations of parametric oscillations of beam with three equilibria // *Acta Mechanica*, 2003, vol. 164, P. 115–138.
9. *Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.* Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 304 с.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

С.М. БАУЭР, Е.Б. ВОРОНКОВА

Известно, что при больших прогибах однородных круглых пластин, находящихся под действием нормального давления, в окрестности контура появляются сжимающие напряжения, и возможна потеря устойчивости осесимметричной формы равновесия [1], [2], [3]. Образование "мелких складок, приводящих к отекам и мелким кровоизлияниям" иногда наблюдается и при глаукоме "по периферии" или по краю решетчатой пластинки диска зрительного нерва — круглой пластинки, которая в окрестности края является более разреженной, чем в центре [4], [5]. Степень неоднородности решетчатых пластинок в различных глазах различна. В связи с этим представляет интерес оценить влияние неоднородности на величину критической нагрузки, соответствующей прощелкиванию в неосесимметричное состояние.

1. Потеря устойчивости однородной изотропной пластины

Рассмотрим сначала изотропную однородную круглую пластину и определим нормальное давление p , при котором возможна бифуркация в неосесимметричное состояние.

Безразмерные уравнения деформации гибких изотропных пластинок имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Delta w}{12(1-\nu^2)} &= p + L(w, F), \\ \Delta \Delta F &= -\frac{1}{2}L(w, w), \end{aligned} \tag{1}$$

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 04-01-00258.

О потере устойчивости симметричных форм равновесия ... 21

где w — прогиб, F — функция усилий,

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right),$$

r и θ — полярные координаты.

Безразмерные величины связаны с размерными величинами r^* , w^* , p^* и F^* , соотношениями

$$r = \frac{r^*}{R}, \quad w = \frac{w^*}{h}, \quad p = \frac{p^* R^4}{E h^4}, \quad F = \frac{F^*}{E h^3}.$$

Здесь E — модуль упругости пластинки, h и R — толщина и радиус пластинки.

Усилия выражаются через функцию F по формулам

$$T_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad T_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad S = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right).$$

Полагаем, что пластина закреплена по контуру от поворотов, но точки контура свободно смещаются в радиальном и окружном направлениях:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \text{при} \quad r = 1. \quad (2)$$

Следуя [2], выберем аппроксимирующее выражение для прогиба, удовлетворяющее двум первым граничным условиям в виде

$$w(r, \theta) = A(1 - r^2)^2 + B r^4 (1 - r^2)^2 \cos n\theta. \quad (3)$$

Используя соотношение (3), из второго уравнения (1) можно определить

$$F(r, \theta) = F_0(r) + F_1(r) \cos n\theta + F_2(r) \cos 2n\theta, \quad (4)$$

где F_0, F_1, F_2 – функции r, A, B .

Подставляя в систему (1) выражения для w и F , умножая первое уравнение на $drd\theta$, а второе – на $r^4 \cos n\theta drd\theta$ и интегрируя по r от 0 до 1 и по θ от 0 до 2π , получим

$$A^3 K_1 + p K_2 + AB^2 K_3 + AK_4 = 0, \quad (5)$$

$$B^3 K_5 + A^2 B K_6 + BK_7 = 0.$$

Система (5) имеет 2 решения. Одно из них соответствует симметричной форме равновесия, для которой $B = 0$. В этом случае

$$p = -\frac{K_1}{K_2} A^3 - \frac{K_4}{K_2} A. \quad (6)$$

Другое решение соответствует несимметричной форме равновесия. Исключая параметр B из системы (5), имеем

$$B^2 = -\frac{K_7}{K_5} - \frac{K_6}{K_5} A^2, \quad (7)$$

$$p = \left(\frac{K_3 K_6}{K_2 K_5} - \frac{K_1}{K_2} \right) A^3 + \left(\frac{K_3 K_7}{K_2 K_5} - \frac{K_4}{K_2} \right) A.$$

Из первого выражения (7) следует, что амплитуда поперечных волн B при несимметричных прогибах будет иметь вещественные значения только в том случае, если

$$-\frac{K_7}{K_5} - \frac{K_6}{K_5} A^2 \geq 0.$$

Заметим, что $A = w_0$, где w_0 – перемещение центра пластинки. Таким образом получаем, что при малых давлениях пластинка имеет только симметричные формы равновесия. При давлении и прогибе

$$p^* = 771.48 \frac{Eh^4}{R^4}, \quad w_0^* = 9.19h$$

происходит бифуркация в неосесимметричное состояние.

2. Потеря симметричной формы равновесия неоднородной изотропной пластины

Как уже отмечалось, решетчатая пластина глаза в окрестности края является более разреженной ([4], [5]) Ослабленность решетчатой пластинки по краям может привести к снижению величины критической нагрузки.

Предположим, что $E(r) = E_0 f(r)$, где $f(r)$ – убывающая функция.

Безразмерные уравнения деформации изотропной неоднородной пластинки имеют вид

$$\frac{f(r)}{12(1-\nu^2)} \frac{E_0}{E_{cp}} \left[\Delta \Delta w - \frac{1}{f} \frac{df}{dr} L_1(w) + \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} L_2(w) \right] = p + L(w, F),$$

$$\Delta \Delta F - \frac{1}{f} \frac{df}{dr} L_1(F) + \left(2 \left(\frac{1}{f} \frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dr^2} \right) L_3(F) = -\frac{f(r)}{2} \frac{E_0}{E_{cp}} L(w, w),$$
(8)

где

$$E_{cp} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 E(r) r dr,$$

$$L_1(w) = \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2},$$

$$L_2(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

$$L_3(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right).$$

Учитывая, что форма прогиба пластины существенно зависит от степени неоднородности пластины [6], представим аппроксимирующее

выражение для прогиба в виде

$$w(r, \theta) = A(1 - r^2)^\alpha (1 + r^2)^\beta + Br^4(1 - r^2)^2 \cos n\theta. \quad (9)$$

Для удовлетворения граничным условиям (2) на краю пластины полагаем $\alpha > 1$, $\beta > 0$. Параметры α , β выбираются из условия наиболее точного приближения осесимметричного (докритического) прогиба пластинки [6].

По аналогии со случаем однородной пластины, можно получить систему двух уравнений для определения A , B , подобную (5):

$$\begin{aligned} A^3 \bar{K}_1 + p \bar{K}_2 + AB^2 \bar{K}_3 + A \bar{K}_4 &= 0, \\ B^3 \bar{K}_5 + A^2 B \bar{K}_6 + B \bar{K}_7 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В таблице 1 для пластинки радиуса $R = 1$ мм, толщиной $h = 0.1$ мм приведены значения критической нагрузки при различных законах изменения модуля упругости, но при сохранении его постоянного среднего значения $E_{cp} = 1.43 \cdot 10^6$ Па .

Таблица 1.

$f(r) = e^{-qr}$	$q = 0.1$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$
n	8	7	7	7	7
w_0	9.48	9.13	8.86	9.24	10.9
p	767.35	468.22	307.4	211.76	39.28

Полученные результаты показывают, что чем быстрее убывает модуль упругости пластины, тем ниже становится величина критической нагрузки (рис. 1).

Для однородной пластинки безразмерное критическое давление соответствует 110322 Па или 827,62 мм рт. ст. и более чем в 10 раз превосходит реальные значения внутриглазного давления, однако учет неоднородности пластины снижает критическую нагрузку. Для пластинки, модуль упругости которой изменяется по закону $E = E_0 e^{-4r}$ при сохранении среднего значения $E_{cp} = 1.43 \cdot 10^6$ Па безразмерное критическое давление $p = 39.28$ соответствует 5612 Па или 42.1 мм рт. ст. Такие значения давлений наблюдаются в глазу человека.

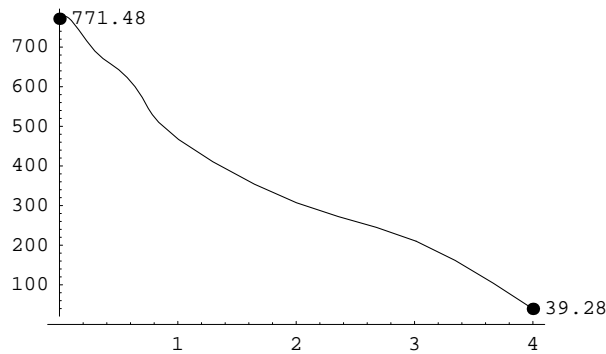


Рис. 1. Степень неоднородности – критическая нагрузка

Следовательно, одной из возможных причин образования складок по краю решетчатой пластины диска зрительного нерва может быть потеря устойчивости осесимметричной формы равновесия.

Указатель литературы

1. Морозов Н.Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, нагруженной симметричной нагрузкой // Изв. ВУЗов, Математика, № 2, 1961, С. 126–129
2. Панов Д.Ю., Феодосьев В.И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ, т. XII, 1948. С. 389–406.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
4. Волков В.В. Глаукома при псевдонормальном давлении. Руководство для врачей. М.: Медицина, 2001, 350 с.
5. Нестеров А.П. Основные принципы диагностики первичной открытоугольной глаукомы // Вестн. офтальмологии. 1998, № 2. С. 3–6.
6. Bauer S.M., Voronkova E.B. On the deformation of the Lamina Cribrosa under intraocular pressure // Russian Journal of Biomechanics, Vol. 5., № 1, 2001, P. 73–82.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

О.С. БУКАШКИНА

1. Постановка задачи

Рассматриваются низкочастотные колебания тонкой упругой конической оболочки вращения, к верхнему краю которой прикреплена масса m_1 , соединенная с пружиной жесткости c_1 . Верхний край оболочки находится под действием осесимметричной гармонической нагрузки. Нижний край жестко заделан. Геометрия конической оболочки показана на рис. 1.

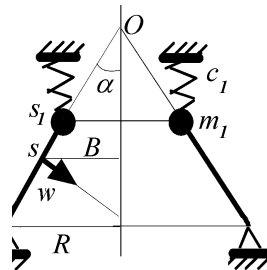


Рис. 1. Модель механической системы.

Изображенная на рис. 1 механическая система может использоваться в качестве модели диафрагмы динамического громкоговорителя.

Приближенная система уравнений, описывающих движение оболочки, выписывается с использованием вариационно-энергетического метода Гамильтона-Остроградского [1]. Таким образом, задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя степенями свободы. Полученная система решается как численно, так и

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 04-01-00257.

аналитически, результаты сравниваются.

2. Математическая модель

На срединной поверхности тонкой упругой оболочки вращения, имеющей форму усеченного конуса, вводится безразмерная система координат s, φ ($s_1 \leq s \leq s_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$), где Rs — расстояние до вершины конуса, φ — угол в окружном направлении, R — радиус нижнего большего основания конуса, к которому будем относить все линейные размеры, а также проекции перемещения. На верхний край, нагруженный массой m_1 , действует сила $F(t) = F_0 \sin \nu t$.

Систему уравнений движения для осесимметричных колебаний конической оболочки можно записать в виде [2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \frac{\partial(BT_1)}{\partial s} - \frac{B'}{B} T_2 &= Eh\lambda u, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial(BQ_1)}{\partial s} + \kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + \frac{T_2}{R_2} = Eh\lambda w, \\ \lambda &= \frac{\gamma\omega^2}{E}, \quad B = s \sin \alpha, \quad R_2 = stg\alpha, \quad Q_1 = -\frac{1}{B} \left(\frac{\partial(BM_1)}{\partial s} - B' M_2 \right), \\ T_1 &= K(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad T_2 = K(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad K = \frac{Eh}{1 - \mu^2}, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \mu\kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \mu\kappa_1), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{s} - \frac{w}{R_2}, \quad \kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_2 = \frac{B'}{B} \frac{\partial w}{\partial s}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, w — проекции перемещения, T_1, T_2 — усилия в срединной поверхности оболочки, M_1, M_2 — изгибающие моменты, Q_1 — перерезывающая сила, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — деформации растяжения, κ_1, κ_2 — деформации изгиба, h — толщина оболочки, ω — частота колебаний, γ — плотность, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона. Подставив выражения для усилий и моментов в первые два уравнения системы (1), получим уравнения относительно перемещений u и w . Линеаризация этих уравнений дает систему для нахождения собственных функций осесимметричной

задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\mu^2} \left(u'' - \mu \frac{w'}{R_2} + \frac{u'}{s} - \frac{u}{s^2} + \frac{w}{sR_2} \right) &= \lambda u, \\ D \left(\frac{1-\mu}{s^3} w' - \frac{\mu w''}{s^2} - \frac{2w'''}{s} - w'''' \right) + \frac{K}{R_2} \left(\frac{u}{s} - \frac{w}{R_2} + \mu u' \right) &= \lambda w. \end{aligned} \quad (2)$$

Решения системы (2) должны удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} w_r(s_1) = w'(s_1) = 0, \quad u_z(s_1) &= \frac{T_1 \cos \alpha}{c_1 - \omega^2 m_1}, \\ w_r(s_2) = w'(s_2) = 0, \quad u_z(s_2) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $w_r = u \sin \alpha - w \cos \alpha$, $u_z = u \cos \alpha + w \sin \alpha$ — смещения краев оболочки в радиальном и вертикальном направлениях.

В рассматриваемой задаче для определения частот и форм колебаний нельзя использовать безмоментную систему, которая получается из системы (2) при $D = 0$, так как на промежутке (s_1, s_2) имеется точка поворота [2]. В точке поворота безмоментная система имеет особенность.

Решая краевую задачу (2), (3) численно для одной из конструкций диафрагмы динамического громкоговорителя получаем следующие параметры двух наименьших собственных частот: $\lambda_1 = 0.718$ и $\lambda_2 = 0.883$. Собственные функции $u_1(s)$, $w_1(s)$ и $u_2(s)$, $w_2(s)$ представлены на рис. 2.

3. Вывод основных уравнений движения системы

Проекции перемещений оболочки представим в виде линейных комбинаций двух первых собственных функций:

$$u(s, t) = x_1(t)u_1(s) + x_2(t)u_2(s), \quad w(s, t) = x_1(t)w_1(s) + x_2(t)w_2(s).$$

Чтобы вывести уравнения для определения обобщенных координат $x_1(t)$ и $x_2(t)$, составим функционал Лагранжа и воспользуемся тем, что для действительного движения вариация функционала обращается в нуль:

$$\delta(K - \Pi + A) = 0.$$

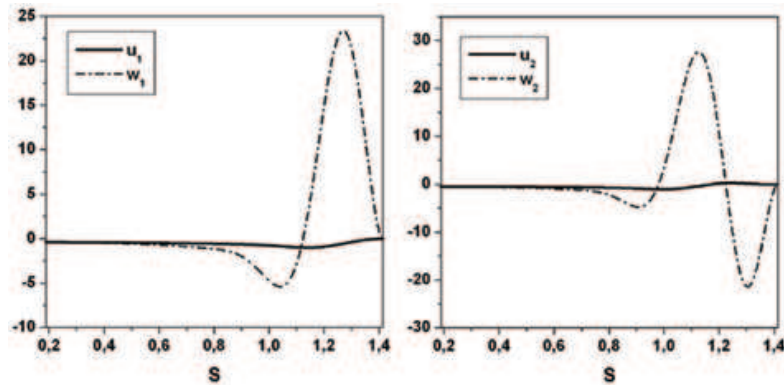


Рис. 2. Собственные функции.

Кинетическая энергия K , потенциальная энергия Π и работа внешней силы A определяются по формулам

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} \rho B (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds d\varphi + \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_z^2(s_1),$$

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_{\text{и}} + \Pi_{\text{пр}}, \quad \Pi_{\text{пр}} = \frac{1}{2} c_1 u_z^2(s_1), \quad A = F_0 u_z(s_1) \sin \nu t,$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + S\omega) B ds d\varphi,$$

$$\Pi_{\text{и}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} (\kappa_1^2 + 2\mu\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + 2(1-\mu)\tau^2) B ds d\varphi,$$

где $\Pi_{\text{пр}}$ — энергии деформации пружины, Π_p и $\Pi_{\text{и}}$ — энергии растяжения и изгиба оболочки.

Выразив входящие в вариацию функционала усилия и деформации через перемещения, получим интегральное выражение, содержащее вариации δx_1 , δx_2 . Приравнивание нулю коэффициентов при δx_1 , δx_2 дает систему уравнений, описывающую движение оболочки. Введем безразмерное время $t^* = 2\pi/\omega_1 t$ и добавим в полученную систему слагаемые $\alpha_3 \dot{x}_1$ и $b_3 \dot{x}_2$, учитывающие трение. Тогда система уравнений примет

вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 \ddot{x}_1 + \alpha_2 \ddot{x}_2 + \alpha_3 \dot{x}_1 + \alpha_4 x_1 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 x_1^2 + \alpha_7 x_2^2 + \alpha_8 x_1 x_2 + \alpha_9 x_1^3 + \alpha_{10} x_2^3 + \\ \alpha_{11} x_1 x_2^2 + \alpha_{12} x_1^2 x_2 = -f_1 \sin \nu t, \\ \beta_1 \ddot{x}_1 + \beta_2 \ddot{x}_2 + \beta_3 \dot{x}_2 + \beta_4 x_1 + \beta_5 x_2 + \beta_6 x_1^2 + \beta_7 x_2^2 + \beta_8 x_1 x_2 + \beta_9 x_1^3 + \beta_{10} x_2^3 + \\ \beta_{11} x_1 x_2^2 + \beta_{12} x_1^2 x_2 = -f_2 \sin \nu t. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты α_i, β_i для $i \neq 3$ определяются численно и являются интегралами по s от выражений, содержащих функции $u_1(s), u_2(s), w_1(s), w_2(s)$.

4. Анализ нелинейных осесимметричных колебаний

Положим во втором уравнении системы (4) $x_1 = 0, x_2 = x$. Получим уравнение

$$\ddot{x} + k_0 \dot{x} + \omega^2 x + c_0 x^2 + b_0 x^3 = f_0 \sin \nu t. \quad (5)$$

Рассмотрим случай малого сопротивления, малого возбуждения и малой нелинейности восстанавливающей силы, предполагая, что $k_0 = \varepsilon k, c_0 = \varepsilon c, b_0 = \varepsilon b, f_0 = \varepsilon f$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\ddot{x} + \varepsilon k \dot{x} + \omega^2 x + \varepsilon c x^2 + \varepsilon b x^3 = \varepsilon f \sin \nu t \quad (6)$$

где ε — малый параметр.

Для построения приближенного решения в резонансном случае $\nu^2 = \omega^2 + \varepsilon \Delta$ воспользуемся методом многих масштабов.

Введем переменные $\tau = t, \tau_1 = \varepsilon t, \tau_2 = \varepsilon^2 t$. Будем искать решение уравнения

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon \Delta x - \varepsilon k \dot{x} - \varepsilon c x^2 - \varepsilon b x^3 + \varepsilon f \sin \nu t \quad (7)$$

в виде асимптотического ряда

$$x = x_0(\tau, \tau_1, \tau_2 \dots) + \varepsilon x_1(\tau, \tau_1, \tau_2 \dots) + \dots \quad (8)$$

Нулевое приближение имеет вид

$$x_0 = a(\tau_1, \tau_2 \dots) \cos z, \quad z = \nu \tau + \beta(\tau_1, \tau_2 \dots). \quad (9)$$

Подставив в систему для определения первого приближения

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \nu^2 x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \tau_1} + \Delta x_0 - k \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - cx_0^2 - bx_0^3 + f \sin \nu t$$

выражение (9), получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \nu^2 x_1 = & 2\nu \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \sin z + 2a\nu \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} \cos z + \Delta a \cos z - \\ & - kav \sin z - \frac{ca^2}{2}(1 + \cos 2z) - \frac{ba^3}{4}(\cos 3z + 3 \cos z) + f \sin(z - \beta). \end{aligned} \quad (10)$$

Для того чтобы в асимптотическом разложении отсутствовали вековые члены, необходимо, чтобы коэффициенты при $\sin z$ и $\cos z$ в правой части уравнения (10) были равны нулю. Эти условия дают уравнения для определения a и β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \tau_1} &= \frac{1}{2\nu} (kav - f \cos \beta), \\ \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} &= \frac{1}{2a\nu} \left(\frac{3ba^3}{4} + f \sin \beta - \Delta a \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для стационарного решения $a = a_0$, $\beta = \beta_0$, где a_0 и β_0 — постоянные величины. Исключив из системы β_0 , получим уравнение для определения амплитуды a_0 :

$$k^2 a_0^2 \nu^2 + \left[\frac{a_0}{\varepsilon} (\nu^2 - \omega^2) - \frac{3}{4} ba_0^3 \right]^2 - f^2 = 0.$$

С учетом равенств (11) уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \nu^2 x_1 = -\frac{ca^2}{2}(1 + \cos 2z) - \frac{ba^3}{4} \cos 3z.$$

Подставив его решение

$$x_1 = -\frac{ca^2}{2\nu^2} + \frac{ca^2}{6\nu^2} \cos 2z + \frac{ba^3}{32\nu^2} \cos 3z$$

и выражение (9) для x_0 в разложение (8) и заменив a на a_0 , получим следующую приближенную формулу для стационарного периодического решения:

$$x = a_0 \cos z + \varepsilon \left(-\frac{ca_0^2}{2\nu^2} + \frac{ca_0^2}{6\nu^2} \cos 2z + \frac{ba_0^3}{32\nu^2} \cos 3z \right). \quad (12)$$

Вид решения (12) говорит о том, что в спектре присутствуют субгармоники порядка $1/2$ и $1/3$.

5. Сравнение аналитического и численного решений.

Численное интегрирование системы (4) проведено для значений параметров, соответствующих конкретной конструкции диафрагмы динамического громкоговорителя: радиусы оснований конуса $B(s_1) = 0.982$ см, $B(s_2) = R = 7.5$ см, угол при вершине конуса $\alpha = 45^\circ$, толщина диафрагмы $h = 0.03$ см, плотность диафрагмы $\gamma = 0.2$ г/см³, модуль Юнга $E = 1.16 \cdot 10^9$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, $m_1 = 0.5$ г, $c_1 = 0.005$ г/с².

Значения коэффициентов системы уравнений (4), полученные в результате вычислений, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

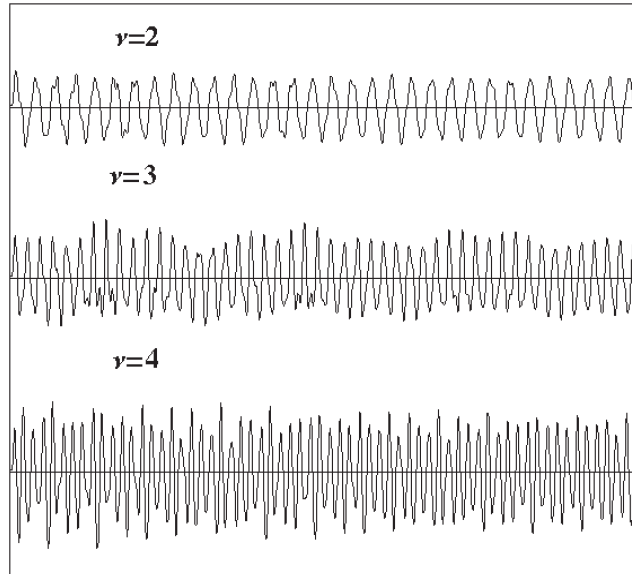
i	1	2	3	4	5	6
α	-0.0022	0.0011	0.0086	-0.0777	0.0421	-0.0229
β	0.0011	-0.0037	0.0086	0.0425	-0.1569	-0.0288
i	7	8	9	10	11	12
α	0.1321	-0.4813	-3.4164	16.1788	-18.6155	16.4309
β	-0.3659	.2473	4.2076	-39.2001	44.3448	-19.4239

На рис. 3 представлены изменения координаты $x_2(t)$, характеризующей прогиб мембраны при разных значениях возбуждающей частоты ν и $f = 0.001$ на безразмерном временном отрезке от $t_0 = 0$ до $t_1 = 300$. Амплитуда колебаний для разных случаев лежит в интервале $x_{max} = 1.2 - 2.0$.

Спектральный анализ кривой неустановившихся колебаний, изображенной на рис. 3 показывает, что в спектре имеются три частоты: две частоты собственных колебаний и частота вынужденных колебаний.

Такие же частоты дает анализ линеаризованной системы (4)

$$\begin{aligned}\alpha_1 \ddot{x}_1 + \alpha_2 \ddot{x}_2 + \alpha_4 x_1 + \alpha_5 x_2 &= -f_1 \sin \nu t, \\ \beta_1 \ddot{x}_1 + \beta_2 \ddot{x}_2 + \beta_4 x_1 + \beta_5 x_2 &= -f_2 \sin \nu t.\end{aligned}$$

Рис. 3. Характер колебаний $x_2(t)$.

Частотное уравнение этой системы

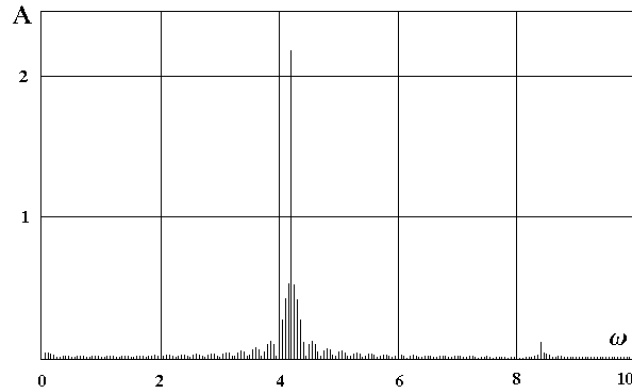
$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\omega^4 - (\alpha_1\beta_5 + \beta_2\alpha_4 - \beta_1\alpha_5 - \alpha_2\beta_4)\omega^2 + (\alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4) = 0$$

для рассматриваемых значений параметров имеет корни $\omega_1 = 5.85$, $\omega_2 = 6.52$, которые являются значениями безразмерных собственных частот. Биения, которые можно видеть на рис. 3, происходят из-за близости двух первых частот колебаний.

Установившиеся колебания при данных условиях возбуждения дают в спектре лишь частоту вынужденных колебаний. Субгармоники в спектре обнаружить не удалось.

В области близкой к резонансу при $\nu = 4.2$ и $f = 0.001$ субгармоника порядка $1/2$ становится заметной в окрестности точки $\omega = 2\nu$ (см. рис. 4), но ее амплитуда мала по сравнению с амплитудой основных колебаний.

Эти результаты подтверждаются анализом приближенного аналитического решения (12). Ввиду того, что при рассматриваемых значениях параметров амплитуда основной гармоники $a_0 = 0.016$, пропорци-

Рис. 4. Спектр $x_2(t)$ при $\nu = 4.2$.

ональная a_0^2 амплитуда субгармоники порядка $1/2$ мала по сравнению с a_0 .

6. Заключение

Исследованы осесимметричные нелинейные колебания конической оболочки вращения. Существование решения в виде (12) свидетельствует о наличии субгармоник в решении системы. Для электродинамических громкоговорителей исследование влияния субгармоник на основную гармонику представляет большой интерес, поскольку при значительных амплитудах субгармоник, особенно порядка $1/2$, качество звучания существенно ухудшается.

Согласно [4] $1/2$ гармоническое колебание может возникать, когда нелинейная восстанавливающая сила или внешняя сила ассиметричны. Амплитуды субгармоник достаточно малы, но по мере приближения к резонансу они растут и обнаруживают себя в спектре решения системы. Это подтверждается численным решением системы (4).

Представляет интерес определение зон устойчивости колебаний порядка $1/2$, а также рассмотрение случая большого возбуждения и большой нелинейности восстанавливающей силы.

Указатель литературы

1. *Aldoshina I., Bukashkina O., Tovstik P.* Theoretical and Experimental Analysis of Nonlinear Parametric Vibrations of Electrodynamical Loudspeaker Diaphragm // 104th AES Convention preprint, Amsterdam, 1998, P. 7.
2. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979, 384 с.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963, 503 с.
4. *Хаяси Т.* Вынужденные колебания в нелинейных системах. М. 1957, 204 с.

УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОРТРЕТ В ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Б.Н. Квасников

Дорогому Петру Евгеньевичу Товстику —
научному консультанту и идейному
вдохновителю по диссертации [1]
с глубокой признательностью

1. Постановка задачи

Проблема построения приближенных методов расчета [2] — укороченных уравнений — является центральной в теории тонких оболочек. И это вполне понятно, так как задачи этой теории описываются сложными системами дифференциальных уравнений в частных производных, которые, как правило, не могут быть решены без предварительной аппроксимации. Чем проще геометрия оболочки, тем проще ее уравнения. Однако с развитием техники наблюдается тенденция к усложнению форм оболочек, что ведет к усложнению уравнений.

В теории оболочек нет недостатка в сложных построениях. Самой распространенной и отвечающей потребностям практики является теория, в основу которой положены гипотезы Лява – Кирхгофа. Эта наиболее простая по сравнению с другими теория описывается системой двумерных дифференциальных уравнений восьмого порядка. Более сложные теории приводят к системам более высокого порядка.

Ощущается острая потребность в простых теориях типа безмоментной, максимально приближенных к инженерным запросам. Возможность упрощения уравнений тонкой оболочки не вызывает сомнений, если учесть общеизвестный факт присутствия "малых" членов в уравнениях теорий типа Лява.

Задача обоснования укороченных уравнений привлекала внимание ученых с момента зарождения теории тонких оболочек. В той или иной

степени она находит отражение почти в каждом исследовании, посвященном этой теории или связанном с ней. Наличие в уравнениях тонкой оболочки малого параметра (толщины оболочки) делает наиболее эффективным применение асимптотических методов.

Решение краевой задачи при наличии в уравнениях малого параметра целесообразно разбить на три этапа:

- 1) выделение напряженных состояний с различными асимптотическими свойствами в зависимости от порядков функций и их изменчивости (асимптотических по отношению к малому параметру);
- 2) упрощение задачи методом расчленения сложного напряженного состояния на более простые характерные;
- 3) решение упрощенной задачи с наложением друг на друга характерных состояний и удовлетворение полным граничным условиям.

При построении приближенных методов расчета тонких оболочек различают два подхода:

- 1) введение инженерных гипотез, зависящих, главным образом, от интуиции исследователя;
- 2) введение математических гипотез, позволяющих достаточно строго решить поставленную проблему.

Первый сравнительно легкий и наиболее распространенный подход предполагает частичное выполнение второго этапа решения краевой задачи и состоит в отбрасывании (часто волевым, без должного обоснования) некоторых членов в отдельных уравнениях моментной (неупрощенной) теории оболочек, следствием чего является наличие большого количества приближенных методов расчета, значение и применимость которых точно не установлены. Второй метод включает в себя первые два этапа решения краевой задачи и предполагает математический анализ уравнений, в результате которого можно четко выделить несущественные члены. Примерами инженерных гипотез являются гипотезы полубезмоментной теории В.З. Власова, а математических — общий принцип полубезмоментной теории В.В. Новожилова.

В [1–3, 6–9] предложен метод, позволяющий выполнить все три этапа решения краевой задачи [7]. На его основе доказана серия теорем [8] аппроксимации и существования для цилиндрических, тороидальных оболочек и оболочек двойкой кривизны типа кривой трубы (трубопровода).

Поставим задачу: обсудить и проиллюстрировать выполнение всех трех вышперечисленных этапов решения краевой задачи, уделив особое внимание укороченным уравнениям [3] и аксиоматике асимптотически порядкового анализа [9], которые включают в себя проблему построения приближенных методов расчета тонких оболочек.

2. Аксиоматика асимптотически порядкового анализа

Асимптотические методы основаны на введении малого или большого параметра, который принимается безразмерным и положительным. В теории тонких оболочек ее толщина h^* (размерная) мала по сравнению с остальными генеральными размерами конструкции или прибора и малым выступает параметр тонкостенности

$$h = h^*/Rc_\nu, \quad c_\nu = \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad (1)$$

где R — характерный линейный размер, ν — коэффициент Пуассона.

В ситуации, когда надо выделить наиболее важную главную часть уравнений, удобно пользоваться большим параметром μ , равным обратной величине малого параметра

$$\mu = h^{-1}. \quad (2)$$

Любая краевая задача теории оболочек содержит функции

$$F, \quad B, \quad Q \quad (3)$$

напряженного состояния, геометрии (коэффициенты) и внешнего воздействия (краевого и поверхностного). Здесь и в дальнейшем все функции безразмерные, их нормировка выполнена в [6].

Следуя А.Л. Гольденвейзеру [11], применим термины "показатель интенсивности" и "показатель изменяемости" для функций (3), обозначив их

$$\tilde{F}, \rho \text{ для } F; \quad \tilde{B}, \varphi \text{ для } B; \quad \tilde{Q}, \psi \text{ для } Q. \quad (4)$$

Определение 1 [12]. Асимптотическими порядками функций F, B, Q в (3) назовем большой параметр μ в степени показателей интенсивности $\tilde{F}, \tilde{B}, \tilde{Q}$ в (4), которые выделяют из этих функций величины

\underline{F} , \underline{B} , \underline{Q} порядка единицы, т. е.

$$F = \mu^{\tilde{F}} \underline{F}, \quad B = \mu^{\tilde{B}} \underline{B}, \quad Q = \mu^{\tilde{Q}} \underline{Q},$$

где $\mu^{\tilde{F}}$, $\mu^{\tilde{B}}$, $\mu^{\tilde{Q}}$ — асимптотические порядки функций F , B , Q , а \underline{F} , \underline{B} , $\underline{Q} = 0(1)$.

Это определение вводит новый термин "асимптотический порядок", который отличается от термина "порядок", характеризующего увеличение или уменьшение числа в 10 раз.

Параметры \tilde{F} , \tilde{B} , \tilde{Q} при фиксированном (*fix*) значении большого параметра $\mu = \text{fix}$ в (2) полностью определяют асимптотические порядки $\mu^{\tilde{F}}$, $\mu^{\tilde{B}}$, $\mu^{\tilde{Q}}$ функций F , B , Q . Они инвариантны по отношению к знаку самой функции.

В [8] для каждой из функций (3) вводится система постулатов

$$\tilde{F}_i = \tilde{F}_k = \max_s \left\{ \tilde{F}_s \right\}, \quad i \neq k, \quad s \in 1 : m, \quad \tilde{F}_6 = \max_s \left\{ \tilde{F}_s \right\}, \quad (5)$$

$$\varphi_1, \psi_1 \leq p_1, \quad \varphi_2, \psi_2 \leq p_2, \quad (6)$$

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} \Rightarrow \text{ПКЗ} = \text{ГКЗ} + \text{ДКЗ} \quad (7)$$

и гипотез

$$F \sim \mu^{\tilde{F}}, \quad F_{,1} \sim \mu^{p_1} F, \quad F_{,2} \sim \mu^{p_2} F, \quad (8)$$

$$B \sim \mu^{\tilde{B}}, \quad B_{,1} \sim \mu^{\varphi_1} B, \quad B_{,2} \sim \mu^{\varphi_2} B, \quad (9)$$

$$Q \sim \mu^{\tilde{Q}}, \quad Q_{,1} \sim \mu^{\psi_1} Q, \quad Q_{,2} \sim \mu^{\psi_2} Q, \quad (10)$$

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 = 0, \quad (11)$$

$$\text{НУ} : l_1 \geq \xi_* \sim \mu^{-p_1}, \quad l_2 \geq \eta_* \sim \mu^{-p_2}, \quad (12)$$

где \tilde{F}_i , \tilde{F}_k — показатели интенсивности i -го и k -го членов (ведущих с показателем \tilde{F}_6); m — число членов данного уравнения; $p_i \geq 0$, φ_i, ψ_i — показатели изменяемости функций F , B , Q в (4); $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ — функции основного и местного напряженного состояния (гладкая и быстроменяющаяся части решения); ПКЗ, ГКЗ и ДКЗ —

полная, главная и дополнительные краевые задачи; \sim — символ точно-го порядка; $\mu \gg 1$ — большой параметр по (2); $(\)_{,1} = \partial/\partial\xi$, $(\)_{,2} = \partial/\partial\eta$ — символы дифференцирования по первой ξ и второй η безразмерным координатам (для круговой цилиндрической оболочки ξ — продольная, η — окружная координаты, а для тора соответственно экваториальная и меридиональная координаты); a_i — числа, НУ — необходимые условия, l_i — безразмерные длины оболочки вдоль ξ и η , отнесенные к R ; ξ_* , η_* — длины "рисунка деформации" (термин А.Л. Гольденвейзера) вдоль этих же осей.

Соотношение (5) выражает постулат И. Ньютона или принцип парной эквивалентности, согласно которому в каждом уравнении исходной системы должно быть по крайней мере два ведущих члена одинакового наибольшего асимптотического порядка $\mu^{\tilde{F}}$. Постулат Ньютона [13] является ключевым инструментом в процедуре поиска укороченных уравнений. Заметим, что во времена Ньютона было принято объяснять метод на конкретных примерах. Объяснение принципа в общем виде имеется у Д.А. Граве [14].

Теорема.

1. Приближенное решение уравнения

$$A_1 x^{m_1} y^{n_1} + A_2 x^{m_2} y^{n_2} + A_3 x^{m_3} y^{n_3} + \dots = 0$$

при малых x , y может быть найдено в виде

$$y = U x^\beta, \quad U \neq 0$$

в том и только том случае, если в ряду чисел

$$m_1 + \beta n_1, \quad m_2 + \beta n_2, \quad m_3 + \beta n_3, \quad \dots$$

найдутся не менее чем два числа равные и не большие остальных чисел.

2. Если ровно два числа из набора $\{m_i + \beta n_i\}$ совпадают и двумя такими числами являются

$$m_i + \beta n_i = m_k + \beta n_k = \min_s \{m_s + \beta n_s\},$$

то

$$\beta = \frac{m_i - m_k}{n_k - n_i}, \quad U = \sqrt[n_k - n_i]{-\frac{A_i}{A_k}}, \quad n_k > n_i.$$

Примечание. Формулировка теоремы принадлежит Л.М. Абрамову [15], а ее доказательство см. [14].

На основании этой теоремы записан постулат (5), который порождает асимптотически порядковые уравнения, являющиеся основой асимптотически порядкового анализа.

Соотношение (6) выражает постулат Вишика—Люстерника [16] или принцип согласованности, согласно которому коэффициенты B и внешнее воздействие Q в (3) не могут меняться быстрее, чем сами функции F напряженного состояния оболочки. При нарушении этого принципа процедура поиска существенной подсистемы (определение см. [6]) из исходной моментной (неупрощенной) системы становится несостоятельной.

Принцип парной эквивалентности (5) влечет за собой возможность парного перебора. Выделение главной части из исходной системы простым парным перебором эффективно только для сравнительно несложных систем. В общем случае число вариантов для k -го уравнения при формальном парном переборе равно числу сочетаний по два из числа членов уравнения E_k . Для всей системы в целом число вариантов N определяется по формуле

$$N = \prod_{k=1}^m C_{E_k}^2 = \prod_{k=1}^n \frac{E_k(E_k - 1)}{2}, \quad (13)$$

где m — число уравнений системы.

При размере задачи 30×30 в теории тонких оболочек и числе членов в каждом уравнении от 2-х до 8 имеем $N = 10^{24}$ вариантов (вот оно "проклятие размерности" по Беллману!). Даже при быстродействии 10^{12} операций в секунду потребуется $10^{12}c = 10^4$ лет машинного времени ($1 \text{ год} = 10^6c$, $100 \text{ лет} = 10^{10}c$). Это означает, что формальный путь для сложных систем с мультитриллионным числом вариантов и привлечением самых современных ЭВМ непригоден из-за недопустимо больших затрат вычислительных ресурсов. Постулат согласованности (6) в сочетании с алгоритмом [6] поиска существенных подсистем в теории оболочек приводит к обозримому числу вариантов парного перебора для цилиндрических и тороидальных оболочек и трубопроводов (для них накоплена обширная информация о приближенных методах расчета).

Постулат Лява (7) или принцип расчленения позволяет расчленить

напряженно-деформированное состояние (НДС) на совокупность более простых состояний. Конкретные примеры такого расчленения приведены в [7].

Порядковые зависимости (8) выражают основную гипотезу, которая непосредственно связана с определением 1:

$$F = \mu^{\tilde{F}} \underline{F} \sim \mu^{\tilde{F}}. \quad (13.a)$$

Соотношение (8) — гипотеза существования решения, согласно которой предполагается, что решение исходных неупрощенных (моментных) уравнений существует в широком классе функций, где асимптотический порядок функции F в (3) полностью определяется показателем \tilde{F} ее интенсивности, а при дифференцировании по ξ , η он меняется μ^{p_1} , μ^{p_2} раз, где p_1 , p_2 — показатели изменяемости в основной гипотезе. Основная гипотеза выделяет два самых важных свойства функции F , первое из которых характеризует ее вклад в решение (чем больше \tilde{F} , тем больше вклад) и при

$$\tilde{F} > 0, \quad \tilde{F} = 0, \quad \tilde{F} < 0 \quad \text{и} \quad \tilde{F} = -\infty \Rightarrow F \equiv 0 \quad (13.1)$$

функция F большая, средняя, малая, а при $\tilde{F} = -\infty$ она обращается в ноль. Второе свойство говорит о поведении функции F вдоль осей координат ξ , η с помощью показателя $p\{p_1, p_2\}$ в (4), и ее изменяемость при

$$p > 0, \quad p = 0, \quad p < 0 \quad \text{и} \quad p = -\infty \Rightarrow F = \text{const} \quad (13.2)$$

быстрая, нулевая, медленная, а для постоянной функции $p = -\infty$. При нулевой изменяемости дифференцирование по одной из координат не меняет асимптотический порядок $\mu^{\tilde{F}}$ вдоль этой координаты.

Из (8) непосредственно следует

$$p_1 = \tilde{F}_{,1} - \tilde{F}, \quad p_2 = \tilde{F}_{,2} - \tilde{F}, \quad (14)$$

где по аналогии с $F \sim \mu^{\tilde{F}}$ в (8) обозначено $F_{,1} \sim \mu^{\tilde{F}_{,1}}$, $F_{,2} \sim \mu^{\tilde{F}_{,2}}$.

В п. 1 отмечалось, что инженерные гипотезы В.З. Власова (например, гипотеза о нерастяжимости контура поперечного сечения) позволили обосновать полубезмоментную теорию (ПБТ) цилиндрических

оболочек, а общий принцип этой теории В.В. Новожилова (ему принадлежит термин "полубезмоментная") в форме математической гипотезы о существенно различном поведении функций вдоль осей координат ($F_{,11} \ll F_{,22}$) заменил только что упомянутые инженерные гипотезы. Идея расширения сферы применимости ПБТ на криволинейные стержни-оболочки типа кривой трубы принадлежит Э.Л. Аксельраду [23]. Эта идея возникла на основе интуитивного представления о том, что напряженно-деформированное состояние (НДС) слабо изогнутой трубы мало отличается от НДС цилиндрической оболочки, для которой справедливы гипотезы Власова. Модифицированная ПБТ легла в основу расчета трубопроводов [27], а вопрос о степени изогнутости, т. е. о значении торового параметра, решался в [19], [2]. Основная гипотеза (8) дала возможность обосновать все приближенные теории не только цилиндрических, но и тороидальных оболочек, включая трубопроводы (см. теоремы [8]).

Соотношения (9) представляют собой гипотезу о коэффициентах, согласно которой коэффициенты B в (3) должны задаваться в классе функций основной гипотезы (8). Коэффициент B , как и функция F наделен двумя свойствами с помощью \tilde{B} и $\varphi\{\varphi_1, \varphi_1\}$ в определении 1 и при

$$\tilde{B} > 0, \quad \tilde{B} = 0, \quad \tilde{B} < 0 \quad \text{и} \quad \tilde{B} = -\infty \Rightarrow B \equiv 0 \quad (14.1)$$

коэффициент B большой, средний, малый, а при $\tilde{B} = -\infty$ он обращается в нуль; его изменяемость при

$$\varphi > 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi < 0 \quad \text{и} \quad \varphi = -\infty \Rightarrow B = \text{const} \quad (14.2)$$

быстроменяющаяся, нулевая ("спокойная" геометрия), медленноменяющаяся и в случае постоянных коэффициентов $\varphi = -\infty$. Интегрирование таких уравнений выполнено в [18].

Аналогично (13.а) из определения 1

$$B = \mu^{\tilde{B}} \underline{B} \sim \mu^{\tilde{B}}.$$

Логарифмируя здесь равенство, получим

$$\lg |B| = \tilde{B} \lg \mu + \lg |\underline{B}|.$$

Учитывая, что

$$\underline{B} \sim 1 \Rightarrow \lg |\underline{B}| \ll \tilde{B} \lg \mu$$

найдем приближенное значение показателя интенсивности коэффициента:

$$\tilde{B} = \frac{\lg |B|}{\lg \mu}. \quad (15)$$

Соотношение (15) позволяет достаточно просто оценить вклад коэффициента B в решение. Следует отметить, что оно вносит неустрашимую погрешность в вычисления. Из (15), в частности, следует, что

$$h = 1/100 \iff \mu = 100 \Rightarrow \tilde{B} = \frac{\lg |B|}{2}. \quad (16)$$

Аналогично (14) из (9) получаем простые формулы

$$\varphi_1 = \tilde{B}_{,1} - \tilde{B}, \quad \varphi_2 = \tilde{B}_{,2} - \tilde{B} \quad (17)$$

для определения показателей изменяемости коэффициентов.

Гипотеза (10) утверждает, что внешнее воздействие Q в (3), т. е. создающая неоднородность правая часть уравнений (грузовые члены, возмущения на границах $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$) должно задаваться в классе функций основной гипотезы (8).

Равенство (11) выражает гипотезу об изменяемости НДС, согласно которой зависимости между показателями p_1 , p_2 изменяемости в основной гипотезе (8) представляют собой линейные алгебраические уравнения [2], [8].

Неравенства (12) выражают необходимые условия (НУ) существования основного НДС оболочки с геометрической точки зрения: при их выполнении геометрия оболочки будет достаточной для размещения "рисунка деформации" [11] в ее пределах. При нарушении НУ реализация НДС невозможна. Так, для существования НДС полубезмоментной теории при $h = 1/100$, $\mu = 100$, оболочка должна быть длинной ($p_1 = -1/2 \Rightarrow l_1 = 10$), для НДС обобщенного краевого эффекта она должна иметь среднюю длину ($p_1 = 0 \Rightarrow l_1 = 1$), а область $p_2 < 0$ (рис. 1) оказывается пустой, так как при $\tilde{K}_2 = 0$ длина "рисунка деформации" в этой области больше поперечных размеров оболочки, имеющих порядок $0(1)$.

Асимптотическая погрешность системы уравнений равна наибольшей из погрешностей отдельных уравнений [6]

$$\chi \sim \mu^{-\alpha}, \quad \alpha = \min\{\alpha_i\}, \quad \alpha_i = \tilde{F}_{i\epsilon} - \tilde{F}_{in} > 0, \quad (18)$$

где $\tilde{F}_{i\epsilon}$ и \tilde{F}_{in} — показатели интенсивности ведущих и наибольших из второстепенных (отбрасываемых) членов i -го уравнения.

Постулат Ньютона (5) и гипотезы (8), (9) порождают для однородной существенной подсистемы дифференциальных уравнений (см. [6, с. 131]) асимптотически порядковые линейные алгебраические уравнения

$$Gp = g, \quad (19)$$

где p — матрица-столбец неизвестных p_i , $i = 1, 2, \dots$ для $F\{F_i\}$, $B\{B_i\}$ в (3); G — прямоугольная матрица коэффициентов при p_i ; g — матрица-столбец свободных членов.

Эта система наделяется двумя свойствами: 1) она должна быть совместна по теореме Кронекера–Капелли и 2) она должна сводиться к уравнению (11).

Возможность представления системы (19) в виде равенства (11) является критерием выделения существенной подсистемы из исходной системы дифференциальных уравнений (подробнее см. [6], [2]).

Плоскость параметров p_1, p_2 , в которой выполняются соотношения (5)–(12), (18), (19), названа в [6] областью асимптотической непротиворечивости, а соотношения [2, с. 130]

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + a_{3j} = 0, \quad a_{ij} — \text{числа}, \quad X_j = (\tilde{F}, p_1, p_2), \quad j \in 1 : n, \text{ НУ},$$

$$\tilde{F}(p_1), \alpha(p_1) \text{ или } \tilde{F}(p_2), \alpha(p_2), \overset{o}{\alpha} = \{\alpha_i\}, \alpha_* = \min\{\alpha_i\} \quad (19.1)$$

на плоскости p_1, p_2 определяют графическое построение, названное асимптотическим портретом; векторы X_j содержат информацию о всех функциях F исходной системы в (3).

Асимптотический портрет для цилиндрической оболочки (круговой и некруговой), поперечное сечение которой имеет порядок $0(1)$, т. е. $\tilde{K}_2 = 0$, и трубопровода с малой кривизной оси ($\tilde{k} = -1$) изображен на рис. 1, где α — параметр погрешности в (18).

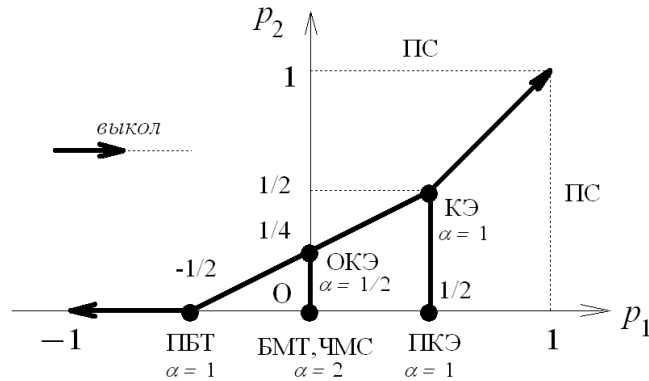


Рис. 1. Асимптотический портрет для цилиндрической оболочки при $\tilde{K}_2 = 0$ и трубопровода при $\tilde{k} = -1$.

Наиболее важными точками на этом портрете являются узлы безмоментной теории (БМТ), чистомоментного состояния (ЧМС), полубезмоментной теории (ПБТ), обобщенного краевого эффекта (ОКЭ) и краевого эффекта (КЭ), а ПС — погранслоем, который выходит за рамки теории тонких оболочек. Именно в узлах асимптотических портретов происходит выделение существенных подсистем из исходной моментной системы дифференциальных уравнений. Такие портреты для тороидальной оболочки с кривизной оси порядка единицы ($\tilde{k} = 0$), оболочки двойкой кривизны типа кривой трубы с $\tilde{k} \in (-1, 0]$ в случаях однородных и неоднородных уравнений, а также при параметрическом подходе к оценке порядка коэффициентов (метод изменения масштаба) представлены в [2], [8].

Точки плоскости p_1, p_2 , в которых выделение укороченных уравнений происходит с наивысшей точностью названы характерными точками, а значения величин

$$\tilde{F}, p\{p_1, p_2\}; \quad \tilde{B}, \varphi\{\varphi_1, \varphi_2\}; \quad \tilde{Q}, \psi\{\psi_1, \psi_2\}; \quad \alpha \quad (20)$$

в этих точках и есть параметры асимптотического интегрирования [21].

Параметры асимптотического интегрирования (ПАИ) представляют собой набор чисел, концентрирующий в себе богатую информацию о качественной оценке НДС [19, 20, 22], включая оболочку произвольной формы. Можно говорить о своеобразной аналогии между ПАИ и

валентностью химических элементов.

При параметрическом подходе к оценке асимптотического порядка коэффициентов эти порядки (они характеризуются показателем \tilde{B} в определении 1) считаются свободными. Для круговой цилиндрической оболочки, уравнения которой имеют постоянные коэффициенты, справедливы формулы

$$K_1 = 0 \sim \mu^{-\infty} \Rightarrow \tilde{K}_1 = -\infty, \quad K_2 = \text{const} \sim \mu^{\tilde{K}_2}, \quad \tilde{K}_2 \in (-\infty, 1), \quad (21)$$

где K_1, K_2 — безразмерные кривизны в продольном ξ и окружном η направлениях. Показатель интенсивности \tilde{K}_2 кривизны K_2 поперечного сечения меняется в широком диапазоне, причем при $\tilde{K}_2 = -\infty, K_2 = 0$ оболочка вырождается в плоскость, при $\tilde{K}_2 = 1$ — в прямую линию, а при $\tilde{K}_2 \approx 1$ имеем капилляр кругового профиля. Если в качестве характерного линейного размера R в (1) принят радиус R_2 поперечного сечения, то

$$K_1 = 0, \quad \tilde{K}_1 = -\infty, \quad K_2 = 1/R_2 = 1 \sim \mu^0 \Rightarrow \tilde{K}_2 = 0. \quad (22)$$

При варьировании \tilde{K}_2 в области (21) справедливо аффинное преобразование координат на рис. 1, в результате чего семейство асимптотических портретов с уменьшением \tilde{K}_2 расширяется, а с увеличением — сжимается, и область допустимых значений p_1, p_2 стягивается в фокус (1,1), который выкалывается (см. [2, рис. 3]).

Обратимся к уравнениям обобщенного краевого эффекта (ОКЭ). Однородное разрешающее уравнение ОКЭ [20] некруговой цилиндрической оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} \mu^2 K_2^2 \frac{\partial^4 \varkappa_2}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^8 \varkappa_2}{\partial \eta^8} &= 0, \\ (2 + 2\tilde{K}_2 + 4p_1) & (8p_2) \\ p_1 = 0, \quad p_2 = 1/4, \quad \tilde{K}_2 = 0, & \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mu = h^{-1}$ — большой параметр; $K_2(\eta)$ — кривизна контура поперечного сечения, т. е. η -линии; \varkappa_2 — параметр изменения кривизны η -линии; ξ и η — продольная и поперечная координаты. Под каждым слагаемым в 1-ой строке оценок записаны показатели изменчивости p_1, p_2 и показатель интенсивности \tilde{K}_2 коэффициента K_2 согласно гипотезам (8), (9).

Используя постулат Ньютона (5), приравняем суммарные показатели в 1-ой строке оценок уравнения (23). Получим следующее асимптотически порядковое уравнение:

$$2 + 2\tilde{K}_2 + 4p_1 = 8p_2 \quad (24)$$

Решение уравнения (24)

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 1/4, \quad \tilde{K}_2 = 0 \quad (25)$$

записано во 2-й строке оценок уравнения (23). Оно определяет узел обобщенного краевого эффекта ОКЭ на рис. 1 при $\tilde{K}_2 = 0$.

Равенство

$$\tilde{K}_2 = 0 \quad (25.1)$$

справедливо для цилиндрической оболочки (круговой и некруговой), поперечное сечение которой имеет порядок $0(1)$. При круговом профиле уравнения имеют постоянные коэффициенты

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 1 \quad (25.2)$$

в (22), а при некруговом

$$K_1 = 0, \quad K_2(\eta) \sim \mu^o, \quad (25.3)$$

и коэффициенты зависят от η .

Разрешающее уравнение (23) получено из системы головных уравнений [7]

$$\begin{aligned} -\varkappa_{2,1} + \tau_{,2} &= 0, & M_2 &= \mu^{-3}\varkappa_2, & M_{2,2} - N_2 &= 0, \\ N_{2,2} - K_2 T_2 &= 0, & T_{2,2} + S_{,1} &= 0, & T_{1,1} + S_{,2} &= 0, \\ \varepsilon_1 &= \mu T_1, & \varepsilon_{1,2} + \lambda_1 &= 0, & -\lambda_{1,2} + K_2 \varkappa_1 &= 0, & \tau_{,1} - \varkappa_{1,2} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где входящие в уравнения безразмерные величины формируют функцию напряженного состояния

$$F = \{\varkappa_2, \tau, M_2, N_2, T_2, S, T_1, \varepsilon_1, \lambda_1, \varkappa_1\}. \quad (26.1)$$

Для системы дифференциальных уравнений (26) при $K_2 = 1$ в (25.2), т. е. для круговой цилиндрической оболочки, на основании по-

стулата Ньютона (5) и гипотез (8), (9) составим асимптотически порядковые уравнения (19) [24]:

$$Gp = g, \quad (26.2)$$

где

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$p = [p_1, p_2, \tilde{\varkappa}_2, \tilde{\tau}, \tilde{M}_2, \tilde{N}_2, \tilde{T}_2, \tilde{S}, \tilde{T}_1, \tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\varkappa}_1]^T, \\ g = [0, -3, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]^T.$$

Здесь T означает операцию транспонирования, т. е. векторы p и g являются векторами-столбцами.

Система (26.2) состоит из 10 уравнений с 12-ю неизвестными. Можно сказать, что она имеет две степени свободы. В силу гипотез (8), (9) показатели p_1, p_2 являются особыми переменными: через них можно выразить все \tilde{F} в (8). Нетрудно убедиться, что для матрицы G размером $m \times n = 10 \times 12$ ранг $r = 10$, разность $m - r = 0$, и дефект матрицы равен нулю. Кроме того, ранги исходной и расширенной матриц одинаковы, следовательно, система асимптотически порядковых уравнений имеет двухпараметрическое семейство решений (параметры p_1, p_2).

Вычеркнем первые три столбца, отвечающие переменным $p_1, p_2, \tilde{\varkappa}_2$. Полученная подматрица размером 10×9 имеет ранг $r = 9$. Вычеркнув из подматрицы 10×9 последнюю (или любую другую) строку, сформируем квадратную матрицу 9×9 . Матрица 9×9 невырожденная и, следовательно, соответствующая этой матрице система 9-ти уравнений

с 9-ю неизвестными имеет единственное решение

$$\tilde{\varkappa}_2, \tilde{\tau} = 0, \tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\varkappa}_1 = -2, \tilde{M}_2, \tilde{N}_2, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S} = -3. \quad (26.3)$$

Для системы (26) при $K_2 = 1$ уравнение (11) определяет на плоскости (p_1, p_2) прямую

$$p_1 - 2p_2 = -1/2, \quad (27)$$

изображенную на рис. 1, а точка

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 1/4 \quad \text{с} \quad \alpha = 1/2 \quad (27.1)$$

на этой прямой представляет собой узел обобщенного краевого эффекта (ОКЭ на рис. 1), в котором точность, характеризуемая величиной α в (18), будет наивысшей для ОКЭ и равной \sqrt{h} .

Значения асимптотических порядков в (26.3), (27.1) являются параметрами асимптотического интегрирования (ПАИ), о которых говорилось выше.

Пусть поперечное сечение некруговой цилиндрической оболочки представляет собой эллипс

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 \quad (27.2)$$

с полуосями a и b при $\widetilde{a/b} = 0$, кривизна которого [26]

$$K_2 = -(a/b)^2 (2/\pi) E(\varepsilon) (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta)^{3/2} \Rightarrow \tilde{K}_2 = 2(\widetilde{a/b}), \quad (28)$$

причем

$$\begin{aligned} K_{2,2} &= -(a/b)^4 (2/\pi)^2 E^2(\varepsilon) (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \beta)^2 \varepsilon^2 \sin 2\beta \Rightarrow \tilde{K}_{2,2} = \\ &= 4(\widetilde{a/b}) = 2\tilde{K}_2, \\ \varphi_2 &= \tilde{K}_{2,2} - \tilde{K}_2 = \tilde{K}_2 = 0, \quad K_1 = 0 \Rightarrow \tilde{K}_1 = -\infty, \quad \varphi_1 = -\infty, \end{aligned}$$

где $E(\varepsilon)$ — эллиптические интегралы Лежандра, $\tilde{B}\{\tilde{K}_1, \tilde{K}_2\}$ — показатели интенсивности, φ_1, φ_2 — показатели изменчивости.

Для рассматриваемой задачи постулат Вишика–Люстерника (6) выполнен, так как

$$\varphi_1 = -\infty < p_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0 < p_2 = 1/4. \quad (28.1)$$

3. Постулат Лява. Полная краевая задача

Согласно (7) полная краевая задача (ПКЗ) расчленяется на главную и дополнительные краевые задачи (ГКЗ и ДКЗ):

$$\text{ПКЗ} = \text{ГКЗ} + \text{ДКЗ}, \quad (28.2)$$

т. е. сложное НДС можно рассматривать как совокупность более простых НДС.

Теория тонких оболочек Лява–Кирхгофа описывается системой двумерных дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка по переменным ξ и η .

Определение 2 [7]. Суммарным порядком уравнения с частными производными назовем сумму порядков этого уравнения по соответствующим переменным.

Так, например, суммарный порядок уравнения (23) равен 12. Суммарный порядок уравнений тонкой оболочки Лява–Кирхгофа произвольной формы равен 16.

В ряде случаев решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно искать в виде функций

$$F = \mu^{\tilde{F}} A \exp(\mu^{p_1} a \xi + \mu^{p_2} b \eta), \quad (29)$$

удовлетворяющих условиям основной гипотезы (8), где $A(\xi, \eta) \sim \mu^o$ — произвольная функция интегрирования, а показатели изменчивости p_i связаны линейным алгебраическим уравнением (11).

Случай переменных коэффициентов, связанный с их "замораживанием–размораживанием" и привлечением метода фазовых интегралов, рассматривается в работе [18].

Значения $a = \text{fix}$, $b = \text{fix}$ предопределяются характером заданной краевой нагрузки, причем

$$a = \text{fix} \Rightarrow F^a = F \Big|_{a=\text{fix}}, \quad b = \text{fix} \Rightarrow F^b = F \Big|_{b=\text{fix}}, \quad (29.1)$$

где F^a, F^b — семейства частных интегралов.

Подстановка функции F в дифференциальное уравнение дает характеристическое уравнение, корни которого $a_r, r \in 1 : m$ находятся при фиксированном значении $b = \text{fix}$, а корни $b_r, r \in 1 : k$ — при $a = \text{fix}$.

Для круговой цилиндрической оболочки уравнения простого и обобщенного краевых эффектов [7] (ПКЭ и ОКЭ на рис. 1) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial^4 \varkappa_1 / \partial \xi^4 + \mu^2 \varkappa_1 = 0, \quad \partial^8 \varkappa_2 / \partial \eta^8 + \mu^2 \partial^4 \varkappa_2 / \partial \xi^4 = 0, \\ 4p_1 = 2 \qquad \qquad \qquad 8p_2 = 2 + 4p_1, \end{aligned} \quad (29.2)$$

где с учетом (23), (24) под каждым уравнением записаны асимптотически порядковые уравнения, из которых следует, что

$$p_1 = 1/2 \quad \text{для ПКЭ}, \quad p_1 - 2p_2 = -1/2 \quad \text{для ОКЭ}. \quad (29.3)$$

Определение 3 [7]. Общим интегралом уравнения в частных производных назовем функцию, в которой число произвольных функций интегрирования равно суммарному порядку уравнения, а ее подстановка в исходное уравнение обращает его в тождество.

В силу этого определения и соотношений (29.1) общий интеграл

$$F = F^a + F^b. \quad (30)$$

С учетом формул (29), (29.1), (30) общие интегралы для первого уравнения (29.2) при $p_1 = 1/2$, $p_2 = 0$ в (29.3) имеют вид

$$\varkappa_1 = \sum_{r=1}^4 A_r e_r, \quad e_r = \exp(\mu^{1/2} a_r \xi + b \eta), \quad a_r^4 + 1 = 0 \Rightarrow a_r, \quad b = \text{fix}, \quad (30.1)$$

а для второго уравнения при $p_1 = 0$, $p_2 = 1/4$ в соответствии с (25), (29.3)

$$\varkappa_2 = \varkappa_2^a + \varkappa_2^b = \sum_{r=1}^8 A_r^a e_r^a + \sum_{r=1}^4 A_r^b e_r^b, \quad (30.2)$$

где

$$\begin{aligned} e_r^a = \exp(a \xi + \mu^{1/4} b_r \eta), \quad b_r^8 + a^4 = 0 \Rightarrow b_r, \quad a = \text{fix}, \\ e_r^b = \exp(a_r \xi + \mu^{1/4} b \eta), \quad a_r^4 + b^8 = 0 \Rightarrow a_r, \quad b = \text{fix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим однородную задачу в прямоугольной области изменения криволинейных координат. Если краевая нагрузка приложена к торцам замкнутой оболочки, то произвольные функции $A_r = A_r^b$ определяются из граничных условий при $\xi = \text{const}$ и имеет место случай $b = \text{fix}$.

Для открытой оболочки добавляется возможность приложения краевой нагрузки при $\eta = \text{const}$. Тогда

$$F = F^a + F^b \quad \text{и} \quad F = F^b \quad (31)$$

для открытой (16 произвольных функций) и замкнутой (8 произвольных функций) оболочек соответственно.

Формальное решение представляется бесконечным асимптотическим рядом

$$F = \mu^{\tilde{F}} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n\rho} A^{(n)} e, \quad e = \exp(\mu^{p_1} a\xi + \mu^{p_2} b\eta), \quad (31.1)$$

где n — номер итерации, ρ — число, определяющее ее шаг.

Многие задачи теории оболочек сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений путем разделения переменных. Метод асимптотического интегрирования [18] может использоваться и в тех случаях, когда переменные не разделяются, так как произвольная функция

$$A^{(n)} = A^{(n)}(\xi, \eta), \quad (31.2)$$

зависит от двух переменных.

Числа n, ρ выбираются так, чтобы порядок отбрасываемого (подчеркнутого) члена α_p отрезка ряда

$$F = \mu^{\tilde{F}} \left(A^{(0)} + \mu^{-\rho} A^{(1)} + \dots \underline{\mu^{-\alpha_p} A^{(n)}} \right) e, \quad \alpha_p = n\rho \quad (31.3)$$

не превосходил погрешности уравнений α , определяемой по формуле (18). Принимать $\alpha_p > \alpha$, т. е. строить решение уравнений точнее самих уравнений, не имеет смысла.

В нулевом приближении главный член асимптотики совпадает с (29), если отбросить индекс (о).

Наибольший интерес представляет интегрирование в характерных точках наивысшей точности при

$$\alpha_p = n\rho = \alpha \quad (32)$$

В этом случае погрешность решения равна погрешности уравнений.

Частным случаем решения (29) является полиномиально-экспоненциальная форма

$$F = \mu^{\tilde{F}} P(\xi) \exp(\mu^{p_2} b \eta), \quad p_1 = 0, \quad p_2 < 1/4, \quad (33)$$

где $P(\xi)$ — многочлен от ξ , коэффициенты которого являются произвольными функциями интегрирования. Такая форма используется при интегрировании уравнений безмоментной теории и чистомоментного состояния.

В [5] показано, что при постановке краевой задачи возможно появление линейной зависимости главных членов у разных функций, в которых формулируются граничные условия главной (ГКЗ) и дополнительной (ДКЗ) краевых задач. Это заставляет по-новому взглянуть на роль малых членов, которые могут играть существенную роль при формировании краевых условий. В ряде случаев сформулировать полную задачу без учета второстепенных членов не удается [5].

Постановку полной краевой задачи (28.2) целесообразно осуществлять в два этапа:

1) выявление линейной зависимости асимптотических интегралов для главной и дополнительной краевых задач и коррекцию краевых условий при обнаружении такой зависимости путем введения линейных комбинаций функций ГКЗ и ДКЗ [5];

2) сравнение интенсивностей входящих в откорректированные краевые условия функций отдельно для основного и местного напряженных состояний, отбрасывание второстепенных членов и формирование полных (главных и дополнительных) краевых условий.

Погрешность приближенной теории (ПТ) определяется погрешностью укороченных уравнений и укороченных краевых условий (КУ):

$$\alpha_{\text{ПТ}} = \min \{ \alpha, \alpha_{\text{КУ}} \}$$

где α вычисляется по (18) и аналогично (32) принимается

$$\alpha_{\text{КУ}} = \alpha.$$

Результирующая погрешность полной краевой задачи (КЗ) зависит от погрешности тех j -х приближенных теорий (главной и дополнительной краевых задач), которые порознь описывают характерные состоя-

ния, т. е.

$$\alpha_{\text{КЗ}} = \{\alpha_{\text{ПТ}j}\}.$$

На основе изложенного в п.п. 2,3, в работе [7] решена серия полных краевых задач. В аннотации к статье отмечается "разработан новый метод решения краевых задач ...". Новизна метода заключается в применении постулата Лява (7) на основе асимптотических портретов (19.1) с определением всех 16 произвольных функций интегрирования в (31). В силу (7) возникает необходимость "сшивания" асимптотик, что возможно лишь при одинаковой изменчивости общих интегралов ГКЗ и ДКЗ, а это наглядно и достаточно просто осуществить по асимптотическому портрету типа рис. 1. Без такого портрета сформировать ДКЗ, полагаясь только на интуицию, затруднительно.

4. Заключение

Отметим два фактора, сопровождающих становление метода [1].

1. В методе А.Л. Гольденвейзера [11, с. 163, 410] большой параметр задается в форме

$$\mu = h^{-p} \Rightarrow 0 < p < 1,$$

и при $p < 0$ параметр μ перестает быть большим, так что метод [11] пригоден только при положительных значениях показателей p изменчивости напряженного состояния. Область $p \geq 1$ на рис. 1, как отмечалось, принадлежит погранслою.

В методе [1], [6] большой параметр задается в форме (2)

$$\mu = h^{-1}$$

независимо от показателя $p\{p_1, p_2\}$. Как величина, обратная малому параметру h параметр μ всегда большой. По этой причине метод [1] справедлив как при положительных, так и при отрицательных $p\{p_1, p_2\}$, точнее

$$\mu = h^{-1} \Rightarrow -\infty < p < 1.$$

На конкретном примере классической краевой задачи Кармана об изгибе кривой трубы была доказана принципиальная возможность рас-

пространения асимптотических методов на область отрицательных показателей изменчивости напряженного состояния: на основе полубезмоментной теории при $p_1 = -1/2$ получено решение этой задачи в замкнутом виде [17].

Асимптотический портрет (19.1) на рис. 1 справедлив для цилиндрической оболочки, поперечное сечение которой имеет порядок единицы ($\tilde{K}_2 = 0$) и при круговом профиле $K_2 = 1$, а при некруговом $K_2 = K_2(\eta)$. Этот портрет остается справедливым для трубопровода малой кривизны оси с оценкой параметра интенсивности торового параметра $\tilde{k} = -1$, обоснованной в [2], [19].

Отметим, что в разработанном методе экспоненциальная форма (22) главного члена асимптотического ряда (31.1) существенно упрощает операции дифференцирования (интегрирования), сводя их к элементарным арифметическим операциям умножения (деления) на величины a или b . Можно говорить, что в классе экспонент метод интегрирования [18] по своим целям напоминает операционное исчисление, подменяя более сложную математическую операцию более простой.

Изложенная в п. 2 аксиоматика, включая постановку и решение полной краевой задачи, сохраняет свою силу при исследовании уравнений теоретической и прикладной механики [9], а также в задачах математической физики [3]. В класс функций основной гипотезы (8) вошли экспоненты и полиномы в теоремах [8], ряды Фурье в [17], эллиптические функции Лежандра в [7] и др.

Разумеется, метод [1] не является универсальным. Разрывные коэффициенты, точки перегиба, вырезы, изломы, отверстия, косые срезы, сосредоточенные силы, начальные несовершенства, линии искажения, полюсные линии, точки поворота и другие особенности аналитического или геометрического характера считаются отсутствующими, а при их наличии, то есть во всех особых случаях, метод [1] дает решение в области, находящейся в некотором удалении от этих особенностей. Коротко: метод [1] справедлив во всех случаях (назовем его общим), кроме особых. В особых случаях необходимо выполнение специального исследования, дополняющего общий случай.

2. "Метод порядковых уравнений" изложен в [25, с. 155-159], где эти уравнения составляются отдельно для функций ε_i и их производных ε_{ij} .

В принятых здесь обозначениях речь идет об изолированном составлении уравнений отдельно для \tilde{F} и отдельно для p в основной гипотезе (8). Далее утверждается [25, с. 157], что "нужно следить только за порядками, а не за коэффициентами". Иначе говоря, надо учитывать только \tilde{F} , а влиянием коэффициентов, т. е. \tilde{B} и φ в гипотезе (9) можно пренебречь. Такое выхолащивание информации из порядковых уравнений вряд-ли можно считать оправданным. Возможно, в простейших случаях это дает положительные результаты. Но в общем случае надо составлять асимптотически порядковое уравнение (19), которое удерживает всю информацию, которая содержится в гипотезах (8)–(10). В развернутом частном случае такая информация имеется в (23)–(25), (26.2), (26.3), (27) и (27.1).

Указатель литературы

1. Квасников Б.Н. Асимптотический метод построения и решения укороченных уравнений и краевых задач в теории тонких оболочек. Автореферат дисс. докт. физ.-мат наук. Новосибирск. 1989. 49 с.
2. Квасников Б.Н. К проблеме построения приближенных методов расчета в теории тонких оболочек // Динамика и устойчивость механических систем. (Прикл. мех. Вып. 6). Л.: Изд. ЛГУ. 1984. С. 126–138.
3. Квасников Б.Н. Укороченные уравнения в задачах математической физики // Международная научная конференция по механике. Четвертые Поляховские чтения. Тезисы докладов. СПб.: Изд-во "ВВМ". 2006. С. 200.
4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука. 1995. 320 с.
5. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1979. 384 с.
6. Квасников Б.Н. Асимптотический метод построения и решения укороченных уравнений тонких оболочек // Колебания и устойчивость механических систем. (Прикл. мех. Вып. 5). Л.: Изд. ЛГУ. 1981, С. 187–218.
7. Квасников Б.Н. Об одном подходе к решению краевых задач в теории тонких оболочек // Динамика и устойчивость механических систем. (Прикл. мех. Вып. 9). СПб.: Изд. СПбГУ. 1995. С. 192–209.

8. *Квасников Б.Н.* Теоремы аппроксимации и существования в теории тонких оболочек // Международн. научн. конфер. по механике "Третьи Поляховские чтения". Избранные труды. СПб.: Изд. СПбГУ. 2003. С. 261–266.
9. *Квасников Б.Н.* Аксиоматика асимптотически порядкового анализа уравнений теоретической и прикладной механики // Международн. конфер. "Четвертые Окуневские чтения". Симпозиум "Пуанкаре и проблемы нелинейной механики". Тезисы докладов. СПб.: БГТУ, 2004. С. 141–142.
10. *Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б.* Асимптотические методы в примерах и задачах. СПб.: Изд. СПбГУ. 1997. 276 с.
11. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
12. *Квасников Б.Н.* Оценка погрешности в некоторых задачах теории колебаний. Л. 1993. 51 с.
13. *Ньютон И.* Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. В кн.: Математические работы. М., 1937, С. 33–34.
14. *Граве Д.А.* Элементы высшей алгебры. Киев. 1914. 313 с.
15. *Абрамов Л.М.* Математическое программирование. Л.: Изд. ЛГУ. 1981. 328 с.
16. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15, вып. 4(94). С. 27–95.
17. *Квасников Б.Н.* Об одном случае асимптотического интегрирования уравнений теории оболочек при отрицательных показателях изменчивости напряженного состояния // Прикладная механика. Л.: Изд. ЛГУ, 1979. Вып. 4. С. 198–210.
18. *Квасников Б.Н.* Интегрирование уравнений тонких упругих оболочек с быстро- и медленноменяющимися коэффициентами // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. (Прикл. мех. Вып. 8). Л.: Изд. ЛГУ. 1990. С. 163–172.
19. *Квасников Б.Н.* Об условиях существования полубезмоментного напряженного состояния // Труды Ленингр. ин-та инж. ж.-д.

- транспорта. Л., 1977. Вып. 407. С. 140–152.
20. *Квасников Б.Н.* Условия существования напряженного состояния обобщенного краевого эффекта // К 90-летию со дня рождения профессора Н.Н. Поляхова. (Прикл. мех. Вып. 10). СПб.: Изд. СПбГУ. 1997. С. 149–158.
 21. *Квасников Б.Н.* Аналитический метод определения параметров асимптотического интегрирования // Статич. и динамич. задачи расчета сложных строит. конструкций. Л. 1989. С. 80–83.
 22. *Квасников Б.Н.* Качественная оценка напряженного состояния тонкой оболочки по параметрам асимптотического интегрирования // Вторые Поляховские чтения. Избран. труды. СПб.: Изд. СПбГУ. 2000. С. 266–277.
 23. *Аксельрад Э.Л., Квасников Б.Н.* Подубезмоментная теория криволинейных стержней-оболочек // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1974. N 2. С. 139–147.
 24. *Квасников Б.Н.* Аналитический метод определения параметров асимптотического интегрирования в теории тонких оболочек // Статич. и динамич. задачи расчета сложных строит. конструкций. Л. 1989. С. 80–93.
 25. *Андреанов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.* Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 304 с.
 26. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. М.-Л. 1948. 420 с.
 27. *Аксельрад Э.Л., Ильин В.П.* Расчет трубопроводов. Л., 1972. 240 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРЯЖЕННОЙ С КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

М.Е.КОВЧЕНКО, С.Б.ФИЛИППОВ

1. Введение

С помощью асимптотических методов исследована устойчивость под действием равномерного внешнего давления тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутом. В этой задаче величина критического давления существенно зависит от жесткости шпангоута на изгиб в его плоскости. Ранее эта жесткость вычислялась с использованием стержневой модели шпангоута [1]. В этом случае при увеличении ширины шпангоута жесткость быстро возрастает и в пределе стремится к бесконечности. В действительности, как показывают исследования более точной пластиночной модели шпангоута, с увеличением ширины шпангоута его жесткость приближается к конечному пределу. Величина этого предела была найдена и использована при приближенном вычислении критического давления в работе [2]. В данной работе для жесткости кольцевой пластины получена общая формула, которая при уменьшении ширины пластины превращается в формулу, соответствующую стержневой модели, а при увеличении ширины стремится к найденному в [2] предельному значению. На основании этой формулы разработан алгоритм приближенного определения критического давления для шпангоутов любой ширины.

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 04-01-00257.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим задачу о потере устойчивости безмоментного напряженного состояния цилиндрической оболочки, подкрепленной по краю кольцом, под действием равномерного бокового внешнего давления p (рис. 1). Предположим, что оболочка и кольцевая пластина изготовлены из одного и того же материала, кольцо имеет прямоугольное поперечное сечение.

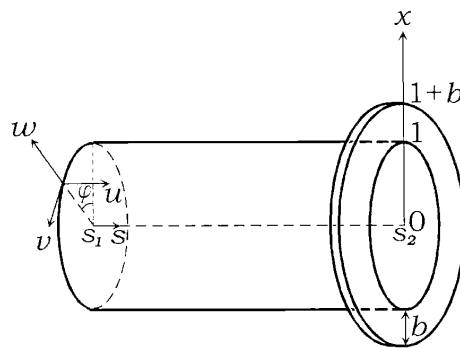


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка, подкрепленная кольцом.

Выберем за единицу длины радиус цилиндрической оболочки R и введем на срединной поверхности цилиндрической оболочки безразмерную координату s — длину дуги меридиана, на срединной поверхности пластины — радиальную координату x , а также координату $\varphi \in [0, 2\pi]$ — угол в окружном направлении. Для цилиндрической оболочки $s \in [s_1, s_2]$, для пластины $x \in [1, 1 + b]$, где b — безразмерная ширина кольцевой пластины. Окружность $s = s_2$, $x = 1$ является параллелью сопряжения пластины и оболочки. Цилиндрическая оболочка и кольцевая пластина имеют безразмерные толщины h и a .

После разделения переменных систему уравнений устойчивости ци-

линдрической оболочки запишем в безразмерном виде [1], [3]:

$$\begin{aligned}
T_1' + mS &= 0, & S' - mT_2 + Q_2 + 2H' &= 0, \\
Q_1' + mQ_2 - T_2 + \lambda m\vartheta_2 &= 0, \\
\vartheta_1 = -w', & \vartheta_2 = mw + v, & Q_1 = M_1' + 2mH, & Q_2 = -mM_2, \\
M_1 = \mu^4(\vartheta_1' + \nu m\vartheta_2), & M_2 = \mu^4(m\vartheta_2' + \nu\vartheta_1'), & H = \mu^4(1 - \nu)\vartheta_2', \\
T_1 = u' + \nu(w + mv), & T_2 = w + mv + \nu u', & S = \frac{1 - \nu}{2}(v' - mu),
\end{aligned} \tag{1}$$

где штрих означает дифференцирование по s , m — число волн по параллели, Q_1, Q_2, T_1, T_2, S — усилия, M_1, M_2, H — моменты, ϑ_1, ϑ_2 — углы поворота, u, v, w — проекции перемещений точек срединной поверхности, $\lambda = \sigma\rho/(Eh)$ — искомый параметр нагружения, $\sigma = (1 - \nu^2)$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Величины, характеризующие цилиндрическую оболочку, будем снабжать верхним индексом (1), а величины описывающие кольцевую пластину — верхним индексом (2). Верхний индекс не будет использоваться в тех случаях, когда из контекста ясно, оболочку или пластину характеризует соответствующая переменная.

Предположим, что край оболочки $s = s_1$ заделан, а край пластины $x = 1 + b$ свободен. В этом случае граничные условия имеют вид

$$u^{(1)} = v^{(1)} = w^{(1)} = \vartheta_1^{(1)} = 0, \quad s = s_1, \tag{2}$$

$$T_1^{(2)} = M_1^{(2)} = S^{(2)} = Q_1^{(2)} = 0, \quad x = 1 + b,$$

Кроме того, для цилиндрической оболочки и кольцевой пластины, сопряженных по параллели $s = s_2, x = 1$, должны быть выполнены условия непрерывности перемещений, усилий, угла поворота ϑ_1 и момента M_1 [1]:

$$\begin{aligned}
u^{(2)} = w^{(1)}, & w^{(2)} = -u^{(1)}, & T_1^{(2)} = \frac{h}{a}Q_1^{(1)}, & Q_1^{(2)} = -\frac{h}{a}T_1^{(1)}, \\
v^{(2)} = v^{(1)}, & \vartheta_1^{(2)} = \vartheta_1^{(1)}, & M_1^{(2)} = \frac{h}{a}M_1^{(1)}, & S^{(2)} = \frac{h}{a}S^{(1)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Предположим, что жесткость пластины на изгиб равна нулю, а жесткость на растяжение бесконечна. В этом случае

$$M_1^{(2)} = Q_1^{(2)} = 0, \quad u^{(2)} = v^{(2)} = 0,$$

и граничные условия на краю $s = s_2$ цилиндрической оболочки приобретают вид условий шарнирного опирания:

$$v^{(1)} = w^{(1)} = T_1^{(1)} = M_1^{(1)} = 0. \quad (4)$$

С уменьшением толщины пластины уменьшается как ее жесткость на изгиб, так и ее жесткость на растяжение. Будем считать, что пластина достаточно тонкая, поэтому она не сопротивляется изгибу, но имеет конечную жесткость на растяжение. Тогда, как и в случае шарнирного опирания, из равенств $M_1^{(2)} = Q_1^{(2)} = 0$ следуют условия

$$T_1^{(1)} = M_1^{(1)} = 0, \quad (5)$$

но вместо условий $v^{(1)} = w^{(1)} = 0$ на параллели сопряжения $s = s_2$, $x = 1$ имеем равенства

$$w^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad S^{(1)} = \frac{a}{h} S^{(2)}, \quad Q_1^{(1)} = \frac{a}{h} T_1^{(2)}, \quad (6)$$

Граничные условия на краю оболочки $s = s_2$ можно получить из условий сопряжения (6), решив задачу о деформации пластины в ее плоскости.

3. Граничные условия на параллели сопряжения

Деформацию кольцевой пластины в ее плоскости (рис. 2) описывают

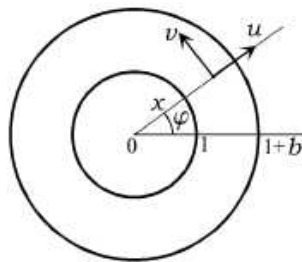


Рис. 2. Система координат на кольцевой пластине.

безразмерные уравнения [2]:

$$\begin{aligned}
T_1' + \frac{1}{x}(T_1 - T_2) + \frac{m}{x}S &= 0, & S' + \frac{2}{x}S - \frac{m}{x}T_2 &= 0, \\
T_1 &= u' + \nu \left(\frac{m}{x}v + \frac{u}{x} \right), & T_2 &= \frac{m}{x}v + \frac{u}{x} + \nu u', \\
S &= \frac{1-\nu}{2} \left(v' - \frac{v}{x} - \frac{m}{x}u \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

После замены переменной $x = e^t$ в (7) получим систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dt^2} - u - \gamma m^2 u + \delta m \frac{dv}{dt} - (1 + \gamma)mv &= 0, \\
\gamma \frac{d^2v}{dt^2} - \gamma v - m^2 v + \delta m \frac{du}{dt} - (1 + \gamma)mu &= 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}
u^{(2)} &= C_1 x^{m-1} + a_1 C_2 x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + a_2 C_4 x^{-m+1}, \\
v^{(2)} &= -C_1 x^{m-1} + b_1 C_2 x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + b_2 C_4 x^{-m+1},
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma &= (1 - \nu)/2, & \delta &= (1 + \nu)/2, & a_1 &= 2\gamma/(\delta m) - 1, \\
a_2 &= 2\gamma/(\delta m) + 1, & b_1 &= 2/(\delta m) + 1, & b_2 &= 1 - 2/(\delta m).
\end{aligned}$$

Подстановка формул (9) в (7) дает следующие выражения для усилий:

$$\begin{aligned}
T_1^{(2)} &= 2C_1 \gamma (m-1)x^{m-2} - 2C_2 \gamma \frac{(m+1)(m-2)}{m} x^m - \\
&\quad - 2\gamma(m+1)C_3 x^{-m-2} - 2C_4 \gamma \frac{(m-1)(m+2)}{m} x^{-m}, \\
S^{(2)} &= -2C_1 \gamma (m-1)x^{m-2} + 2C_2 \gamma (m+1)x^m - \\
&\quad - 2\gamma(m+1)C_3 x^{-m-2} - 2C_4 \gamma (m-1)x^{-m}.
\end{aligned} \tag{10}$$

На свободном крае пластины при $x = 1 + b$

$$T_1^{(2)} = S^{(2)} = 0. \tag{11}$$

Путем подстановки выражений (9) и (10) в первые два равенства (6) и условия (11) получаем систему четырех линейных алгебраических

уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{aligned}
 C_1 + a_1 C_2 + C_3 + a_2 C_4 &= w^{(1)}(s_2), \\
 -C_1 + b_1 C_2 + C_3 + b_2 C_4 &= v^{(1)}(s_2), \\
 m(m-1)\beta^m C_1 - (m+1)(m-2)\beta^{m+1} C_2 - \\
 -m(m+1)C_3 - (m-1)(m+2)\beta C_4 &= 0, \\
 -(m-1)\beta^m C_1 + (m+1)\beta^{m+1} C_2 - \\
 -(m+1)C_3 - (m-1)\beta C_4 &= 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\beta = (1+b)^2.$$

Выразим C_i через перемещения края оболочки $w^{(1)}(s_2)$ и $v^{(1)}(s_2)$, решив систему (12). Подставим выражения для C_i в два последних равенства (6). В результате получим два граничных условия на краю оболочки $s = s_2$:

$$\begin{aligned}
 S &= -2a\gamma\delta[(B_1 + mB_2)w + (D_1 + mD_2)v]/(hD), \\
 Q_1 &= -2a\gamma\delta[(mB_1 + B_2)w + (mD_1 + D_2)v]/(hD),
 \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \beta(\beta^{2m} - 1) - 2mb(b+2)\beta^m, \\
 B_2 &= \beta(\beta^m + 1)^2 - 4\beta^m - \delta\beta(\beta^m - 1)^2 + \delta m^2 b^2 (b+2)^2 \beta^m, \\
 D_1 &= \gamma\delta(\beta^m - 1)^2 + \delta m^2 b^2 (b+2)^2 \beta^m, \\
 D_2 &= \beta(\beta^{2m} - 1) + 2mb(b+2)\beta^m, \\
 D &= \gamma[4\beta^m + \delta\beta(\beta^m - 1)^2] + \delta[\beta(\beta^m + 1)^2 + \delta m^2 b^2 (b+2)^2 \beta^m].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Граничные условия (5), (13) учитывают жесткость пластины в ее плоскости и представляют собой обобщение условий шарнирного опирания (4).

4. Приближенное решение краевой задачи

Известно, что форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием внешнего давления имеет большое число волн по параллели [3]. Будем искать формы потери устойчивости цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной, для которых $m \sim h^{-1/4}$.

Любую неизвестную функцию y из системы (1) можно представить в виде суммы основного полубезмоментного решения y_p и простого краевого эффекта y_k [1], [3]:

$$y \simeq m^a y_p + m^b y_k, \quad y_p = y_0 + m^{-2} y_1 + \dots,$$

где a и b — показатели интенсивности. Функции y_k являются линейными комбинациями четырех приближенных решений системы (1) два из которых быстро убывают при удалении от края оболочки, а два других — при удалении от параллели сопряжения.

Уравнение для определения приближенного значения λ_0 параметра критического давления λ имеет вид

$$\frac{d^4 v_0}{ds^4} - \alpha^4 v_0 = 0, \quad \alpha^4 = \frac{\lambda_0 m^6 - \mu^4 m^8}{\sigma}, \quad (15)$$

где $\mu^4 = h^2/12$ — малый параметр,

$$w_0 = -v_0, \quad u_0 = v_0', \quad T_{10} = \sigma v_0'', \quad S_0 = -\sigma v_0'''.$$

Граничные условия для уравнения (15) находятся после разделения условий краевой задачи на главные и дополнительные [3]. Из главных условий путем отбрасывания второстепенных членов получают приближенные граничные условия для уравнения (15).

Обозначим Δ разность между наибольшими показателями интенсивности главного члена полубезмоментного решения и краевого эффекта в граничном условии. Тогда

1) величины Δ для двух главных граничных условий должны быть строго больше, чем для двух дополнительных,

2) в главных условиях должны быть линейно независимы главные члены основного решения, а в дополнительных — функции краевого эффекта.

Если требования 1 или 2 не выполняются, то можно попытаться составить линейные комбинации граничных условий, удовлетворяющие этим требованиям [3].

Для условий жесткой заделки (2)

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad s = s_1$$

с учетом формул

$$\begin{aligned} u &= m^{-2}u_0 + m^{-4}u_1 + m^{-4}u_k, & v &= m^{-1}v_0 + m^{-3}v_1 + m^{-5}v_k, \\ w &= w_0 + m^{-2}w_1 + m^{-2}w_k, & \vartheta_1 &= \vartheta_{10} + \vartheta_{1k}. \end{aligned}$$

имеем

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 4, \quad \Delta_3 = 2, \quad \Delta_4 = 0.$$

Эти условия нельзя разделить на главные и дополнительные так, чтобы требование 1 выполнялось. Используя равенство $w_0 = -v_0$ можно получить пятое условие с $\Delta_5 = 0$, составив линейную комбинацию второго и третьего условий:

$$w - mv = m^{-2}(w_1 + w_k) + \dots = 0.$$

Выберем в качестве главных и дополнительных условий $u = 0$, $v = 0$ и $\vartheta_1 = 0$, $w - mv = 0$ соответственно. Для этого набора условий выполнены оба требования. Отбросив в условия $u = 0$ и $v = 0$ второстепенные члены, получим следующие граничные условия нулевого приближения для уравнения (15):

$$u_0 = v_0 = 0, \quad s = s_1, \tag{16}$$

Встречаются и такие ситуации, когда составление линейных комбинаций граничных условий не позволяет разделить условия на главные и дополнительные. В этом случае используются так называемые улучшенные условия нулевого приближения [1].

Ввиду того, что

$$T_1 \simeq m^{-2}T_{10} + m^{-4}T_{1k}, \quad M_1 \simeq m^{-6}(M_{10} + M_{1k}),$$

для условий (5) имеем $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 0$, поэтому первое из них, $T_1 = 0$, можно выбрать в качестве главного условия, а второе, $M_1 = 0$, — в качестве дополнительного. Соответствующее $T_1 = 0$ условие нулевого приближения имеет вид

$$T_{10}(s_2) = 0. \tag{17}$$

5. Асимптотический анализ условий сопряжения

Для граничных условий (13) величины Δ зависят от порядков толщины пластины a и ее ширины b . Пусть

$$a = a_0 m^{-\xi}, \quad b = b_0 m^{-\eta}, \quad a_0 \sim b_0 \sim 1.$$

Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta^m = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + b_0/m^\eta)^{2m} = \begin{cases} 1, & \eta > 1, \\ \infty, & \eta < 1, \end{cases} \quad (18)$$

Проанализируем условия (13) в случае $\eta > 1$, т. е. при $b \ll m^{-1}$. Приближенное выражение

$$\beta^m \simeq 1 + 2mb + \frac{2m(2m-1)b^2}{2} + \frac{2m(2m-1)(2m-2)b^3}{6}$$

подставим в формулы (14). Отбросив второстепенные члены, получим

$$\begin{aligned} B_1 &\simeq 4mb^2 + 8m^3b^3/3, & D_1 &\simeq 4m^2b^2, \\ B_2 &\simeq 8b + 4m^2b^2, & D_2 &\simeq 8mb, & D &\simeq 4. \end{aligned}$$

При выводе данных формул происходит взаимное уничтожение главных членов, поэтому в разложении для β^m необходимо удерживать не менее четырех слагаемых.

Составим линейные комбинации условий (13)

$$\begin{aligned} S - mQ_1 &= 2a\gamma\delta(m^2 - 1)(B_1w + D_1v)/(hD), \\ Q_1 - mS &= 2a\gamma\delta(m^2 - 1)(B_2w + D_2v)/(hD), \end{aligned} \quad (19)$$

и заменим в них коэффициенты B_i , D_i , D их приближенными выражениями. Тогда с учетом формулы $4\gamma\delta = \sigma$ граничные условия (19) после отбрасывания малых слагаемых можно записать в виде

$$\begin{aligned} S - mQ_1 &= em^3F_c(w + mv + em^2w) + J_x m^5w, \\ Q_1 - mS &= m^2F_c(w + mv + em^2w), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$e = \frac{b}{2}, \quad F_c = \frac{\sigma ab}{h}, \quad J_x = \frac{\sigma ab^3}{12h}.$$

В монографии [1] на с. 63 приведены условия сопряжения цилиндрической оболочки со стержнем. Если предположить, что стержень имеет прямоугольное поперечное сечение шириной a и высотой b , и пренебречь жесткостью стержня на изгиб из плоскости и кручение, то условия сопряжения [1] совпадут с условиями (5), (20). Параметр e называется эксцентриситетом, величины F_c и J_c пропорциональны площади поперечного сечения стержня и моменту инерции поперечного сечения соответственно.

Анализ порядков главных членов в условиях сопряжения стержня и оболочки показывает, что при $\xi = \eta = 3$ не удастся составить линейные комбинации этих условий, удовлетворяющие требованиям 1 и 2. Для случая $\xi = \eta = 3$ в [1] получены улучшенные условия нулевого приближения. Если в этих условиях положить равными нулю параметры J_y и J_k , пропорциональные жесткостям стержня на изгиб из плоскости и кручение, то они примут вид

$$S_0 + c_b v_0 = 0, \quad T_{10} = 0, \quad s = s_2, \quad (21)$$

где величина

$$c_b = m^8 \left(J_x + \frac{e^2 F_c}{1 + d} \right), \quad d = \frac{m^2 F_c}{2q^3 K^4}, \quad q = \frac{\sigma^{1/4}}{\sqrt{2}K}, \quad K = \mu m^2. \quad (22)$$

пропорциональна жесткости стержня на изгиб в плоскости, причем $c_b \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow \infty$.

Улучшенные условия (5) годятся не только в случае $\xi = \eta = 3$. В [1] показано, что в задачах о сопряжении стержня и оболочки их можно использовать в качестве граничных условий нулевого приближения при любых положительных значениях ξ и η . Однако, как свидетельствует формула (18), условиями сопряжения стержня и оболочки (20) нельзя пользоваться при $\eta < 1$. Дело в том, что при $b \gg m^{-1}$ шпангоут становится слишком широким и должен рассматриваться как кольцевая пластина. Следовательно, при $\eta < 1$ не годятся и улучшенные условия (21).

6. Улучшенные условия сопряжения оболочки и пластины

Выведем улучшенные условия на параллели сопряжения в общем случае. Для этого неизвестные функции, входящие в граничные условия (13) и во второе условие (5), представим в виде суммы главных членов основного состояния и краевого эффекта:

$$\begin{aligned} S &= m^{-3}(S_0 + S_k), & Q_1 &= m^{-6}Q_{10} + m^{-4}Q_{1k}, \\ w &= w_0 + m^{-2}w_k, & v &= m^{-1}v_0 + m^{-5}v_k, \\ M_1 &= m^{-6}(M_{10} + M_{1k}). \end{aligned} \quad (23)$$

Предположим, что $l = s_2 - s_1 \sim 1$, т. е. цилиндрическая оболочка имеет среднюю длину. Тогда в формулах для краевых эффектов на параллели сопряжения $s = s_2$ можно пренебречь малыми добавками, которые дают решения, убывающие от края $s = s_1$, и представить краевые эффекты в виде

$$\begin{aligned} w_k(s_2) &= C_1, & M_{1k}(s_2) &= -2q^2K^4C_2, \\ S_k(s_2) &= Q_{1k}(s_2) = 2q^3K^4(C_1 - C_2), \end{aligned} \quad (24)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а параметры q и K определяются по формулам (22).

Подставим выражения (23) в граничные условия (13) и во второе условие (5). Принимая во внимание формулы (23) и отбрасывая второстепенные члены, получим

$$\begin{aligned} 2Aq^3K^4(C_2 - C_1) + AS_0 &= mD_2w_0 - B_2(C_1 + m^2w_0), \\ AS_0 = nB_1C_1 + m^3B_1w_0 - m^2D_1w_0, & 2q^2K^4C_2 = \nu K^4w_0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$A = \frac{hD}{2am^2\gamma\delta}.$$

Исключение из уравнений (25) постоянных C_1 и C_2 дает улучшенное условие нулевого приближения

$$S_0 + cv_0 = 0, \quad s = s_2, \quad (26)$$

где

$$c = \frac{2m^2q^3K^4A(mB_1 - D_1) + m^2(B_1D_2 - D_1B_2) + \nu m q K^4 A B_1}{A(2q^3K^4A + mB_1 + B_2)}. \quad (27)$$

Условия нулевого приближения на параллели сопряжения (17) и (26) можно использовать для тонких шпангоутов любой ширины.

При $b \sim m^{-3}$ имеют место приближенные равенства

$$\begin{aligned} A &\simeq \frac{8h}{\sigma a m^2}, & B_1 &\simeq 4mb^2, & mB_1 - C_1 &\simeq \frac{8}{3}m^4b^3, \\ B_1D_2 - D_1B_2 &\simeq \frac{16}{3}m^4b^4, & mB_1 + B_2 &\simeq 8b. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу (27) и отбросив второстепенные члены, получаем что $c \simeq c_b$ и, следовательно, условие сопряжения пластины с оболочкой (26) превращается в первое условие сопряжения стержня с оболочкой (21).

В случае $\eta < 1$, $b \gg m^{-1}$, когда $\beta^m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, используя равенства

$$\begin{aligned} A &\simeq A_0\beta^{2m+1}, & A_0 &= h(1 + \gamma)/(2am^2\gamma), \\ B_1 &\simeq D_2 \simeq \beta^{2m+1}, & B_2 &\simeq D_1 \simeq \gamma\beta^{2m+1} \end{aligned}$$

и отбрасывая в формуле (27) малые слагаемые, получаем следующее приближенное выражение для безразмерной жесткости широкого кольца:

$$c \simeq c_p = \frac{m^2(2q^3mK^4A_0 + 1 - \gamma^2)}{A_0(2q^3K^4A_0 + m)}.$$

Величина c_p не зависит от ширины шпангоута b . Порядок c_p определяется порядком ξ толщины шпангоута $a \sim m^{-\xi}$, причем $c \sim m^{7-\xi}$ при $\xi < 5$, $c \sim m^{-2}$ при $5 \leq \xi \leq 7$, $c \sim m^{9-\xi}$ при $\xi > 7$. Следовательно, при $\xi < 9$, т. е. для достаточно толстого кольца, имеет место сильное неравенство $c_p \gg 1$, и условие (26) приобретает вид

$$v_0 = 0, \quad s = s_2. \quad (28)$$

Условия нулевого приближения (17) и (28) соответствуют шарнирному опиранию края оболочки $s = s_2$.

В случае $\xi > 9$ (тонкое кольцо) $c_p \ll 1$, и условие (26) можно заменить приближенным равенством

$$S_0 = 0, \quad s = s_2. \quad (29)$$

Условия (17) и (29) для уравнения (15) используются на свободном крае оболочки.

Если $\xi = 9$, то $c_p \sim 1$. Отбрасывание в формуле для c_p второстепенных членов дает приближенную формулу

$$c_p \simeq \frac{m^3}{A_0} = \frac{2am^5\gamma}{h(1+\gamma)}, \quad (30)$$

которая была получена в работе [2] другим способом.

Общее решение уравнения (15) ищем в виде линейной комбинации функций Крылова:

$$v_0 = AS(z) + BV(z) + CU(z) + DT(z), \quad z = \alpha(s - s_1). \quad (31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S(z) &= \operatorname{ch} z + \cos z, & V(z) &= \operatorname{sh} z - \sin z, \\ U(z) &= \operatorname{ch} z - \cos z, & T(z) &= \operatorname{sh} z + \sin z. \end{aligned}$$

Подставим решение (31) в граничные условия заделки левого края оболочки (16) и условия сопряжения (17) и (26). Приравняв нулю определитель системы линейных алгебраических уравнений с неизвестными A, B, C, D , получим уравнение для определения α , которое можно представить в виде

$$\sigma\alpha^3(\cos z + \operatorname{ch}^{-1} z) = c(\operatorname{th} z \cos z - \sin z), \quad z = \alpha l \quad (32)$$

Обозначим z_1 наименьший положительный корень уравнения (32). Отметим, что $z_1 \rightarrow 1.875$ при $c \rightarrow 0$, $z_1 \rightarrow 3.928$ при $c \rightarrow \infty$. Значениям $z_1 = 1.875$ и $z_1 = 3.928$ соответствуют свободный и шарнирно опертый край оболочки $s = s_2$.

После определения наименьшего корня уравнения (32) искомое значение параметра нагружения находим по формуле

$$\lambda \simeq \min_m \left(\frac{\sigma\alpha_1^4}{m^6} + \mu^4 m^2 \right), \quad \alpha_1 = \frac{z_1}{l}. \quad (33)$$

7. Пример расчета

Рассмотрим оболочку со следующими значениями параметров: $h = 0.01$, $l = 3.0$, $\nu = 0.3$. Обозначим λ_1 , λ_2 и λ_3 приближенные значение параметра критической нагрузки λ полученные по формуле (33) с использованием формул (22), (30) и (27) для жесткости кольца. Тогда λ_1 соответствует стержневой модели шпангоута, λ_2 — кольцу бесконечной ширины, λ_3 — пластиночной модели шпангоута.

На рис. 3 для пластины толщиной $a = 0.002$ и шириной b приведены графики функций $\lambda_i(b)$. Величина λ_2 не зависит от b , поэтому график

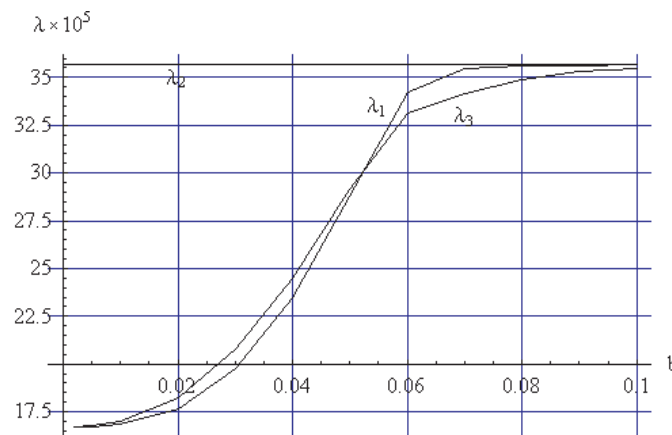


Рис. 3. Зависимости λ_i от b при $a = 0.002$

функции $\lambda_2(b)$ представляет собой прямую линию. Излом на кривых 1 и 3, соответствует переходу в формуле (33) от одного числа волн m по параллели к другому.

Как и следовало ожидать, при малых b значения $\lambda_1(b)$ и $\lambda_3(b)$ мало отличаются друг от друга. С увеличением b погрешность стержневой модели увеличивается, однако при достаточно больших значениях b графики $\lambda_1(b)$ и $\lambda_3(b)$ снова сближаются, прижимаясь к прямой $\lambda = \lambda_2$. Это происходит благодаря тому, что при $a = 0.002$ жесткость кольца бесконечной ширины c_p очень велика, поэтому параметр критической нагрузки λ_2 близок к значению λ_s , соответствующему шарнир-

ному опиранию края оболочки $s = s_2$. Для стержневой модели $c_b \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow \infty$, поэтому $\lambda_1 \simeq \lambda_s$ при больших b .

Качественное отличие поведения пластиночной и стержневой моделей кольца проявляется только для очень тонких пластин. На рис. 4 приведены графики функций $\lambda_i(b)$ для пластины толщиной $a = 2 \cdot 10^{-6}$. В этом случае очевидно, что при больших b стержневая модель дает су-

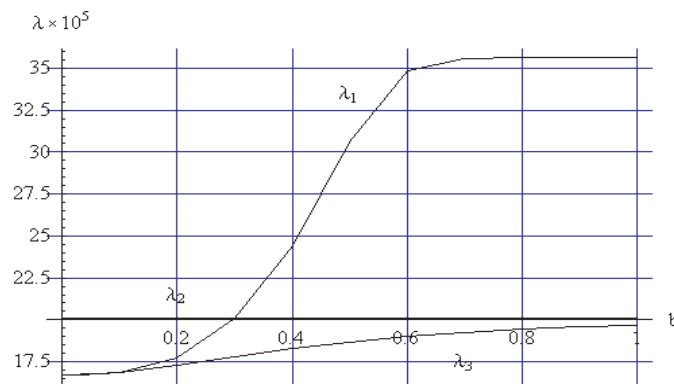


Рис. 4. Зависимость λ_i от b при $a = 2 \cdot 10^{-6}$

щественно завышенное значение критического давления по сравнению с более точной пластиночной моделью шпангоута.

Указатель литературы

1. Филиппов С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1999. 196с.
2. Макаренко И.Н. Филиппов С.Б. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер.1. 2005. Вып.1. С. 94–102.
3. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320с.

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УХА ПОСЛЕ УСТАНОВКИ ПРОТЕЗА

Г.И. МИХАСЕВ, С.А. ЕРМОЧЕНКО

1. Введение

Среднее ухо человека в норме является сложнейшей механической колебательной системой, которая лишь при введении ряда упрощающих предположений поддается математико-механическому моделированию [1]. Рассматриваемое в данной работе хирургически реконструированное среднее ухо представляет собой колебательную систему, которая состоит из тонкой мембраны, сопряженной с системой косточек "протез-стремя". Характеристики данной колебательной системы, определяющие качество слуха прооперированного больного, сильно зависят как от геометрических, так и от физических параметров вводимых протезов [2], [3]. Возникает задача выбора оптимальной длины протеза, замещающего звено "молоточек-наковальня", а также определения места его крепления к барабанной перепонке с целью минимизации возникающих напряжений в соединении "протез-стремя"[4].

В данной работе строится модель реконструированного среднего уха в случае установки протеза в центре барабанной перепонки. Целью исследования является изучение влияния параметров вводимого протеза на напряженно-деформированное состояние упругой пластины, моделирующей барабанную перепонку, и связок овального окна, а также на силы, возникающие в шарнирном соединении "протез-стремя".

2. Геометрическая модель

Исследуется упрощенная модель реконструированного среднего уха. Рассматривается колебательная система, состоящая из круглой пластины, изготовленной из хряща и заменяющей барабанную перепонку,

а также двух шарнирно соединенных между собой стержней. Первый стержень, жестко скрепленный с пластиной, моделирует Т-образный протез, замещающий цепь косточек "молоточек-наковальня", а второй – стремennую косточку (рис. 1).

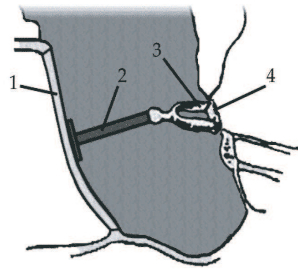


Рис. 1. Реконструированное среднее ухо: 1 - восстановленная мембрана, 2 - Т-образный протез, 3 - стремennая косточка, 4 - основание стремени.

Основание стремени представляет собой овальную жесткую пластинку, которая крепится при помощи связок к костной ткани. Жесткостные свойства связок овального окна были изучены в работе [5] и описываются матрицей:

$$C_{RB} = -c_{ref} \begin{pmatrix} 51,4 & -0,24 & -1,37 & 0,04 & 9,66 & 0,35 \\ -0,24 & 49,2 & -0,6 & -7,87 & -1,01 & -8,4 \\ -1,37 & -0,6 & 27,8 & 0,37 & 17,1 & 0,96 \\ 0,04 & -7,87 & 0,37 & 8,29 & 0,58 & 2,6 \\ 9,66 & -1,01 & 17,1 & 0,58 & 29,7 & 1,6 \\ 0,35 & -8,4 & 0,96 & 2,6 & 1,6 & 12,9 \end{pmatrix} \quad (1)$$

где коэффициент c_{ref} находится в интервале от $0,035 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-1}$ до $0,05 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-1}$. В данной работе принято среднее значение $c_{ref} = 0,0425 \text{ Н} \cdot \text{мм}^{-1}$. Произведение матрицы (1) на вектор перемещений и поворотов основания стремени позволяет найти вектор соответствующих сил и моментов, возникающих со стороны связки овального окна (см. ниже (13)).

Существует несколько способов установки Т-образного протеза, зависящих как от степени патологии, так и от индивидуальной архитектуры полости среднего уха. Поскольку амплитуда колебаний искусственной пластины является наибольшей в центре, то оптимальным с точки

О напряженно-деформированном состоянии колебательной системы ...77

зрения передачи энергии звуковой волны является установка протеза в центре пластинки.

На рис. 1 показан Т-образный протез, ось которого перпендикулярна его основанию. Подобный вариант установки протеза является, возможно, наиболее оптимальным с точки зрения его устойчивости, однако он предполагает значительный отвод стремени косточки от исходного положения, что приводит к появлению больших напряжений в связке овального окна, а также усилия в шарнирном соединении "протез-стремя" [6]. В данной работе рассматривается другой вариант реконструкции, когда ось протеза наклонена к его основанию под некоторым углом (*inclined position*, см. [7]).

Физические и геометрические параметры пластины, моделирующей барабанную перепонку, стремени и протеза, а также способы введения систем координат взяты из работ [5], [9].

Восстановленная барабанная перепонка здесь рассматривается как однородная круглая изотропная пластинка толщиной h и радиуса a . Модуль Юнга материала пластины обозначим через E , а коэффициент Пуассона – через σ . Протез моделируется как абсолютно твердый Т-образный стержень, основанием которого является абсолютно твердая круглая пластинка радиуса b . Ось протеза (стержня) наклонена к плоскости основания под некоторым углом θ_k . Длина стержня протеза l_p является варьируемой величиной. Минимальная его длина l_{min} равна расстоянию от центра пластины до головки стремени, находящегося в нормальном (ненапряженном) состоянии. Максимальная длина стержня протеза превышает минимальную не более чем на 0,5 – 1 мм.

Введем глобальную ортогональную систему координат $Oxyz$, поместив начало координат в центр недеформированной пластинки (см. рис. 2), и направив ось Oz перпендикулярно ее плоскости. Обозначим через ϕ_k угол между осью Ox и проекцией оси протеза на его основание.

Стремля моделируется как абсолютно твердое тело – стержень, соединяющий центр основания стремени $C(3,64; -1,50; -6,50)$ и головку стремени $G(2,29; -1,65; -3,32)$. Здесь приведены координаты в мм. в глобальной системе координат $Oxyz$.

При установке протеза его основание (абсолютно твердая круглая пластинка) склеивается с восстановленной мембраной (круглой упругой пластинкой). Предполагая жесткий характер склеивания основания

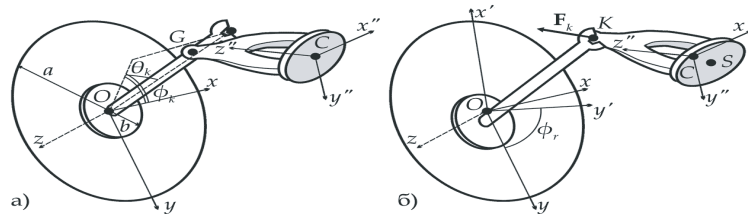


Рис. 2. Схема реконструированного среднего уха: а) до анкирования протеза на головку стремени; б) после анкирования протеза на головку стремени.

протеза и мембраны, последнюю можно рассматривать как кольцевую круглую упругую пластинку, которая сопряжена по внутреннему контуру с круглым основанием протеза. Вторым концом протез анкируется на головку стремени косточки (в точке G). После установки протеза его основание прогибает упругую кольцеобразную пластинку и отводит стремени косточку в некоторое новое положение, так что точки G и C занимают положение K и S , соответственно (см. рис. 2б). В результате чего протез также совершит некоторое перемещение относительно выбранной глобальной системы координат. Обозначим через w_p поступательное перемещение протеза вдоль оси Oz , а через θ_p – угол поворота основания протеза вокруг некоторой оси Oy' , лежащей в плоскости основания стремени (см. рис. 2). Пусть $Ox'y'z$ – новая ортогональная система координат, а ϕ_r – угол между осями Oy и Oy' .

Для определения сил и моментов, действующих на стремени косточку со стороны связок овального окна, удобно ввести систему координат $Cx''y''z''$, связанную с центром основания стремени C в его исходном положении (см. рис. 2а). Формулы перехода от глобальной системы координат $Oxyz$ к $Cx''y''z''$ приведены в работе [5]. Пусть (x_k, y_k, z_k) – координаты точки K в системе координат $Oxyz$, а (x_s, y_s, z_s) – координаты точки S относительно $Cx''y''z''$.

Считаем, что в точке $K(x_k, y_k, z_k)$ выполняется условие шарнирного соединения протеза и стремени. Пусть \mathbf{F}_k – сила, возникающая в данном соединении. Обозначим через X_k, Y_k, Z_k ее компоненты в системе $Oxyz$.

Введенные параметры $w_p, \theta_p, \phi_r, X_k, Y_k, Z_k, x_s, y_s, z_s$ однозначно определяют напряженно-деформированное состояние системы после установки протеза.

О напряженно-деформированном состоянии колебательной системы ...79

3. Уравнения равновесия

В связи с тем, что поворот протеза происходит вокруг оси Oy' , сила F_k должна лежать в плоскости $Ox'z'$. Это условие записывается как

$$Y_k \cos \phi_r - X_k \sin \phi_r = 0. \quad (2)$$

Стремя рассматривается как абсолютно твердое тело, поэтому его длина l_s после введения протеза не меняется:

$$\sqrt{(x_k'' - x_s)''^2 + (y_k'' - y_s)''^2 + (z_k'' - z_s)''^2} = l_s, \quad (3)$$

где (x_k'', y_k'', z_k'') - координаты точки K в системе координат $Cx''y''z''$.

Введем нормальный прогиб пластинки $w(r, \phi)$ в полярной системе координат, связанной с $Oxyz$. В классической постановке функция $w(r, \phi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta^2 w = 0. \quad (4)$$

На внутренней границе примем условия жесткой заделки:

$$\begin{aligned} w|_{r=b} &= w_p + b \cos \phi \operatorname{tg} \theta_p, \\ \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=b} &= \cos \phi \operatorname{tg} \theta_p. \end{aligned} \quad (5)$$

По внешнему контуру барабанная перепонка граничит с волокнисто-хрящевым (мембранным) кольцом [8], упругие свойства которого непостоянны по периметру [9] и могут колебаться у каждого человека. Рассмотрим на внешнем контуре условия упругой заделки:

$$k_{sl} w = Q_l, \quad k_{st} \frac{\partial w}{\partial r} = M_l \quad \text{при} \quad r = a, \quad (6)$$

где

$$Q_l = D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right),$$

$$M_l = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sigma}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)$$
(7)

— перерезывающая сила и изгибающий момент в пластине, приходящиеся на единицу длины дуги, $D = Eh^3/[12(1 - \sigma^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины, а значения коэффициентов k_{sl} и k_{st} могут варьироваться [9]. Для простоты нами рассмотрены усредненные значения $k_{sl} = 7,55 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ и $k_{st} = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$.

Решение уравнения (4) имеет вид:

$$w = w_p [c_1 + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4 r^2 \ln r] +$$

$$+ \text{tg } \theta_p \left[d_1 r + d_2 r^3 + d_3 \frac{1}{r} + d_4 r \ln r \right] \cos \phi$$
(8)

где c_i и d_i — константы, которые находятся из граничных условий (5) — (6).

Подставляя (8) в (7) и интегрируя по всему контуру $r = b$, получим перерезывающую силу, изгибающий момент и момент перерезывающей силы, действующий со стороны пластины на основание протеза:

$$Q = -8 \pi D c_4 w_p,$$

$$M = -\pi D [2(\sigma + 3)d_2 b^2 + 2(1 - \sigma)d_3 b^{-1} + (\sigma + 1)d_4] \text{tg } \theta_p, \quad (9)$$

$$M_Q = \pi D [8 d_2 b^2 - 2 d_4] \text{tg } \theta_p.$$

Тогда условия равновесия протеза запишутся в виде:

$$(X_k \cos \phi_r + Y_k \sin \phi_r) \sin \theta_p - Z_k \cos \theta_p - Q = 0, \quad (10)$$

О напряженно-деформированном состоянии колебательной системы ...81

$$\begin{aligned}
 l_p [(X_k \cos \phi_r + Y_k \sin \phi_r) (\cos \theta_k \cos (\phi_k - \phi_r) \sin \theta_p - \\
 - \sin \theta_k \cos \theta_p) - Z_k (\cos \theta_k \cos (\phi_k - \phi_r) \cos \theta_p + \\
 + \sin \theta_k \sin \theta_p)] + M + M_Q = 0.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь уравнения (10) и (11) выражают условия равенства нулю главного вектора всех сил и главного момента, соответственно, действующих на протез со стороны кольцевой пластинки и стременной косточки.

Запишем теперь условия равновесия стремени. Положение стремени, с точностью до поворота вокруг оси Cz'' определяется координатами (x_s, y_s, z_s) точки S и углами поворота основания стремени α_x и α_y вокруг осей Cx'' и Cy'' , соответственно. Параметры α_x и α_y легко находятся по формулам

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha_x &= \frac{(y_g - y_c)(z_k'' - z_s) - (z_g - z_c)(y_k'' - y_s)}{(y_g - y_c)^2 + (z_g - z_c)^2}, \\
 \sin \alpha_y &= \frac{(x_g - x_c)(z_k'' - z_s) - (z_g - z_c)(x_k'' - x_s)}{(x_g - x_c)^2 + (z_g - z_c)^2},
 \end{aligned} \quad (12)$$

где x_g, y_g, z_g — ранее приведенные координаты точки G в глобальной системе координат.

Компоненты равнодействующих сил и моментов (в системе координат $Cx''y''z''$), действующих на основание стременной косточки со стороны связок овального окна, определяются по формуле [5]

$$(F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)^T = C_{RB}(x_s, y_s, z_s, \alpha_x, \alpha_y, 0)^T. \quad (13)$$

Тогда уравнения равновесия стремени примут вид:

$$F_x - X_k'' = 0, \quad (14)$$

$$F_y - Y_k'' = 0, \quad (15)$$

$$F_z - Z_k'' = 0, \quad (16)$$

$$M_x + y_k'' Z_k'' - z_k'' Y_k'' = 0, \quad (17)$$

$$M_y + z_k'' X_k'' - x_k'' Z_k'' = 0, \quad (18)$$

где X_k'', Y_k'', Z_k'' - компоненты вектора \mathbf{F}_k в системе координат $Cx''y''z''$.

Выведенная система уравнений (2), (3), (10), (11), (14)–(18) является замкнутой относительно неизвестных $w_p, \theta_p, \phi_r, X_k, Y_k, Z_k, x_s, y_s, z_s$, которые однозначно определяют положение колебательной системы среднего уха. Следует заметить, что полученные уравнения являются нелинейными и могут допускать (в зависимости от соотношения входящих в задачу параметров) множество решений. Очевидно, что в том случае, когда $\Delta l_p = l_p - l_{min}$ принимает малые значения (длина протеза незначительно превышает минимально возможную величину l_{min}), уравнения равновесия допускают линейризацию. Решения линейризованных уравнений будут соответствовать устойчивому положению системы в окрестности ее исходного положения (до введения протеза).

Если же длина протеза достаточно велика, то перемещения и повороты колебательной системы могут быть значительными. В этом случае среди найденных решений нелинейных уравнений равновесия возможны такие, которые соответствуют неустойчивому положению системы.

Для определения устойчивого положения протеза были выполнены расчеты потенциальной энергии системы:

$$U = U_1 + U_2, \quad (19)$$

где

$$U_1 = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)^2 r dr d\phi \quad (20)$$

есть потенциальная энергия пластины [10], а

$$U_2 = F_x x_s + F_y y_s + F_z z_s + M_x \alpha_x + M_y \alpha_y \quad (21)$$

— потенциальная энергия деформирования связок овального окна.

О напряженно-деформированном состоянии колебательной системы ...83

4. Численные расчеты

Для различных значений геометрических параметров вводимого протеза были найдены решения разрешающих уравнений, соответствующие устойчивому положению равновесия системы. Среди возможных решений выбирались те, для которых потенциальная энергия реконструированной системы среднего уха минимальна.

На рисунках 3–5 приведены графики некоторых из искомых величин как функций аргумента Δl_p .

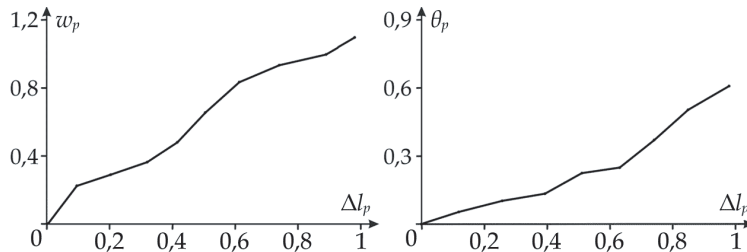


Рис. 3. Перемещение w_p [мм] и поворот θ_p [градусы] протеза как функции Δl_p [мм].

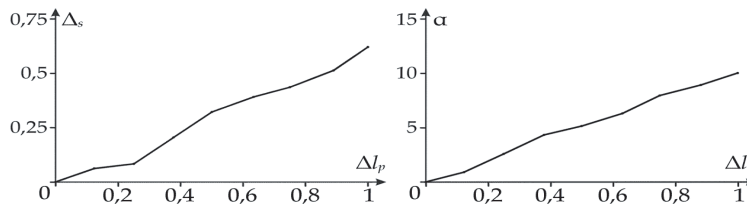


Рис. 4. Перемещение основания стремени Δ_s [мм] и угол отклонения стремени от нормального положения α [градусы] как функции Δl_p [мм].

Вычисления производились при следующих значениях геометрических и физических параметров протеза и пластины: $a = 5$ мм, $h = 0,15$ мм, $E = 3,3 \cdot 10^5$ Па, $\sigma = 0,4$, $b = 1,5$ мм, $\phi_k = -0,622664$, $\theta_k = 0,86696$. Значение углов ϕ_k и θ_k выбраны таким образом, чтобы при минимальной длине стержня протеза $l_p = l_{min} = 4,358$ мм его конец совпадал с головкой стремени косточки, находящейся в нормальном состоянии.

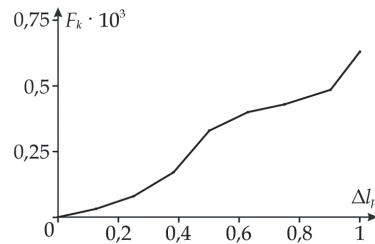


Рис. 5. Модуль силы F_k [Н] в шарнирном соединении как функция Δl_p [мм].

Видно, что во всех случаях увеличение длины протеза приводит к росту искомых величин, определяющих напряженно-деформированное состояние системы. Следует однако заметить, что основание протеза вместе с восстановленной мембраной является менее податливым к поворотам, чем к перемещению. Объясняется это, по-видимому, выбранной техникой протезирования (the inclined position, см. [7]), когда ось протеза наклонена к его основанию под острым углом θ_k . При использовании техники "the straight position", когда ось протеза перпендикулярна мембране в ее недеформированном состоянии, имеют место значительные перемещения и повороты стремени косточки, которые, в свою очередь, приводят к поворотам протеза вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости основания протеза.

Анализ кривых показывает, что с ростом длины протеза проявляется нелинейный характер поведения всей системы, что является крайне нежелательным, как с точки зрения устойчивости протеза при акустических воздействиях, так и с точки зрения изменения (в сторону увеличения) спектра собственных частот восстановленной колебательной системы среднего уха [11]. При больших поворотах и перемещениях стремени косточки наблюдается также нежелательный эффект чрезмерного напряжения стремени мышцы.

Указатель литературы

1. Ситников В.П., Михасев Г.И. Возможности математического моделирования среднего уха человека // Сборник докладов научно-практической конференции "проблемы научно-инновационного развития Витебской области и пути их решения". Минск, 1999.

О напряженно-деформированном состоянии колебательной системы ...85

- C. 245–247.
2. *Huttenbrink K.-B.* Mechanical aspects of middle ear reconstruction // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery.* (ed. by K.-B. Huttenbrink). Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology. Univ. of Technology, 1997. P. 165–168.
 3. *Михасев Г.И., Фирсов М.А., Ситников В.П.* Моделирование свободных колебаний звукопроводящей системы реконструированного среднего уха // *Российский журнал биомеханики.* 2005. Т. 9. № 1. С. 52–62.
 4. *Eiber A., Freitag H.-G., Schimanski G., Zenner H.P.* On the coupling of prosthesis to the middle ear structure and its influence on sound transfer // *The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear* (ed. by J.J. Rosowski and S.N. Merchant). The Hague. The Netherlands: Kugler Publication, 2000. P. 297–308.
 5. *Beer H.-J., Bornitz M., Hardke H.-J., Schmidt R., Hofman G., Vogel U., Zahnert T., Huttenbrink K.-B.* Modeling of Components of the Human Middle Ear and Simulation of Their Dynamic Behavior // *Audiol Neurootol,* 1999, № 4. P. 156–162.
 6. *Михасев Г. И., Ермоченко С. А., Ситников В. П.* О простейшей модели расчета напряженно-деформированного состояния колебательной системы реконструированного среднего уха // *Вестник ВДУ,* 2004. С. 97–102.
 7. *Huttenbrink K.-B.* Mechanical Aspects of Middle Ear Reconstruction // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery.* (ed. by K.-B. Huttenbrink). Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology. Univ. of Technology, 1997. P. 165–168.
 8. *Гельфанд С.А.* Слух: введение в психологическую и физиологическую акустику. М: Медицина. 1984. 352 с.
 9. *Wada H., Koite T., Kobayashi T.* Three-Dimensional Finite-Element Method (FEM) Analysis of the Human Middle Ear // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery.* (ed. by K.-B. Huttenbrink). Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology. Univ. of Technology, 1997. P. 76–81.
 10. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
 11. *Mikhasev G., Firsov M., Yermochenko S., Sitnikov V.* Modeling of the Dynamic Behavior of the Reconstructed Middle Ear Taking into

Account its Initial Strain-Stress State// Book of Abstracts of the
Annual Scientific Conference GAMM 2004. Dresden, 2004. P. 25.

ВЛИЯНИЕ СДВИГА НА ЛОКАЛЬНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А.В. МИХЕЕВ

В данной работе рассматривается модель Тимошенко, учитывающая влияние сдвига, для пологих оболочек, находящихся на упругом основании. Рассмотрена зависимость критической нагрузки от коэффициента сдвига и жесткости основания в применении к различным частным случаям.

1. Введение

Для решения задачи о потере устойчивости тонких пологих оболочек под действием безмоментных усилий в ряде случаев применим так называемый локальный подход. Его суть заключается в том, что граничные условия игнорируются, а величина прогиба w , функция усилий Φ , и, кроме того, в случае учета сдвига, угловые параметры Ψ , Θ , ищутся в виде комплекснозначных функций вида $re^{(px+qy)i}$. Параметр нагружения λ выражается из системы уравнений устойчивости и находится минимизацией по параметрам p , q .

Модель Кирхгоффа-Лява. В статье [1] используется локальный подход в случае отсутствия начальных усилий сдвига, а в работе [2] исследован общий случай локальной потери устойчивости пологих оболочек. В книге [3] рассмотрен вопрос потери устойчивости тонких оболочек как для локального подхода, так и в других случаях, когда локальный подход неприменим. В статье [4] рассмотрено применение локального подхода с целью изучения вопроса устойчивости тонких оболочек на упругом основании.

Модель Тимошенко. Модель Тимошенко является обобщением модели Кирхгоффа-Лява, в котором введены два независимых угла сдвига для поперечных волокон. Система уравнений устойчивости здесь имеет

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 04-01-00257.

не восьмой, а десятый порядок.

В настоящей статье для сравнения мы будем использовать результаты, содержащиеся в работе [4]. Оболочка предполагается трансверсально изотропной.

2. Уравнения устойчивости пологих оболочек на упругом основании с учетом сдвига

Система уравнений равновесия для оболочки на упругом основании в проекциях на орты после деформации имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BT_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\beta} T_2 + \frac{\partial(AS)}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} S \right) - k_1 Q_1 + q_1 &= 0, \quad \{1, 2\} \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BQ_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AQ_2)}{\partial\beta} \right) + N_T + q_n + P &= 0, \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_2 + \frac{\partial(AH)}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} H \right) + Q_1 &= 0, \quad \{1, 2\} \end{aligned} \quad (1)$$

где A, B — коэффициенты первой квадратичной формы, T_1, T_2, S — тангенциальные усилия, Q_1, Q_2 — перерезывающие усилия, M_1, M_2, H — изгибающие и крутящий моменты, q_1, q_2, q_n — проекции интенсивности внешней нагрузки, отнесенные к единице площади срединной поверхности, P — реакция основания, k_1, k_2 — главные кривизны срединной поверхности,

$$\begin{aligned} N_T &= (k_1 + \varkappa_1)T_1 + 2\tau S + (k_2 + \varkappa_2)T_2, \\ T_1 &= \frac{Eh(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)}{(1 - \nu^2)}, \quad Q_1 = G'h\delta_1, \quad M_1 = \frac{Eh^3(\varkappa'_1 + \nu\varkappa'_2)}{12(1 - \nu^2)}, \quad \{1, 2\} \\ S &= \frac{Eh\omega}{2(1 + \nu)}, \quad H = \frac{Eh^3\tau'}{12(1 + \nu)}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} u_2 - k_1 w, \quad \delta_1 = \varphi_1 - \gamma_1, \\ \omega &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_2}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} u_1, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial\alpha} - k_1 u_1, \\ \varkappa_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} \gamma_2, \quad \varkappa'_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} \varphi_2, \quad \{1, 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1 + \omega_2 = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{A} \right), \\ \tau &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_2 + k_1 \omega_1, \\ \tau' &= -\frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\varphi_2}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\varphi_1}{A} \right) \right).\end{aligned}$$

Здесь φ_1, φ_2 — углы поворота волокон, u_1, u_2, w — проекции перемещения, h — толщина оболочки, G' — коэффициент сдвига в трансверсальном направлении, α, β — ортогональные криволинейные координаты на срединной поверхности.

Полагая оболочку полой, нагрузку — следящей, а начальное состояние — безмоментным, заменим каждую из входящих в систему (1) неизвестных функций $u, v, w, \varphi_1, \varphi_2, T_1, T_2, S, M_1, M_2, H$ суммами двух слагаемых $u^0 + u, v^0 + v, w^0 + w, \varphi_1^0 + \varphi_1, \varphi_2^0 + \varphi_2, T_1^0 + T_1, T_2^0 + T_2, S^0 + S, M_1^0 + M_1, M_2^0 + M_2, H^0 + H$, где первые слагаемые — функции, соответствующие исследуемому напряженному состоянию, а вторые — их малые вариации. Производя линеаризацию, получаем следующую систему уравнений устойчивости:

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BT_1)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \beta} T_2 + \frac{\partial(AS)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S \right) - k_1 Q_1 &= 0, \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BQ_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AQ_2)}{\partial \beta} \right) + k_1 T_1 + k_2 T_2 + N_T^0 + P &= 0, \\ \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BM_1)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{\partial(AH)}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H \right) + Q_1 &= 0, \quad \{1, 2\}\end{aligned} \quad (2)$$

где $\{T_1^0, T_2^0, S^0\} = -\lambda\{t_1, t_2, t_3\}$, T_1^0, T_2^0, S^0 — начальные усилия, λ — параметр нагружения,

$$N_T^0 = T_1^0 \varkappa_1 + 2S^0 \tau + T_2^0 \varkappa_2.$$

Введем функции Φ, Ψ, Θ следующим образом:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ \varphi_1 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad \varphi_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Theta}{\partial x},\end{aligned}$$

где $x = \alpha A, y = \beta B$. Тогда система (2) примет вид

$$\begin{aligned}
(Eh)^{-1}\Delta\Delta\Phi + \Delta_k w &= 0, \\
G'h(\Delta w - \Delta\Psi) + \Delta_k\Phi + \Delta_T(w) + p &= 0, \\
-D\Delta\Psi &= G'h(w - \Psi), \\
\frac{D(1-\nu)}{2}\Delta\Theta - G'h\Theta &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{Здесь } D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_k = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
\Delta_T &= T_1^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + T_2^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Последнее уравнение системы (3), служащее для определения функции Θ , независимо от трех остальных уравнений системы и не участвует в решении задачи устойчивости в случае локального подхода. Будем искать решения (3) в виде:

$$w = w_0 e^{(px+qy)i}, \quad \Psi = \Psi_0 e^{(px+qy)i}, \quad \Phi = \Phi_0 e^{(px+qy)i}.$$

Согласно модели винклеровского основания с коэффициентом постели, зависящим от волнообразования, рассмотренной в [5], для прогиба w , имеющего вышеуказанный вид, реакция основания равна $P = -E_0 a_2 r w$, где $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, E_0, ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона основания соответственно,

$$a_2 = \frac{2(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(3-4\nu_0)}.$$

Сделав замену $p = r \cos(\varphi)$, $q = r \sin(\varphi)$ и выразив из системы (3) параметр нагружения, получим

$$\Lambda = \frac{\lambda}{Eh} = \left(\frac{\mu^4 r^2}{\frac{\mu^4 E}{G'} r^2 + 1} + \frac{f_k(\varphi)}{r^2} + \frac{e}{\mu^2 r} \right) \frac{1}{f_T(\varphi)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mu^4 &= \frac{h^2}{12(1-\nu^2)}, \quad e = \frac{E_0 a_2}{E \sqrt{12(1-\nu^2)}}, \\
f_k(\varphi) &= (k_2 \cos^2 \varphi + k_1 \sin^2 \varphi)^2, \\
f_T(\varphi) &= t_1 \cos^2 \varphi + 2t_3 \sin \varphi \cos \varphi + t_2 \sin^2 \varphi.
\end{aligned}$$

Полагая

$$r = \frac{s}{\mu}, \quad e = 2\mu^3\omega, \quad g(r, \varphi) = \frac{\Lambda}{\mu^2}, \quad a = \frac{\mu^2 E}{G'}$$

получим

$$g(s, \varphi) = \left(\frac{s^2}{as^2 + 1} + \frac{f_k(\varphi)}{s^2} + \frac{2\omega}{s} \right) \frac{1}{f_T(\varphi)}.$$

Критическое значение параметра нагружения находим после минимизации функции $g(s, \varphi)$ по переменным s, φ :

$$g_* = \min_{s, \varphi}^+ g(s, \varphi) = g(s_*, \varphi_*),$$

где знак $^+$ говорит о том, что ищется положительный минимум, а звездочка указывает на критические значения соответствующих величин. Предполагается также, что существуют такие φ , при которых $f_T(\varphi) > 0$.

3. Частные случаи

Перейдем к рассмотрению наиболее важных частных случаев. В каждом из них мы исследуем зависимость параметра волнообразования s_* , угла наклона вмятин φ_* и параметра критической нагрузки g_* от коэффициента сдвига a и коэффициента жесткости основания ω .

3.1. Однородное сжатие сферы.

$$k_1 = k_2 = 1, \quad t_1 = t_2 = 1, \quad t_3 = 0, \quad f_k = f_T = 1, \\ g(s, a, \omega) = \frac{2\omega}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{1 + as^2}.$$

Поскольку параметр φ не входит в функцию нагружения g , любой угол наклона вмятин удовлетворяет условию потери устойчивости.

3.1.1. Положим сначала $\omega \ll 1$. Тогда можно показать, что s_*, g_*

раскладываются в ряд по параметру ω следующим образом:

$$\begin{aligned} s_* = K(a, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{1-a}} + \frac{\omega}{4(1-a)^2} + \frac{(6a-1)\omega^2}{8(3a+4)\sqrt{(1-a)^7}} + O(\omega^3) \\ g_* = G(a, \omega) &= (2-a) + 2(\sqrt{1-a})\omega + \frac{\omega^2}{4(a-1)} + O(\omega^3) \end{aligned} \quad (4)$$

При отсутствии сдвига ($a = 0$) получается ряд, совпадающий с приведенным в [4].

Теперь рассмотрим графические зависимости $s_*(a)$ и $g_*(a)$, приведенные на рисунке 1. Кривая 1 соответствует $\omega = 0$, кривая 2 — $\omega = 0, 2$,

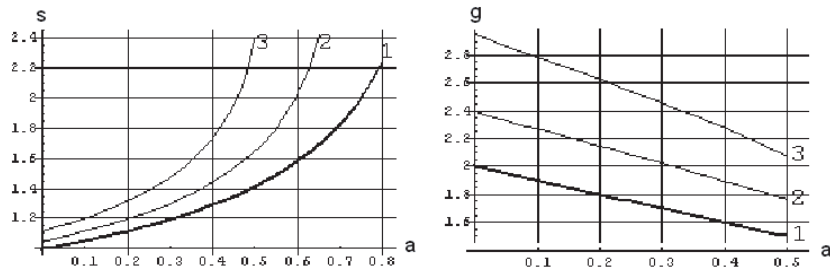


Рис. 1. Зависимости параметра волнообразования (слева) и критической нагрузки (справа) от коэффициента сдвига при однородном сжатии сферической оболочки.

кривая 3 — $\omega = 0, 5$. Как мы видим, при увеличении коэффициента сдвига параметр волнообразования увеличивается, а критическая нагрузка убывает. К примеру, для $\omega = 0, 2$ при возрастании коэффициента сдвига от $a = 0$ до $a = 0, 5$ критическая нагрузка уменьшается приблизительно на 26% по сравнению с исходным значением. С увеличением ω при фиксированном коэффициенте сдвига параметр волнообразования и критическая нагрузка возрастают. Для получения более полного представления о характере зависимости параметров волнообразования и критической нагрузки от коэффициента сдвига некоторые их значения при разных a, ω представлены в таблицах 1 и 2. В частности, при $a = 0$ значения совпадают с полученными в [4].

3.1.2. Пусть $\omega \gg 1$. Тогда $g(s, a)$ является строго убывающей функцией s и $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s, a) = 1/a$. Поэтому при достаточно больших значениях

Таблица 1.

Зависимость параметра волнообразования от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (однородное сжатие сферической оболочки).

ω	$a = 0$	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5
0	1,0000	1,0025	1,0050	1,0260	1,0541	1,4142
0,3	1,0722	1,0755	1,0788	1,1067	1,1450	1,8108
0,6	1,1391	1,1432	1,1474	1,1828	1,2326	—
0,9	1,2011	1,2061	1,2111	1,2546	1,3171	—

Таблица 2.

Зависимость параметра критической нагрузки от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (однородное сжатие сферической оболочки).

ω	$a = 0$	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5
0	2,0000	1,9950	1,9900	1,9500	1,9000	1,5000
0,3	2,5791	2,5725	2,5658	2,5127	2,4459	1,8786
0,6	3,1217	3,1133	3,1050	3,0369	2,9507	—
0,9	3,6344	3,6240	3,6136	3,5292	3,4214	—

ях ω критическая нагрузка преимущественно зависит от коэффициента сдвига.

3.2. Кручение сферы (чистый сдвиг).

$$k_1 = k_2 = 1, t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1, f_k = 1, f_T(\varphi) = \sin 2\varphi,$$

$$g(s, \varphi, \omega) = \frac{1}{\sin 2\varphi} \left(\frac{2\omega}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s^2}{1 + as^2} \right).$$

Экстремум функции g достигается при $\varphi_* = \frac{\pi}{4}$, а значения s_* и g_* совпадают с полученными в п. 3.1.

3.3. Цилиндрическая оболочка при осевом сжатии.

$$k_1 = 0, k_2 = 1, t_1 = 1, t_2 = t_3 = 0, f_k(\varphi) = \cos^4 \varphi, f_T(\varphi) = \cos^2 \varphi,$$

$$g(s, \varphi, \omega) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{2\omega}{s} + \frac{\cos^4 \varphi}{s^2} + \frac{s^2}{1 + as^2} \right).$$

Находя минимум, убеждаемся, что он достигается при значении угла наклона вмятин $\varphi_* = 0$, а функции s_* и g_* определяются по формулам (4).

3.4. Цилиндрическая оболочка при кручении.

$$k_1 = 0, k_2 = 1, t_1 = t_2 = 0, t_3 = 1, f_k(\varphi) = \cos^4 \varphi, f_T(\varphi) = \sin 2\varphi, \\ g(s, \varphi, \omega) = \frac{1}{\sin 2\varphi} \left(\frac{2\omega}{s} + \frac{\cos^4 \varphi}{s^2} + \frac{s^2}{1 + as^2} \right).$$

Поскольку локальный подход при отсутствии основания в данном случае неприменим, мы считаем что $\omega > 0$. Как показано в [4], при отсутствии сдвига ($a = 0$) и $\omega \ll 1$

$$s_* = \left(\frac{5\omega}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \varphi_* = \frac{\pi}{2} - c_2 \omega^{\frac{1}{3}}, g_* = c_1 \omega^{\frac{1}{3}},$$

$$c_1 = 2^{2/3} 3^{3/4} 5^{-5/12} = 1.85, c_2 = 2^{-1/3} 3^{1/4} 5^{-1/12} = 1.24.$$

$$\text{Если } a = 0 \text{ и } \omega \gg 1, \text{ то } s_* = \omega^{\frac{1}{3}}, \varphi_* = \frac{\pi}{4}, g_* = 3\omega^{\frac{2}{3}}.$$

Графические зависимости $s_*(a)$, $\varphi_*(a)$ и $g_*(a)$ приведены на рисунках 2 и 3.

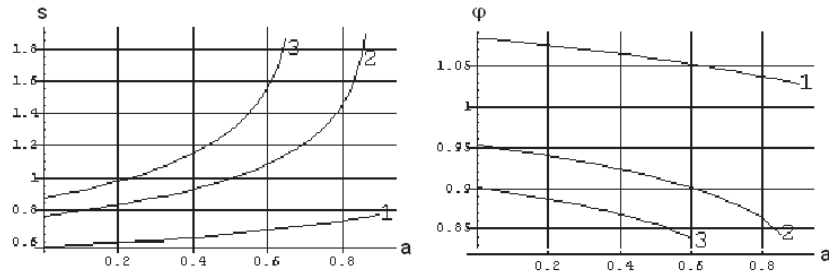


Рис. 2. Зависимость параметра волнообразования(слева) и угла наклона вмятин (справа) от коэффициента сдвига при кручении цилиндрической оболочки.

Кривая 1 соответствует $\omega = 0,1$, кривая 2 — $\omega = 0,3$, кривая 3 — $\omega = 0,5$. При увеличении коэффициента сдвига параметр волнообразования увеличивается, а угол наклона вмятин и критическая нагрузка убывают. Для $\omega = 0,2$ при возрастании коэффициента сдвига от $a = 0$ до $a = 0,5$ критическая нагрузка уменьшается приблизительно на 10%

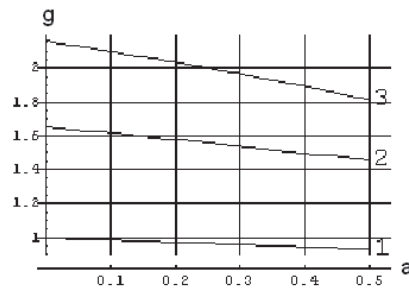


Рис. 3. Зависимость параметра критической нагрузки от коэффициента сдвига при кручении цилиндрической оболочки.

по сравнению с исходным значением. Таким образом, в случае кручения цилиндра с увеличением сдвига критическая нагрузка убывает значительно медленнее, чем при однородном сжатии сферы (см. п. 3.1). С увеличением ω при фиксированном коэффициенте сдвига параметр волнообразования и критическая нагрузка возрастают, а угол наклона вмятин убывает.

Более подробная зависимость параметров волнообразования, угла наклона вмятин и критической нагрузки от коэффициента сдвига представлена в таблицах 3, 4 и 5.

Таблица 3.

Зависимость параметра волнообразования от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (кручение цилиндрической оболочки).

ω	$a = 0$	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5
0,2	0,6872	0,6883	0,6894	0,6984	0,7103	0,8419
0,6	0,9190	0,9215	0,9240	0,9452	0,9742	1,4745
0,9	1,0267	1,0302	1,0337	1,0638	1,1059	—

3.5. Устойчивость выпуклых оболочек.

3.5.1. Предположим, что существует такой угол $\varphi = \varphi_*$, при котором функция $f_k(\varphi)$ минимальна, а функция $f_T(\varphi)$ максимальна. Тогда при $\varphi = \varphi_*$ после минимизации функции g по параметру s мы получим:

Таблица 4.

Зависимость угла наклона вмятин от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (кручение цилиндрической оболочки).

ω	$a = 0$	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5
0,2	0,9994	0,9991	0,9988	0,9966	0,9937	0,9644
0,6	0,8838	0,8835	0,8832	0,8807	0,8774	0,8378
0,9	0,8531	0,8528	0,8525	0,8501	0,8470	—

Таблица 5.

Зависимость параметра критической нагрузки от сдвига при некоторых значениях критической нагрузки (кручение цилиндрической оболочки).

ω	$a = 0$	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5
0,2	1,3579	1,3567	1,3555	1,3456	1,3331	1,2249
0,6	2,3880	2,3844	2,3807	2,3512	2,3135	1,9585
0,9	3,0123	3,0067	3,0011	2,9554	2,8966	—

$$g_*(a, \omega) = \min_s g(s, \varphi_*, a, \omega) = \frac{\sqrt{f_{k*}}}{f_{T*}} G(a', \omega'), \quad s_*(a, \omega) = K(a', \omega') (f_{k*})^{\frac{1}{4}},$$

где $f_{k*} = f_k(\varphi_*)$, $f_{T*} = f_T(\varphi_*)$, $a' = a(f_{k*})^{\frac{1}{2}}$, $\omega' = \omega(f_{k*})^{-\frac{3}{4}}$, а функции G и K определяются по формулам (4).

3.5.2. Пусть теперь особого угла нет. В этом случае задача сводится к минимизации функции g по двум параметрам s , φ . После минимизации по s получим:

$$g_*(a, \omega) = \min_{\varphi} \frac{\sqrt{f_k(\varphi)}}{f_T(\varphi)} G(a', \omega'), \quad s_*(a, \omega) = K(a', \omega') (f_k(\varphi))^{\frac{1}{4}}.$$

где $a' = a(f_k(\varphi))^{\frac{1}{2}}$, $\omega' = \omega(f_k(\varphi))^{-\frac{3}{4}}$.

При отсутствии основания ($\omega = \omega_1 = 0$)

$$g_* = \min_{\varphi} \frac{\sqrt{f_k(\varphi)}(2 - a * \sqrt{f_k(\varphi)})}{f_T(\varphi)} = \frac{\sqrt{f_k(\varphi_0)}(2 - a * \sqrt{f_k(\varphi_0)})}{f_T(\varphi_0)}.$$

Если же $\omega \gg 1$, то слагаемым $f_k(\varphi)$ в выражении функции g можно пренебречь, и $g_* = \min_{\varphi} \frac{1}{a * f_T(\varphi)}$.

Указатель литературы

1. *Работнов Ю. Н.* Локальная устойчивость оболочек // Докл. АН СССР. 1946. т. 52, № 2, С. 111–112.
2. *Ширшов В. П.* Локальная устойчивость оболочек // Труды второй всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Киев. 1962. С. 314–317.
3. *Товстик П. Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 320 с.
4. *Товстик П. Е.* Локальная устойчивость пластин и пологих Оболочек на упругом основании // Известия РАН. 2005. Вып. 1, С. 147–160.
5. *Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В.* Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем. М.: Наука, 1977. 322 с.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ОСЛАБЛЕННОЙ ОТВЕРСТИЯМИ

А.Л. Смирнов

В настоящей статье обсуждаются результаты численных исследований свободных колебаний и устойчивости прямых круговых тонких цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями. Подробное асимптотическое исследование свободных колебаний и устойчивости тонких оболочек вращения без вырезов (отверстий, трещин) проведено в работах [1] и [2], в которых решение обеих задач сведено к исследованию поведения собственных чисел некоторых краевых задач. В данном исследовании нас интересовало влияние величины, формы, пропорций, положения и числа отверстий на спектр собственных частот колебаний оболочек и на критическую нагрузку и формы потери устойчивости цилиндрических оболочек.

Численный анализ проводился методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS с использованием оболочечного конечного элемента SHELL63, состоящего из 3 узлов с 6 степенями свободы в каждом (три перемещения и три вращения). По возможности при моделировании применялся четырехугольный вариант данного элемента (по рекомендации разработчиков для модального анализа), размер элемента подбирался так, чтобы по окружности оболочка разбивалась на достаточно большое количество элементов.

1. Свободные колебания оболочек с вырезами

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\tilde{h} = h/R = 0.01$, $\tilde{L} = L/R = 4$, где L , R , h — радиус средней поверхности, длина и толщина оболочки соответственно. Наличие отверстия приводит к “расщеплению” частот, т. е. частоты колебаний двукратные для сплошной оболочки, при появлении выреза начинают различаться.

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 04-01-00257.

Соответствующие формы будем называть симметричными и антисимметричными и обозначать $m : n$ и $m : n_a$, где m — число волн в окружном направлении, n — число полуволн в осевом направлении (индекс a соответствует антисимметричной форме).

1.1. Влияние размера и формы выреза.

Для исследования влияния размеров выреза на частоты и формы собственных колебаний рассмотрим тонкую круговую замкнутую цилиндрическую оболочку с одним симметрично расположенным (в центре образующей) круглым отверстием радиуса r .

С увеличением размера отверстия меняется порядок следования собственных частот: форму колебаний с минимальной частотой, начиная с некоторой величины r , невозможно идентифицировать (выделить главную составляющую), так как эту форму можно с равным основанием отнести как к 4:1, так и к 3:1. В то же время происходит подобная деформация формы, соответствующей 3-й частоте, и форма 3:1 преобразуется в 4:1. В итоге форма 4:1 при больших вырезах соответствует частоте с порядковым номером 3, в то время как для небольших радиусов на третьем месте в спектре собственных частот располагается форма 3:1.

Однако существуют формы колебаний, например 2:1 и 5:2, с монотонно убывающими собственными частотами, которые, начиная с определенного значения радиуса отверстия, оказываются меньше изначально более низкой частоты формы 6:1. Наблюдается сильная локализация для наиболее простой формы 2:1 у края выреза. На собственные частоты, соответствующие антисимметричным формам, отверстие оказывает незначительное влияние (за исключением формы 5:2_a).

Результаты вычислений для оболочки с центральным квадратным вырезом оказались близкими к оболочке с круглым вырезом.

Рассмотрим теперь длинную оболочку ($\tilde{L} = 30$), для которой низшей собственной частоте соответствует самая простая форма ($n = 1$). В этом случае с ростом радиуса отверстия максимальным и довольно существенным является снижение первой собственной частоты. Надо заметить, что для более короткой оболочки ($\tilde{L} = 25$) балочной форме колебаний соответствует вторая частота (не низшая), но наибольшее влияние отверстие оказывает именно на нее. Таким образом, наибольшее влияние вырез оказывает на простейшие формы собственных ко-

лебаний и соответствующие им частоты, что соответствует предположениям, сделанным в [3].

1.2. Влияние пропорций выреза.

Исследуем влияние изменения пропорций прямоугольного выреза на собственные частоты колебаний. Для этого, сохраняя площадь вырезаемой части поверхности S , будем изменять соотношение сторон (a и b) центрального прямоугольного отверстия. Длины сторон связаны через эксцентриситет e : $a = b(1 + e)^2$. Отрицательным значениям эксцентриситета соответствуют отверстия, вытянутые вдоль образующей. Низшие частоты весьма чувствительны к эксцентриситету и, как правило, убывают с увеличением абсолютного значения эксцентриситета.

Рассмотрим поведение форм, соответствующих наинизшей частоте (в рассматриваемом случае форма 4:1). При нулевом эксцентриситете двукратной частоте оболочке без выреза соответствуют две близкие частоты, причем симметричной форме соответствует меньшая частота. При увеличении эксцентриситета обе убывают, причем частота соответствующая симметричной форме убывает более быстро. При переходе эксцентриситета в отрицательную область частота, соответствующая симметричной форме возрастает, поэтому начиная с некоторого значения e , наинизшей становится частота, соответствующая антисимметричной форме.

1.3. Влияние равномерной перфорации.

Исследуем теперь влияние числа отверстий на собственные частоты колебаний. Рассмотрим оболочку с N ($0 < N < 14$) квадратными отверстиями, расположенными на равном расстоянии друг от друга вдоль центральной параллели, при этом общую площадь отверстий S сохраняем постоянной. Наибольшее влияние на частоты наблюдается в случае кратности числа отверстий и числа волн в окружном направлении у соответствующей формы.

2. Устойчивость оболочек с вырезами

Рассматривалась тонкая цилиндрическая оболочка со следующими параметрами: безразмерная длина оболочки $L/R = 5$, безразмерная толщина оболочки $h/R = 0.002$.

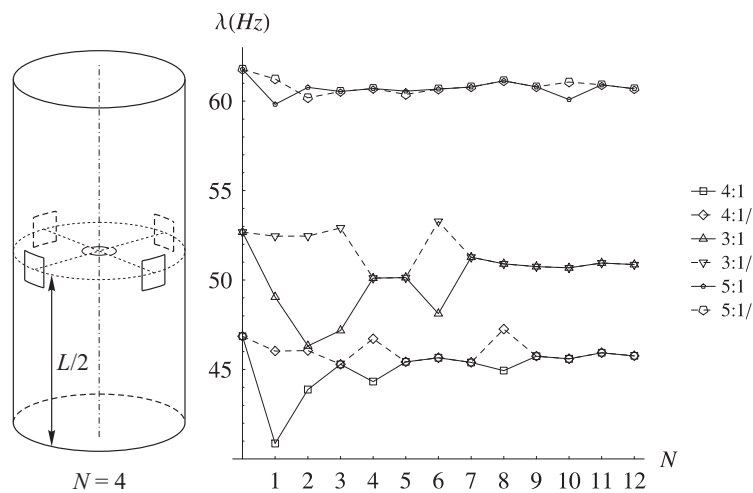


Рис. 1. Зависимость первых частот от количества квадратных отверстий вдоль центральной параллели ($h = 0.01$, $\tilde{L} = 4$, $S = \pi^2/16$).

2.1. Влияние формы отверстия; случай гидростатического давления.

Оболочка, ослабленная отверстием (круглым или квадратным) подвергалась действию гидростатического давления. Численные эксперименты показали, что с увеличением размера отверстия происходит падение критической нагрузки. Следует заметить, что для круглого отверстия падение критической нагрузки происходит менее интенсивно, чем в случае квадратного отверстия, что, может быть, обусловлено возникновением дополнительных напряжений в углах квадратного выреза. Аналогичный результат, но уже для случая осевого сжатия, был получен в [4], [5]. Таким образом, характер влияния формы отверстия на величину критической нагрузки сохраняется независимо от вида нагрузки — осевое сжатие или гидростатическое давление.

2.2. Влияние положения отверстия и граничных условий.

В процессе численных экспериментов было исследовано влияние положения отверстия и условий закрепления оболочки на величину критической нагрузки. Было поставлено несколько экспериментов. Рассматривалась цилиндрическая оболочка с центрально расположенным

квадратным отверстием стороной $a = 0.25$. В ходе эксперимента отверстие сдвигалось от центра цилиндра вдоль его оси к краю. Условия закрепления — шарнирное опирание либо жесткая заделка. Оболочка подвергалась действию либо осевого сжатия либо гидростатического давления. Оказалось, что во всех случаях влияние положения отверстия крайне слабое, так как разброс в численных значениях не превышает 10% величины критической нагрузки. Сказывается и грубость разбиения, обусловленная большим количеством волн в осевом направлении.

2.3. Перфорация вдоль параллели.

В ходе экспериментов было также проведено исследование влияния количества отверстий с общей постоянной площадью, расположенных на цилиндре по центру относительно его оси и лежащих на одной линии вдоль параллели. Было отмечено сильное влияние взаимодействия отверстий и формы: в случае, когда число волн на форме кратно числу отверстий на оболочке, имеет место максимальное падение величины критической нагрузки. Такие формы принято называть резонансными. Для других форм падение величины критической нагрузки выражено менее ярко.

3. Выводы

Наличие отверстия приводит к расщеплению собственных частот, которые в случае оболочки без вырезов двукратны. Обнаружено значительное падение первой собственной частоты, сопровождающееся сильным искажением формы колебаний в окрестности отверстия с увеличением его размера. Одновременно наблюдались мало изменяющиеся формы даже при больших размерах выреза, для которых падение частоты было также незначительным.

Форма отверстия (квадрат или круг), так же как и положение отверстия, не оказывают заметного влияния на частоты и формы колебаний. Увеличение размеров прямоугольных вырезов в направлении обрезающей, сильнее сказывается на значениях собственных частот, чем увеличение их размеров в окружном направлении. Характер влияния вытянутости отверстия различен для разных форм. Наибольшее вли-

Свободные колебания и устойчивость цилиндрической оболочки ... 103

яние на частоты наблюдается в случае взаимодействия отверстия(й) с формами колебаний (резонансные формы).

При росте числа отверстий величины собственных частот нижней части спектра достигают определенных значений и остаются вблизи них. В случае перфорации в окружном направлении частоты становятся почти кратными, и наблюдаются всплески их значений в точках кратности числа отверстий и волновых чисел соответствующих форм. Во всех случаях появляются неидентифицируемые формы.

В ходе численных экспериментов установлен эффект влияния так называемых резонансных форм на устойчивость оболочек. Была установлена также нечувствительность критической нагрузки к граничным условиям и смещению отверстия в осевом направлении.

Указатель литературы

1. *П.Е.Товстик* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995, 320 с.
2. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
3. *Броуген Ф., Форсберг К., Смит С.* Динамическое поведение цилиндрической оболочки с вырезом // Ракетная техника и космонавтика. 1969. № 5. С. 130–141.
4. *Коноплев Ю.Г., Тильш А.Л.* Устойчивость цилиндрических оболочек с вырезами при кручении и внешнем давлении. //Сборник аспирантских работ “Теория пластин и оболочек” Казанск. ун-та. Казань, 1972.
5. *Голда Ю.Л., Преображенский И.Н., Штукарев В.С.* Экспериментальное исследование устойчивости оболочек с отверстиями. Прикладная механика. Киев, 1973.

О ВОЗМОЖНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАХ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ С ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИМ КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

М.А. Фирсов, Г.И. Михасев

1. Введение

Исследованию колебаний кольцевых пластинок посвящено значительное число публикаций. Рассмотрены как кольцевые пластинки переменной толщины [1], так и пластинки различных форм, близких к круговым и имеющих эксцентрические круговые вырезы [2]–[5]. В указанных работах изучены колебания, сопровождающиеся образованием волн, покрывающих всю поверхность пластинки. Для решения задач, как правило, использовались либо численные методы, либо методы возмущений. Так, в [2] решения строились в виде формальных асимптотических рядов по степеням малого параметра, характеризующего степень отклонения контура пластинки от окружности.

Целью данной работы является исследование малых свободных колебаний кольцевой пластинки с эксцентрическим круговым вырезом, характеризуемых локализацией собственных форм вблизи некоторого радиуса. Формальное асимптотическое решение строится с использованием метода Товстика [6]. Находится несколько собственных частот, соответствующих локализованным формам колебаний, при которых отсутствуют узловые диаметры. Исследуется зависимость частот от параметра, характеризующего эксцентриситет выреза. В работе не обсуждается погрешность построенного формального асимптотического решения.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую кольцевую пластинку с внешним радиусом a и неконцентрическим круговым вырезом радиуса b (рис. 1). Центр кру-

гового выреза O_1 находится на расстоянии δ от центра пластинки O_2 .

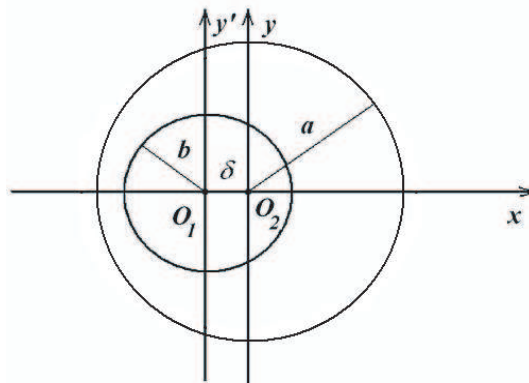


Рис. 1. Кольцевая пластинка с эксцентрическим круговым вырезом

Для описания колебаний упругой изотропной пластинки используем классическое уравнение [7], записанное в полярной системе координат с центром в точке O_1 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 W(r, \varphi) - \frac{\sigma h \omega^2}{D} W(r, \varphi) = 0. \quad (1)$$

Здесь $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластинки, ω — собственная частота колебаний, h — толщина пластинки, E, ν, σ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала, соответственно.

Пусть пластинка занимает область, ограниченную двумя замкнутыми кривыми γ_1 и γ_2 , которые в выбранной полярной системе координат задаются уравнениями $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, соответственно. Здесь $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$.

Рассмотрим условия жесткого защемления внешнего и внутреннего контуров:

$$W(r, \varphi) = \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_1(\varphi), \quad (2)$$

$$W(r, \varphi) = \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_2(\varphi). \quad (3)$$

3. Метод решения

В выбранной системе координат имеем:

$$r_1(\varphi) = b, \quad (4)$$

$$r_2(\varphi) = \delta \cos \varphi + \sqrt{a^2 - \delta^2 \sin^2 \varphi}. \quad (5)$$

Разложим функцию $r_2(\varphi)$ в ряд по степеням φ :

$$r_2(\varphi) = (a + \delta) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \varphi^2 + \dots \right]. \quad (6)$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad w(\rho, \varphi) = W(r, \varphi)/R. \quad (7)$$

где $R = a + \delta$. Тогда, уравнение (1) и граничные условия (2), (3) примут вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 w(\rho, \varphi) - \lambda w(\rho, \varphi) = 0, \quad (8)$$

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b}{R}, \quad (9)$$

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\partial w(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{a} \right)^2 \varphi^2 + O(\varphi^4), \quad (10)$$

где $\lambda = \sigma h \omega^2 R^4 / D$ — безразмерный частотный параметр.

Пусть

$$\varepsilon = \frac{\delta}{a} \ll 1. \quad (11)$$

— малый параметр. Сделаем замену переменной

$$\varphi = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \xi . \quad (12)$$

В новых переменных задача (8)–(10) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\varepsilon}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)^2 w(\rho, \xi) - \lambda w(\rho, \xi) = 0 , \quad (13)$$

$$w(\rho, \xi) = \frac{\partial w(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b}{R} , \quad (14)$$

$$w(\rho, \xi) = \frac{\partial w(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \xi^2 + O(\xi^4) . \quad (15)$$

Решение задачи (13)–(15) ищем в виде [6]

$$w(\rho, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\rho, \xi) , \quad (16)$$

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k , \quad (17)$$

где $w_k(\rho, \xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Подстановка (16), (17) в (13)–(15) приводит к последовательности краевых задач. В нулевом приближении ($k = 0$) имеем однородную краевую задачу:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 w_0(\rho, \xi) - \lambda_0 w_0(\rho, \xi) = 0 , \quad (18)$$

$$w_0(\rho, \xi) = \frac{\partial w_0(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b}{R} = b_1 , \quad (19)$$

$$w_0(\rho, \xi) = \frac{\partial w_0(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 1 . \quad (20)$$

Общее решение данной задачи ищем в виде [6]

$$w_0(\rho, \xi) = P_0(\xi) \tilde{w}_0(\rho) , \quad (21)$$

$$\tilde{w}_0(\rho) = c_1 J_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + c_2 Y_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + c_3 I_0(\lambda_0^{1/4} \rho) + c_4 K_0(\lambda_0^{1/4} \rho), \quad (22)$$

где $P_0(\xi)$ —неизвестная функция, удовлетворяющая на бесконечности условию затухания ($P_0(\xi) \rightarrow 0$), $J_0(x)$, $Y_0(x)$, — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, а $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Подстановка (21) в граничные условия (19) и (20) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} c_1 J_0(\lambda_0^{1/4} b_1) + c_2 Y_0(\lambda_0^{1/4} b_1) + c_3 I_0(\lambda_0^{1/4} b_1) + c_4 K_0(\lambda_0^{1/4} b_1) = 0 \\ c_1 J_0'(\lambda_0^{1/4} b_1) + c_2 Y_0'(\lambda_0^{1/4} b_1) + c_3 I_0'(\lambda_0^{1/4} b_1) + c_4 K_0'(\lambda_0^{1/4} b_1) = 0 \\ c_1 J_0(\lambda_0^{1/4}) + c_2 Y_0(\lambda_0^{1/4}) + c_3 I_0(\lambda_0^{1/4}) + c_4 K_0(\lambda_0^{1/4}) = 0 \\ c_1 J_0'(\lambda_0^{1/4}) + c_2 Y_0'(\lambda_0^{1/4}) + c_3 I_0'(\lambda_0^{1/4}) + c_4 K_0'(\lambda_0^{1/4}) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

относительно неизвестных c_i . Здесь и ниже штрих означает дифференцирование по ρ . Приравнявая определитель данной системы к нулю, приходим к уравнению для определения параметра λ_0 :

$$F(\lambda_0) = 0. \quad (24)$$

Пусть $\lambda_0 = \lambda_0^{(m)}$ —корни уравнения (24), которые образуют счетное множество ($m = 1, 2, \dots$).

В первом приближении имеем неоднородное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 w_1(\rho, \xi) - \lambda_0 w_1(\rho, \xi) = \lambda_1 P_0(\xi) \tilde{w}_0(\rho) + \\ + \left[\frac{2}{\rho^3} \tilde{w}_0''(\rho) - \frac{2}{\rho^2} \tilde{w}_0'(\rho) + \frac{4}{\rho^4} \tilde{w}_0(\rho) \right] \frac{d^2 P_0}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

с неоднородными граничными условиями

$$w_1(\rho, \xi) = \frac{\partial w_1(\rho, \xi)}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = \frac{b}{R} = b_1, \quad (26)$$

$$w_1(\rho, \xi) = 0, \quad \frac{\partial w_1(\rho, \xi)}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \xi^2 P_0(\xi) \tilde{w}_0''(1) \text{ при } \rho = 1. \quad (27)$$

Задача (25)–(27) является неоднородной задачей на спектре. Для того, чтобы она имела решение, необходимо потребовать выполнения

некоторого условия (условия разрешимости [8]). После несложных преобразований данное условие может быть сведено к дифференциальному уравнению относительно функции P_0 :

$$\delta_1 \frac{d^2 P_0(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda_1 \delta_0 - \xi^2 \delta_2) P_0(\xi) = 0, \quad (28)$$

где

$$\delta_0 = \int_{b_1}^1 \rho \tilde{w}_0(\rho) d\rho, \quad (29)$$

$$\delta_1 = 2 \int_{b_1}^1 \frac{\tilde{w}_0(\rho)}{\rho^3} (\rho \tilde{w}'_0 - \rho^2 \tilde{w}''_0 - 2\tilde{w}_0) d\rho, \quad (30)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} (\tilde{w}''_0(1))^2. \quad (31)$$

Можно показать, что уравнение (28) имеет решение, удовлетворяющее условию затухания ($P_0 \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$), если

$$\delta_1 \delta_2 > 0, \quad \delta_0 > 0. \quad (32)$$

В этом случае существует серия решений

$$P_0(\xi) = P_0^{(n)}(\xi) = H_n(\eta) e^{-\frac{\eta^2}{2}}, \quad \eta = \sqrt[4]{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \xi, \quad (33)$$

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(n)} = \frac{1}{\delta_0} \sqrt{\delta_1 \delta_2} (1 + 2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

удовлетворяющая условию затухания. Здесь $H_n(\eta)$ — полиномы Эрмита. Например, $H_0 = 1$, $H_1 = \eta$, $H_2 = \eta^2 - 1/2, \dots$

В нашем случае расчеты показывают, что условия (32) выполняются. Следовательно, функция

$$w_0(\rho, \xi) = H_n \left(\sqrt[4]{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \xi \right) e^{-\frac{\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_1}} \xi^2}{2}} \left\{ c_1 J_0(\lambda_0^{\frac{1}{4}} \rho) + c_2 Y_0(\lambda_0^{\frac{1}{4}} \rho) + c_3 I_0(\lambda_0^{\frac{1}{4}} \rho) + c_4 K_0(\lambda_0^{\frac{1}{4}} \rho) \right\} \quad (35)$$

есть нулевое приближение разложения (16) собственной формы колебаний пластинки в окрестности "слабого" радиуса $\varphi = 0$, а

$$\lambda = \lambda_0^{(m)}(1 + \varepsilon\chi^{(m,n)} + O(\varepsilon^2)), \quad (36)$$

где $\chi^{(m,n)} = \lambda_1^{(m,n)}/\lambda_0^{(m)}$, есть соответствующее собственное значение задачи (13)–(15), пропорциональное квадрату собственной частоты колебаний.

Следует отметить, что построенное здесь формальное асимптотическое решение (35) не удовлетворяет условию периодичности по координате φ и является медленно убывающей функцией при удалении от радиуса $\varphi = 0$. Вопрос о погрешности построенных здесь локализованных форм колебаний и найденных собственных частот требует дополнительного исследования.

4. Численные результаты

Расчеты по определению параметров $\lambda_0^{(m)}$, $\chi^{(m,n)}$ и построению соответствующих форм колебаний были выполнены с использованием прикладного математического пакета MathCad2000.

На рис. 2 показаны три формы собственных колебаний пластинки без узловых диаметров, локализованные в окрестности радиуса $\varphi = 0$, при а) $m = 1, n = 0$; б) $m = 1, n = 1$; в) $m = 1, n = 2$.

В таблице 1 приведены результаты расчетов параметров $\lambda_0^{(m)}$, $\chi^{(m,n)}$, полученные при фиксированных $a = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $b = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 1.5 \cdot 10^{-4}$ м, $v = 0.4$ и различных значениях ε . Данные параметры соответствуют реконструированной барабанной перепонке среднего уха, изготовленной из хряща, и жестко скрепленной по внутреннему контуру с неподвижным Т-образным протезом [9].

Из таблицы видно, что с увеличением номера частоты m поправка, учитывающая наличие эксцентриситета выреза, уменьшается. Отметим также слабую чувствительность величины $\chi^{(m,n)}$ к параметру ε .

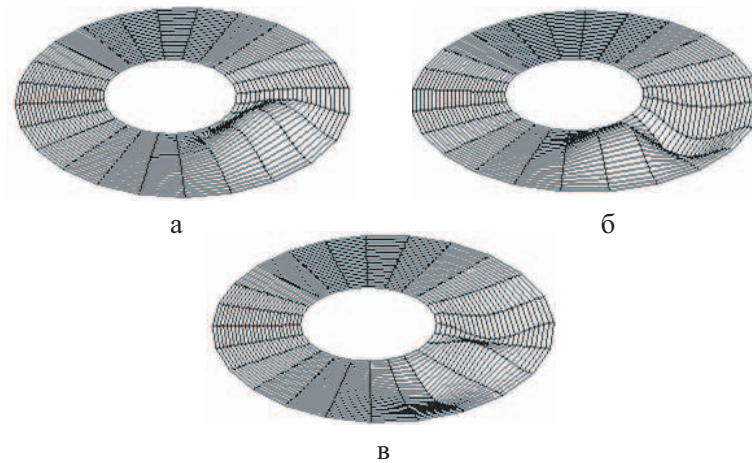


Рис. 2. Формы колебаний пластины при а) $m = 1, n = 0$; б) $m = 1, n = 1$; в) $m = 1, n = 2$.

Таблица 1.

Зависимость параметров $\lambda_0^{(m)}, \chi^{(m,n)}$ от эксцентриситета выреза.

ε	$\lambda_0^{(1)}$	$\chi^{(1,0)}$	$\lambda_0^{(2)}$	$\chi^{(2,0)}$	$\lambda_0^{(3)}$	$\chi^{(3,0)}$
0.05	3802	0.3446	29012	0.2542	111729	0.1935
0.06	3791	0.3448	28928	0.2544	111404	0.1936
0.07	3778	0.3451	28828	0.2547	111021	0.1938
0.08	3763	0.3454	28715	0.2549	110584	0.1940
0.09	3746	0.3457	28587	0.2552	110092	0.1943
0.1	3728	0.3461	28445	0.2556	109548	0.1946

5. Заключение

В статье исследованы свободные колебания кольцевой, жестко заземленной по обоим контурам пластинки с эксцентрическим вырезом. Построенные с использованием метода Товстика формальные асимптотические решения соответствуют формам колебаний, отличающимся отсутствием узловых диаметров и локализацией прогибов в окрестно-

сти некоторого наиболее "слабого" радиуса. Найдены несколько первых собственных частот, исследовано влияние эксцентриситета выреза на поправку к частоте колебаний.

Указатель литературы

1. *Сони С., Амба-Пао Ч.* Осесимметричные колебания кольцевых пластинок переменной толщины // Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем. М.: Мир, 1984. С. 7–16.
2. *Parker R.G., Mote Jr. C.D.* Exact Perturbation for the Vibration of Almost Annular or Circular Plates // Journal of Vibration and Acoustics. 1996. Vol. 118. P. 436–445.
3. *Parker R.G., Mote Jr. C.D.* Exact Boundary Condition Perturbation Solutions in Eigenvalue Problems // ASME Journal of Applied Mechanics. 1996. Vol. 63. P. 128–134.
4. *Nagaya K.* Transverse Vibration of a Plate Having an Eccentric Inner Boundary // ASME Journal of Applied Mechanics. 1977. Vol. 44. N 1. P. 165–166.
5. *Истен Ф., Хемминг Ф.* Определение основной частоты колебаний пластинок некруговой формы со свободными круговыми вырезами // Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем. М.: Мир, 1984. С. 165–180.
6. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука. 1995. 320 с.
7. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М., 1958. 628 с.
8. *Найфэ А.Х.* Введение в методы теории возмущений. М., 1978. 535 с.
9. *Михасев Г.И., Фирсов М.А., Ситников В.П.* Моделирование свободных колебаний звукопроводящей системы реконструированного среднего уха // Российский журнал биомеханики. 2005. Т. 9. № 1. С. 52–62.

Содержание

Предисловие	3
1. О научных трудах П.Е. Товстика	6
<i>С.Б. Филитов</i>	
1. Свободные колебания тонких оболочек	6
2. Линейная теория устойчивости тонких оболочек	8
3. Нелинейная теория оболочек	10
4. Прикладные задачи	11
5. Неклассические модели в теории оболочек	12
2. Уточненное уравнение Кирхгофа в теории нелинейных колебаний балок	14
<i>И.В. Андрианов</i>	
3. О потере устойчивости симметричных форм равновесия неоднородных круглых пластин	20
<i>С.М. Бауэр, Е.Б. Воронкова</i>	
1. Потеря устойчивости однородной изотропной пластины .	20
2. Потеря симметричной формы равновесия неоднородной изотропной пластины	23
4. Нелинейные осесимметричные колебания	

конической оболочки	26
<i>О.С. Букашкина</i>	
1. Постановка задачи	26
2. Математическая модель	27
3. Вывод основных уравнений движения системы	28
4. Анализ нелинейных осесимметричных колебаний	30
5. Сравнение аналитического и численного решений.	32
6. Заключение	34
5. Укороченные уравнения и асимптотический портрет в теории тонких оболочек	36
<i>Б.Н. Квасников</i>	
1. Постановка задачи	36
2. Аксиоматика асимптотически порядкового анализа	38
3. Постулат Лява. Полная краевая задача	51
4. Заключение	55
6. Устойчивость цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной под действием внешнего давления	60
<i>М.Е.Кобченко, С.Б.Филиппов</i>	
1. Введение	60
2. Постановка задачи и основные уравнения	61
3. Граничные условия на параллели сопряжения	63
4. Приближенное решение краевой задачи	65
5. Асимптотический анализ условий сопряжения	68
6. Улучшенные условия сопряжения оболочки и пластины	70
7. Пример расчета	73
7. О напряженно-деформированном состоянии колебательной системы реконструированного среднего уха после установки протеза	75
<i>Г.И. Михасев, С.А. Ермоченко</i>	
1. Введение	75

Содержание

115

2.	Геометрическая модель	75
3.	Уравнения равновесия	79
4.	Численные расчеты	83
8.	Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих оболочек на упругом основании	87
	<i>А.В. Михеев</i>	
1.	Введение	87
2.	Уравнения устойчивости пологих оболочек на упругом основании с учетом сдвига	88
3.	Частные случаи	91
9.	Свободные колебания и устойчивость цилиндрической оболочки ослабленной отверстиями	98
	<i>А.Л. Смирнов</i>	
1.	Свободные колебания оболочек с вырезами	98
2.	Устойчивость оболочек с вырезами	100
3.	Выводы	102
10.	О возможных локальных формах колебаний круговой кольцевой пластинки с эксцентрическим круговым вырезом	104
	<i>М.А. Фирсов, Г.И. Михасев</i>	
1.	Введение	104
2.	Постановка задачи	104
3.	Метод решения	106
4.	Численные результаты	110
5.	Заключение	111