ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2016, том 52, № 2, с. 103–111

ВЫПУКЛОСТЬ МНОЖЕСТВА ЦЕН ОПЦИОНОВ КАК НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА

© 2016 г. С.В. Курочкин

(Москва)

Для того чтобы совокупность опционов с различными ценами исполнения на один базовый актив не содержала арбитражных возможностей (т.е. извлечения положительной прибыли при нулевых вложениях капитала и отсутствии риска потерь), их рыночные цены в каждый момент времени должны удовлетворять определенным соотношениям. Известны некоторые соотношения такого типа – монотонность, липшицевость, выпуклость, – являющиеся следствием требования безарбитражности. В работе получен полный и независимый набор конструктивно проверяемых соотношений типа выпуклости для цен опционов, представляющий необходимое и достаточное условие отсутствия арбитража. Для доказательства основного результата потребовалось сформулировать и доказать специальный вариант леммы Фаркаша. Конструкция допускает обобщение на деривативы, зависящие от нескольких базовых активов и/или имеющие произвольные кусочно-линейные профили выплат. Для этого случая доказано, что всегда имеется возможность выбрать конечное число характеристик портфеля опционов, по которым можно было бы судить о том, является ли он арбитражным.

Ключевые слова: опцион; безарбитражное ценообразование, выпуклость.

Классификация JEL: G13.

ВВЕДЕНИЕ

Изучению свойств монотонности, выпуклости и границ цен опционов, рассматриваемых как функция каждого из своих пяти аргументов, посвящена значительная литература. Так, например, в (Kijima, 2002) в рамках некоторых моделей для цены базового актива доказаны свойства выпуклости как функции исходной цены базового актива и монотонности – как функции волатильности.

Предметом рассмотрения в настоящей работе является зависимость цены опциона от страйка при равных и фиксированных прочих аргументах. В классических работах, посвященных этой задаче (Merton, 1973, Theorems 4–5; Cox, Rubinstein, 1985, § 4-1, Proposition 2; Халл, 2014; Люу, 2010), в ситуации отсутствия арбитража были получены следующие соотношения:

– монотонность (убывание для опционов колл и возрастание для опционов пут);

– липшицевость с константой e^{-rT} для случая уплаты премии up front и единицей для маржируемых опционов;

– выпуклость.

В многочисленных работах в различных постановках рассматривались задачи получения интервалов для цен опционов и связанных с ними величин. В (Karatzas, Kou, 1996) и в частных “полумодельных” предположениях (например, в работе (Perrakis, Ryan, 1984)) был получен следующий результат. Если рынок отличается от идеального, рассматриваемого в модели Блэка–Шоулза–Мертона, наличием некоторых ограничений на операции с базовыми активами (невозможность заимствования, запрет продаж без покрытия и др.), то для отдельного опциона возникает безарбитражный интервал цен, так что любое значение цены вне его порождает арбитражные возможности, а любое значение внутри него – не порождает.

В (King, Koivu, Pennanen, 2005; Bain, 2011) методами выпуклой оптимизации решается задача определения безарбитражного (без модельных предположений) интервала для цены опциона при заданных цене базового актива и нескольких опционов с другими страйками. В работах (Wang, Yin, Qi, 2004; Fengler, 2009) предложены, соответственно, методы интерполяции кривой волатильности и сглаживания поверхности волатильности (а затем, через модель Блэка–Шоулза–Мертона, и самих цен опционов) с соблюдением условий отсутствия арбитража. В (Bassett, 1997) исследовалось, в каких границах может варьироваться риск-нейтральное распределение будущей цены базового актива при данной (безарбитражной) структуре цен опционов в зависимости от страйка.

В данном круге тем представляет интерес полное описание всех безарбитражных соотношений между ценами опционов с различными страйками. В такой постановке, и даже в части определения числа таких независимых соотношений, вопрос, насколько известно автору, не рассматривался.

В настоящей работе, с использованием аппарата выпуклого анализа, было получено решение этой задачи с обобщениями на другие типы производных инструментов.

Данная работа продолжает исследования автора по вопросам безмодельного ценообразования деривативов (Курочкин, 2005, 2014).

1. ПОЛНЫЙ НАБОР БЕЗАРБИТРАЖНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ЦЕН ОПЦИОНОВ С РАЗЛИЧНЫМИ СТРАЙКАМИ

Пусть имеется n опционов со страйками $K_1, \ldots, K_n$ $(K_1 < \ldots < K_n)$ и сроком исполнения T на некоторый финансовый актив S. В силу соотношений пут-колл паритета (Put-Call Parity) достаточно рассматривать только опционы колл. Поскольку в (Халл, 2014) доказано, что различие между опционами колл европейского и американского типов не отражается на их ценообразовании, в данном случае конструкция относится к обоим типам.

Обозначим через $C_i (i = 1, \ldots, n)$:

1) величины $e^{-rT} c_i$, где c_i – премия за соответствующий опцион, r – безрисковая ставка, для случая уплаты премии up front;

2) цены опционов, для случая биржевых маржируемых опционов. Тогда финансовый результат по опциону i полностью характеризуется функцией выплат на момент времени T в зависимости от цены S_T базового актива в этот же момент:

$$f_i(S_T) = \max(S_T - K_i, 0) - C_i. \tag{1}$$

Наличие/отсутствие арбитража эквивалентно существованию/несуществованию набора вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ таких, что выполнены соотношения

$$\forall S \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(S) \geq 0; \quad \exists \hat{S}\colon \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(\hat{S}) > 0. \tag{2}$$

Критерии такого рода описываются леммой Фаркаша (Рокафеллар, 1973, § 22; Roos, 2009; Jeyakumar, 2009; Дмитрук, 2012) и различными ее следствиями. Автору не удалось найти в литературе вариант леммы, который бы точно подходил к данной задаче. Поэтому, не претендуя на новизну, сформулируем следующее утверждение (доказательства этого и других вспомогательных утверждений приведены в Приложении).

Лемма 1. *Пусть конечное семейство линейных функционалов $\psi_1, \ldots, \psi_m$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ обладает следующим свойством: если для $x \in \mathbb{R}^n$ $\psi_j(x) \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, то $x = 0$. Тогда существуют положительные числа α_j, $j = 1, \ldots, m$ такие, что $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j = 0$.*

Примечание. Обратное утверждение верно при дополнительном предположении, что система $\{\psi_j\}_{j=1,\ldots,m}$ тотальна, т.е. из $\psi_j(x)=0,\ \ j=1,\ldots,m$ следует $x=0$.

Проверку условий (2) для $S\in(0,\infty)$ необходимо заменить конструктивно проверяемым критерием, вид которого, очевидно, будет зависеть от конкретного вида функций выплат.

Лемма 2. *Для функций выплат* (1) *первое условие в* (2) *эквивалентно условию*

$$\forall j=1,\ldots,n\ \ \sum_{i=1}^{n}x_i f_i(K_j)\geq 0;\quad \sum_{i=1}^{n}x_i\geq 0, \tag{3}$$

второе условие – тому, что среди неравенств (3) *хотя бы одно строгое.*

Для сокращения записи обозначим $h_i=K_{i+1}-K_i,\ \ i=1,\ldots,n-1$.

Из лемм 1–2 следует, что критерием безарбитражности семейства цен $\{C_i\}$ является существование положительного (т.е. со всеми $z_i>0, i=1,\ldots,n+1$) решения линейной системы:

$$\begin{pmatrix} -C_1 & -C_1+h_1 & -C_1+h_1+h_2 & \ldots & -C_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}h_i & 1\\ -C_2 & -C_2 & -C_2+h_2 & \ldots & -C_2+\sum\limits_{i=2}^{n-1}h_i & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -C_n & -C_n & -C_n & \ldots & -C_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \ldots\\ z_n\\ z_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \ldots\\0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Полагая, без ограничения общности, $z_{n+1}=1$, получим эквивалентное условие существования положительного решения у системы

$$\begin{pmatrix} -C_1 & -C_1+h_1 & -C_1+h_1+h_2 & \ldots & -C_1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}h_i\\ -C_2 & -C_2 & -C_2+h_2 & \ldots & -C_2+\sum\limits_{i=2}^{n-1}h_i\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -C_n & -C_n & -C_n & \ldots & -C_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ \ldots\\ z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\ \ldots\\-1\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из последнего уравнения системы (4) следует, что необходимым условием отсутствия арбитража является

$$C_n>0, \tag{6}$$

имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Определитель матрицы системы* (5) *равен*

$$(-1)^n C_n\prod_{i=1}^{n-1}h_i. \tag{7}$$

Таким образом, при выполнении необходимого условия (6) система (5) имеет, и притом единственное, решение, которое можно записать по правилу Крамера. Следовательно, для проверки отсутствия арбитража необходимо и достаточно выписать выражения для соответствующих определителей и условия их знакоопределенности в терминах $\{C_i\}$.

Обозначим через $\Delta_k,\ k=1,\ldots,n$ определитель матрицы системы (5), в которой столбец k заменен на столбец из правой части.

Лемма 4.

$$\Delta_1 = (-1)^n(-C_1 + h_1 + C_2)\prod_{j=2}^{n-1} h_j, \tag{8}$$

$$\Delta_k = (-1)^n \prod_{j=1}^{n-1} h_j \left[C_{k-1}/h_{k-1} - C_k(1/h_{k-1} + 1/h_k) + C_{k+1}/h_k\right], \ k = 2, \ldots, n-1, \tag{9}$$

$$\Delta_n = (-1)^n(C_{n-1} - C_n)\prod_{j=1}^{n-2} h_j. \tag{10}$$

Из соотношений (6)–(10) следует основной результат для “ванильных” опционов.

Теорема 1. *Для отсутствия арбитражных возможностей необходимо и достаточно, чтобы цены опционов* $C_1, \ldots, C_n$ *удовлетворяли соотношениям:*

$$C_n > 0,$$

$$C_1 < C_2 + h_1, \tag{11}$$

$$h_k C_{k-1} - (h_{k-1} + h_k)C_k + h_{k-1} C_{k+1} > 0, \quad k = 2, \ldots, n-1, \tag{12}$$

$$C_{n-1} > C_n. \tag{13}$$

В словесном выражении соотношение (6) – это положительность на правом краю диапазона страйков, (13) – монотонность на правом краю, (12) – выпуклость во всех промежуточных точках, (11) – липшицевость на левом краю диапазона. Отсюда стандартными манипуляциями с неравенствами можно получить положительность, монотонность и липшицевость на всем диапазоне страйков.

Общее число соотношений (6), (11)–(13) равно $n + 1$. Геометрически множество, выделяемое этими соотношениями в пространстве цен $C_1, \ldots, C_n$, представляет n-мерный обобщенный симплекс в смысле (Рокафеллар, 1973, § 17), вершинами которого являются n точек и одно направление.

Таким образом, теорема 1 в части необходимости приводит к известным соотношениям, а в части достаточности является нетривиальной и дает полный набор независимых условий на цены опционов, гарантирующий отсутствие арбитражных возможностей.

Анализ цен опционов на Московской бирже (Московская биржа, 2015), регулярно проводимый автором, показывает, что соотношения (11)–(13), с учетом бид-аск спрэдов, выполняются практически всегда. Возникающие единичные несоответствия сразу же (частота обновления открытых данных – 1 раз в 5 секунд) устраняются роботами.

2. ОБОБЩЕНИЯ

Изложенная в разд. 1 конструкция может быть применена к другим типам деривативов. Например, рассмотрим бинарные опционы, функции выплат которых (здесь и далее функции f_i рассматриваются без учета цен $\{C_i\}$) имеют вид

$$f_i(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T \le K_i, \\ 1, & S_T > K_i. \end{cases} \tag{14}$$

Тогда аналогом леммы 2 будет следующая лемма.

Лемма 2′. *Для функций выплат (14), с учетом* $\{C_i\}$, *первое условие в (2) эквивалентно условию*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i C_i \ge 0 \qquad \forall k = 0, \ldots, n; \tag{15}$$

второе условие – тому, что среди неравенств (15) хотя бы одно строгое.

Аналогом системы (4) будет система

$$\begin{pmatrix} -C_1 & -C_1+1 & \dots & -C_1+1 \\ -C_2 & -C_2 & \dots & -C_2+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C_n & -C_n & \dots & -C_n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4')$$

Анализ знаков определителей, аналогичный проделанному в леммах 3–4, приводит к следующему результату.

Теорема 1′. *Для отсутствия арбитражных возможностей необходимо и достаточно, чтобы цены бинарных опционов $C_1, \dots, C_n$ со страйками $K_1 < \dots < K_n$ удовлетворяли соотношениям:*

$$1 > C_1 > \dots > C_n > 0. \qquad (16)$$

Множество (16), как и множество (6), (11)–(13), представляет симплекс в пространстве цен. Как и ранее, утверждение нетривиально в части достаточности: любое дополнительное условие на $C_1, \dots, C_n$, не являющееся следствием условий (16), может нарушаться при выборе подходящей риск-нейтральной меры без нарушения условий безарбитражности.

Представляет интерес возможность дальнейшего обобщения результатов и конструкций с конкретных типов опционов на деривативы, по возможности, произвольного устройства. Имеются в виду как различные, более сложные, профили выплат, так и случай зависимости деривatива от нескольких базовых активов. Практически важными, в частности, являются опционы “радуга” (“по лучшему”, “по худшему”) (Галиц, 1998, гл. 11), получившие в последнее время большую популярность в качестве встроенных в структурные продукты, а также спрэд-опционы, опционы кванто и др.

В общем случае, пусть имеется n деривативов европейского типа с произвольными функциями выплат $f_i(S_1, \dots, S_p)$, $i = 1, \dots, n$ (без учета цены деривatива), зависящими от цен базовых активов $S_1, \dots, S_p$, $p \geq 1$ (среди активов f_i могут быть не только опционы, но также фьючерсы/форварды, базовые активы, безрисковый актив и т.д.).

Обозначим через U_j область возможных значений цены базового актива j (в частности, ранее было $U_j = \mathbb{R}^+$). Пусть, как и ранее, $C_1, \dots, C_n$ – цены деривативов, приведенные к моменту исполнения, $\vec{C} = (C_1, \dots, C_n)^T$, $\vec{C} \in \mathbb{R}^n$. Наличие/отсутствие арбитража как условие на вектор $\vec{C}$ может быть выражено через свойства параллельных сдвигов множества значений отображения $\prod_{i=1}^{n} f_i$. Обозначим

$$\Omega = \left\{ \left(f_1(S_1, \dots, S_p), \dots, f_n(S_1, \dots, S_p) \right)^T : S_j \in U_j, \quad j = 1, \dots, p \right\}. \qquad (17)$$

Первая фундаментальная теорема оценки финансовых активов (FTAP-1, см. (Панджер, 2005; Фельмер, Шид, 2008)) может быть эквивалентно переформулирована следующим образом.

Теорема 2. *В сформулированных выше условиях для отсутствия арбитражных возможностей необходимо и достаточно, чтобы точка $\vec{C}$ была относительно внутренней точкой (Рокафеллар, 1973, § 6) выпуклой оболочки множества Ω.*

Доказательство. Из определения арбитража следует, что он присутствует тогда и только тогда, когда множество $\Omega - \vec{C}$ может быть собственно (т.е. как в теореме отделимости из разд. 4, см. также (Рокафеллар, 1973, § 11)) отделено от нуля линейным функционалом. Пусть $\mathrm{conv}(\Omega)$ – выпуклая оболочка множества Ω. Как показано в (Рокафеллар, 1973, теорема 11.1), собственная отделимость от нуля множества и его выпуклой оболочки (а также и замкнутой выпуклой оболочки, что понадобится далее) эквивалентны. Утверждение теоремы теперь следует из (Рокафеллар, 1973, теорема 11.3).

Для полностью произвольного Ω вопрос о конструктивной проверке условий теоремы 2, по всей видимости, не имеет алгоритмического решения. Предметом исследований в области вычислительной геометрии являются оценки алгоритмической сложности построения выпуклой оболочки *конечной* системы точек в $\mathbb{R}^n$ (Berg et al., 2008, Chapter 11). Таким образом, для того чтобы свести задачу к линейно-алгебраической, в рамках описанной конструкции ключевую роль играет возможность выбрать конечное число пробных характеристик портфеля опционов, по которым можно было бы судить о том, арбитражный он или нет. Выше такими наборами были: для обычных опционов – значения портфеля для S_T, равных страйкам, и суммарный наклон профиля выплат на бесконечности; для бинарных опционов – значения портфеля для S_T меньшего, чем наименьший из страйков, в промежутках между страйками, и большего, чем наибольший из страйков. В общем случае, ответ на вопрос о том, всегда ли в множестве Ω можно выбрать конечное число пробных точек, отрицателен.

Пример. Пусть $p = 1$, $n = 2$, $0 < S_1(= S) < \infty$, $f_1(S) = S$, $f_2(S) = S^2$. Каковы бы ни были точки $s_1, \ldots s_N \in \mathbb{R}^+$, отделимость от нуля некоторого параллельного сдвига множества $\{(s, s^2): s \in \mathbb{R}^+\}$ не может быть гарантирована отделимостью от нуля соответствующего сдвига множества $\{(s_k, s_k^2), k = 1, \ldots, N\}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести хорду через две любые соседние точки на параболе.

Однако в практически важных случаях, в том числе во всех рассмотренных либо упомянутых выше, множество Ω обладает специальным свойством.

Лемма 5. *Пусть область определения $W_i \subset \mathbb{R}^p$ каждого из отображений f_i, $i = 1,\ldots,n$, может быть разбита гиперплоскостями на конечное число подобластей $V_{i\gamma}$ таким образом, что сужение на каждое из $V_{i\gamma}$ соответствующего отображения f_i будет аффинным. Тогда замкнутая выпуклая оболочка $\tilde{\Omega}$ множества Ω является полиэдральным множеством в $\mathbb{R}^n$ (Рокафеллар, 1973, § 19), т.е. может быть представлено как пересечение конечного числа замкнутых полупространств.*

В силу (Рокафеллар, 1973, теорема 6.3) относительная внутренность выпуклого множества и его замыкания совпадают, поэтому переход к замыканию не меняет критерия безарбитражности в теореме 2. Без ограничения общности будем считать, что Ω (и, следовательно, $\tilde{\Omega}$) имеет полную аффинную размерность n – иначе деривативы являются линейно зависимыми и размерность задачи можно понизить (Рокафеллар, 1973, с. 60). Тогда для проверки условий теоремы 2 можно использовать простой конструктивный критерий собственной отделимости полиэдрального множества от нуля.

Лемма 6. *Пусть множество M в $\mathbb{R}^n$ имеет вид*

$$M = \bigcap_{j=1\ldots q} \{x: g_j(x) \le h_j\}, \tag{18}$$

где g_j – линейные функционалы, $h_j \in \mathbb{R}$ и имеет аффинную размерность n. Тогда, если M может быть собственно отделено от нуля, это делает один из функционалов g_j.

Окончательно алгоритм проверки безарбитражности вектора цен $\vec{C}$ сводится к следующей последовательности действий.

Теорема 3. *Пусть дано семейство деривативов f_i, удовлетворяющее условиям леммы 5 с вектором цен $\vec{C}$. Расмотрим соответствующее множество Ω из (17), его замкнутую выпуклую оболочку $\tilde{\Omega}$ и ее представление в виде (18). Вектор цен $\vec{C}$ является безарбитражным в том и только том случае, если он при подстановке вместо x удовлетворяет строгим вариантам всех неравенств (18).*

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство леммы 1. Пусть $\Omega = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j, \quad \alpha_j > 0 \quad \forall j = 1, \ldots, m \right\}$. Предположим от противного, что $0 \notin \Omega$. Воспользуемся теоремой отделимости (Фельмер, Шид, 2008, Предложение А1): *пусть* Ω *– непустое выпуклое множество в* R^m *и* $0 \notin \Omega$. *Тогда существует линейный функционал* g *на* R^m *такой, что:* 1) $\forall y \in \Omega$: $g(y) \geq 0$; 2) $\exists \hat{y} \in \Omega$: $g(\hat{y}) > 0$. С учетом переобозначений $y \leftrightarrow \psi$, $g \leftrightarrow \hat{x}$ из пункта 1 теоремы отделимости следует, что $\psi_j(\hat{x}) \geq 0$, $j = 1,\ldots,m$, а из пункта 2, – что $\hat{x} \neq 0$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j = 0$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, и дополнительно дано, что из $\psi_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, m$ следует $x = 0$. Тогда, если для некоторого $\tilde{x} \in R^n$ имеем $\psi_j(\tilde{x}) \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, то из равенства $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j(\tilde{x}) = 0$ следует $\psi_j(\tilde{x}) = 0$, $j = 1,\ldots, m$ откуда $\tilde{x} = 0$.

Доказательство леммы 2. Функция выплат по портфелю опционов $f(S) = \sum_{j=1}^{m} x_i f_i(S)$ с f_i вида (1) и произвольными $\{x_i\}$ представляет ломаную линию с узлами $S = K_i$ и горизонтальным начальным участком $(0, K_1]$. Для ее неотрицательности необходима и достаточна неотрицательность в узлах и неотрицательность наклона на промежутке $[K_n, \infty)$.

Доказательство леммы 3. Для доказательства достаточно вычесть 1-й столец матрицы из всех остальных, затем разложить определитель по последней строке.

Доказательство леммы 4.

Для доказательства равенства (8) следует второй столбец из столбцов 3, ... , n; затем разделить столбец n на h_{n-1} и прибавить его к первому. После чего провести разложение по первому, а затем по второму столбцу.

Доказательство равенства (9). Проделаем цепочку элементарных преобразований столбцов, как это сделано для случаев $k = 1$ и $k = n$ раздельно для левой (до столбца k) и правой частей матрицы. Затем последовательно разложим определитель по столбцам k и 1. Задача сводится к вычислению определителя двух нижне-треугольных и одной нижне-блочно-треугольной $(n-2)\times(n-2)$-матрицы с тремя блоками по диагонали вида: $\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_{k-2})$, 2×2-матрицы с элементами (по строкам) $\left((h_{k-1}+h_k;\ h_{k+1}); (h_k;\ h_{k+1})\right)$, и $\mathrm{diag}(h_{k+2}, \ldots, h_{n-1})$ соответственно.

Доказательство равенства (10). Столбец 1 вычитается из столбцов 2, ... , $n-1$; столбец $n-1$, деленный на h_{n-2}, вычитается из столбца n; столбец $n-2$ вычитается из столбца $n-1$; ...; столбец 2 вычитается из столбца 3. После чего проводим разложение определителя по столбцу n:

Доказательство леммы 5. Для любых i, γ образ $f_i|_{V_{i\gamma}}$ полиэдрален как образ полиэдрального множества при аффинном отображении (Рокафеллар, 1973, теорема 19.3). Их произведение, т.е. образ $\prod_{i=1}^{n} f_i|_{V_{i\gamma}}$, также полиэдрально. Замкнутая выпуклая оболочка конечного семейства полиэдральных множеств полиэдральна в силу (Рокафеллар, 1973, теорема 19.6).

Доказательство леммы 6. Утверждение следует из свойств конуса внешних нормалей к полиэдральному множеству (Дмитрук, 2012, лемма 6.6). Прямое доказательство: внутренность множества int(M) непуста и задается соответствующими строгими неравенствами; отделимость эквивалентна $0 \notin \mathrm{int}(M)$, или $0 \in \cup_{j=1,\ldots,q} \{x\colon g_j(x) \geq h_j\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Галиц Л. (1998). Финансовая инженерия. М.: ТВП.

Дмитрук А.В. (2012). Выпуклый анализ. М.: Макс-Пресс.

Курочкин С.В. (2005). Функции выплат, реализуемые с помощью опционных стратегий // *Экономика и математические методы.* Т. 41. Вып 3. С. 135–137.

Курочкин С.В. (2014). Если они уйдут. Каким будет российский рынок акций в отсутствие зарубежных инвесторов? // *Рынок ценных бумаг*. № 8. С. 57–59.

Люу Ю.-Д. (2010). Методы и алгоритмы финансовой математики. М.: Бином.

Московская биржа (2015). [Электронный ресурс] Официальный сайт. Срочный рынок. Режим доступа: http://moex.com/s96, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июль 2015 г.).

Панджер Х. (2005). Финансовая экономика. М.: Янус-К.

Рокафеллар Р. (1973). Выпуклый анализ. М.: Мир.

Фельмер Г., Шид А. (2008). Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО.

Халл Д. (2014). Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс.

Bain A. (2011). Arbitrage-Free Option Pricing by Convex Optimization. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://stanford.edu/class/ee364b/projects/2011projects/reports/bain.pdf, свободный. Загл. с экрана. Яз. рус. (дата обращения: июль 2015 г.).

Bassett G. (1997). Nonparametric Bounds for the Probability of Future Prices Based on Option Values // *IMS Lecture Notes-Monograph Series*. Vol. 31. P. 287–300.

Berg M. de, Cheong O., Kreveld M., Overmars M. (2008). Computational Geometry. Algorithms and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Cox J., Rubinstein M. (1985). Options Markets. N.Y.: Prentice Hall.

Fengler M. (2009). Arbitrage-Free Smoothing of the Implied Volatility Surface // *Quantitative Finance*. Vol. 9. No. 4. P. 417–428.

Jeyakumar V. (2009). Farkas Lemma: Generalizations. In: "*Encyclopedia of Optimization*". Floudas C., Pardalos P. (eds.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. P. 998–1001.

Karatzas I., Kou S. G. (1996). On the Pricing of Contingent Claims under Constraints // *The Annals of Applied Probability*. Vol. 6. No. 2. P. 321–369.

Kijima M. (2002). Monotonicity and Convexity of Option Price Revisited // *Mathematical Finance.* Vol. 12. No. 4. P. 411–425.

King A., Koivu M., Pennanen T. (2005). Calibrated Option Bounds // *International Journal of Theoretical and Applied Finance.* Vol. 8. No. 2. P. 141–159.

Merton R. (1973). Theory of Rational Option Pricing // *The Bell Journal of Economics and Management Science*. Vol. 4. No. 1. P. 141–183.

Perrakis S., Ryan P. (1984). Option Pricing Bounds in Discrete Time // *The Journal of Finance*. Vol. 39. No. 2. P. 519–525.

Roos K. (2009). Farkas Lemma. In: "*Encyclopedia of Optimization*". Floudas C., Pardalos P. (eds.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. P. 995–998.

Wang Y., Yin H., Qi L. (2004) No-Arbitrage Interpolation of the Option Price Function and Its Reformulation // *Journal o Optimization Theory and Applications*. Vol. 120. No. 3. P. 627–649.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Bain A. (2011). Arbitrage-Free Option Pricing by Convex Optimization. Available at: http://stanford.edu/class/ee364b/projects/2011projects/reports/bain.pdf (accessed: July 2015).

Bassett G. (1997). Nonparametric Bounds for the Probability of Future Prices Based on Option Values. *IMS Lecture Notes-Monograph Series* 31, 287–300.

Berg M. de, Cheong O., Kreveld M., Overmars M. (2008). Computational Geometry. Algorithms and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Cox J., Rubinstein M. (1985). Options Markets. N.Y.: Prentice Hall.

Dmitruk A.V. (2012). Convex Analysis. Moscow: Maks-Press (in Russian).

Fengler M. (2009). Arbitrage-Free Smoothing of the Implied Volatility Surface. *Quantitative Finance* 9, 4, 417–428.

Föllmer H., Shied A. (2008). Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time. Moscow: MTsNMO (in Russian).

Galitz L. (1998). Financial Engineering. Moscow: TVP (in Russian).

Hull J. (2014). Options, Futures and Other Derivatives. Moscow: Vil'yams (in Russian).

Jeyakumar V. (2009). Farkas Lemma: Generalizations. In: "*Encyclopedia of Optimization*". Floudas C., Pardalos P. (eds.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 998–1001.

Karatzas I., Kou S. G. (1996). On the Pricing of Contingent Claims under Constraints. *The Annals of Applied Probability* 6, 2, 321–369.

Kijima M. (2002). Monotonicity and Convexity of Option Price Revisited. *Mathematical Finance* 12, 4, 411–425.

King A., Koivu M., Pennanen T. (2005). Calibrated Option Bounds. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 8, 2, 141–159.

Kurochkin S.V. (2005). Payoff Functions Implementable by Option Strategies *Ekonomika i matematicheskie metody* 41, 3, 135–137 (in Russian).

Kurochkin S.V. (2014). If They Go Away. What will Russian Stock Market without Nonresidents? *Rynok tsennykh bumag* 8, 57–59 (in Russian).

Lyuu Yu.-D. (2010). Financial Engineering and Computation. Moscow: Binom (in Russian).

Merton R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 1, 141–183.

Moscow Exchange (2015). Official Site. Derivatives Market. Available at: http://moex.com/s96 (accessed: July 2015, in Russian).

Panjer H. (2005). Financial Economics. Moscow: Yanus-K (in Russian).

Perrakis S., Ryan P. (1984). Option Pricing Bounds in Discrete Time. *The Journal of Finance* 39, 2, 519–525.

Rokafellar R. (1973). Convex Analysis. Moscow: Mir (in Russian).

Roos K. (2009). Farkas Lemma. In: "*Encyclopedia of Optimization*". Floudas C., Pardalos P. (eds.). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 995–998.

Wang Y., Yin H., Qi L. (2004) No-Arbitrage Interpolation of the Option Price Function and Its Reformulation. *Journal o Optimization Theory and Applications* 120, 3, 627–649.

Поступила в редакцию
20.04.2015 г.

The Convexity of Option Prices as a Criterion of No-Arbitrage

S.V. Kurochkin

It is necessary at any time for the market prices to satisfy certain conditions of a set of options with different strike prices on the same reference asset be arbitrage-free. Some conditions of this kind are the consequences of arbitrage-free requirement: monotonicity, Lipschitz-parameters and conxexity. We give the complete set of independent and verifiable convexity-type properties for option prices that are equivalent to the absence of arbitrage. A special version of Farkas lemma was used in the proof of the main result. This construction may be generalized to the dirivatives depending on several reference assets and/or with arbitrary piecewise linear payoff diagrams. It is proved that one may choose a finite set of functions on an option portfolio sufficient to verify the arbitrage-free requirement for this context.

Keywords: option, no-arbitrage pricing, convexity.

JEL Classification: G13.