Трансцендентальный анализ математической деятельности: абстрактные [математические] объекты, конструкции и доказательства

С.Л. КАТРЕЧКО

Под *трансцендентальным* Кант понимает исследование, «*занимающееся не столько предметами, сколько видами [способами] нашего познания предметов, поскольку они* [эти способы познания. — *С.К.*] *должны быть возможными a priori* [5, 44][1]. Точнее, кантовское определение задает как *общую* задачу трансцендентализма, связанную с исследованием человеческой познавательной способности в целом (resp. человеческого способа познания), так и *прикладную* задачу трансцендентализма, связанную с анализом отдельных способов познания, одним из которых и является интересующая нас математическая деятельность, важнейшим конституирующим моментов которой выступает математическое доказательство. В составе познавательной способности (resp. сознания) человека Кант выделяет два основных «ствола познания»: чувственность и рассудок, определенное сочетание которых и предопределяет специфику того или иного вида познания. И если *опытное естествознание*, начинается с *чувственного созерцания*, которое впоследствии осмысляется рассудком посредством понятий, то математику Кант определяет как «*познание посредством конструирования понятий*» [5, 423], что предполагает совместную работу *рассудка* и *воображения*[2]. Тем самым Кант, вслед за Аристотелем, выделяет в составе познавательной деятельности помимо «первой философии» (метафизики) также и «вторую философию», а именно: *физику* (естествознание) и *математику* как различные

---

[1] Здесь мы приводим свою редакцию перевода, более ярко высвечивающую специфику трансцендентализма.

[2] *Воображение* Кант относит к пассивной чувственности, хотя и выделяет в нем *репродуктивное воображение* (или память) и более активное *продуктивное воображение* (или фантазию). Подробнее о кантовском воображения см. наши статьи [7, 8].

типы познавательной деятельности, первая из которых является *конкретным*, а вторая — *абстрактным познанием*. Соответственно, предметом изучения первой выступают [конкретные] объекты *природы*, а предметом второй — *абстрактно-идеальные объекты*, которые *создаются* нашим рассудком, ибо в самой «природе нет *кругов*, *квадратов*...»[3].

В этой связи понятно, что конкретно-физические и абстрактно-математические объекты имеют разный онтологический статус. Если *физические объекты* являются *реальными*[4] и удостоверяются нами как существующие путем их восприятия с помощью наших органов чувств (или некоторых физических приборов), то подобное удостоверение в существовании *абстрактных объектов* невозможно и поэтому для них должен быть предложен другой онтологический критерий [их существования]. Так, забегая несколько вперед, можно сказать, что *математические доказательства* (resp. геометрические построения, алгебраические вычисления) являются аналогами *физических экспериментов*, ибо задачей каждой из этих процедур является удостоверение в существовании (в том или ином смысле) соответствующих, физических или математических, объектов. А поскольку существует опасность, присутствующая в какой-то мере и в теоретическом естествознании, что *придуманные* нами математические абстракции (resp. теоретические объекты) окажутся *фикциями*, то критерий существования математических объектов вместе с тем должен быть также критерием различения хороших [математических] абстракций от плохих. Таковым выступает постулируемый Кантом *конструктивный* способ задания абстрактных [математических] *объектов* посредством тех или иных «действий чистого мышления (рассудка)» [5, 73], а его концепция может быть определена как *трансцендентальный конструктивизм*.

В наши задачи не входит детальное обсуждение проблемы *онтологического критерия*[5], однако поскольку это затрагивает специфику математической деятельности, то коротко остановимся на теме *трансцендентальной онтологии*.

---

[3] Постулировать или даже предполагать *природный* (реальный) статус математических предметов (объектов) противоестественно даже для обыденного рассудка.

[4] *Реальный* в каком-то смысле является синонимом *природного*, о котором мы говорили чуть выше.

* * *

Онтологический критерий наивного реализма, выражаемый максимой «существовать — значит быть воспринимаемым», не может претендовать на статус универсального, поскольку он не применим ни к математическим, ни к теоретическим абстракциям. Более того, трансцендентальный анализ показывает, что само по себе *восприятие*, т. е. обнаружение на «экране» нашего сознания тех или иных содержаний [сознания] еще не гарантирует *объективного существования* этого содержания, поскольку для подобного приписывания мы должны быть уверены, что наше восприятие является результатом «внешнего» воздействия, а не (само)воздействием на нашу способность восприятия активных компонентов нашего сознания (каковым, по Канту, является рассудок). Тем самым возникает проблема различения *объективно-реального* от *субъективного*, поскольку, возможно, что мы выдаем за объективно-воспринятое порождения собственной фантазии. Причем здесь идет речь о родовом недостатке любого *восприятия*, в том числе и с помощью физического *прибора* (например, осциллографа), на экране которого вместо изображения *внешних* сигналов может быть представлен результат некоторой *внутренней* (т. е. «субъективной») активности самого прибора, например результат сбоя его работы. Это означает, что одного критерия воспринятости для решения онтологической проблемы недостаточно и он должен быть дополнен критерием отличения восприятия от псевдовосприятия, яви от сна (Декарт), или явлений реальных от явлений воображаемых (Лейбниц).

Более того, в непосредственном чувственном восприятии нам не дан *объект* как таковой. Воспринимая, например, то, что мы именуем *камнем*, мы не воспринимаем *объект* под именем *камень*, поскольку наши органы чувств предназначены для восприятия, скорее, не *объектов* [сущностей], а [их] *свойств*. Как говорит Кант, мы воспринимаем *чувственное многообразие*, некоторый набор чувственных данных, которые при познании мы *интерпретируем* как восприятие [одного] объекта. Таким образом, [*объективное*] существование *объекта* постулируется нами, а трансцендентальными условиями этого являются, во-первых, акт *синтеза* [схватывания], (объ)*единя*ющий *многое* в нечто *единое* [= объект (?)], и, во-вторых, *единство* нашего сознания, т.е. *трансцендентальное единство апперцепции*, «благодаря которому все данное в созерцании многообразное объединяется в понятие об объекте» [5, 104]. Однако если *объект* не *дается, а задается* нами, то существует ли он на самом деле, т. е. *объективно*? — Тем самым мы, сделав круг, снова вернулись к вопросу об онтологическом критерии [существования].

Вместе с тем признание *субъективного* характера *содержания* восприятия не приводит с неизбежностью к субъективному идеализму берклиевского типа, т.е. к полной субъективации всех наших чувственных данных (проблема «первичные vs. вторичные качества»), ибо, как пишет Кант в § 19 2-го изд. *Критики*, «связка *есть* имеет в суждении своей целью отличить объективное единство данных представлений[6] от субъективного» [5, 105]. Тем самым совокупный опыт, зафиксированный в структуре нашего языка, говорит нам об *объективном* [и объектном] существовании содержаний наших восприятий и поэтому причина нашей неудачи состоит, скорее, в неверном выборе онтологического критерия, неявно принимаемом наивной мыслью (реализмом), который полагает, что для существования чего-либо достаточно постулировать возможность его *восприятия*.

Следуя интенции коперниканского переворота, спросим себя: «не достигнем ли мы большего успеха» [5, 18], если предложим другой критерий *объективного существования*, хотя возможно и не так кардинально отличающийся от точки зрения обыденного рассудка с его наивно-реалистическим тезисом: «существовать — значит быть объектом возможного восприятия, т. е. быть в принципе воспринимаемым»? Как мы выяснили выше, суть трансцендентального метода Канта состоит в анализе нашего знания, а «всякое знание требует понятия..., [которое] в своей форме есть нечто общее, служащее *правилом*» [5, 504]. Реализуя этот «измененный метод мышления», выберем в качестве базового случая не природные (естественно-физические) объекты, а математические объекты, которые имеют *конструктивный* способ своего *существования*. Тогда критерий существования будет таким: *существовать* — значит быть *конструируемым*, т. е. быть построенным по некоторому *правилу*. В кантовской *Критике* приводится немало примеров подобных [математических] конструкций[7], а парадигмальным может служить следующий пример, посредством которого Кант иллюстрирует вводимый им концепт *предмета вообще*

---

[5] Подробнее об этом мы говорим в наших статьях [11, 12].

[6] Выделенное нами подчеркиванием и есть определение *объекта* как *синтетического объединения чувственного многообразия в созерцании* (см., например, [5, 86]).

[7] См. *Критику*: [5, 423–430; 124–125; 103, 112 и др.].

(resp. *трансцендентального предмета/объекта*): «Так, мы мыслим треугольник как предмет[8], когда сознаем сочетание трех прямых линий согласно правилу, соответственно которому такое созерцание всегда может быть показано» [5, 504]. При этом оказывается, что этот *критерий* существования является *универсальным*, поскольку применим не только к математическим, но и к любым объектам, в том числе к природным предметам, которые также «сотворены».

Именно этот критерий конструируемости — правилосообразности (со смысловым акцентом на втором термине) и кладется Кантом в основу *объективности*: *объективно значимым* выступает то, что является *правилосообразным* [т. е. подчиняется некоторому *правилу*], или *всеобще-необходимым*[9]. Явным образом Кант говорит об этом в своих «Пролегоменах»: «Таким образом, *объективная значимость* и *необходимая общезначимость* [*необходимая всеобщность* — в пер. В. Соловьева]... суть взаимозаменяемые понятия, и хотя мы не знаем объекта самого по себе, но когда мы рассматриваем суждение как общезначимое и, стало быть, необходимое, то под этим мы разумеем объективную значимость[10]» [6, 56], — причем эта мысль проходит красной нитью через всю кантовскую *Критику*[11].

Тем самым трансцендентальный подход [Канта] предполагает существенный пересмотр того смысла, который мы вкладываем в понятие *объективного* [существования]: *объективным* (= имеющим месте в объекте) является *общезначимое*, т. е. имеющее место не только для нас, нашего единичного [субъективного] сознания, но для *сознания вообще* (= *трансцендентального* сознания). Таковыми на уровне предложений выступают [теоретические] суждения научного познания, которые противопоставляются Кантом

---

[8] Кант не проводит концептуального различия между *предметом* и *объектом*, употребляя эти термины как синонимы: в частности, здесь термин *предмет* вполне может быть заменен на *объект*.

[9] Заметим, что последняя характеристика отсылает к кантовскому концепту *априорного*.

[10] И далее: «Объект сам по себе всегда остается неизвестным; но когда *связь представлений*, полученных от этого объекта нашей чувственностью, *определяется рассудочным понятием как общезначимая*, то предмет определяется этим отношением и *суждение объективно*» [там же; выделено курсивом мной. — *С.К.*]

[11] См., например: «Эти представления связаны в *объекте*, т.е. безотносительно к состоянию в субъекте» [5, 105], цитаты также выше, а также [5, 95, 97, 102, 104, 105, 132–133, 155, 183 и др.].

непосредственным суждениям восприятия (типа «вижу то-то и то-то»). Относительно этих *суждений опыта* он пишет следующее: «Чему опыт учит меня при определенных обстоятельствах, тому он должен учить меня *всегда*, а также и *всякого другого*, и применимость этих суждений *не ограничивается* субъектом или *данным состоянием его.* Поэтому я приписываю всем [таким] суждениям объективную значимость... [В них] я требую, чтобы эта связь была подчинена такому условию, которое делает ее общезначимой (= подчиненной правилу)» [6, 57][12]. На уровне же понятий таковыми выступают *формальные объекты*, конструируемые по некоторому правилу, парадигмальным случаем которых и выступают абстрактные математические объекты.

Таким образом, Кант развивает *формальную онтологию* (как науку об объектах вообще), парадигмой для которой выступает математическая деятельность.

* * *

Перейдем теперь к более детальному анализу математики, «основательность [которой] зиждется на *дефинициях, аксиомах и демонстрациях*» [5, 430].

Определяющим — первичным и конституирующим последующие две составляющие математического знания — в этой триаде выступают *математические дефиниции*, которые «*создают* само [математическое] понятие» [5, 432], и, тем самым, «дают *первоначальное* и *полное* изложение вещи [т.е. действительного предмета] в его *границах*[13]» [5, 430], а не только *объясняют* его, как это происходит в естествознании и философии. Это гарантирует *математическим понятиям* их полное соответствие с [математическими] *предметами*[14], в то время как *эмпирические понятия* [естествознания] и *априорные понятия* [метафизики] таким соответствием в общем случае не обладают: в случае естествознания вещи как правило

---

[12] Ср.: «Поэтому суждения или только *субъективны*, когда представления относятся к сознанию в одном лишь субъекте и в нем соединяются, или же они *объективны*, когда представления соединяются в *сознании вообще*, т.е. необходимо» [6, 63; выделено мной. — *С.К.*].

[13] «*Полнота* означает ясность и достаточность признаков; *границы* означают точность в том смысле, что признаков дается не более чем нужно для полного понятия; *первоначальное* означает, что определение границ ниоткуда не выводится и, следовательно, не нуждается в доказательстве...» [5, 430; прим.].

[14] Или с *созерцаниями* в кантовской терминологии.

«богаче» своих понятий (например, *стол* и *понятие о столе* не совпадают, а понятие о столе не может передать всю информацию о реальном столе, о всех нюансах его существования), а метафизические понятия (категории) в общем случае «богаче» своего эмпирического применения, поскольку могут применяться не только к предметам нашего чувственного созерцания, т. е. *вещам-для-нас*, но и к «вещам вообще» [5, 189][15]. Основанием для такого полного соответствия является тождество математических *объектов* и *понятий*, поскольку первые задаются, или «создаются», посредством вторых (resp. дефиниций). Вместе с тем это проясняет «измененный метод мышления» (resp. коперниканский переворот) Канта, суть которого состоит в том, «что мы a priori познаем о вещах лишь то, что вложено в них нами самими» [5, 19]: если по отношению к природным (физическим) объектам [восприятия] кантовский тезис кажется слишком уж радикальным, то по отношению к математическими объектам=понятиям он является тривиальным. Наше знание математических объектов подобно «знанию» мастера, который создает ту или иную вещь. Вместе с тем, любая математическая дефиниция, содержащая в себе способ порождения своего объекта, или, как говорит Кант, «содержащая в себе произвольный синтез, который может быть конструирован a priori (...в созерцании)» [5, 432], имеет *конструктивный* характер. В главе о схематизме Кант уточняет, что в «основе наших чистых чувственных [= математических! — *С.К.*] понятий лежат не образы предметов, а *схемы*...., [которые] не могут существовать нигде, кроме как в *мысли*, и означают *правило синтеза воображения* [математических предметов, например фигур в пространстве — *С.К.*]» [5, 124–125]. Тем самым в основании математики лежат некие наши *ментальные действия*[16], а математические понятия представляют собой *конструктивные понятия-схемы*. Например, *окружность* определяется Кантом с помощью *конструктивной дефиниции* как «линия, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от центра» [5, 433].

По сути дела, Кант своим введением математических объектов через дефиниции специфицирует их в качестве *абстрактных*, в противовес *конкретным* (физическим) объектам. В современной

---

[15] Кант называет такое применение категорий, выходящее за пределы опыта, *трансцендентальным*, хотя такое применение точнее надо бы назвать *трансцендентным*.

[16] Ср. с уже приводившимся выше замечанием Канта о «действиях чистого мышления» [5, 73].

философии математики в этой связи говорится о *принципе абстракции Юма*[17] — *Фреге*: *для любых* $(\alpha)(\beta)$ $[(\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta)) \leftrightarrow (\alpha \approx \beta)]$, где $\Sigma(\alpha)/\Sigma(\beta)$ обозначает вновь вводимый абстрактный объект с помощью символа метаязыка Σ[18]. Классическим (парадигмальным) примером введения новой абстракции является, например, фрегевское «введение» нового понятия «*направление* (прямой)», обозначаемого посредством $D(\alpha)/D(\beta)$, которое «получается» из [уже известной] понятийной конструкции более низкого уровня «*параллельность* прямых *a* и *b*»: $D(\alpha) = D(\beta) \leftrightarrow$ прямая α параллельна прямой β. Принцип абстракции фиксирует то обстоятельство, что новый — «вторичный» — абстрактный объект получается из «первичного» абстрактного объекта путем неявного определения. На его сходство с [кантовской] дефиницией указывает то, что мы можем записать в форме (квази)определения: для любых $(\alpha)(\beta)((\Sigma(\alpha)=\Sigma(\beta))$ [Dfd] $=_{df}$ $(\alpha \approx \beta)$ [dfn]). Более того, мы можем записать принцип абстракции в виде стандартного определения $\Sigma(\alpha/\beta) =_{df} (\alpha \approx \beta)$, правда с потерей части информации о том, как этот объект конструируется. Это указывает на сходство принципа абстракции и дефиниции, поскольку посредством обоих вводятся абстрактные объекты. Точнее, принцип абстракции Юма представляет собой такой тип дефиниции, в котором фиксируется *способ* конструирования абстрактного объекта, информация о чем является решающей при осуществлении [кантовского] конструирования. Так, если обратиться еще раз к кантовской дефиниции *окружности*, то она представляет собой метаобъект — *линию*, составленную из объектов более низкого уровня — *точек*, равноудаленных от центра, где *признак* «равноудаленности от центра» является *основанием* или дефиниенсом (в формуле: $\alpha \approx \beta$) для порождения этой [новой] абстракции (resp. нового дефиниендума *Dfd* окружности; в формуле: $\Sigma(\alpha)$).

Однако в формализованном принципе абстракции не прояснены два важных момента, а именно: механизм образования новой абстракции, т.е. вопрос о том, что (= какое действие?) скрывается за выражением «$\alpha \approx \beta$», и вопрос об эпистемологической специ-

---

[17] Вот что пишет по этому поводу сам Д. Юм: «Когда два числа составлены таким образом, что каждая единица в одном из них всегда отвечает каждой единице в другом, мы признаем их равными...» [18, 128]

[18] Посредством скобок $(\alpha)/(\beta)$ в формуле обозначается квантор всеобщности. Подробнее о принципе абстракции Юма – Фреге см.: http://plato.stanford.edu/entries/frege-logic/.

фике получаемых таким образом математических понятий. Ответы на эти вопросы дает [кантовский] трансцендентализм, направленный на анализ сознательных «механизмов», лежащих в основе того или иного феномена (в нашем случае: в основе такого сознательного представления как абстракция).

Математические абстракции, вводимые по принципу абстракции (дефиниции) представляют собой особый тип понятий, отличный от стандартных абстракций [естественных наук], которые получаются отвлечением (абстрагированием) от тех или иных характеристик конкретных объектов. В общем, любое понятие представляет собой *синтез*, объединение в своем составе многих сходных предметов (по той или иной его характеристике) и *обобщение* этого сходства именно в данном *понятии*. Специфика же математики состоит в том, что ее «чистые чувственные понятия», каковыми являются математические абстракции, представляют собой *обобщения по сходству действия* (resp. отношения). В общем случае *первичным* математическим действием, обозначаемым символом $\approx$ в формальной записи, является отношение типа равенства («равно», «тождественно», «изоморфно», «конгруэнтно» и т.д.), в основе которого лежит *операция сравнения*[19]. Соответственно, в случае с фрегевским «*направлением*» таковым является *действие* по проверке (или обнаружению) *параллельности* прямых, а в случае с кантовской *окружностью* — *действие* по проверке (обнаружению) *равноудаленности* точек от центра. Кант определяет такие [математические] понятия как *схемы*. Вот что он пишет по этому поводу: «*Так, если я полагаю пять точек одну за другой... то это образ числа пять. Если же я мыслю только число вообще, безразлично, будет ли это пять или сто, то такое мышление есть скорее представление о методе (каким представляют в одном образе множество, например тысячу) сообразно некоторому понятию, чем сам этот образ, который в последнем случае, когда я мыслю тысячу, вряд ли могу обозреть и сравнить с понятием. Это представление об общем способе* [т. е. алгоритме построения. — *С.К.*]... *я называю схемой этого понятия*» [5, 124]. При этом в полученной абстракции/схеме это действие как бы «угасает», перемещается с поверхностного (Dfd) на глубинный (Dfn)

[19] Заметим, что уже Платон рассматривает идею «равенства» как важнейший ингредиент человеческого сознания. Идея равенства в своей процедурной развертке как «способность сравнивать» составляет сущностную конституенту человеческого [математического] познания.

уровень[20], однако для человека, который способен не только читать математическую символику, но и совершать математическую деятельность, т.е. математика, за этой символикой угадывается образующее его математическое действие. Например, в [натуральном] числе — это *сумма* его единиц или *произведение* его множителей и т.д. Тем самым кантовское *конструирование понятий* состоит в экспликации при помощи общезначимых созерцаний, т. е. путем их помещения в пространственную или временную *среду*, тех *действий*, которые образуют/выявляют конструктивную основу данного понятия[21].

Завершая тему абстракций, коротко коснемся еще нескольких моментов. Во-первых, рассмотренный выше принцип абстракции можно применять итеративно, порождая абстракции все более высоких уровней. С другой стороны, возникает проблема «спуска» и выявления *первичных* математических объектов и действий. Современная математика решает эту проблему: нахождение некоторых универсальных первичных элементов и связанных с ними действий, которые составляют фундамент остальных математических абстракций, — путем выделения некоторой фундаментальной математической теории, каковой в конце XIX в. выступает *теория множеств*, а с середины XX в. на это претендует *теория категорий*. Во-вторых, абстрактный характер математических объектов проясняет их безличный характер: мы не можем, например, отличить одну точку от другой, или одну двойку от другой двойки[22].

[20] Ср. с различением «поверхностная vs. глубинная информация» у Я. Хинтикки [17, 182–228].

[21] Конечно, правомерно поставить вопрос о том, насколько выделенный тип абстракций является универсальным для математики. Так, например, Гуссерль в § 13 своих *Идей–1* различает *генерализацию* и *формализацию*, подчеркивая важность последней для математической деятельности. Формализацию можно трактовать как особый тип абстракции, связанный с выявлением [и формализацией] *структуры* той или иной области математики. Однако более подробное обсуждение этой темы выходит за рамки данной статьи.

[22] Безличность (недоопределенность) математических объектов в современной литературе получила название *проблемы Юлия Цезаря*, которая состоит в том, что референтом некоторого числа [как абстрактного объекта] может быть и Юлий Цезарь [15, § 56]. Ср. также с известным афоризмом Д. Гильберта: «Справедливость аксиом и теорем ничуть не поколеблется, если мы заменим привычные термины “точка, прямая, плоскость” другими, столь же условными: “стул, стол, пивная кружка”!».

С другой стороны, эта безличность придает математическим рассуждениям характер *аподиктичности*, поскольку мы доказываем теорему для безличного математического объекта и тем самым для любого объекта этого типа, например треугольника вообще[23]. В-третьих, представляется совершенно справедливым по отношению к математическим абстракциям, восходящее к Э. Малли[24], следующее «расщепление» стандартной предикации на два типа: *экземплификацию* и *кодирование*[25]. Стандартным образом предикация «*x* есть *F*» выражает экземплификацию предиката (свойства) *F* в [физическом] объекте *x*: [объект] *x* обладает свойством *F*, т. е. *экземплифицирует* (проявляет) его. Соответственно, этот тип предикации может быть записан как *F(x)*. В случае же с абстрактными объектами, к каковым, помимо математических, относятся также персонажи литературных произведений типа Шерлока Холмса, дело обстоит иначе. С одной стороны, эти объекты *неполны*, поскольку у них нет полного набора свойств, характеризующих конкретные объекты[26]. С другой стороны, выражение «*x* есть *F*» представляет собой *кодирование* свойства *F* посредством вводимого объекта *x*. Так, выражение «2 есть простое число», следует понимать как введение объекта «2» (двойки), который *кодирует* свойство «быть простым числом», что можно записать посредством *(x)F*. Если

---

[23] Ср. с указанием Канта на то, что схемы являются *общезначимыми созерцаниями* [5, 125, 423], т. е. приложимы ко всем предметам, подпадающим под данное понятие. Так, под *схему* треугольника, которую можно выразить посредством правила [алгоритма] построения «фигура, образованная посредством двойного излома прямой линии» подпадает любой треугольник: прямоугольный, тупоугольный или остроугольный. Тем самым в своей концепции схематизма Кант решает проблему соотнесения единичных (эмпирических) созерцаний и общих понятий.

[24] См., в частности, работу [28]. Русскоязычному читателю концепция Э. Малли практически неизвестна, подробнее см.: http://plato.stanford.edu/entries/mally/.

[25] См. работу [27].

[26] Указание на *неполноту* математических абстракций представляет интерес с точки зрения решения проблемы универсалий, точнее отличения *универсалий* от *абстракций*. Абстрактные объекты являются, скорее, не *общими* (= универсальными), а *неопределенными a–объектами* (здесь *a* — неопределенный артикль) и моделируются в математике посредством *переменной*, которая, в конечном итоге, должна быть заменена индивидом, т. е. полноценным определенным *the–объектом*.

«двойка» вводится по определению как *простое четное число*, то никаких других свойств, кроме свойств простоты и четности у двойки нет: содержание абстрактных сущностей беднее, чем конкретно-физических объектов, зато все их «закодированное» содержание *полностью* содержится (должно содержаться) в их дефиниции.

Более того, математические абстракты *объектами* в точном смысле этого слова не являются: на это указывает их *безличность* и *недоопределенность*. Тем самым, наряду с пониманием математических абстракций в качестве полноценных онтологических сущностей, хотя и принадлежащих другому миру «идей» (которое неявно предполагалось выше), т. е. наряду с *полнокровным математическим платонизмом*, можно выделить, по крайней мере, еще три их возможные трактовки, которые являются более слабыми с онтологической точки зрения[27].

Во-первых, это понимание абстрактных объектов как не(до)-определенных конкретных *объектов*, т. е. их трактовка в модусе *возможности*, а не действительности (Р. Ингарден, Дж. Хеллман[28] и др.). Данная трактовка тяготеет к номинализму, а в своих радикальных версиях — к *фикционализму* (Х. Филд[29]). Во-вторых, это понимание абстрактных объектов как субстантивированного набора *свойств*, развиваемое в работах *неологицистов* (Э. Залта, Б. Линский[30] и др.). Это достаточно влиятельная, наряду с *объектным* платонизмом Геделя и Бернайса, версия математического платонизма, которая, однако, оставляет открытым онтологический вопрос о том, свойствами *чего* являются математические абстракции, каковыми, видимо, неявно полагаются конкретные (физические) объекты[31]. В-третьих, это понимание математических «объектов» в рамках активно раз-

[27] Здесь и далее мы ориентируемся на *англоязычную философию математики*, набор тем и проблем которой отличается от ее российского аналога. Подробнее см.: http://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/.

[28] См. работу [24].

[29] См. работу [22].

[30] См. работу [27].

[31] Представителями современного *неологицизма/неоплатонизма/неофрегианства* выступают также К. Райт (Wright), Р. Хэйл (Hale), Дж. Булос (Boolos) и др. Заметим, что в Стэнфорде основана *Лаборатория Метафизических исследований* (Metaphysics Research Lab: http://mally.stanford.edu/index.html), задача которой — исследование *мета-физических* (т. е. математических) «объектов». Это показывает, что современный платонизм понимает абстракции в широком концептуальном диапазоне от *объектов* до *свойств*.

виваемого во второй половине XX в. математического структурализма (Л. Витгенштейн, П. Бенацерраф, М. Резник, С. Шапиро[32] и др.), который выдвигает весьма радикальный тезис о без-объектном характере математического знания: математика занимается не *объектами*, а *структурами*, которые и определяют относительное место/позицию математических (квази)объектов в составе структур, а никаких математических объектов как полноценных сущностей *нет*. Так, например, *тройка* — это не самостоятельный математический объект (resp.число), а лишь то, что занимает «место» между двойкой и четверкой[33]. Причем такое слабое в онтологическом смысле понимание математики вполне достаточно для решения главной задачи математической деятельности, а именно: выполнения математических операций и ответа на вопросы типа «тройка больше двойки?», «тройка меньше четверки?». В своих же радикальных версиях структурализм выдвигает тезис о том, что математика может обойтись даже без структур (Х. Филд, Дж. Хеллман, Дж. Берджес[34] и др.), что сближает его с *крайним номинализмом и инструментализмом*. Можно сказать, что в структурализме представлена третья из возможных трактовок математических абстрактов не как *объектов* или *свойств*, а как *отношений*[35]. Причем во всех своих вариациях структурализм тяготеет к *антиреализму*, в рамках которого возможно либо *номиналистское* понимание математических структур как наших языковых конструкций, либо *концептуалистское* понимание математической деятельности в качестве наших ментальных конструкций (Кант, Гуссерль, интуиционизм).

* * *

Абстрактный характер математических объектов предопределяет две другие необходимые составляющие математического знания: *аксиомы и демонстрации*[36].

Прежде всего, аксиомы (постулаты) математики, посредством которых фиксируются соотношения между вводимыми по опре-

---

[32] См. работу [29], а также: http://www.iep.utm.edu/m-struct/.

[33] Подобную трактовку предложил П. Бенацерраф, автор известной статьи «Чем числа не могут быть» [19], которая стала манифестом структуралистского подхода в 70-е годы XX века.

[34] См. [23], [25] и [21].

[35] Подробнее от этом типе онтологии см. [26].

[36] Ср. с тезисом Э. Бета: «Философия математики... есть онтология математических объектов» [20, 176].

делению математическими объектами (типа «Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками») или между разными свойствами одного и того же объекта, выступают теми базовыми априорно-синтетическими (осново)положениями[37], благодаря которым абстрактное математическое знание имеет информативно-содержательный характер и, вследствие этого, может применяться к физической реальности[38]. Соответственно, *аксиомы* математики выступают аналогами физических *законов*. Аксиомы представляют собой следующий (второй) уровень синтетичности математики: если математические *понятия* выступают как синтез сходных предметов, то аксиомы выступают как синтез разных понятий в единую конструкцию, из которых возможно выведение (посредством демонстраций) следствий — математических *теорем*. При этом аксиомы имеют не *дискурсивный* (рассудочный), а *интуитивный* (точнее, дискурсивно-интуитивный) характер, связанный с тем, что математика «посредством конструирования понятий... может *в созерцании* [т. е. в интуиции. — *С.К.*] предмета a priori и непосредственно связать его предикаты, как, например, [в утверждении], что три точки всегда лежат в одной плоскости». При этом в своем постулировании математических аксиом Кант предвосхитил развитие математики в XX в., которая сейчас (благодаря усилиям школы Гильберта) немыслима без *аксиоматического метода*. Однако эпистемологический статус *аксиом* в современной математике не прояснен. Точнее, под этим названием фигурируют утверждения различного типа как *декларативного*, так и *процедурного* характера. В связи с этим представляется важным обращение к первому европейскому теоретическому трактату по математике, «Началам» Евклида, в котором в качестве «начал» математического знания выделяются «постулаты» трех типов: *определения*, [собственно] *аксиомы* (общие положения) и *постулаты* [построения]. В более формализованной логике дело обстоит несколько лучше, поскольку помимо *аксиом* выделяются также *правила вывода*. На наш взгляд, это указывает на дальнейшее развитие аксиоматического метода, который пока реализован в математике не полностью.

---

[37] Ср. с кантовским вопросом «Как возможны синтетические суждения априори в математике?».

[38] Ср. с названием работы Ю. Вигнера «Непостижимая эффективность математики в естественных науках».

* * *

Следующий пласт своих рассуждений Кант посвящает вопросу об эпистемологическом статусе *математической деятельности*, специфика которой с точки зрения трансцендентализма состоит в определенном сочетании в ее структуре чувственности и рассудка. Если физика начинается с эмпирических созерцаний (например, показаний приборов), с которыми и должны согласовываться понятия (*рассудка*), то в случае математики вектор соотношения чувственности и рассудка будет иным: математика, как было сказано выше, начинается не с опыта, а с дефиниций, посредством которых и вводятся математические объекты. В этом математика схожа с не-опытной метафизикой, но в отличие от данного «познания разумом посредством понятий» [5, 423], что в общем случае не предполагает обращение к чувственности, математика является «познанием посредством *конструирования* понятий» [*там же*, 423], в ходе которого *понятию* «показывается a priori соответствующее [не *эмпирическое*, но *общезначимое*] *созерцание*» [*там же*, 423].

При этом кантовская идея *конструирования понятий* выступает как ключевая характеристика математической *деятельности*. И хотя конструирование присутствует у Канта, как мы выяснили выше, и на уровне дефиниций, и на уровне аксиом, но только в математической деятельности *конструирование* обретает свой собственный смысл. Правда, у Канта *конструирование* не получает должной концептуальной проработки: он лишь декларирует отличие математики от метафизики как двух не-опытных способов познания, но детальному анализу собственно *математическое конструирование* не подвергает, не вскрывает его *суть* и *структуру*.

Начнем наш анализ математической деятельности с одной метафоры, хорошо проясняющей ее специфику. В своей книге «Математическая логика» Р. Гудстейн сравнивает математику с игрой в шахматы и, используя эту аналогию, риторически вопрошает: могут ли быть *предметом правил* шахматной игры *материальные* шахматные фигурки (например, *король*), т. е. «куски дерева определенной формы» (в свете того, что мы в принципе можем заменить данный кусок дерева некоторым куском сахара)? Отвечая на этот вопрос, далее Гудстейн пишет: «Но если шахматный король не есть определенный предмет на определенной доске, то что же он такое? Если число два не есть цифра «2», то что же оно такое? Или — чтобы придать вопросу другое направление — благодаря чему определенный предмет в определенной шахматной игре становится королем? Это не внешний вид фигуры... и не положение фигуры в игре. Нет, то, что делает фигуру королем, — это *те ходы, которые она совершает*. Так что мы можем сказать, что шахматный король — это одна из *ролей*, которую фигура играет в шахматной партии... Точно так же различные роли, которые цифры играют в языке, это и есть числа. Арифметические правила, аналогично шахматным правилам, формулируются в терминах дозволенных преобразований числовых знаков. Так, например, правило, что сумма двух и трех есть пять, является формулировкой — в терминах ролей — того факта, что формула «2 +3 = 5» доказуема в арифметике. Если же мы поменяем ролями цифры 2 и 5, так что каждая будет играть роль другой, то доказуемой будет формула «5 +3 = 2», которая по-прежнему будет выражением правила, что сумма двух и трех есть пять, — *и заключает, что* — формулировка в терминах ролей вскрывает те инвариантные факторы[39], которые при других формулировках скрыты под покровом меняющихся обозначений» [3, 22—23].

Большей частью эту метафору (наряду с приведенным ранее афоризмом Д. Гильберта) приводят для подтверждения тезиса о *конвенциональном* характере математического знания[40]. Мы же считаем, что подобные высказывания свидетельствуют об абстрактности математических объектов в их отличии от конкретно-материальных объектов «физики». Как отмечает тот же Гудстейн, математические объекты хотя и произвольны в своем материальном наполнении, но их *формальный характер* (что и составляет их *природу*) таков, что они «подчиняются» математическим *правилам* (ср. с кантовским критерием конструируемости — правилосообразности выше) или, что точнее, они, посредством дефиниций и аналогично шахматным фигурам, *вводятся* для того, чтобы выполнять эти правила.

При этом здесь нам хотелось бы обратить внимание на еще один важный смысловой момент метафоры Гудстейна, а именно на то, что образование математических абстрактных объектов является не самоцелью, а их главное назначение — участвовать в математической «игре» (resp. в *действиях*, *деятельности*). Ведь ма-

---

[39] Редактор перевода, *С.А. Яновская* замечает в этой связи, что «суть дела [математики] все же не в самом числовом знаке..., а в «*инвариантном факторе*», который скрывается за правилами оперирования с цифрами и позволяет отражать с помощью цифр различные (прежде всего, количественные) соотношения вещей» [3, 23].

[40] Ее также используют структуралисты, подчеркивая относительность математических объектов, их зависимость от *структуры*, т. е. той фоновой среды, в которой формальные объекты существуют.

тематика и является прежде всего и в первую очередь *деятельностью*, а для ее осуществления, т. е. для возможности произведения каких-то *действий* с математическими объектами (аксиомами), необходимо, во-первых, придумать/создать некоторую квази-*среду*, в которой эти объекты будут помещены, или будут «существовать», и, во-вторых, в качестве еще одного трансцендентального условия, придумать/постулировать некоторый набор *действий* (в этой квази-среде), для осуществления [математических] операций с этими объектами (аксиомами).

В европейской мысли об этом впервые (на примере геометрии) стали говорить Платон и неоплатоники (Прокл). В своем диалоге «Тимей» Платон говорит о воспринимаемом «как бы во сне» *пространстве*, которое позволяет нам производить «незаконнорожденное рассуждение» с математическими (точнее, геометрическими) объектами[41], а Прокл в своем комментарии к «Началам» Евклида уже прямо соотносит платоновское *пространство* с *умопостигаемой/интеллигибельной материей* (называя ее также и *геометрической материей*), из которой «состоят» геометрические объекты: точки, линии, плоскости[42]. Тем самым геометрические объекты «существуют» лишь в этом воображаемом (фантазийном) пространстве. Но в силу этого к ним не применимы обычные физические действия, как это полагается, например, в программе эрлангенского конструктивизма: в частности, в математическом (пустом) «пространстве» отсутствуют физические силы и поэтому для «движения» геометрических объектов (как одного из возможных математических действий с ними) необходимо предложить иной механизм объяснения. В этой связи Прокл задается вопросом: как можно помыслить *движение точки*? Ведь если *точка* изна-

[41] «Незаконность» этого, как его назвал П. Дюгем, «гибридного рассуждения» в том, что оно является не *чистым мышлением*, а представляет собой «помесь» мышления и ощущения (мнения). Прокл же называет этот «гибрид» наших познавательных способностей *фантазией*, или *воображением*. Соответственно, пространство выступает как *фантазийная среда* существования математических объектов.

[42] Несмотря на преемственность, обратим внимание на существенную концептуальную разницу между платоновским *пространством* и прокловской *геометрической материей*. В первом случае можно сказать, что математические объекты *находятся в* [пространстве], во втором — *состоят из* [пространства]. Более приемлемой, на наш взгляд, является первая позиция, предполагающая более слабые онтологические допущения.

чально мыслится *неподвижной*, то в силу ее определения как не *имеющей частей*, она не может двигаться посредством двигателя или силы, более того, ее нельзя даже *взять* (ср. с выражением «возьмем точку *A*»). В качестве решения Прокл предлагает ввести *фантазийное движение* точки как ее (само)*истечение*:

> «Возможность провести прямую из любой точки в любую точку вытекает из того, что линия есть *течение* точки, и прямая — равнонаправленное и не отклоняющееся *течение*. Представим, следовательно, себе, что точка совершает равнонаправленное и кратчайшее движение; тогда мы достигнем другой точки, и первое требование выполнено без всякого сложного мыслительного процесса с нашей стороны... [далее он, развивая модель движения точки как ее «истечения» (в *пространстве* Платона), продолжает:] Но если бы у когонибудь возникли затруднения относительно того, как мы вносим движение в неподвижный геометрический мир и как мы движем то, что не имеет частей (а именно точку) — ибо это ведь *совершенно немыслимо*, то мы попросим его не слишком огорчаться... Мы должны представлять движение не телесно, а в воображении («фантазии»); и мы не можем признать, что не имеющее частей (точка) подвержено телесному движению, скорее оно подлежит движениям фантазии [, которая (фантазия)]... имеет свое собственное движение» (цит. по [1, 154]).

Проведенный анализ позволяет трактовать кантовское *конструирование понятий* как указание на то, что математические абстракции предназначены для выполнения некоторых (допустимых![43])

---

[43] Введенный выше концепт математической *среды* (материи) [математических] объектов накладывает ряд дополнительных ограничений на приемлемость придуманных действий с математическими объектами. Например, приемлема ли процедура выбора объектов из множеств, постулируемая аксиомой выбора? Выше мы подчеркивали, что *математические действия* (как наши ментальные конструкции) надо отличать от *физических*. Однако это отличие следует понимать обоюдно, поскольку не любое физическое действие (например, «движение тел») приемлемо для математического универсума. Поэтому нужно внимательнее отнестись к используемым в математике физическим понятиям, поскольку как правило их использование метафорично. Более того, в силу неоднородности математического универсума [рассуждений] не любое математическое действие из одной области математики можно автоматически (без особой проверки) использовать в других областях. Возьмем для примера

математических действий, в ходе которых они (в отличие от шахматных фигур) претерпевают определенные преобразования, согласно математическим правилам. А поскольку сами *понятия* могут изменяться лишь *логически* в небольшом диапазоне (разделение, пересечение и объединение понятий), то для расширения возможностей «работы» с математическими объектами (с учетом их введения посредством дефиниции/принципа абстракции) нужно перейти от понятия к связанному с ним определенному созерцанию («существующему» в созерцательной среде пространства и/или времени), которое и будет тем *предметом*, с которым можно будет совершать нужные математические преобразования: например, поделить треугольник пополам или провести через одну из его вершин прямую, — а также соотносить его с другими предметами-созерцаниями или разложить исходный предмет на свои составные части.

Тем самым (теперь уже в отличие от метафизики и аналогично физике) математика мыслится Кантом как *сложный* двухуровневый (двухкомпонентный) способ познания. Она начинается с создания посредством дефиниций «чистых чувственных понятий» [5, 125], которые как представления рассудка отличаются и от эмпирических понятий теоретического естествознания, и от чистых рассудочных понятий метафизики. Их сущностная специфика состоит в том, что они образованы посредством «произвольного [т. е. свободного] синтеза [нашего ума]» [5, 432; вставки в квадратных скобках мои. — *С.К.*], т.е. содержат в себе некоторое *математическое* [ментальное] *действие*. Далее, при *конструировании понятий* осуществляется *спуск* на уровень (квази)чувственности и соотнесение понятия с общезначимым созерцанием — *схемой*. Здесь, как бы при обратном прочтении (слева — направо) принципа абст-

выражение «пересечение (двух) прямых». Анализ показывает, что, с одной стороны, феномена *пересечения* нет в мире физических предметов, точнее при «пересечении» одного предмета другим первый из этих предметов «разрезается» другим. С другой стороны, «пересечение» нельзя помыслить и математически. Стандартным образом говорят о пересечении как проведении двух прямых через одну, общую, точку. Однако заметим, что в этом случае, мы *сначала* проводим одну прямую через эту точку, при котором *эта точка* исчезает, а *одновременно* две линии мы провести не можем. «Пересечение» же двух линий на листе бумаге представляет собой *фикцию*, ибо здесь осуществляется скорее «наложение» одной линии поверх другой (в реальности мы имеем дело скорее не с *плоскостью*, а с вырожденным, но трехмерным «телом»). Ср. это с приводимым выше анализом «движения точки» у Прокла.

ракции, происходит *декодирование* понятия: оно представляется как набор объектов более низкого уровня, находящихся в некоторой [пространственно-временной] *среде* и связанных между собой отношением типа «равенства». При этом возможно, что процесс спуска/декодирования будет осуществляться несколько раз (в зависимости от уровня абстрактности понятия и поставленной задачи). Причем именно здесь и совершается *творческая* математическая деятельность соответствующего типа: геометрические построения, алгебраические вычисления или логико-математические доказательства, каждая из которых, в свою очередь, представляет некоторую совокупность допустимых в этой среде локальных действий-операций (типа проведения прямых, деления чисел или построения вывода посредством применения правила *modus ponens*). Можно сказать, что на этом этапе задействуется пространственная и/или временная чувственная *интуиция*. За счет этого происходит выход за пределы первоначального понятия и [синтетическое] приращение знаний, поскольку любое [динамическое] *действие* (в отличие от статичных понятий и созерцаний) представляет собой *синтез* по крайней мере двух представлений[44]. А результат этого синтеза путем обратного возврата (*подъема*) на рассудочный (понятийный) уровень фиксируется как формальный результат построения, вычисления или доказанной теоремы.

Кант поясняет свой тезис на примере «конструирования [понятия] треугольника», точнее с помощью теоремы о сумме углов

---

[44] В структурном плане любое *действие* может быть представлено как синтез *пары* представлений «начальное состояние — конечное состояние (как результат действия)». Поэтому любое действие является *синтетичным*. Это, в частности, проясняет кантовский тезис о том, что, например, выражение «5 + 7 = 12», символизирующее операцию *сложения* двух чисел, имеет *синтетический* характер. Его синтетичность связана именно с *действием* сложения, которое синтезирует в единое целое (сумму) члены сложения: «действие» [сложение] и придает сумме синтетический характер. Поэтому нельзя, как это делает Фреге, критикуя в своих «Основоположениях арифметики» Канта, трактовать запись «5 + 7 = 12» лишь как *формальное* равенство [рассудка], поскольку за ним имплицитно присутствует реальное [ментальное] действие по конструированию этого понятия, собственно *сложение*, которое происходит на уровне [чувственного] созерцания как *объединение* единиц (или точек), содержащихся в 5 и 7. В этом смысле знак «=» в математической записи суммы означает здесь не *равенство* левой и правой части формулы, а *переход* от левой части (действия сложения) к правой части (как результату этого действия).

треугольника [5, 425][45]. Как видно из доказательства, исходное понятие треугольника «разлагается» на свои составляющие: отрезки прямых и углы, — что позволяет осуществить дополнительное построение (проведение прямой через одну из его вершин) и привлечь для доказательства информацию о равенстве углов. За счет этого введения новых объектов и действий с ними[46] удается синтезировать новое знание о треугольнике, т. е. доказать искомую теорему о том, что сумма углов произвольного треугольника [на евклидовой плоскости] равна 180 градусам.

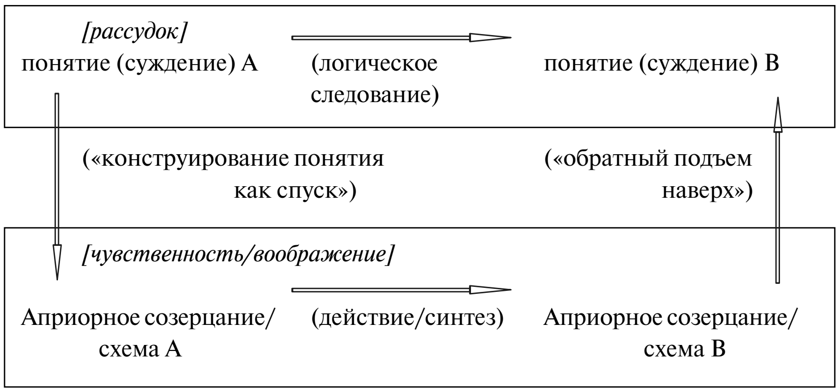
Таким образом, *структуру* кантовского конструирования понятий в общем виде схематично можно представить следующим образом[47]:

---

[45] Приведем изложение этого доказательства В.А. Шульпековым (см. его статью в настоящем сборнике), в котором расставлены важные для нас акценты: «Для доказательства выбирается какая-либо сторона треугольника [*ABC*], например ***AB***, и через противолежащую ей вершину ***C*** проводится параллельная выбранной стороне прямая, далее, каждая сторона треугольника трактуется как прямая, что позволяет перейти к рассуждениям только о соотношениях прямых и углов с ними связанных. А именно, имеются две параллельные прямые, которые секутся двумя прямыми, являющимися продолжениями сторон треугольника, прилегающих к выбранной. Затем происходит обращение к свойствам накрест лежащих внутренних углов, из чего истинность теоремы усматривается непосредственно после возврата к исходному [созерцанию и, далее, понятию] треугольнику[а]» [вставки и подчеркивания мои. — *С.К.*].

[46] В своем анализе Кант говорит, что при этом [доказательстве] геометр руководствуется *только* «все время созерцанием» [5, 425], что представляется не совсем корректным. Точнее было бы сказать, что созерцание является одним из необходимых трансцендентальных условий для осуществления математических *действий*: геометрических построений и последующих усмотрений [равенств].

[47] Вслед за И. Лакатосом [см. его работу «Доказательства и опровержения»] имеет смысл различать собственно *доказательство* [как набор математических действий] и его *логическое оформление*, которое может быть представлено в верхнем блоке схемы как последовательность шагов, каждый из которых представляет собой или аксиому, или получен из предшествующих по одному из правил вывода (определение логического вывода по Гильберту). Однако первое нельзя полностью сводить ко второму, поскольку задачей *логического следования* является не непосредственное моделирование собственно математической деятельности (resp. реального процесса доказательства), а лишь обеспечение *правильности* его осуществления. Задачей же нашего трансцендентального анализа является выявление *структуры* реального процесса [математического] доказательства.



В своем анализе математической деятельности Кант выделяет два типа конструирования: *остенсивное* и *символическое*. Ключевым в данной связи выступает следующий фрагмент, на который мы, по сути дела, и опирались выше, предлагая свою интерпретацию кантовского *трансцендентального конструктивизма*[48]:

«Математическое знание есть знание посредством конструирования понятий. Но конструировать понятие — значит показать a priori соответствующее ему созерцание. Следовательно, для конструирования понятия требуется не эмпирическое созерцание, которое, стало быть, как созерцание есть единичный объект, но тем не менее, будучи конструированием понятия (общего представления), должно выразить в представлении *общезначимость* для всех возможных созерцаний, подходящих под одно и то же понятие. Так, я конструирую треугольник, показывая предмет, соответствующий этому понятию, или при помощи одного лишь воображения в чистом созерцании, или вслед за этим также на бумаге в эмпирическом созерцании, но и в том и в другом случае совершенно a priori, не заимствуя для этого образцов ни из какого опыта. Единичная нарисованная фигура эмпирична, но тем не менее служит для выражения понятия без ущерба для его всеобщности, так как в этом эмпирическом созерцании я всегда имею в виду только *действие* по конструированию понятия, для которого многие определения, например величины сторон и углов, совершенно безразличны, и потому я отвлекаюсь от этих разных [определений], не изменяющих понятия треугольника» [5, 423; выделено мной. — *С.К.*].

[48] Подробнее об этом см. наши работы [9, 10, 13].

Здесь хотелось бы обратить внимание на то, что в данном случае кантовская мысль удивительным образом перекликается с платоновским пониманием математики, который в кн. 6 своего «Государства» определяет специфику математики так: «Те, кто занимается геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры, три вида углов и прочее... [И] когда *они пользуются чертежами и делают отсюда выводы, их мысль обращена не на чертеж, а на те фигуры, подобием которых он служит* [чертеж же является «образным выражением того, что можно видеть не иначе как мысленным взором» (там же)]. *Выводы свои они делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили*...» [510d – e; вставки и выделение сделаны мной. — *С.К.*]. Точнее, Кант находит элегантное решение платоновской проблемы *идеальности* математических объектов. Таковыми выступают его *схемы*, которые как *способы порождения* математических объектов и являются теми общезначимыми [аподиктичными] созерцаниями, на которые математик опирается при конструировании понятий.

Наряду с *остенсивным* (от лат. ostentus — показывание, выставление напоказ) геометрическим конструированием, опирающимся на пространственную интуицию, Кант вводит также фундированное априорной формой времени *символическое конструирование*, которое предопределяет алгебраическую деятельность:

«Математика конструирует не только величины (quanta), как это делается в геометрии, но и величину как таковую (quantitas), как это делается в алгебре, совершенно отвлекающейся от свойств предмета, который должно мыслить согласно такому понятию величины. Она избирает себе при этом <u>определенные обозначения для всех конструирований величин вообще (чисел), каковы сложение, вычитание, извлечение корня и т. д.</u>; затем, обозначив общее понятие величин в их различных отношениях, она изображает *в созерцании* соответственно определенным общим правилам *все операции*, производящие и изменяющие величину, когда одна величина должна быть разделена другой, *она соединяет их знаки по обозначающей форме деления и т. п. и таким образом с помощью символической конструкции*, так же как геометрия с помощью остенсивной... конструкции (самих предметов) достигает того, чего дискурсивное познание посредством одних лишь понятий никогда не может достигнуть» [5, 425; выделено мной. — *С.К.*].

Переходя к анализу более развитой в абстрактном отношении *алгебры* как вида математической деятельности хотелось бы обратить внимание на два обстоятельства. Во-первых, одной из важнейших конституент алгебры является использование «языка *x—ов* и *y—ов*», или переход по сравнению с арифметикой к метаязыку *переменных*, который позволяет «работать» не только с определенными величинами как это делается в арифметике (например, различать четные и нечетные числа), но и с *абстрактными величинами*, значение которых произвольно, т.е. с *переменными*[49]. Во-вторых, не менее важным обстоятельством, хотя это практически выпадает из сферы анализа, является то, что язык алгебры позволяет выражать не только абстрактные символы, но и [арифметические] *операции* («действия»), которые можно производить с этими символами. Тем самым алгебраический язык представляет собой, в отличие от *декларативного* языка, используемого, например, в метафизике («философия vs. математика»), особый *процедурный* язык, в котором зафиксированы возможные способы работы с математическими объектами, т. е. *как* надо производить те или иные математические действия. Более того, если ранее подобный процедурный язык был прерогативой лишь алгебры, то в настоящее время это относится ко всем разделам современной, ставшей сверхабстрактной, математики: никакой логико-математический язык без специальных знаков для выражения операций над математическими объектами невозможен. При этом важно отметить, что *символическое* конструирование гораздо прозрачнее остенсивного, поскольку в последнем случае *действия* явно не «сказываются», а лишь «показываются» (Витгенштейн) посредством их реального осуществления в ходе геометрических построений, хотя и могут эксплицироваться, путем описания способов построения, в метаязыках[50]. Языковая фиксация возможных математических действий делает математику более строгой, хотя, с другой стороны,

---

[49] В этом состоит принципиальное отличие *алгебры* от *арифметики*. Решение [конкретного] примера **2 + 3 = ?** есть задача *арифметическая*, а решение уравнения $\mathbf{3 + x = 5}$ является уже задачей *алгебраической*. Возникновение собственно алгебры можно связать с трактатом Диофанта «Арифметика» (III в. н. э.), в котором впервые стала использоваться алгебраическая символика, т. е. язык *x*-ов и *y*-ов.

[50] Как это, например, было сделано в «Началах» Евклида, которые ограничили набор геометрических действий построениями с помощью циркуля и линейки, а наиболее важные из них эксплицированы в *постулатах*.

подобная кодификация способов преобразования математических объектов (ср. с метафорой Гудстейна) ограничивает ее эвристический потенциал.

Вместе с тем *символическое* конструирование, на что указывает его название, является *абстрактным* и в другом отношении. По сути дела посредством знаков математических [алгебраических] операций последние лишь *кодируются*, т. е. представляются в сокращенном [символическом] виде, что предполагает их реальное осуществление уже за пределами формульных выражений. Так, формальная запись умножения двух чисел «$a \times b$» предполагает реальное умножение a на b, например *умножение столбиком* (которое, отчасти напоминает геометрические построения). Это позволяет предположить, что современная реальная математическая деятельность представляет собой, несмотря на преобладание символических формульных конструкций, «смесь» обоих типов конструирования.

Достаточно наглядной иллюстрацией данного тезиса выступает интуиционистское задание действительного числа (континуума) с помощью понятия потока[51]. Пусть нам дано некоторое действительное число, например *0, 534...*. Оно символически представимо как бесконечная двоичная дробь, в нашем случае *0, 100010...*. Следуя Канту, мы должны соотнести этот «символ», или синтаксическое «понятие», с некоторым созерцанием, например с некоторой точкой на отрезке *[0, 1]*. Точнее, собственно остенсивная конструкция задания подобной алгебраической дроби состоит в последовательном разбиении отрезка пополам (шаг 1). При осуществлении подобных разбиений искомое число оказывается либо в правой, либо в левой части полуотрезка: в нашем случае после первого деления наше число окажется в правой половине отрезка, т. к. сразу после запятой стоит цифра 1, после второго деления — в левой четверти правой половины, т. к. вторая цифра после запятой у нашей дроби 0, и т.д. Дальнейшая итерация этой процедуры будет все точнее задавать месторасположение искомого числа. Однако современная математика на этом не останавливается и предлагает заменить «приблизительную» геометрическую конструкцию более строгой алгебраической. Описанную выше

[51] В приводимом ниже примере использован доклад аспиранта мехмата МГУ С. Шашкова на семинаре в апреле 2008 г. при обсуждении [переводов] статей *Л.Э.Я. Брауэра* «Формализм и интуиционизм» и «Сознание, философия и математика».

процедуру деления отрезка пополам можно строго представить посредством точного [алгебраического] алгоритма, т. е. надстроить. Для этого воспользуемся введенным Брауэром понятием *потока*.

> «Закон потока делит кортежи натуральных чисел на допустимые и недопустимые, а дополнительный закон сопоставляет допустимым кортежам некоторые математические объекты. Закон потока должен удовлетворять следующим условиям:
>
> 1. Пустой кортеж $<>$ является допустимым.
> 2. Для любого допустимого кортежа $<a_1, \ldots, a_n>$ найдётся по меньшей мере одно натуральное число k, для которого кортеж $<a_1, \ldots, a_n, k>$ также будет допустимым.
> 3. Для любого допустимого кортежа $<a_1, \ldots, a_n, k>$ кортеж $<a_1, \ldots, a_n>$ также является допустимым.
>
> *Свободно становящиеся последовательности* натуральных чисел $\{a_k\}$, для которых при любом n кортеж $<a_1, \ldots, a_n>$ является допустимым по закону потока M, называются допустимыми свободно становящимися последовательностями. Отвечающие им последовательности $\{\Omega(a_k)\}$ называются элементами потока M.
>
> Теперь определим отрезок $[0, 1]$ как следующий *поток* рациональных отрезков (шаг 2: задание символической алгебраической конструкции):
>
> 1. *Закон потока*: Допустимыми по закону потока считаются кортежи, все элементы которых равны 0 или 1;
> 2. *Дополнительный закон*: Пустому кортежу ставится в соответствие отрезок $[0, 1]$. Далее, если кортежу $<a_1, \ldots, a_n>$ поставлен в соответствие отрезок $[a, b]$, то кортежу $<a_1, \ldots, a_n, 0>$ ставится в соответствие отрезок $[a, (a + b)/2]$, а кортежу $<a_1, \ldots, a_n, 1>$ — отрезок $[(a + b)/2, b]$.
>
> Элементы этого потока, которые соответствуют последовательностям вложенных рациональных отрезков, будут называться (соответствовать) *действительными числами*».

Приведенный алгоритм представляет собой конструктивное задание *понятия* действительного числа, т. е. выступает в качестве кантовского конструирования понятий. Однако для того, чтобы сделать *понятнее* и *нагляднее* предложенный алгебраический алгоритм потока интуиционисты соотносят его с *созерцанием* посредством задания вторичной остенсивной конструкции (шаг 3).

Это делается в завершающей стадии описания алгоритма следующим образом. Каждый поток может быть представлен двоичным деревом, из каждой вершины которого выходит по меньшей мере одна ветвь, и на каждую вершину которого навешен некоторый математический объект. Допустимые свободно становящиеся последовательности натуральных чисел, т. е. бесконечные десятичные дроби, с помощью которых представляются действительные числа, выступают в виде потенциально бесконечных (*конечных* для того или иного шага алгоритма) путей в таком дереве.

* * *

Перейдем теперь к анализу третьего вида математической деятельности — *доказательства*. Принципиальное отличие современной математики (конца XIX — начала XXI вв.) от предшествующей (т. е. кантовской) состоит в том, что она, благодаря усилиям Пеано, Фреге, Рассела, Гильберта etc, представляет собой *логико-математический комплекс* и поэтому кантовская концепция конструирования должна быть распространена не только на геометрические построения и алгебраические преобразования (вычисления), но и на [*логические*] *доказательства* как важнейший тип математической деятельности. Очевидно, что доказательства пронизывают собой все разделы математики, поскольку и геометрические построения и алгебраические вычисления являются *вместе с тем* доказательствами, однако нас будет интересовать вопрос о доказательстве не как сопутствующем моменте математических конструкций, а о доказательстве самом по себе, *доказательстве в чистом виде*. По сути дела, этим занимается *логика*. Поэтому первоначальный вопрос относительно доказательств может быть переформулирован так: *применима ли кантовская концепция конструирования понятий к такому виду познания как логика* (предметом которой и являются доказательства) и можно ли говорить об особом *логическом конструировании*?

Первоначально созданные логические системы — *системы гильбертовского типа* — представляли собой *a la* алгебраические формальные системы с *линейным* понятием вывода (как последовательности формул) и поэтому вполне подпадали под кантовское символическое конструирование. Однако дальнейшее развитие *логики* в XX в., таких ее разделов как *теория доказательств* и осо-

[52] Изложение основ теории поиска вывода можно найти в книге С.Ю. Маслова [14].

бенно *теория поиска вывода*[52], показало, что *логические доказательства* как символические (формальные) конструкции обладают своей спецификой, что позволяет говорить о том, что в логике осуществляется особый тип конструирования, связанный с учетом при поиске вывода информации о «пространственной» *структуре* логических формул. Соответственно, в 30-е годы появляются новые типы логических систем: *секвенциальные исчисления* и *системы натурального вывода* с более сложно организованным *нелинейным* (не-алгебраическим) понятием вывода, — которые, по сути, являются «надстройками» над классическими логическими системами, т.е. выступают как логические метаисчисления.

Но прежде чем переходить к их более детальной характеристике обратимся еще раз к кантовскому конструированию. Как можно было бы определить его в наиболее общем виде? Понятия по Канту представляют собой «безжизненные» логические конструкции, существующие в модусе возможности. Для того, чтобы придать им «жизнь» необходимо превратить их в *предметы созерцания*, т. е. поместить их в соответствующую [созерцательную] *среду*, каковыми для Канта (или для неоплатоников) выступают априорные пространство и время. При этом понятия, в которых зафиксированы логические характеристики созерцательных предметов, «превращаются» в *фигуры* (ср. с шахматными фигурами из метафоры Гудстейна), с которыми можно работать, т. е. совершать те или иные математические действия (преобразования). Примером такого опредмечивания является, в частности, геометрическая точка, которая может «двигаться» в пространстве посредством истечения. Современные структуралисты правильно подмечают, что придавать математическим абстракциям статус полноценных объектов/предметов (по аналогии с объектами естественных наук) является методологической (концептуальной) ошибкой. Однако те же структуралисты постулируют некоторое «пространство» (resp. систему, структуру), внутри которых существуют математические квазиобъекты. *Пространство* выступает первым и самым наглядным примером такой *среды* для математических предметов, но его можно сделать парадигмальным и говорить об общем *логическом пространстве* (ср. со сходным выражением Витгенштейна из «Логико-философского трактата») как той среде, внутри которой «обитают» логико-математические сущности (ср. с шахматной доской из метафоры Гудстейна).

По сути дела, в теории доказательств и говорят о подобном логическом пространстве (структуре), которое задается той или иной логической системой (системой аксиом): поиск вывода осуществляется в рамках заданного логического пространства и необходим определенный *опыт*, благодаря которому формируется *интуиция*, позволяющая усматривать те действия, которые приведут к успеху[53].

Тем самым помимо первичной остенсивной геометрической конструкции можно говорить о вторичной остенсивности логических конструкций[54], что связано, в первую очередь, с тем, что математика (resp. логика) является разновидностью *предметного* мышления, а мышление о предметах предполагает не только рассудочно-*понятийную* составляющую (которой достаточно для метафизики), но и чувственно-*созерцательную* (интуитивную) компоненту, т. е. процедуру конструирования понятий, их соотнесение с созерцанием. «Предметами» логических доказательств выступают *формулы*, которые «растянуты» в пространстве, т. е. имеют некоторую *структуру*, содержащую в скрытом виде информацию о доказуемости или недоказуемости этой формулы. Задача *теории доказательств* состоит в том, чтобы эту информацию сделать явной, оче-*видной* (как правило, за счет преобразования/расщепления исходной формулы), а задача *теории поиска вывода* (ТПВ) — по виду исходной формулы сформировать идею доказательства, а в идеале — выявить полный набор шагов построения искомого доказательства. Соответственно, более развитые типы логических (мета)систем, каковыми являются *секвенциальные исчисления* и *системы натурального вывода*, за счет создания более сложных (нелинейных), но и более удобных для поиска вывода конфигураций логического пространства: *секвенциальных деревьев* и *субординантных натуральных выводов* — позволяют решить задачу построения вывода формул более эффективно[55].

Продемонстрируем специфику логического конструирования и основные идеи ТПВ на одном простом, но достаточно показательном примере вывода формулы.

Пусть нам дано пропозициональное исчисление гильбертовского типа P_1, которое содержит три аксиомы:

---

[53] Заметим, что подобным образом (*пространство, опыт, интуиция...*) мог бы высказаться и алгебраист.

[54] Ср. с вторичной остенсивной конструкцией интуиционистского задания континуума, приведенной выше.

[55] Для классической логики (силлогистики) таковым является использование *круговых диаграмм* Эйлера.

<+102> $\mathbf{p} \supset [\mathbf{q} \supset \mathbf{p}]$; <+103> $[\mathbf{s} \supset [\mathbf{p} \supset \mathbf{q}]] \supset [[\mathbf{s} \supset \mathbf{p}] \supset [\mathbf{s} \supset \mathbf{q}]]$;
<+104> $\mathbf{p} \supset \mathbf{f} \supset \mathbf{f} \supset \mathbf{p}$,

и два правила вывода: <*100> Из $[\mathbf{A} \supset \mathbf{B}]$ и **A** следует **B** *(правило модус поненс);* <*101> Если **b** — переменная, а **B** — формула, то из **A** следует $\mathbf{S}^{\mathbf{b}}/_{\mathbf{B}}\mathbf{A}|$ *(правило подстановки)*. *Выводом* в P_1 называется последовательность формул, каждая из которых является либо аксиомой, либо получена из предшествующих формул вывода по одному из правил вывода, последняя формула которой является искомой формулой. И стоит задача построения в данном исчислении вывода формулы <+120> $\mathbf{p} \supset \mathbf{p}$ (*закона рефлексивности*).

А. Черч приводит следующий вывод данной формулы (см. [16, 75]):

Вывод:	Анализ вывода:
1. $[\mathbf{s} \supset [\mathbf{p} \supset \mathbf{q}]] \supset [[\mathbf{s} \supset \mathbf{p}] \supset [\mathbf{s} \supset \mathbf{q}]]$	<+103>
2. $[\mathbf{s} \supset [\mathbf{r} \supset \mathbf{q}]] \supset [[\mathbf{s} \supset \mathbf{r}] \supset [\mathbf{s} \supset \mathbf{q}]]$	1, <*101> подстановка $\mathbf{p}/\mathbf{r}$
3. $[\mathbf{s} \supset [\mathbf{r} \supset \mathbf{p}]] \supset [[\mathbf{s} \supset \mathbf{r}] \supset [\mathbf{s} \supset \mathbf{p}]]$	2, <*101> подстановка $\mathbf{q}/\mathbf{p}$
4. $[\mathbf{p} \supset [\mathbf{r} \supset \mathbf{p}]] \supset [[\mathbf{p} \supset \mathbf{r}] \supset [\mathbf{p} \supset \mathbf{p}]]$	3, <*101> подстановка $\mathbf{s}/\mathbf{p}$
5. $[\mathbf{p} \supset [\mathbf{q} \supset \mathbf{p}]] \supset [[\mathbf{p} \supset \mathbf{q}] \supset [\mathbf{p} \supset \mathbf{p}]]$	4, <*101> подстановка $\mathbf{r}/\mathbf{q}$
6. $\mathbf{p} \supset [\mathbf{q} \supset \mathbf{p}]$	<+102>
7. $[\mathbf{p} \supset \mathbf{q}] \supset [\mathbf{p} \supset \mathbf{p}]$	5, 6 <*100>
8. $\mathbf{p} \supset [\mathbf{q} \supset \mathbf{p}] \supset [\mathbf{p} \supset \mathbf{p}]$	7, <*101> подстановка $\mathbf{q}/\mathbf{q}{\supset}\mathbf{p}$
9. $\mathbf{p} \supset \mathbf{p}$	8, 6 <*100>

Формально этот вывод безупречен, однако Черч не отвечает на вопрос: «Почему на 1 (2, 3,..., 8) шагах были выбраны те или иные аксиомы, правила вывода и сделанные в случае выбора правила <*101> подстановки?». Отвечая на этот вопрос, сформулируем основной тезис ТПВ: для этого необходим переход к *метаисчислению*, в рамках которого появляется возможность работать со *структурной* информацией формулы, а основными инструментами такой работы являются *эвристики*, *допустимые* правила вывода[56] и *метапеременные*.

Так, для исчисления P_1 общей эвристикой выступает следующая тактика поиска:

Для доказательства некоторой ппф, надо ее подставить в «хвост» самой «богатой» аксиомы <+103>, и тогда решение ис-

[56] Так, допустимым правилом вывода является доказываемая Черчем метатеорема дедукции [16, 84—85].

ходной задачи можно свести к решению двух подзадач, а именно: решению подзадачи (j1) по выводу первого антецедента варианта <+103>, полученного после подстановки в <+103> искомой ппф; и решению подзадачи (j2) по выводу второго антецедента варианта <+103> (понятно, что при решении подзадач путем применения правила *modus ponens* вывод искомой ппф, находящейся в «хвосте» варианта аксиомы <+103> будет получен)[57].

Однако использование этой эвристики осложняется тем, что в составе <+103> содержится еще одна (третья) переменная, не содержащаяся в «хвосте» этой аксиомы, точное значение которой пока неизвестно (не определено). Для преодоления этой трудности в состав метаисчисления вводятся так называемые *временные* переменные[58], функция которых заключается в фиксировании неизвестной на данном этапе построения (поиска) вывода информации о конкретной структуре формулы и в последующей их замене (по правилу подстановки) на подформулы (переменные) при получении в ходе поиска вывода необходимой информации.

Приступим к задаче поиска вывода[59]. Искомая задача выглядит так: $\vdash \mathbf{p} \supset \mathbf{p}$. При подстановке ппф $\mathbf{p} \supset \mathbf{p}$ в хвост аксиомы <+103> (при этом мы «выписываем» вариант этой аксиомы «справа налево», попутно подставляя временные метапеременные вместо неизвестных еще формул) получаем следующий ее вариант

$[\mathbf{p} \supset [\mathbf{A} \supset \mathbf{p}]] \supset [[\mathbf{p} \supset \mathbf{A}] \supset [\mathbf{p} \supset \mathbf{p}]]$,

где **A** — временная метапеременная[60]. Соответственно исходная задача редуцируется к решению двух подзадач:

j1: $\vdash \mathbf{p} \supset [\mathbf{A} \supset \mathbf{p}]$

j2: $\vdash \mathbf{p} \supset \mathbf{A}$

[57] Заметим, что в принципе «сфера действия» эвристики может быть расширена за счет ее применения к другим аксиомам системы, хотя при этом неопределенность нашего выбора существенно возрастает.

[58] Первоначально идея использования *временных (мета)переменных* была реализована С. Кангером при формулировке минус-кванторных правил в секвенциальных исчислениях [4, 200–208]. Это, в свою очередь, восходит к методу ε–подстановок (resp. ε–исчислениям) Д. Гильберта [2, 37, 167 (вторая ε–теорема)].

[59] Первоначально последующее изложение преследовало чисто учебные цели при изложении исчисления P_1 с целью обучения студентов «работе» по построению выводов в данном исчислении.

[60] В каком-то смысле, данная метаформула соответствует формуле шага 5 исходного вывода Черча.

Заметим, что подзадача **j1** решается тривиально, поскольку метаформула $\mathbf{p \supset [A \supset p]}$ по своей структуре совпадает с аксиомой <+102>, причем на метапеременную **A** не накладывается никаких ограничений и она может быть заменена на любую формулу исходного исчисления. Т. е. **j1** «решается» как вариант <+102>. Несколько сложнее обстоит дело с решением подзадачи **j2**, поскольку метаформула $\mathbf{p \supset A}$ «напрямую» не соответствует никакой аксиоме, однако можно заметить (путем созерцания!), что она «похожа» на аксиому <+102>, если в этой метаформуле метапеременную **A** заменить на метаформулу $\mathbf{B \supset p}$ (где **B** — еще одна временная метапеременная). При такой замене метаформула $\mathbf{p \supset [B \supset p]}$ по своей структуре совпадает с аксиомой <+102>, т. е. может быть превращена в вариант этой аксиомы. При этом на структуру временной метапеременной **A** (с учетом решения второй подзадачи) накладывается дополнительное ограничение: $\mathbf{A \cong B \supset p}$, что необходимо учесть при решении первой (в принципе, решенной ранее) подзадачи; а на временную метапеременную **B** никаких ограничений не накладывается, хотя целесообразно ее сразу заменить на переменную **q**, что превратит эту метаформулу в аксиому <+102>. Обе подзадачи решены, и мы обладаем достаточной информацией о том, какие подформулы соответствуют используемым при поиске вывода временным метапеременным: ***A*** «замещает» подформулу $\mathbf{q \supset p}$, а **B** — переменную **q**. Тем самым, ясен набор искомых подстановок в аксиому <+103> переменные **s** и **q** заменяем на **p**, а саму **p** — на $\mathbf{q \supset p}$. В результате таких подстановок мы получим формулу $\mathbf{[p \supset [q \supset p] \supset p]] \supset [[p \supset [q \supset p] \supset [p \supset p]]}$, которая после двух применений правила *modus ponens* (т.е. отделения двух антецедентов) дает вывод искомой формулы $\mathbf{p \supset p}$. Запишем найденный нами вывод формально:

1. $\mathbf{[s \supset [p \supset q]] \supset [[s \supset p] \supset [s \supset q]]}$	<+103>
2. $\mathbf{[p \supset [[q \supset p] \supset p]] \supset [[p \supset [q \supset p]] \supset [p \supset p]]}$	1, одновременная подстановка <*101>: $\mathbf{p/q \supset p}$, $\mathbf{s/p}$, $\mathbf{q/p}$
3. $\mathbf{p \supset [q \supset p]}$	<+102>
4. $\mathbf{p \supset [[q \supset p] \supset p]]}$	3, <*101>: $\mathbf{q/q \supset p}$
5. $\mathbf{[p \supset [q \supset p]] \supset [p \supset p]}$	2, 4 <*100>
6. $\mathbf{p \supset p}$	5, 3 <*100>

Вместе с тем предложенная выше эвристика позволяет сформулировать *общую тактику* (эвристику) решения задач в подобных логических исчислениях:

Для решения задачи $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{C}$ *ее можно редуцировать к решению двух подзадач:* $\vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ *и* $\vdash \mathbf{B} \supset \mathbf{C}$, т. е. *необходимо найти такую промежуточную между формулами* **A** *и* **C** *новую формулу* **B**, *при которой обе указанные подзадачи решаются.*

(«промежуточная» формула **B** называется *формулой сечения*, а сама эта стратегия представляет собой применение допустимого *правила сечения*, особенностью которой является нахождение новой (ранее неизвестной!) формулы сечения).

Наш несколько затянувшийся пример построения логического вывода с использованием структурной [металогической] информации преследовал цель сделать очевидной связь данного типа [логического] конструирования с остенсивными конструкциями геометрических построений. Оба типа рассуждения проводятся в рамках некоторого [созерцательного] *пространства*, при этом используются структурные особенности задействованных предметов и вводятся *новые* предметы (прямые, формулы сечения), которые, в конечном счете, и обеспечивают *синтетическое* приращение знания в ходе подобного конструирования понятий.

Это позволяет сформулировать следующий итоговый вывод. *В современной* [абстрактной] *математике действуют оба типа кантовского конструирования, которые тесно переплетены между собой в рамках реальных математических рассуждений.* Вместе с тем можно выделить и третий тип — *логическое конструирование*, используемое при построении *доказательств*, который наследует черты остенсивного (геометрия) и символического (алгебра) кантовского конструирования.

Литература

1. *Гайденко П.П.* История греческой философии в ее связи с наукой. — М., ПЕР СЭ, 2000.

2. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Теория доказательств. М., Наука, 1982.

3. *Гудстейн Р.Л.* Математическая логика. М., Изд-во ИЛ, 1961.

4. *Кангер С.* Упрощенный метод доказательства для элементарной логики //Математическая теория логического вывода. М., Наука, 1967.

5. *Кант И.* Критика чистого разума. М., Мысль, 1994.

6. *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука. // Сочинения в 8-ми т. Т.4. М., Чоро, 1994.

7. *Катречко С.Л.* Воображение как «деятельная способность синтеза многообразного» в составе познавательной способности //Воображение в свете философских рефлексий. М., Полиграф–Информ, 2008. С.117–179.

8. *Катречко С.Л.* Как возможно творческое воображение? // Воображение в свете философских рефлексий. М., Полиграф–Информ, 2008. С. 11–27.

9. *Катречко С.Л.* Моделирование рассуждений в математике: трансцендентальный подход //Модели рассуждений – 1: Логика и аргументация. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007. С. 63–90.

10. *Катречко С.Л.* О (концепте) числе(а): его онтологии и генезисе // Число (сб. статей; ред. А.Н. Кричевец). М., МАКС Пресс, 2009. С. 116–133.

11. *Катречко С.Л.* Трансцендентальная аргументация Канта как формальная онтология //Модели рассуждений – 4: Аргументация и риторика. Калининград: Изд–во РГУ им. И. Канта, 2010 (Х. 2010). (журнал Ratio № 3 2010; http://ratio.albertina.ru)

12. *Катречко С.Л.* Трансцендентальный метод и проблема онтологии // Современная онтология — IV. Проблема метода. — СПб., СПбГУ, ИТМО, 2010. Т. 2. С. 43–63.

13. *Катречко С.Л.* Трансцендентальная философия математики //Вестник Московского университета. Серия 7 «Философия», № 2, 2008. М., Изд-во МГУ, 2008. С. 88–106.

14. *Маслов С.Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. М., Радио и связь, 1986.

15. *Фреге Г.* Основоположения арифметики (логико-математическое исследование понятия числа). Томск, «Водолей», 2000.

16. *Черч А.* Введение в математическую логику. М., ИЛ., 1960.

17. *Хинтикка Я.* Поверхностная информация и глубинная информация //Хинтикка Я. Логико-эпистемологические исследования. М., Прогресс, 1980. С. 182–228.

18. *Юм Д.* Трактат о человеческой природе //Юм Д. Сочинения в 2 тт. М., Мысль, 1965. Т. 1.

19. *Benacerraf P.* What Numbers Could Not Be // The Philosophical Review, vol. 74, № 1 (Jan. 1965), pp. 47–73.

20. *Beth E.* Mathematical Thought. Dordrecht, Reidel, 1965.

21. *Burgess J., Rosen G.* A Subject with No Object. Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics. New York, Oxford University Press, 1999.

22. *Field H.* Realism, Mathematics and Modality. Oxford, Basil Blackwell, 1989.

23. *Field H.* Science without Numbers: a Defense of Nominalism. Princeton, Princeton University Press, 1980.

24. *Hellman G.* Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation. Oxford, Oxford University Press, 1989.

25. *Hellman G.* Structuralism without Structures // Philosophia Mathematica (3), vol. 4 (1996), pp. 100–123.

26. *Katrechko S.* Ding-Ontology of Aristotle vs. Sachverhalt-Ontology of Wittgenstein // Papers of the 31st International Wittgenstein Symposium (Band XVI). Kirchberg am Wessel (Austria), 2008, pp. 169–172.

27. *Linsky B., Zalta E.* Naturalized Platonism versus Platonized Naturalism // Journal of Philosophy, vol. XCII (1995), № 10, pp. 525–555.

28. *Mally E.* Gegenstandstheoretische Grundlagen der Logik und Logistik, Leipzig, Barth, 1912.

29. *Shapiro S.* Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. New York, Oxford University Press, 1997.