ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕПЕЙ ПОСТАВОК С НЕПРЕРЫВНО НАЧИСЛЯЕМЫМИ ШТРАФАМИ

Впервые обсуждаются возможности использования приближенных подходов к решению задачи оптимизации цепей поставки с непрерывно начисляемыми штрафами за нарушение сроков доставки. Задача была исследована с помощью численного моделирования на примере экспоненциально нарастающих штрафов для ситуации, когда логистическому оператору необходимо доставить груз в несколько региональных пунктов, при этом транспортное средство может свободно перемещаться из одного пункта в любой другой. Для решения задачи предложен метод Монте-Карло.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: транспортная задача (задача коммивояжера), минимизация логистических издержек, оптимизация суммы штрафов

Борисова Людмила Андреевна — к. э. н., доцент факультета логистики НИУ ВШЭ (г. Москва)

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей задачей обеспечения конкурентоспособности логистического бизнеса является оптимизация различных звеньев цепей поставок. При этом эффективность ряда из них можно повышать без дополнительных инвестиций, используя скрытый резерв: за счет оптимального выбора порядка выполнения имеющегося портфеля заказов (см., например, работы Дж. Уолрэнда, Г.Л. Бродецкого и Л.А. Борисовой [1–4]). Данная проблема возникает также на этапе транспортировки, когда логистическому оператору требуется доставить хранящуюся на складе продукцию в несколько торговых точек, расположенных на достаточно большом расстоянии друг от друга. При этом логистический оператор может быть заинтересован как в минимизации общего затраченного времени на осуществление грузоперевозок, так и в оптимизации неких других параметров, определяемых конкретными условиями договора поставки.

Случай, когда логистический оператор заинтересован в минимизации суммарно пройденного расстояния, можно рассматривать как одну из математических задач, показывающих, что оптимальный порядок осуществления доставки позволяет достигать заметного снижения суммарных затрат. Такая задача, известная как задача коммивояжера (в английской терминологии Traveling Salesman Problem — TSP), была впервые исследована в XVIII веке ирландским математиком У. Гамильтоном и британским математиком Т. Киркманом и с тех пор считается не только самой изученной задачей комбинаторной оптимизации, но и, несмотря на свою простую формулировку, самой сложной задачей операционного анализа. Классическая формулировка задачи коммивояжера, которой посвящены сотни статей [5–7] и множество книг [8–9], заключается в следующем: необходимо объехать N городов и вернуться в исходное место за минимальное время.

Существуют различные обобщения классической задачи коммивояжера: задача с несколькими коммивояжерами (multiple travelling salesman problem) [10], задача маршрутизации транспорта (vehicle routing problem) [11–14], а также многочисленные варианты задачи синхронизации транспортных потоков [15]. Во всех вышеупомянутых задачах требуется найти такую последовательность посещения покупателей, чтобы суммарное затраченное время было минимальным.

Однако можно рассмотреть ситуацию, когда логистическому оператору требуется минимизировать не суммарное время доставки всем грузополучателям, а стоимостный показатель, например, штраф, начисляемый за нарушение договорного срока доставки груза в торговую точку [4]. Данная проблема может довольно часто возникать в ситуации, когда у логистического оператора имеется в распоряжении небольшое количество транспортных средств и большое число клиентов, требующих своевременного исполнения заказов перевозки. При этом в случае задержки доставки груза по сравнению с оговоренным контрактом сроком предусматривается непрерывное начисление штрафа.

В представленной работе рассмотрено обобщение так называемой задачи коммивояжера, в которой транспортному средству требуется обслужить N торговых точек, и при этом для каждой из них существует свой момент времени (разный для разных точек), начиная с которого происходит начисление штрафов, растущих в геометрической прогрессии. При этом параметры, определяющие величину суммарного штрафа, отличаются для различных точек. Требуется найти такую последовательность посещения точек, чтобы минимизировать суммарный начисленный штраф, даже если суммарное затраченное время будет неоптимальным.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Используем постановку классической задачи коммивояжера [7], применяя формализм дискретной оптимизации.

Пусть задано множество точек 0, 1, …, N, которые требуется посетить по одному разу, d_{ij} обозначает расстояние между i-й и j-й точками.

Сопоставим каждое возможное перемещение между i-й и j-й точками с двоичной переменной x_{ij}, которая принимает значение 0, если путь из точки i в точку j не входит в маршрут, и значение 1, если данное перемещение входит в маршрут.

Требуется минимизировать сумму:

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N} d_{ij}x_{ij} \to \min. \quad (1)$$

При следующих ограничениях:

$$\sum_{i=0}^{N} x_{ij} = 1,\; j = 0, 1, \ldots, N, \quad (2)$$

$$\sum_{j=0}^{N} x_{ij} = 1,\; i = 0, 1, \ldots, N. \quad (3)$$

Данные ограничения требуют, чтобы выполнялось следующее условие: транспортное средство приходит в каждый пункт доставки только один раз и покидает его также только один раз. Также дополнительно вводится специальное условие, обеспечивающее отсутствие циклов и разрывов маршрутов:

$$u_i - u_j + Nx_{ij} \le N - 1. \qquad (4)$$

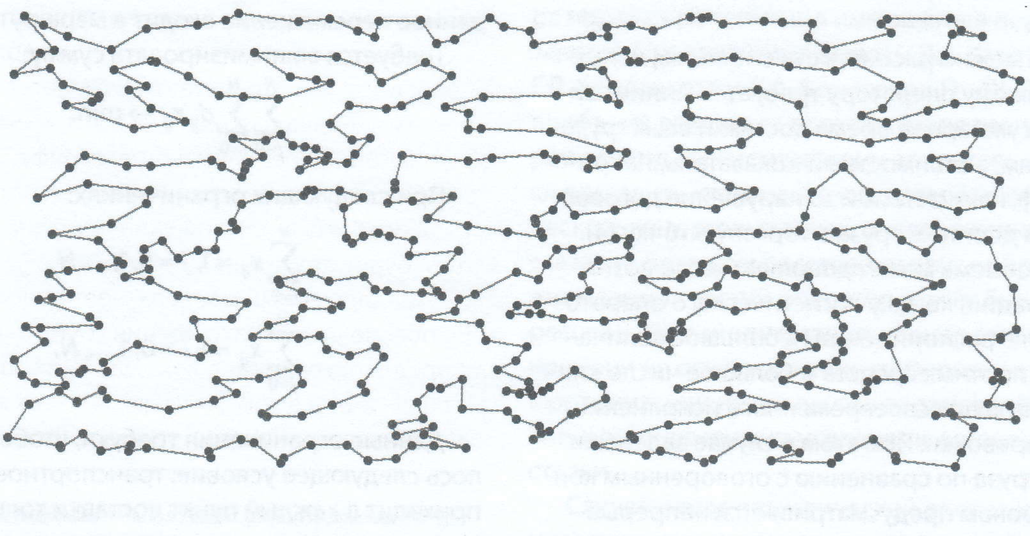
Здесь u_i и u_j — некоторые постоянные. Обычно в качестве таких величин используется время прибытия коммивояжера в точки i и j соответственно [7, 15]. При постановке задачи маршрутизации транспорта в дополнение к данным условиям могут вводиться также и другие, например, требование, чтобы каждая точка была посещена только одним транспортным средством.

Для решения классической задачи коммивояжера существуют многочисленные подходы, наиболее известными из которых является метод ветвей и границ [16] и эвристика Лина — Кернигана [17]. Также существует большое количество программных продуктов (например, программа Concorde [18]) для численного решения задачи коммивояжера. Пример результата применения программы Concorde для поиска оптимальной последовательности обслуживания 500 торговых точек представлен на рис. 1.

Однако задача коммивояжера со стоимостным критерием (по сумме начисляемых штрафов за нарушение договора поставки) ранее в литературе не рассматривалась. При этом практическая значимость данной задачи очень высока для случая, когда санкции за нарушение срока доставки груза отдельным клиентам могут легко нивелировать общую получаемую выгоду от использования маршрута, оптимального по времени.

В настоящей статье исследуется решение транспортной задачи по стоимостному критерию. Пусть по-прежнему задано множество торговых точек 0, 1, …, N, которые транспортному средству требуется обслужить по одному разу. Пусть d_{ij} обозначает расстояние между i-й и j-й точками. Каждой торговой точке ставится в соответствие функция непрерывно начисляемого штрафа за нарушение условий договора поставки. Функция непрерывно начисляемого штрафа является экспоненциально возрастающей:

Рис. 1. Оптимальный маршрут классической задачи коммивояжера, найденный программой Concorde для 500 случайно расположенных пунктов



$$c_i = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ a_i e^{b_i(t-t_i)} & t \geq t_0 \end{cases}. \quad (5)$$

Здесь a_i, b_i — некоторые постоянные, определяющие величину штрафа (причем b_i — скорость роста штрафа), t_i — время, начиная с которого происходит начисление штрафа, t — общее время, e — основание экспоненты (2,71). При этом если транспортное средство прибывает в торговую точку i ко времени T ($T > t_i$), то величина суммарно начисленного штрафа будет равна [19, 20]:

$$C_i = \int_{t_i}^{T} c_i(t)dt = \frac{a_i}{b_i}\left(e^{b_i(T-t_i)} - 1\right). \quad (6)$$

Понятно, что в зависимости от значений величин a_i, b_i и t_i в каждой торговой точке оптимальный маршрут, минимизирующий суммарный начисляемый штраф, будет изменяться. Целью данной работы является изучение данной проблемы и разработка метода, позволяющего, по крайней мере приближенно, найти маршрут, минимизирующий суммарный начисляемый штраф за нарушение срока доставки.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Задача коммивояжера даже в классической постановке (минимизация суммарно пройденного расстояния) является одной из наиболее сложных задач комбинаторной оптимизации, и ее решение возможно только с использованием аппарата численных методов, что и было реализовано в настоящей статье применительно к оптимизации по стоимостному критерию.

Все численные эксперименты были выполнены с использованием среды статистического анализа R [21] и программного обеспечения Concorde. Вначале с использованием программы Concorde было сгенерировано множество случайно расположенных торговых точек, а также вычислен оптимальный маршрут, минимизирующий суммарное пройденное расстояние. В качестве алгоритма решения оптимизационной задачи в настоящей статье применялся метод Монте-Карло [22–24], состоящий в том, что случайным образом генерируются различные варианты обхода торговых точек. Далее для каждого варианта вычисляется суммарно начисленный штраф, и из полученного множества вариантов обхода выбирается тот путь, который минимизирует такой суммарно начисленный штраф.

Пример работы предложенного алгоритма приведен на рис. 2. Для случайным образом сгенерированных положений точек были случайным образом выбраны параметры оптимизационной задачи a_i, b_i и t_i. Далее было сгенерировано 10 000 возможных вариантов обхода всех точек. Параметры оптимизационной задачи, найденный оптимальный маршрут, суммарно пройденное расстояние и суммарный начисленный штраф представлены в табл. 1 (для рис. 2а) и табл. 2 (для рис. 2б).

Маршрут, представленный на рис. 2а, является оптимальным не только по суммарно начисленному штрафу, но и по суммарно пройденному расстоянию. Параметры оптимизационной задачи, соответствующие рис. 2а и рис. 2б, отличаются лишь значением коэффициента b_i для точки под номером 2. Видно, что изменение параметров оптимизационной модели даже в одной точке может приводить к существенным изменениям в оптимальном порядке обхода точек. Транспортному средству оказывается выгоднее посетить вначале тот пункт, в котором происходит наибольшее начисление штрафа. При этом необходимо понимать, что для других параметров оптимизационной задачи оптимальный путь будет другим.

Предложенный подход имеет недостаток: он не обеспечивает нахождения точного решения, а предлагает вариант, являющийся оптимальным из некоторой выборки. Перебор всех возможных последовательностей посещения точек нельзя использовать в случае, когда их очень много, по причине факториального нарастания числа возможных обходов.

Рис. 2. Сравнение оптимальных маршрутов для различных параметров

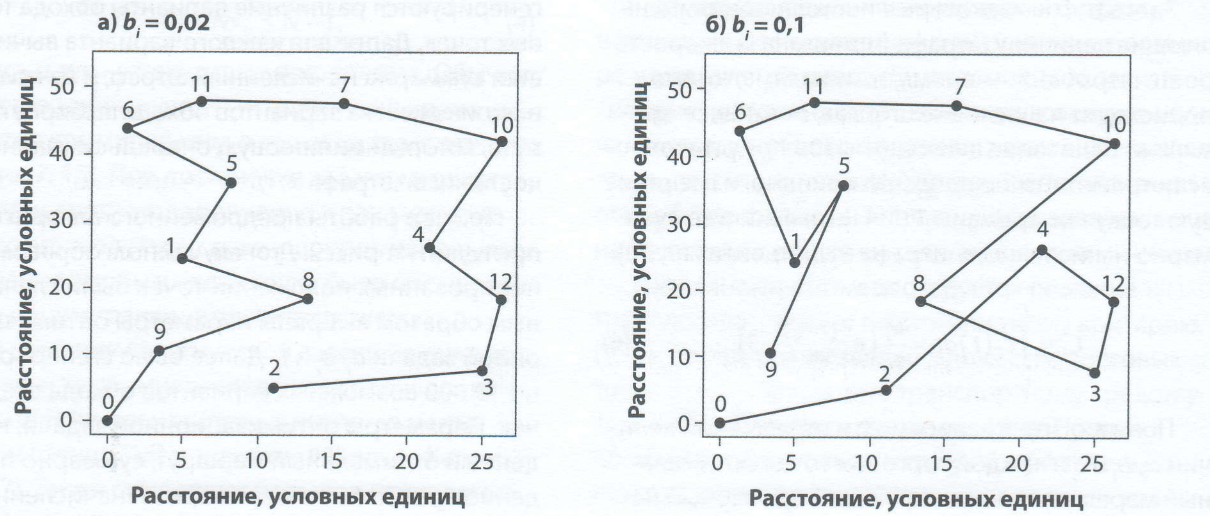


Таблица 1. Параметры оптимизационной задачи для маршрута, показанного на рис. 2а

Параметр	Торговая точка												
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a_i, денежных единиц	0	1	2	4	2	5	4	8	6	1	4	7	5
b_i в единицу времени	0	0,01	0,02	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,01	0,01	0,03	0,04	0,01
t_i, единиц времени	0	10	20	40	20	50	40	80	60	10	40	70	50
Очередь посещения	0	3	12	11	9	4	5	7	2	1	8	6	10

Примечание: суммарно пройденное расстояние — 135,068 (единиц расстояния), суммарный начисленный штраф — 3574,478 (денежных единиц).

Таблица 2. Параметры оптимизационной задачи для маршрута, показанного на рис. 2б

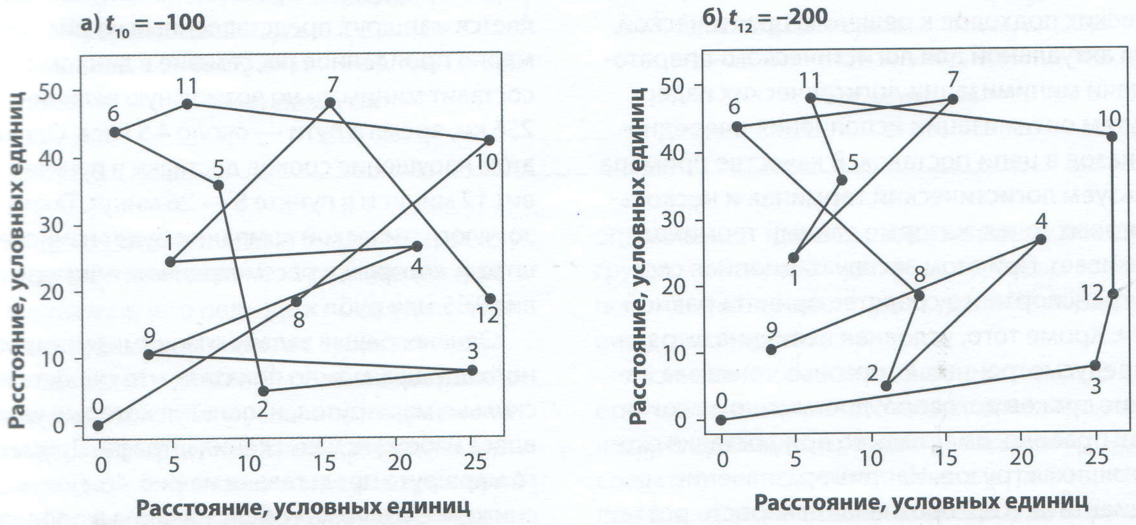
Параметры	Торговая точка												
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a_i, денежных единиц	0	1	2	4	2	5	4	8	6	1	4	7	5
b_i в единицу времени	0	0,01	0,1	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,01	0,01	0,03	0,04	0,01
t_i, единиц времени	0	10	20	40	20	50	40	80	60	10	40	70	50
Очередь посещения	0	10	1	4	2	11	9	7	5	12	6	8	3

Примечание: суммарно пройденное расстояние 183,5748 (единиц расстояния), суммарный начисленный штраф 6622,070 (денежных единиц).

Тем не менее предложенный метод может использоваться как алгоритм получения приближенного решения, которое в дальнейшем возможно уточнить, используя различные алгоритмы, например эвристику Лина — Кернигана [17].

Исследование зависимости оптимального маршрута обслуживания торговых точек от времени начала начисления штрафов представлено на рис. 3, в табл. 3 и табл. 4. Как видно, изменение времени начала начисления штрафа также существенным образом влияет на выбор оптимального маршрута. На рис. 3 продемонстрированы случаи, когда транспортный оператор уже нарушил сроки доставки груза в некоторые точки (точка 10 на рис. 3а и точка 12 на рис. 3б). В таком случае штраф уже начисляется логистическому оператору, и при этом величина штрафа по условию задачи экспоненциально растет. Как видно, в обоих случаях транспортному оператору оказалось выгоднее в первую очередь осуществить доставку в те пункты, где уже происходит начисление штрафа. Однако при этом допустимо также обслужить торговые точки, расположенные по пути.

Рис. 3. Сравнение оптимальных маршрутов для различных параметров, t_i



Примечание: на рис. 3а — нарушение срока доставки в точку 10, на рис. 3б — нарушение срока доставки в точку 12.

Таблица 3. Параметры оптимизационной задачи для маршрута, показанного на рис. 3а

Параметр	Торговая точка												
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a_i, денежных единиц	0	1	2	4	2	5	4	8	6	1	4	7	5
b_i в единицу времени	0	0,01	0,01	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,01	0,01	0,03	0,04	0,01
t_i, единиц времени	0	10	200	40	200	50	40	800	60	100	–100	70	50
Очередь посещения	0	10	6	7	9	5	4	11	1	8	2	3	12

Примечание: суммарно пройденное расстояние 251,9383 (единиц расстояния), суммарный начисленный штраф 18239,87 (денежных единиц).

Таблица 4. Параметры оптимизационной задачи для маршрута, показанного на рис. 3б

Параметр	Торговая точка												
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a_i, денежных единиц	0	1	2	4	2	5	4	8	6	1	4	7	5
b_i в единицу времени	0	0,01	0,01	0,03	0,02	0,02	0,03	0,02	0,01	0,01	0,03	0,04	0,01
t_i, единиц времени	0	10	200	40	200	50	40	80	60	20	10	70	–200
Очередь посещения	0	6	10	1	11	5	8	7	9	12	3	4	2

Примечание: суммарно пройденное расстояние 235,7217 (единиц расстояния), суммарный начисленный штраф 11854,45 (денежных единиц).

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПОДХОДА ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим приложение разработанных теоретических подходов к решению практической, весьма актуальной для логистического оператора задачи минимизации логистических издержек путем оптимизации исполнения очередности заказов в цепи поставок. В качестве примера используем логистический терминал и несколько торговых точек, которые данный терминал обслуживает. При этом эксплуатационная скорость транспортного средства принята равной 60 км/ч. Кроме того, условная величина штрафов, предусмотренных в торговых точках за нарушение сроков договора, достаточно высока, что, как правило, имеет место при доставке скоропортящихся грузов. Например, значение коэффициента $b_i = 0{,}2$ обозначает скорость роста штрафа на 20% в час. Время доставки для каждой торговой точки установлено договором, время начала доставки — 9.00. Параметры задачи, включая координаты торговых точек, представлены в табл. 5.

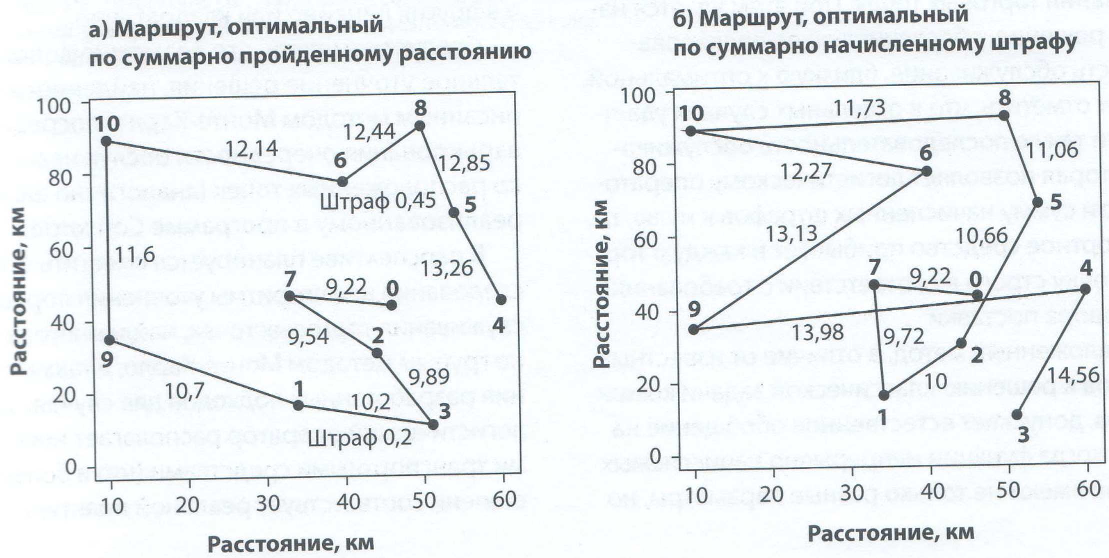
В случае решения задачи оптимизации суммарно пройденного расстояния оптимальным является маршрут, представленный на рис. 4а. Суммарно пройденное расстояние в данном случае составит минимально возможную величину 256 км, время в пути — около 4,5 часа. Однако при этом нарушение сроков доставки в пункте 1 составит 12 минут и в пункте 8 — 26 минут. Таким образом, логистической компании будет начислен штраф, который в рассмотренном примере составит 0,65 млн руб.

Однако, решая задачу о минимизации суммарного штрафа, можно показать, что существует несколько маршрутов, используя которые удается вовсе избежать начисления штрафа. Пример такого маршрута представлен на рис. 4б. Полученное снижение издержек обслуживания в пределах одного рассмотренного в этом примере портфеля заказов может оказаться незначительным, однако

Таблица 5. Параметры оптимизационной задачи для рассматриваемого примера

Параметр	Торговая точка										
	0 (склад)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Расстояние по оси X, км	46	34	44	51	60	54	40	33	50	10	10
Расстояние по оси Y, км	43	16	30	10	44	68	77	46	92	35	89
a_i, млн руб.	0	1	2	3	20	1	3	2	1	1	2
b_i, в час	0	0,5	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2
t_i, часов	0	10	12	16	15	13	20	11	12	14	15

Рис. 4. Сравнение оптимальных маршрутов для рассматриваемого примера



надо учесть, что аналогичная экономия затрат в годовом масштабе при системной реализации найденного оптимального подхода к посещению торговых точек будет заметно более существенной.

Таким образом, показано, что, если логистический оператор работает в условиях непрерывно начисляемых штрафов, имеет смысл ставить цель и решать задачу минимизации не суммарно пройденного расстояния, а суммарно начисленных штрафов. Решение данной задачи может быть найдено только с использованием численных методов. В частности, использование метода Монте-Карло показало свою эффективность при поиске оптимального маршрута для сравнительно небольшого числа торговых точек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В настоящей статье были апробированы возможности использования отдельных математических методов для решения логистической задачи оптимизации транспортных затрат по доставке грузов и обслуживанию ряда торговых точек, расположенных на достаточно удаленном расстоянии друг от друга.

Новизна работы заключается в том, что в качестве оптимизационного критерия использовалось не суммарно пройденное транспортным средством расстояние, а сумма штрафов, начисленных логистическому оператору за нарушение договорных сроков доставки.

Задача была исследована с помощью численного моделирования для экспоненциально нарастающих штрафов на нескольких примерах, в которых логистическому оператору необходимо обслужить 12 и 10 торговых точек с возможностью свободного перемещения между ними. Для решения задачи был применен метод Монте-Карло, который, не гарантируя абсолютно точного решения, в то же время позволяет получить достаточно хороший результат, пригодный для практического применения менеджерами по логистике.

Численное моделирование показало, что варьирование параметров оптимизационной модели приводит к изменению оптимального порядка обслуживания торговых точек. При этом удается находить решение, обеспечивающее последовательность обслуживания, близкую к оптимальной. Следует отметить, что в отдельных случаях удается найти такую последовательность обслуживания, которая позволяет логистическому оператору свести сумму начисленных штрафов к нулю, т.е. транспортное средство прибывает в каждую торговую точку строго в соответствии с требованиями договора поставки.

Предложенный метод, в отличие от известных подходов к решению классической задачи коммивояжера, допускает естественное обобщение на случай, когда функции непрерывно начисляемых штрафов имеют не только разные параметры, но и различный вид для разных точек, например, в одних узлах сумма непрерывно начисляемого штрафа может возрастать экспоненциально, а в других линейно или квадратично.

Следует отметить, что возможно дополнительное уточнение решения, найденного вышеописанным методом Монте-Карло, посредством варьирования очередности обслуживания близко расположенных точек (аналогично алгоритму, реализованному в программе Concorde).

В перспективе планируется сместить фокус исследования на алгоритмы уточнения порядка обслуживания торговых точек, найденного достаточно грубым методом Монте-Карло, а также обобщения разработанных подходов для случая, когда логистический оператор располагает несколькими транспортными средствами (что в большей степени соответствует реальной практике).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. — М.: Мир, 1993. — 336 с.
2. Бродецкий Г.Л. Минимизация издержек обслуживания портфеля заказов при случайных «тарифах» штрафных функций // РИСК. — 2009. — №3. — С. 96–103.
3. Бродецкий Г.Л. Оптимальный порядок обслуживания заказов в цепях поставок с учетом рисков потерь доходов и инфляции // Логистика и управление цепями поставок. — 2009. — №5. — С. 40–52.
4. Борисова Л.А., Бродецкий Г.Л. Простое правило минимизации издержек обслуживания портфеля заказов при непрерывном начислении процентов // Логистика сегодня. — 2013. — №5. — С. 278–285.
5. Laporte G. (1992). «The traveling salesman problem: an overview of exact and approximate algorithms». *European Journal of Operational Research,* Vol. 59, pp. 231–247.
6. Golden B., Levy L., Dahl R. (1981). «Two generalizations of the traveling salesman problem». *Omega,* Vol. 9, No. 4, pp. 439–441.
7. Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A. (1960). «Integer programming formulation of traveling salesman problems» *Journal of the ACM (JACM),* Vol. 7, Iss. 4, pp. 326–329.
8. Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Shmoys D.B. (1985). *The Traveling Salesman Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization.* Chichester: Wiley.
9. Davendra D. (2010). *Traveling Salesman Problem, Theory and Applications.* Croatia: InTech.
10. Bruce L. (1975). «Golden vehicle routing problems: formulations and heuristic solution techniques». *Technical Report No. 113,* Massachusetts Institute of Technology.
11. Golden B., Raghavan S., Wasil E. (2008). *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges.* New York: Springer.
12. Prins Ch. (2009). «Two memetic algorithms for heterogeneous fleet vehicle routing problems». *Engineering Applications of Artificial Intelligence,* Vol. 22, pp. 916–928.
13. Liu Sh., Huang W., Ma H. (2009). «An effective genetic algorithm for the fleet size and mix vehicle routing problems». *Transportation Research Part E,* Vol. 45, pp. 434–445.
14. Choi E., Tcha D.-W. (2007). «A column generation approach to the heterogeneous fleet vehicle routing problem». *Computers & Operations Research,* Vol. 34, pp. 2080–2095.
15. Bose J.W., Hu H., Jahn C., Shi X., Stahlbock R., Vo S. (2011). *Computational Logistics.* New York: Springer.
16. Land A.H., Doig A.G. (1960). «An automatic method of solving discrete programming problems». *Econometrica,* Vol. 28(3), pp. 497–520.
17. Lin Sh., Kernighan B.W. (1973). «An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem». *Operations Research,* Vol. 21(2), pp. 498–516.

18. *Concorde TSP Solver*. — http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html.
19. Ковалев В.В. Финансовый анализ. — М.: Финансы и статистика, 1997. — 512 с.
20. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1974. — 831 с.
21. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. — http://www.R-project.org.
22. Hammersley J.M., Handscomb D.C. (1975). *Monte Carlo Methods*. London: Methuen.
23. MacKeown P.K. (1997). *Stochastic Simulation in Physics*. New York: Springer.
24. Ripley B.D. (1987). *Stochastic Simulation*. New York: Wiley & Sons.