ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. В. Соколов, В. Л. Шагин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2016

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73
С59

***Авторы*:**

Соколов Александр Валерьевич — кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, доцент кафедры высшей математики Департамента математики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Шагин Вадим Львович — кандидат геолого-минералогических наук, доцент Департамента прикладной экономики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

***Рецензенты*:**

Рябенький В. С. — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша Российской академии наук, профессор Московского физико-технического института;

Быков А. А. — доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Соколов, А. В.

С59 Математический анализ. Базовые понятия : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / А. В. Соколов, В. Л. Шагин. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 245 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-9916-7571-0

Учебное пособие посвящено основам математического анализа. В нем в доходчивой форме объясняется происхождение и существо фундаментальных понятий, на которых строится теория: предел, непрерывность, производная, интеграл; подробно рассматриваются методы исследования функций и построения графиков. Изложение теоретических вопросов сопровождается иллюстрирующими примерами, а также многочисленными задачами и вопросами, позволяющими оценить степень усвоения материала. Предлагаемое учебное пособие следует рассматривать как дополнение к основному учебнику по курсу математического анализа, рекомендованному преподавателем данной дисциплины.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов первого курса высших учебных заведений, изучающих высшую математику. Пособие будет полезно также для учащихся и преподавателей средней школы профильного математического образования, подготовительных курсов и математических кружков.

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-9916-7571-0

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие содержит основные понятия математического анализа, которые являются фундаментом построения всей теории. Рассмотрение начинается с понятия предела, на котором базируются все остальные понятия. Глубокое усвоение этого базового понятия существенно облегчит понимание всех остальных понятий математического анализа. Понятие предела строится на принципах, новых для учащихся средней школы, изучающих элементарную математику, и вызывает большие затруднения для восприятия. Поэтому в пособии значительное место уделяется разъяснению происхождения и смысла этого понятия. Для лучшего усвоения предлагается игровой подход к его определению.

Затем последовательно вводятся и разъясняются понятия непрерывности функций и производной. На базе введенных понятий подробно рассматриваются этапы исследования функций и построения графиков. Завершается пособие рассмотрением понятия интеграла.

Все вводимые понятия снабжаются качественной интерпретацией, что позволит более наглядно представить и осмыслить их содержание. Изложение теоретических вопросов сопровождается многочисленными примерами. В конце каждого раздела приведены упражнения в виде задач для самостоятельного решения, а также контрольные вопросы для проверки правильности усвоения материала. Задачи имеют разную степень сложности. Наиболее сложные задачи помечены звездочкой. В конце пособия имеются ответы к упражнениям. В пособии приведены строгие доказательства большинства утверждений. Сложные места доказательств снабжены пояснениями.

В настоящее время с элементами математического анализа учащиеся начинают знакомиться еще в школе, в 10—11 классах. Однако в школьных учебниках не дается строгого определения понятия предела, на котором базируется весь курс математического анализа. По математическому анализу написано много вузовских учебников различной степени сложности. В качестве относительно доходчивых и в то же время строгих и основательных можно предложить ставший уже классическим учебник Г. М. Фихтенгольца [3], а также учебник Л. Д. Кудрявцева [1], читавшего курс в Московском физико-техническом институте, и учебник для втузов Н. С. Пискунова [2]. Для предварительного более глубокого знакомства с понятием функции, чем это дается в школьных учебниках, авторы рекомендуют обратиться к учебному пособию [4].

Пособие предназначено для студентов первого курса высших учебных заведений, изучающих высшую математику. Оно будет полезно также для учащихся и преподавателей средней школы профильного математического образования, подготовительных курсов и математических кружков.

В результате усвоения изложенного в данном пособии курса математического анализа учащийся должен приобрести следующие компетенции:

знать

- определения основных понятий математического анализа;
- основные свойства пределов, непрерывных функций, производных, неопределенных и определенных интегралов;
- формулы производных основных элементарных функций, интегралов от простейших элементарных функций;
- геометрический и физический смысл производной;
- геометрический смысл определенного интеграла;
- схему исследования функций и построения их графиков;

уметь

- вычислять пределы последовательностей;
- вычислять пределы функций в точке и в бесконечности;
- вычислять производные для элементарных функций;
- составлять уравнения касательных к графикам функций;
- вычислять экстремумы функций;
- строить графики функций;
- исследовать функции по их графикам;
- вычислять неопределенные и определенные интегралы;
- находить площади плоских фигур и объемы тел вращения;
- применять дифференциальное и интегральное исчисления для решения задач на нахождение оптимального решения и задач на движение;

владеть

- навыками применения теории пределов для определения сходимости числовых последовательностей и установления непрерывности или разрывности функций;
- навыками дифференциального исчисления для исследования характера поведения функций и построения их графиков, а также для нахождения оптимальных решений;
- навыками интегрального исчисления для вычисления площадей плоских фигур, объемов тел вращения и решения задач на движение.

Глава 1
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В результате изучения главы 1 студент должен:

знать

• определения и свойства числовой последовательности, числового ряда, предела последовательности, суммы числового ряда, арифметической и геометрической прогрессий;

• формулы расчета длины окружности и площади круга;

уметь

• вычислять пределы последовательностей;

• определять значения n-го члена и суммы всех членов арифметической и геометрической прогрессий;

владеть

• навыками оперирования с простейшими числовыми последовательностями и рядами.

1.1. Понятие о пределе

Слово «предел» употребляется в повседневной речи в различных сочетаниях, например: «на пределе возможностей», «до какого предела можно дойти...», «беспредел» (как отсутствие предела) и т.д. Этим словом обычно обозначают рубеж, который нельзя переступить («предел, его же не прейдеши» (из Библии)). При этом часто подразумеваются некоторая последовательность, серия ситуаций, явлений, положений, приближающихся к этому рубежу.

Такое понимание предела первоначально было свойственно и математике, использующей его, в частности, для определения площади круга и длины окружности. Площадь круга и длина окружности определялись как предел (недостижимый) соответственно площадей и периметров вписанных и описанных правильных многоугольников. В самом деле, площадь любого вписанного многоугольника меньше площади круга, а описанного, наоборот, всегда больше. Аналогичное утверждение справедливо и для периметров вписанных и описанных правильных многоугольников. А при неограниченном увеличении числа их сторон соответствующие величины вписанных и описанных фигур стремятся к одной и той же величине, которая и принимается за площадь круга или длину окружности соответственно.

Формулируя определения понятия, заимствованного из обыденной речи, математика обычно сохраняет его основной смысл, при этом уточняя его таким образом, чтобы оно понималось однозначно. Такое уточнение называется *экспликацией* понятия. При этом некоторые нюансы понятия могут быть исключены. Так произошло и с понятием предела. В процессе развития математики понятие предела было расширено. Из него было исключено свойство непревосходимости рубежа, однако осталась идея стремления к ней в бесконечном ряду шагов. В современном толковании предельное значение может быть достигнуто и на конечных шагах и может быть превзойдено и снизу, и сверху.

Так, например, математики считают, что бесконечная последовательность чисел 2; 2; 2; 2; 2; ... имеет предел, равный двум, а последовательность $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ...$ с общим членом $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ имеет предел, равный нулю.

Понятие предела является фундаментальным, базисным понятием математического анализа. На основе понятия предела строятся более сложные понятия, такие как непрерывность функции, производная, интеграл, определяются понятия длины кривой, площади плоской фигуры с криволинейными границами, объема тела и т.д.

Понятие предела по своей природе динамическое, в отличие от рассматриваемых в школе статических понятий, т.е. оно связано с процессом, с так называемым предельным переходом.

С помощью понятий, в основе которых лежит понятие предела, ведутся расчеты траекторий космических кораблей, рассчитываются конструкции самолетов, строятся всевозможные приборы, определяются месторождения полезных ископаемых и т.д.

К осмыслению и четкому формулированию понятия предела математическая мысль шла тысячелетия. С явлениями, приводящими к понятию предела, люди сталкивались еще в древние времена при попытке бесконечного деления некоторой величины. Так, до наших дней дошла древнегреческая апория (доказательство парадоксального утверждения) элейского философа Зенона (V в. до н.э.). Зенон утверждал, что легендарный быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепаху, с какой бы скоростью она ни убегала от него. Его доказательство сводится к следующему: когда Ахиллес добежит до того места, где черепаха находилась в данный момент, она уже уползет на некоторое расстояние вперед. Когда Ахиллес добежит до нового места, куда переместилась черепаха, она уползет еще на какое-то расстояние и т.д. до бесконечности. Парадокс этот легко разрешается с помощью понятия предела: суммарное время, за которое Ахиллес преодолевает все уменьшающиеся отрезки пути, отделяющие его от черепахи, оказывается конечным, хотя самих этих отрезков и бесконечное количество.

Рассмотрим подробнее описанную ситуацию. Пусть Ахиллеса от черепахи отделяет расстояние в 1 км и он бежит равномерно со скоростью 4 км/ч, а черепаха убегает от него тоже равномерно со скоростью 2 км/ч[1]. Проиллюстрируем процесс соревнования Ахиллеса с черепахой. Нанесем на числовую ось Ox начало отсчета — точку, в которой находился Ахиллес

[1] У Зенона Ахиллес бежит в 10 раз быстрее черепахи и в начальный момент их отделяет 1000 стадий (греческая мера длины). Нами взяты другие, достаточно условные цифры для упрощения иллюстрации.

в начале соревнования. Обозначим ее цифрой 0. Тогда черепаха в начале соревнования будет находиться в точке $x = 1$ (км) (рис. 1.1). В рамочке указано время, прошедшее с начала соревнования. В момент начала соревнования оно равно нулю.

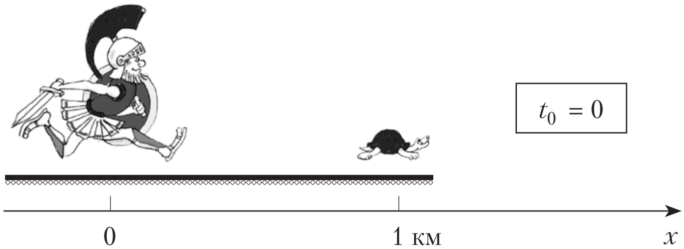

Рис. 1.1. **Соревнование Ахиллеса с черепахой. Начальная позиция**

Через 1/4 ч Ахиллес достигнет того места, где находилась черепаха в начале соревнования, т.е. отметки $x = 1$ км ($t_1 = \dfrac{1\,\text{км}}{4\,\text{км/ч}} = \dfrac{1}{4}$ ч), а черепаха тем временем переместится на 1/2 км: $S_1 = 2\,\text{км/ч} \cdot 1/4\,\text{ч} = 1/2\,\text{км}$ (рис. 1.2).

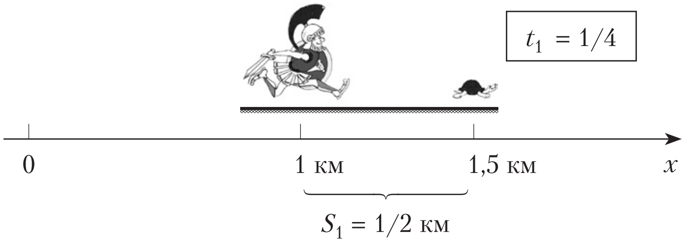

Рис. 1.2. **Соревнование Ахиллеса с черепахой. Позиция через 1/4 ч**

Через 1/8 ч Ахиллес достигнет того места, где находилась черепаха в момент $t_1 = 1/4$ — в отметке $x = 1{,}5$ км ($t_2 = \dfrac{0{,}5\,\text{км}}{4\,\text{км/ч}} = \dfrac{1}{8}$ ч), а черепаха тем временем переместится на 1/4 км: $S_2 = 2\,\text{км/ч} \cdot 1/8\,\text{ч} = 1/4\,\text{км}$ (рис. 1.3) и т.д.

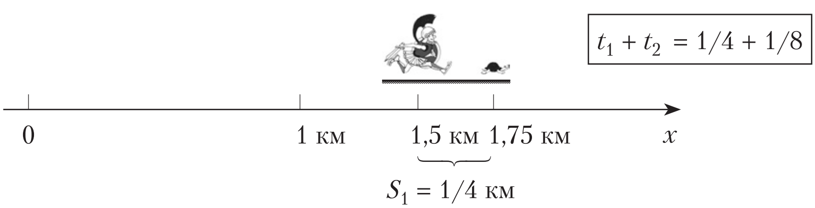

Рис. 1.3. **Соревнование Ахиллеса с черепахой. Позиция через следующие 1/8 ч**

Поскольку скорость черепахи в два раза меньше скорости Ахиллеса, расстояние, пробегаемое Ахиллесом (и проходимое черепахой), а также время, затрачиваемое на его преодоление, на каждом следующем этапе рассмотрения сокращается вдвое.

Отложим на рассматриваемой оси точку $x = 2$ (км). Нетрудно видеть, что на каждом следующем этапе отрезок от последней отметки до точки $x = 2$ делится новой отметкой пополам (рис. 1.4).

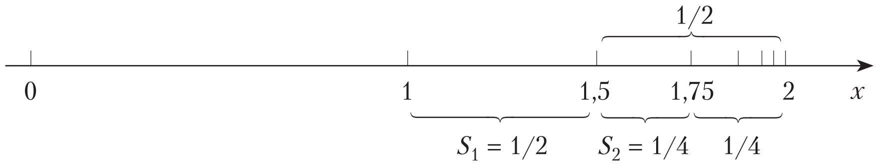

Рис. 1.4. **Соревнование Ахиллеса с черепахой. Деление отрезков пополам**

При таком рассмотрении процесса соревнования все отметки будут лежать левее точки $x = 2$. Тем не менее они будут сколь угодно близко подступать к точке $x = 2$ — какую бы точку левее точки $x = 2$ мы ни взяли, всегда на каком-то этапе появится отметка правее ее, поскольку расстояние от отметки до точки $x = 2$ каждый раз уменьшается вдвое и, таким образом, стремится к нулю. Сложив все расстояния между соседними отметками: $S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$, мы получим длину полуинтервала от $x = 1$ до $x = 2$ — единицу (от отрезка этот полуинтервал отличается одной точкой $x = 2$, которая, как известно, имеет нулевую длину):

$$S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = 1/2 + 1/4 + ... + 1/2^n + ... = 1.$$

Это расстояние пройдет черепаха. Ахиллес же пройдет, кроме того, еще 1 км, т.е. всего 2 км.

Ясно, что около точки 2 расстояние между Ахиллесом и черепахой постепенно сократится до нуля, т.е. фактически Ахиллес догонит черепаху. Посмотрим, сколько на это понадобится времени. Как уже говорилось, время, затрачиваемое на каждый следующий этап, сокращается вдвое. Таким образом, все время рассматриваемого соревнования составит

$$t = t_1 + t_2 + ... + t_n + ... = 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^{n+1} + ...$$

Вынесем за скобку 1/2. Тогда, как только что было установлено, получим

$$t = 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^{n+1} + ... = 1/2(1/2 + 1/4 + ... + 1/2^n + ...) = 1/2 \cdot 1 = 1/2,$$

т.е. на самом деле весь процесс соревнования займет полчаса.

Весь парадокс заключался в том, что Зенон искусственно разбил время (в нашем примере — полчаса) на бесконечное число частей и решил, что раз количество частей бесконечно, то процесс никогда не закончится. На самом же деле, поскольку эти части очень быстро уменьшаются от этапа к этапу (в нашем случае — в два раза), то оказывается, что их общая сумма конечна. Заметим, кстати, что не всякая бесконечная сумма убывающих и даже стремящихся к нулю чисел конечна. Например, сумма так называемого гармонического ряда $1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n + ...$ бесконечна. Но об этом пойдет речь ниже.

В древнем мире тем не менее понятие предела неявно использовали при вычислении площади круга и других плоских фигур. Однако введение в математику и осмысление понятия предела как самостоятельного понятия произошло лишь в XVII в. благодаря работам великого английского математика, физика и философа Исаака Ньютона. Первоначально оно еще не носило отчетливого характера. В уточнение и формализацию понятия предела внесли вклад многие выдающиеся ученые XVII—XIX вв., пока оно не приобрело современные очертания.

Понятие предела, как уже упоминалось, существенно опирается на понятие бесконечности, подразумевает бесконечный процесс. Этот процесс необязательно связывать со временем. Его можно трактовать как последовательность некоторых этапов, следующих один за другим. В математике этапность процесса выразилась в понятии последовательности, рассмотрением которого мы и займемся в следующем параграфе.

1.2. Бесконечные числовые последовательности

1.2.1. Определение последовательности

С понятием числовой последовательности вы уже встречались, изучая арифметическую и геометрическую прогрессии. Мы тоже будем здесь рассматривать бесконечные числовые последовательности, причем слова «бесконечная» и «числовая» будем опускать.

Вообще говоря, числовая последовательность — это бесконечный набор чисел, взятых в определенном порядке. Строгое математическое определение последовательности дается через понятие функции от натурального аргумента.

Определение 1.1. *Последовательностью* называется числовая функция $f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Кстати говоря, сам натуральный ряд чисел тоже представляет собой последовательность, в которой $f(n) = n$.

Напомним, что многоточие в конце записи означает, что данная последовательность чисел бесконечна.

При конкретном n выражение $f(n)$ называется n-м членом последовательности. Обычно n-й член последовательности обозначается некоторой буквой с индексом, например a_n, т.е. $a_n = f(n)$, а сама последовательность — через $\{a_n\}$. Таким образом, $a_1 = f(1)$ — первый член последовательности, $a_2 = f(2)$ второй член последовательности и т.д.

Чаще всего последовательность задается формулой, определяющей связь номера n члена последовательности с ее n-м членом, например $a_n = \dfrac{n-3}{n^2}$. Такую запись называют также *общим членом последовательности*. Подставляя вместо n любые натуральные числа, будем получать соответствующие ее члены. В данном примере

$$a_1 = \frac{1-3}{1^2} = -2,\ \ a_2 = \frac{2-3}{2^2} = -\frac{1}{4},\ \ a_3 = \frac{3-3}{3^2} = 0 \text{ и т.д.}$$

Здесь важно уяснить, что вместо буквы n, выполняющей роль индекса в левой части равенства $a_n = \frac{n-3}{n^2}$, и буквы n, стоящей на всех местах в правой его части, необходимо подставлять одно и то же число.

Иногда последовательность задается несколькими первыми членами, по которым можно установить закономерность, например: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$ или, более точно:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots, \frac{1}{n}; \ldots .$$

Иногда требуется по нескольким первым членам последовательности вывести формулу для общего ее члена. Эта задача не всегда простая и требует определенной изобретательности. К тому же одному и тому же фрагменту последовательности может соответствовать несколько различных формул. В таких случаях речь идет о наиболее простой, естественной формуле.

Пример 1.1

Выведем формулу общего члена последовательности 1; 3; 5; 7; 9; 11; ... .

Решение. По-видимому, имеется в виду последовательность нечетных чисел. Нечетные числа обычно задаются формулой $2n + 1$. Примерим ее для нашей последовательности. Если считать, что нумерация начинается с члена № 1, то при $n = 1$ по приведенной формуле получаем 3, а нужно 1. Следовательно, нужно уменьшить значение, получаемое по формуле, на 2, т.е. положить $a_n = 2n - 1$.

Пример 1.2

Выведем формулу общего члена последовательности 1; 2,5; 5; 8,5; 13; 18,5 ... .

Решение. Можно заметить, что в этой последовательности целые числа чередуются с дробными, причем дробная часть равна 0,5. Для облегчения задачи умножим все эти числа на 2 (впоследствии произведем обратную операцию). Тогда получим последовательность 2; 5; 10; 17; 26; 37; ... . Можно догадаться, что если от каждого из этих чисел отнять 1, получим последовательность квадратов натуральных чисел 1; 4; 9; 16; 25; 36; ... .

Таким образом, исходная последовательность может быть получена из формулы

$$a_n = \frac{n^2+1}{2}.$$

Если число членов заданной последовательности достаточно велико, можно прикинуть формулу по нескольким первым членам, а затем проверить ее справедливость путем подстановки следующих номеров и сравнения с оставшимися заданными членами.

Последовательности могут задаваться и более сложным образом, когда нельзя их свести к формулам. Примерами такого рода последовательностей могут служить последовательность цифр в десятичном представлении числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$ или последовательность простых чисел 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17;.... Известно, что и в том и в другом случае существуют алгоритмы нахождения любого члена этих последовательностей, но связать конечной формулой номер члена и сам этот член не удается.

Вам уже известно, что любое действительное число можно представить в виде последовательности десятичных знаков, отделив дробную часть (если она есть) от целой части запятой. При этом рациональные числа можно изобразить конечной последовательностью цифр или бесконечной последовательностью с периодической частью. Например, число 25,2 можно еще записать как 25,20, или 25,200 и т.д., или даже как 25,2000... и даже как 25,1999999..., т.е. 25,1(9). Число $\frac{1}{3}$ нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, а только в виде бесконечной периодической десятичной дроби: $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$, число $\frac{27}{70}$ — тоже: $\frac{27}{70} = 0{,}385714285714285714 2... = 0{,}3(857142)$. Иррациональные числа можно записать только в виде бесконечной *непериодической* десятичной дроби.

Пример 1.3

Определим 124-ю цифру после запятой в десятичном представлении дроби $\frac{1}{7}$.

Решение. Разделив уголком 1 на 7 до выявления периода, т.е. до момента появления остатка, который уже встречался (далее цифры в частном будут повторяться), получим 0,(142857):

$$\frac{1}{7} = 0{,}\underbrace{\underbrace{142857}_{\text{период}}\underbrace{142857}_{\text{период}}...\underbrace{142857}_{\text{период}}}_{20\text{ периодов}=120\text{ цифр}}1428...\ .$$

Период содержит шесть цифр. Разделим 124 на 6 с остатком. Получим 20 и 4 в остатке. Таким образом, 124 цифры после запятой в десятичном представлении дроби $\frac{1}{7}$ содержит 20 полных периодов и еще четыре цифры. Отсчитав четвертую цифру от начала периода, получим 8. Это и есть искомая цифра.

Замечание 1.1. Зададимся вопросом: до каких пор следует продолжать деление уголком, если требуется найти период десятичной дроби, равной ее обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. При делении натурального числа m на натуральное число n уголком получаются цифры из частного и остатки от деления, к которым приписываются очередные цифры из числа m. Когда цифры из числа m заканчиваются, к остаткам приписываются нули. С этого момента нужно следить за получающимися остатками. Если остаток повторится, деление можно прекратить, поскольку ситуация начнет повторяться: будут получаться те же цифры в частном и те же остатки.

Пример 1.4

Определим последнюю цифру в десятичном представлении числа 2^{833}.

Решение. Найдем закономерность в последовательности последних цифр степеней двойки: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^2 = 16$, $2^5 = 32$ и т.д. Таким образом, последние цифры степеней двойки образуют последовательность 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... с периодом 4: (2, 4, 8, 6).

Остаток от деления 833 на 4 равен 1. Значит, искомая цифра равна 2.

Иногда последовательность задается так называемой рекуррентной формулой, когда следующий член определяется через один или несколько предыдущих. В этих случаях один или несколько первых членов должны быть заданы явно.

Пример 1.5

Определим пятый член последовательности, заданной условиями $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n + 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

Решение. Находим последовательно третий, четвертый и пятый члены: $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 0$.

Сложнее в таких случаях найти формулу общего члена последовательности (см. подпараграф 1.2.4).

Пример 1.6

Найдем пять первых членов последовательности $a_n = \arcsin(\sin n)$.

Решение. Известно, что $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$, если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Имеем:

$a_1 = \arcsin(\sin 1) = 1$, поскольку $1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$a_2 = \arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2$, поскольку $\pi - 2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$a_3 = \arcsin(\sin 3) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3$, поскольку $\pi - 3 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$a_4 = \arcsin(\sin 4) = \arcsin(\sin(\pi - 4)) = \pi - 4$, поскольку $\pi - 4 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$a_5 = \arcsin(\sin 5) = \arcsin(\sin(5 - 2\pi)) = 5 - 2\pi$, поскольку $5 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 1.7

Задана последовательность $a_n = 3n - 40$. Найдем наименьшее значение суммы $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Решение. Очевидно, что последовательность $a_n = 3n - 40$ является арифметической прогрессией, поскольку разность $a_{n+1} - a_n = [3(n+1) - 40] - (3n - 40) = 3$ не зависит от n.

Поскольку $a_n < 0$ при $3n - 40 < 0$, или при $n \leq 13$, и $a_n > 0$ при $3n - 40 > 0$, или при $n \geq 14$, то сумма S_n с увеличением n сначала убывает (до значения S_{13}), а затем возрастает. Наименьшее значение суммы равно S_{13}. Применяя формулу суммы членов арифметической прогрессии, получим

$$S_{13}=\frac{a_1+a_{13}}{2}\cdot 13=\frac{(-37)+(-1)}{2}\cdot 13=-247.$$

Пример 1.8

Пусть известно, что при любом натуральном n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n = n^3 - 3n$. Найдем общий член этой последовательности.

Решение. Для любой последовательности справедлива формула $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n > 1$, где $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ (докажите). Применим эту формулу:

$$a_n = (n^3 - 3n) - [(n-1)^3 - 3(n-1)] = n^3 - (n-1)^3 - 3 = 3n^2 - 3n - 2.$$

Замечание 1.2. Обычно нумерацию членов последовательности ведут, начиная с единицы. Это естественно: первый член получает номер 1, второй — номер 2 и т.д. Соответственно и индекс в записи общего члена указывает на номер (место) этого члена последовательности. Но употребляется и иная нумерация. Иногда удобнее начинать нумерацию с другого целого числа (положительного, нулевого или даже отрицательного). В этом случае место в последовательности не совпадает с индексом члена, например: $a_n = \dfrac{1}{n-1}$, n = 2, 3 ... . Более того, иногда употребляется разреженная индексация, например a_{2n+1}, n = 0, 1, 2, ..., которая определяет члены последовательности с номерами 1, 3, 5, ...

Замечание 1.3. Здесь мы обозначали члены последовательности символом a_n. Однако их можно было обозначать и другими буквами, например b_n или x_i и т.п. В математической литературе используются различные обозначения. Чтобы привыкнуть к этому факту и видеть за разнообразием обозначений единый смысл, в дальнейшем мы тоже будем разнообразить обозначения членов последовательностей.

1.2.2. Графическое изображение последовательностей

Последовательности удобно изображать графически. Существует два способа отображения последовательностей: на числовой прямой и на координатной плоскости.

На рис. 1.5 и 1.6 приведены примеры изображения последовательности $a_n = \dfrac{1}{n}$ соответственно на числовой прямой и на координатной плоскости. На числовой прямой (см. рис. 1.5) значения соответствующих членов последовательности изображаются точками и помечаются символами a_n, чтобы можно было установить их номера. На плоскости в декартовой системе координат изображается график функции $f(n)$, где на горизонтальной оси откладывается значение аргумента, а на вертикальной — значение функции (члена последовательности). Заметим, что функция в этом случае задается только для натуральных значений аргумента (см. рис. 1.6).

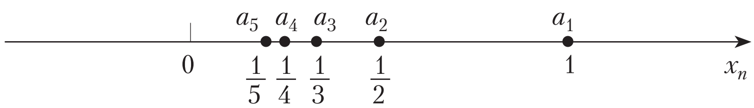

Рис. 1.5. **Изображение последовательности на числовой прямой**

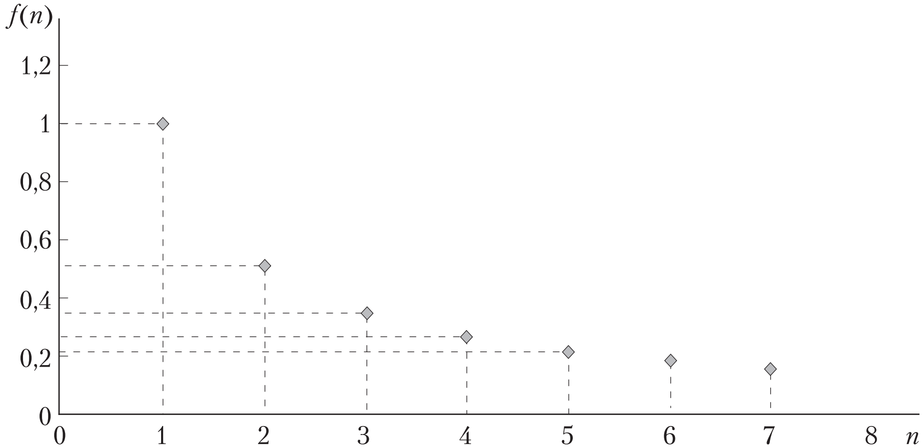

Рис. 1.6. **Изображение последовательности на координатной плоскости**

Понятно, что все члены последовательности мы изобразить не можем, поскольку их бесконечное множество. Однако тенденцию их расположения при неограниченном увеличении n обычно проследить удается.

Графическое изображение последовательности может облегчить процедуру подбора формулы для последовательности чисел по нескольким первым членам. Для этого следует изобразить на плоскости соответствующие точки и «увидеть» класс функций, которыми может описываться искомая последовательность. Затем задать функцию с неопределенными коэффициентами и по заданным первым членам установить эти коэффициенты. Так, для примера 1.2, рассмотренного выше, изобразим наши точки на графике (рис. 1.7).

Похоже, что точки графика ложатся на параболу. Остается только подобрать коэффициенты квадратичной функции.

Пусть последовательность задается формулой $f(n) = an^2 + bn + c$, где a, b, c — неопределенные коэффициенты. Подставив в формулу первые три члена последовательности, получим систему трех уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ 4a+2b+c=2{,}5, \\ 9a+3b+c=5. \end{cases}$$

Решив систему ($a=c=0{,}5$; $b=0$), определяем формулу $f(n)=\dfrac{n^2+1}{2}$, которая задает по крайней мере первые три члена последовательности. Остается проверить, что она подходит и для остальных ее членов.

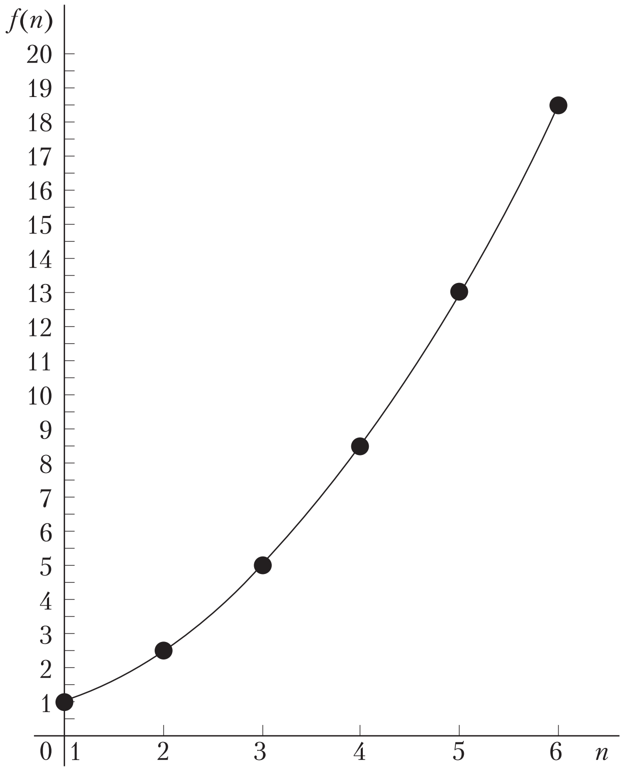

Рис. 1.7. **Изображение точек последовательности на графике**

1.2.3. Свойства последовательностей: монотонность, ограниченность

Здесь нас будут интересовать такие свойства последовательностей, как монотонность и ограниченность. Для последовательностей как функций натурального аргумента эти понятия фактически являются частным случаем соответствующих понятий для функций действительной переменной, если область определения последних сузить до множества натуральных чисел. Здесь приведем определения этих понятий в обозначениях, принятых для последовательностей.

Все последовательности по признаку монотонности делятся на монотонные и немонотонные. Монотонные последовательности делятся на неубывающие и невозрастающие (рис. 1.8).

Определение 1.2. Последовательность с общим членом a_n называется *неубывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е. $a_{n+1} \geq a_n$, $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Определение 1.3. Последовательность с общим членом a_n называется *невозрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, не больше предыдущего, т.е. $a_{n+1} \leq a_n$, $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Последовательность 1; 1; 2; 2; 3; 3; ... — неубывающая, так же как и последовательность 1; 2; 3; ... . Последовательность $1;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ldots$ — невозрастающая, так же как и $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$. Последовательность-константа 5; 5; 5; 5; ... ($a_n = 5$) является одновременно и неубывающей, и невозрастающей.

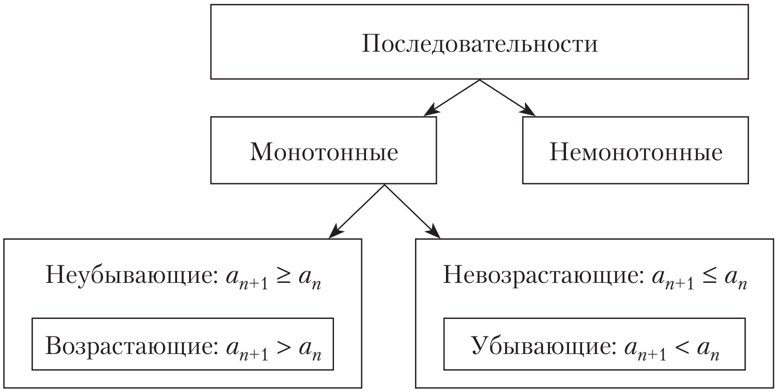

Рис. 1.8. **Классификация последовательностей по признаку монотонности**

Из множества всех неубывающих последовательностей выделяется подмножество возрастающих последовательностей, а из множества всех невозрастающих последовательностей выделяется подмножество убывающих последовательностей.

Определение 1.4. Последовательность с общим членом a_n называется (*монотонно*) *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. $a_{n+1} > a_n$, $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Определение 1.5. Последовательность с общим членом a_n называется (*монотонно*) *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. $a_{n+1} < a_n$, $n = 1; 2; 3, \ldots$.

Пример 1.9

Исследуем на монотонность последовательность с общим членом $a_n = \frac{1-n^2}{n}$.

Решение. Вычислим разность соседних членов последовательности в общем виде:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)^2}{n+1} - \frac{1-n^2}{n} = \frac{-n^2-n-1}{(n+1)n} < 0,\ n = 1; 2; 3; \ldots .$$

Таким образом, $a_{n+1} < a_n$, $n = 1; 2; 3, \ldots$, откуда следует, что последовательность убывающая.

Пример 1.10

Исследуем последовательность $a_n = \sin\frac{\pi n}{6}$ на монотонность.

Решение. Интуиция подсказывает, что последовательность не монотонна, поскольку синус будет многократно изменять свой знак. Для доказательства достаточно привести пример таких трех членов с возрастающими номерами, что средний из них больше (или меньше) крайних. Возьмем, например, члены с номерами $n = 1$,

$n = 3$, $n = 6$. Подстановкой этих номеров в выражение для общего члена получим $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_6 = 0$, т.е. $a_1 < a_3$, но $a_3 > a_6$. Значит, последовательность не является ни неубывающей, ни невозрастающей, следовательно, она не монотонна.

По признаку ограниченности все последовательности могут быть разбиты на два класса: ограниченные и неограниченные.

Определение 1.6. Последовательность с общим членом a_n называется *ограниченной*, если существует такое число C, что $|a_n| \le C$ для любого n, $n = 1; 2; 3; \ldots$, т.е. все ее члены заключены в некотором отрезке $[-C; C]$. В противном случае (т.е. если для любого C найдется такое натуральное число n, что будет $|a_n| > C$) последовательность называется *неограниченной*.

Так, последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ является ограниченной, поскольку $|a_n| \le 1$, $n = 1; 2; 3; \ldots$. Здесь взято $C = 1$, но можно было взять и любое большее число. В то же время последовательность $a_n = -2n$ является неограниченной, поскольку какое бы число C мы ни взяли, всегда можно найти такое n, что будет $|-2n| > C$. Действительно, достаточно взять $n > \frac{|C|}{2}$, например $\left[\frac{|C|}{2}\right] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наименьшее целое число, не превосходящее x.

Различают также последовательности, ограниченные или неограниченные сверху или снизу.

Определение 1.7. Последовательность называется *ограниченной сверху*, если существует такое число C, что для любого n выполняется неравенство $a_n \le C$, и *неограниченной сверху* — в противном случае.

Определение 1.8. Последовательность называется *ограниченной снизу*, если существует такое число C, что для любого n выполняется неравенство $a_n \ge C$, и *неограниченной снизу* — в противном случае.

Очевидно, что последовательность, ограниченная и сверху, и снизу, будет ограниченной. Если же последовательность неограничена сверху или снизу, она будет неограниченной.

Замечание 1.4. В определении 1.6 условие существования такого C, что $|a_n| \le C$, можно заменить на условие существования двух чисел C_1 и C_2, таких что $C_1 \le a_n \le C_2$, т.е. чтобы все члены последовательности содержались на отрезке $[C_1; C_2]$.

Пример 1.11

Докажем, что последовательность с общим членом $a_n = n^2 - 2n + 3$ не ограничена сверху, но ограничена снизу.

Решение. Докажем неограниченность сверху. Действительно, пусть задано число C. Покажем, что можно найти такое n, что будет выполняться неравенство

$$a_n = n^2 - 2n + 3 > C. \tag{1.1}$$

Преобразуем левую часть неравенства: $a_n = n^2 - 2n + 3 = (n-1)^2 + 2$. Таким образом, для того чтобы выполнялось неравенство (1.1), достаточно взять n такое, чтобы $(n-1)^2+2>C$, или $(n-1)^2>C-2$. Если $C<2$, это неравенство выполняется для любого n. Если же $C\geq 2$, достаточно взять n такое, чтобы $(n-1)>\sqrt{C-2}$, или $n>\sqrt{C-2}+1$, например $n=[\sqrt{C-2}+1]+1$.

Докажем ограниченность снизу. Возьмем $C=2$. Тогда

$$a_n=n^2-2n+3=(n-1)^2+2\geq 0+2=C,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1.12

Исследуем на ограниченность и монотонность последовательность $a_n=\dfrac{3n-1}{2n+1}$.

Решение. Имеем $a_n=\dfrac{3n-1}{2n+1}=1{,}5-\dfrac{2{,}5}{2n+1}$. Поскольку с увеличением n дробь $\dfrac{2{,}5}{2n+1}$ убывает, оставаясь положительной, то a_n возрастает, оставаясь меньше 1,5 при всех натуральных n. Наименьшее значение a_n достигает при $n=1$ и равно $a_1=\dfrac{2}{3}$. Последовательность ограниченная и монотонно возрастающая.

Можно и иначе исследовать последовательность на монотонность, как это делалось в примере 1.9. Имеем

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)-1}{2(n+1)+1}-\frac{3n-1}{2n+1}=\frac{3n+2}{2n+3}-\frac{3n-1}{2n+1}=$$
$$\frac{(6n^2+7n+2)-(6n^2+7n-3)}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{5}{(2n+3)(2n+1)}>0.$$

Отсюда следует, что последовательность монотонно возрастающая.

Замечание 1.5. Возможен и иной способ решения данного примера. А именно, рассматривается функция $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$, $x>0$. Далее исследуются ограниченность этой функции и ее монотонность (с помощью производной — см. гл. 4). А поскольку $a_n=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$, то некоторые свойства функции переносятся и на последовательность. В частности, если функция монотонная, то и последовательность монотонная. Если, однако, функция не является монотонной, то это еще не значит, что последовательность также не является монотонной (немонотонный характер функции между двумя соседними целыми числами может не проявиться при переходе к натуральному аргументу). Кроме того, мы здесь не используем этот метод, потому что рассмотрение свойств функции и связь этих свойств с производной будут рассматриваться позднее, в последующих главах. И поэтому мы не будем опережать события и опираться на эти методы в данной главе.

Пример 1.13

Исследуем на монотонность и ограниченность последовательность с общим членом $a_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Решение. Обратим внимание, что $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. Тогда

$$a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Покажем, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает, т.е. $a_{n+1}>a_n$, $n\in\mathbb{N}$, или

$$\frac{n+1}{n+2}>\frac{n}{n+1}.$$

Но последнее неравенство при любом натуральном n равносильно неравенству $(n+1)^2>n(n+2)$, справедливость которого непосредственно проверяется раскрытием скобок.

Ограниченность последовательности вытекает из двойного неравенства $0<\dfrac{n}{n+1}<1$, справедливого при любом натуральном n.

1.2.4. Метод математической индукции

С понятием последовательности связан один из мощнейших методов получения новых математических знаний, так называемый *метод математической индукции*[1]. В противоположность *дедуктивному методу*, в соответствии с которым из общих утверждений выводятся частные, индуктивный метод позволяет на основе частных наблюдений получать общие утверждения.

Индуктивный метод применяется не только в математике. Однако в других науках его выводы не носят безусловного характера, поскольку не имеют строгой доказательной базы. Обобщая множество единичных наблюдений, вообще говоря, можно прийти и к ложным выводам. Поэтому полученные выводы необходимо подкрепить анализом причинно-следственных связей, подтверждающим такие заключения.

Иное дело в математике. Метод математической индукции строго обоснован. Он опирается на математический аппарат, и выводы, полученные с его использованием, не нуждаются в дополнительной проверке. Однако этот метод применим только для математических объектов.

В основе метода математической индукции лежит следующий принцип. Пусть задано некоторое утверждение, зависящее от натурального числа n. Если:

1) это утверждение справедливо при $n = 1$;

2) из справедливости утверждения при $n = k$ следует справедливость при $n = k + 1$,

то это утверждение справедливо при любом натуральном n.

Справедливость метода математической индукции достаточно очевидна. Действительно, пусть утверждение $P(n)$ справедливо при $n = 1$, а также известно, что из его справедливости для $n = k$ следует его справедливость для следующего натурального значения $n = k + 1$. И пусть требуется установить его справедливость для $n = N > 1$.

Из первого условия следует справедливость утверждения $P(1)$. Но тогда из второго условия следует справедливость утверждения $P(2)$. Но тогда,

[1] Индукция (от лат. *inductio* — наведение) — переход от частного к общему.

опять же из второго условия, следует справедливость утверждения $P(3)$, затем $P(4)$ и т.д. Поскольку таких переходов от 1 до N конечное число, то в конце концов получим, что справедливо и $P(N)$.

Пример 1.14

Докажем методом математической индукции формулу

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. При $n = 1$ формула справедлива: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

Предположим, что формула справедлива при $n = k$, т.е. предположим, что справедливо равенство $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Пользуясь этим предположением, докажем, что формула справедлива и при $n = k + 1$, т.е. докажем, что $1+2+3+...+k+(k+1)=$ $=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Имеем

$$\underbrace{1+2+3+...+k}_{\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Пример 1.15

Выведем формулу

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2n-1)^2-(2n)^2=-2n^2-n.$$

Решение. При $n = 1$ формула справедлива: $1^2 - 2^2 = -2 - 1$.

Предположим, что формула справедлива при $n = k$, т.е. предположим, что справедливо равенство $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k-1)^2-(2k)^2=-2k^2-k$. Пользуясь этим предположением, докажем, что формула справедлива и при $n = k + 1$, т.е. докажем, что

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k+1)^2-[2(k+1)]^2=-2(k+1)^2-(k+1),$$

или

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k+1)^2-[2(k+1)]^2=-2k^2-5k-3.$$

Разбивая сумму на две части: первая часть — для $n = k$, вторая — дополнительный член для $n = k + 1$, и учитывая предположение индукции, получим

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k+1)^2-[2(k+1)]^2=$$
$$=[1^2-2^2+3^2-4^2+5^2+...+(2k-1)^2-(2k)^2]+\{(2k+1)^2-[2(k+1)]^2\}=$$
$$=(-2k^2-k)+\{(2k+1)^2-[2(k+1)]^2\}=-2k^2-5k-3.$$

Пример 1.16

Найдем формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1}=2a_n+1, a_1=0$.

Решение. Выпишем несколько первых членов:

$a_1=0,$

$a_2=2\cdot0+1=1,$

$a_3=2\cdot1+1=3,$