Международная
олимпиада
молодёжи

МАТЕМАТИКА

2015

ВИТА Пресс
МОСКВА•2015

УДК 373.167.1:334.722 (075.3)
ББК 65я729
М

Автор-составитель *В. Л. Шагин*, доцент НИУ ВШЭ

М Математика: Международная олимпиада молодёжи, 2015. — М.: ВИТА-ПРЕСС, 2015. — 72 с.: ил.
ISBN 978-5-7755-3120-1

Сборник содержит задачи, предлагавшиеся на МОМ в 2014/15 учебном году. Все задачи даны с подробными решениями.

УДК 373.167.1:334.722 (075.3)
ББК 65я729

ISBN 978-5-7755-3120-1

Предисловие

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) уделяет большое внимание работе с талантливыми школьниками, выступает инициатором целого ряда интеллектуальных соревнований для молодёжи. Некоторые из них, например олимпиады НИУ ВШЭ, стали университетской традицией не только для молодёжи России, но и для молодёжи, проживающей за её пределами. Первым таким проектом, перешедшим границы России, стала Межрегиональная олимпиада для школьников «Высшая проба», которая с 2010 г. по настоящее время проводится в России, большинстве стран СНГ, Латвии и Эстонии.

В 2013 г. НИУ ВШЭ инициировал новый международный конкурс – Международную олимпиаду молодёжи (МОМ), которая вначале проводилась по десяти предметам социально-гуманитарного профиля: филологии, философии, культурологии, социологии, праву, политологии, психологии, востоковедению, истории и дизайну. В 2014 г. к указанным предметам добавился новый предмет – прикладная математика.

Обе олимпиады – международные, проводятся на русском языке, участие в олимпиаде открытое и бесплатное. В отличие от олимпиады «Высшая проба», в МОМ могут участвовать не только выпускники школ, гимназий или лицеев, но молодёжь в возрасте до 28 лет, проживающая за пределами России. В 2014 г. участниками МОМ стали около 3 тысяч человек из 16 стран: СНГ, Центральной и Восточной Европы, Китая.

МОМ, в отличие от олимпиады «Высшая проба» в различных странах, проводится в один этап.

Что даёт участие в Международной олимпиаде молодёжи тем, кто уже имеет аттестат или диплом о полном среднем образовании?

Победителям и призёрам МОМ:

– по социально-гуманитарным предметам предоставляется право на бесплатное обучение на бакалаврских образовательных программах НИУ ВШЭ, соответствующих профилю олимпиады;

– по прикладной математике предоставляется право на бесплатное обучение на бакалаврских образовательных программах НИУ ВШЭ (по выбору) на факультетах экономики, мировой экономики, менеджмента и бизнес-информатики;

– выплачивается стипендия в течение всего периода обучения в НИУ ВШЭ;

– предоставляется комфортабельное общежитие на тех же условиях, что и российским студентам, обучающимся за счёт государственных средств.

Участникам МОМ, не ставшим победителями или призёрами:

– предоставляется право преимущественного зачисления на обучение на бакалаврские образовательные программы НИУ ВШЭ в сравнении с теми, кто не участвовал в МОМ, при условии прохождения собеседования на специально созданной Комиссии НИУ ВШЭ. Собеседование проводится либо в стране проживания участника МОМ (очно), либо в режиме on-line (заочно).

Почему мы включили прикладную математику в перечень предметов Международной олимпиады молодёжи?

Прежде всего потому, что мы ежегодно сталкиваемся с проблемой недостаточной подготовленности многих зарубежных учащихся к обучению в нашем университете именно по математическим дисциплинам. Иногда это связано с различиями программ обучения по математике в средней школе, иногда со слабым уровнем подготовки самих учащихся. В результате в сложное положение попадали студенты из дальних стран, не готовые изучать современные методы математического анализа на факультетах математики, экономики, мировой экономики, бизнес-информатики, менеджмента.

Именно поэтому было принято решение о включении олимпиады по прикладной математике в перечень МОМ, а победителям и призёрам по этому предмету предоставлено право выбора обучения на одном из четырёх факультетов – экономики, мировой экономики, менеджмента, бизнес-информатики. При этом по сложности предлагаемые задачи значительно уступают задачам традиционных чисто математических олимпиад. Это продиктовано целями нашей МОМ – отбором учащихся, способных учиться в НИУ ВШЭ на заявленных факультетах.

В предлагаемой вам книге представлены не только варианты задач по прикладной математике МОМ–2014, но и решения к большей части вариантов, а также ответы ко всем задачам.

Согласитесь, заманчиво: пришли, удачно прорешали предлагаемые на олимпиаде задачи и получили возможность бесплатной учёбы в НИУ ВШЭ. Но даже если вы не собираетесь учиться в нашем вузе, диплом победителя (или призёра) Международной олимпиады молодёжи добавит вам очков при подаче документов в другие вузы.

В подборке задач комиссией использовались материалы различных олимпиад прошлых лет, а также оригинальные авторские задачи.

Из интернет-ресурсов следует обратить внимание на обучающую программу «ЯНУС». Многие задачи олимпиады взяты из базы данных этой программы: http://yanus.net.ua/

Дерзайте!!! Удачи!!!

Директор НИУ ВШЭ по сотрудничеству со странами СНГ
и странами Центральной и Восточной Европы
д.э.н. *Т.Я. Четвернина*

Демонстрационные варианты
8 класс

1. Два велосипедиста движутся по замкнутой траектории. При движении в противоположных направлениях они встречаются через каждые 3 мин, при движении в одном направлении – через каждые 9 мин. Во сколько раз скорость быстрого велосипедиста превышает скорость медленного?

2. Друзья путешествуют на лодке из пункта А в пункт В, расположенный выше по течению реки на 24 км. За день они проплывают 10 км, однако за ночь их лодку сносит вниз по реке на 6 км. За сколько дней они доберутся до пункта В?

3. На острове 70% женатых мужчин и 3/5 замужних женщин. Какая доля населения острова состоит в браке?

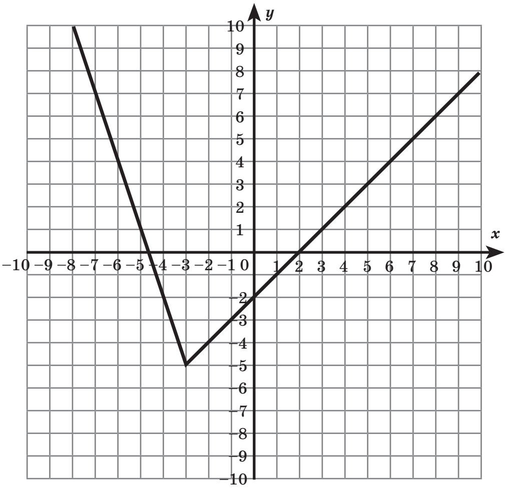
4. Пастух продал всё стадо овец трём покупателям. Первому покупателю он продал половину всех бывших у него овец и ещё пол-овцы; второму – половину оставшихся овец и ещё пол-овцы; наконец, третьему – половину оставшихся овец и ещё пол-овцы. Сколько овец было в стаде, если известно, что ни одну овцу не пришлось резать пополам?

5. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие — 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов?

6. Вычислите значение суммы

$$S=\frac{1}{10\cdot12}+\frac{1}{12\cdot14}+\frac{1}{14\cdot16}+\ldots+\frac{1}{98\cdot100}.$$

7. Для функции $y = a|x-b| + cx + d$, график которой изображён на рисунке, определите значения a, b, c и d.



Ответы: 1) 2; 2) 5; 3) 42/65; 4) 7; 5) 0,3 кг; 6) 9/200; 7) {2; –3; –1; –8}.

9 класс

1. Решите в целых числах уравнение: $x^2 + 6xy + 5y^2 = 5$.

2. Найдите линейную функцию $f(x) = ax + b$, если при всех значениях x выполняется равенство $f(2 - f(x)) = 6 - 4x$.

3. На острове Мамба-Тамба в результате инфляционных процессов цены выросли на 300%. Оппозиция потребовала от правительства возвращения цен к прежнему уровню. На сколько процентов должны быть уменьшены цены?

4. Сколькими способами можно разменять купюру 100 тугриков купюрами по 7 и 8 тугриков?

5. При каком значении m сумма квадратов действительных корней уравнения $x^2 + mx + 1 - m = 0$ принимает наименьшее значение?

6. Красная Шапочка несла бабушке 14 пирожков: с мясом, грибами и капустой. Пирожков с капустой наибольшее количество, причём их вдвое больше, чем пирожков с мясом. А пирожков с мясом было меньше, чем пирожков с грибами. Сколько было пирожков с грибами?

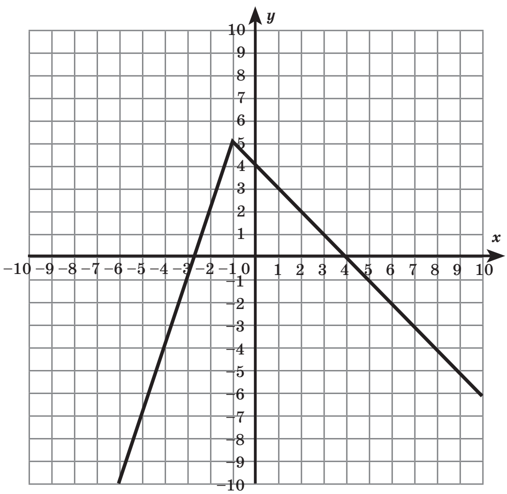
7. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Ответы: 1) $\{(0;1), (0;-1), (6;-1), (-6;1)\}$; 2) $a=2$; $b=-2$ или $a=-2$; $b=10/3$; 3) 75; 4) 2; 5) $-2+\sqrt{8}$; 6) 5; 7) 686.

10 класс

1. Найдите наименьшее значение функции
$y = (x+1)(x+2)(x+8)(x+9)$.

2. График функции $y = k|x-t| + ax + b$ изображён на рисунке. Найдите значения всех параметров k, t, a и b.



3. Биссектриса угла N треугольника MNP делит сторону MP на отрезки, длины которых равны 28 и 12. Найдите периметр треугольника MNP, если $MN - NP = 18$.

4. В прямоугольнике проведены два отрезка, один из которых параллелен основанию, а другой – боковой стороне. Сумма площадей всех получившихся прямоугольников равна 20. Найдите площадь самого исходного прямоугольника.

5. Известно, что для любого $x > 0$ выполнено равенство $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1}$. Найдите $f(1-x)$.

6. Прямая проходит через центр квадрата со стороной 1. Найдите сумму квадратов расстояний от всех вершин квадрата до этой прямой.

7. Представьте многочлен $x^7 + x^5 + 1$ в виде произведения двух многочленов.

Ответы: 1) $-12{,}25$; 2) $\{-2;-1;\ 1;\ 6\}$; 3) 85; 4) 5; 5) $(x-1)/(x-2)$; 6) 1; 7) $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$.

11 класс

1. При повороте вокруг точки $C(-2;-2)$ точка $A\,(6;\,8)$ отобразилась в точку $B(8;\,6)$. Найдите косинус угла поворота.

2. Дан угол $\angle ASB = 30^\circ$ с вершиной S. Точка M расположена внутри угла на расстоянии a и b от его сторон. В данный угол впишите треугольник MNK наименьшего периметра, так чтобы вершины N и K лежали на различных сторонах угла. Чему равен периметр такого треугольника?

3. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120°, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5°. Определите число сторон этого многоугольника.

4. Цену яблок подняли на 20% . Однако для того чтобы записать новую цену, продавцу было достаточно поменять местами цифры числа, записанного на ценнике. Какова цена яблок до их подорожания, если она была целым числом меньше 100?

5. Точки M, N и K лежат на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC и делят их в отношении $AM{:}MB = 1{:}2$, $BN{:}NC = 3{:}4$, $CK{:}KA = 1{:}2$. Найдите отношение площадей треугольников MNK и ABC.

6. Найдите функцию, обратную функции

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2},\ x \in [-4;\,-3) \cup (0;1].$$

7. Решите уравнение $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$.

Ответы: 1) $40/41$; 2) $2\sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab}$; 3) 9; 4) 45; 5) $19/63$; 6) $y = \dfrac{2x+1}{2-x},\ x \in \left(-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{9}{2};\,7\right)$; 7) $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Варианты 2014 года
8 класс

Вариант1

1. Саша, Лёша и Гоша сложились и купили палатку. Саша заплатил 40% от её цены, Лёша – 15% от оставшейся суммы, а Гоша – последние 3060 р. Сколько стоила палатка?

2. Равнобедренная трапеция $ABCD$ разбивается диагональю AC на два равнобедренных треугольника. Определите острый угол трапеции.

3. При каком значении x наименьшее из чисел $2x + 1$, $6 - x$, $x + 2$ принимает наибольшее значение?

4. Во время праздника детям, сидевшим за круглым столом, принесли огромный кулёк с конфетами. Дети брали конфеты по кругу, первый взял одну конфету, второй – две конфеты и т. д. Каждый следующий брал на одну конфету больше, чем предыдущий. На втором круге в сумме было взято на 100 конфет больше, чем на первом. Сколько детей сидело за столом?

5. До порубки леса лиственницы составляли 1% от всего леса. Поскольку лиственниц было существенно меньше других деревьев, их решили вообще не рубить. После порубки леса лиственницы составили 2% от всего леса. Какой процент деревьев в лесу вырубили?

6. Когда Илья Муромец впервые увидел Кощея Бессмертного, Кощею было столько лет, сколько Илье и Соловью-разбойнику, вместе взятым. Сколько лет было Илье Муромцу, когда Кощею было столько, сколько Соловью-разбойнику; когда Илья Муромец впервые увидел Кощея?

7. Два странника одновременно отправились с рассветом в путь. Они шли по одной дороге, только один шёл из Дальних Вязём в Ближние, а другой – из Ближних в Дальние. Каждый из них шёл с постоянной скоростью. В полдень они встретились. Первый пришёл в Ближние Вязёмы в четыре вечера, а второй в Дальние – в девять вечера. В котором часу был рассвет?

Вариант 2

1. Позавчера Маше было 14 лет, а в следующем году ей исполнится 17. Как это может быть? (Ответ укажите в текстовом формате.)

2. Вес Карлсона составляет 20% от веса бока Фрекен Бок, который, в свою очередь, составляет 20% от веса остальной её части. На сколько процентов Фрекен Бок тяжелее Карлсона?

3. В трёхзначном числе последняя цифра 3. Если её переставить в начало, то получится трёхзначное число, которое на 1 превышает утроенное первоначальное число. Найдите начальное число.

4. Турист отправляется в поход из пункта A в пункт B и обратно и проходит весь путь за 3 ч 41 мин. Дорога из пункта A в пункт B идёт сначала в гору, потом по равнине и затем под гору. На каком протяжении дорога проходит по равнине, если скорость туриста составляет при подъёме в гору 4 км/ч, по ровному месту – 5 км/ч, а при спуске с горы – 6 км/ч, а расстояние между пунктами A и B равно 9 км?

5. Длину прямоугольника уменьшили на 10%, а ширину уменьшили на 20%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12%. На сколько процентов уменьшится периметр прямоугольника, если его длину уменьшить на 20%, а ширину уменьшить на 10%?

6. 12 человек несут 12 хлебов. Каждый мужчина – по 2 хлеба, каждая женщина – по 0,5 хлеба, каждый ребёнок – по 0,25 хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

7. Найдите линейную функцию $f(x) = ax + b$, если при всех значениях x выполняется равенство $f(2 - f(x)) = 6 - 4x$.

Вариант 3

1. Моторная лодка проходит по реке из пункта A в пункт B за 6 ч, а обратно – за 8 ч. За какое время бревно доплывёт из пункта A в пункт B?

2. Малыш может съесть банку варенья за 6 мин, а Карлсон – в 2 раза быстрее. За какое время они съедят эту банку варенья вместе?

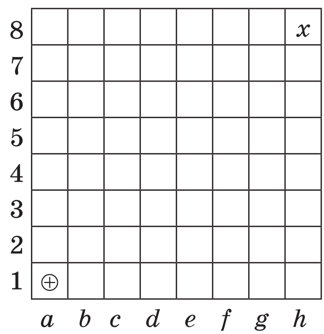
3. В ноябре на круговом маршруте работали 3 автобуса, причём интервал их движения составлял 10 мин. Как изменится интервал движения автобусов, если в декабре на маршрут выйдет дополнительно 2 таких автобуса?

4. Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 7$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?

5. Во фразе «Задачи математической олимпиады» передвинем в каждом слове последнюю букву на первое место: «иЗадач йматематическо ыолимпиад». Сделаем то же самое с полученным текстом и т. д. Через какое число таких операций мы впервые вернёмся к исходному тексту?

6. Однажды 24 жителя острова правдолюбцев и лжецов сели за круглый стол, и каждый из них заявил: «Один из моих соседей – правдолюбец, а другой – лжец». Сколько правдолюбцев и сколько лжецов было среди этих 24 человек? Укажите все ответы.

7. На поле $a1$ шахматной доски стоит фигура. Два игрока передвигают её по очереди либо вправо, либо вверх на любое число клеток. Выиграет тот, кто поставит фигуру на поле $h8$ (обозначено буквой x). Кто победит при правильной игре – первый или второй игрок и как он должен играть?



Вариант 4

1. Моторная лодка проходит по реке из пункта A в пункт B за 8 ч, а обратно – за 10 ч. За какое время бревно доплывёт из пункта A в пункт B?

2. Малыш может съесть банку варенья за 10 мин, а Карлсон – в 3 раза быстрее. За какое время они съедят эту банку варенья вместе?

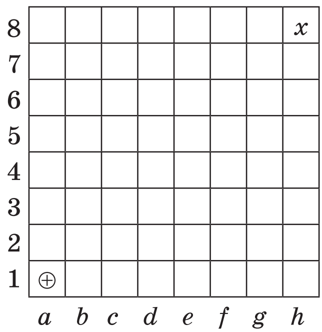
3. В ноябре на круговом маршруте работали 4 автобуса, причём интервал их движения составлял 14 мин. Как изменится интервал движения автобусов, если в декабре на маршрут выйдет дополнительно 3 таких автобуса?

4. Известно, что $a + b - c = 4$ и $ab - bc - ac = 1$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?

5. Во фразе «Задачи школьной олимпиады» передвинем в каждом слове последнюю букву на первое место: «иЗадач йшкольно ыолимпиад». Сделаем то же самое с полученным текстом и т. д. Через какое число таких операций мы впервые вернемся к исходному тексту?

6. Однажды 33 жителя острова правдолюбцев и лжецов сели за круглый стол, и каждый из них заявил: «Один из моих соседей – правдолюбец, а другой – лжец». Сколько правдолюбцев и сколько лжецов было среди этих 33 человек? Укажите все ответы.

7. На поле *a*1 шахматной доски стоит фигура. Два игрока передвигают её по очереди. Каждый из них может передвигать фигуру либо вправо на 1 клетку, либо вверх на любое число клеток. Выиграет тот, кто поставит фигуру на поле *h*8 (обозначено буквой x). Кто победит при правильной игре – первый или второй игрок и как он должен играть?



Вариант 5

1. Моторная лодка проходит по реке из пункта A в пункт B за 6 ч, а обратно – за 10 ч. За какое время бревно доплывёт из пункта A в пункт B?

2. Малыш может съесть банку варенья за 12 мин, а Карлсон – в 2 раза быстрее. За какое время они съедят эту банку варенья вместе?

3. В ноябре на круговом маршруте работали 5 автобусов, причём интервал их движения составлял 10 мин. Как изменится интервал движения автобусов, если в декабре на маршрут выйдет дополнительно 3 таких автобуса?

4. Известно, что $a - b - c = 2$ и $ab - bc + ac = 7$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?

5. Во фразе «Задачи городской олимпиады» передвинем в каждом слове последнюю букву на первое место: «иЗадач йгородско ыолимпиад». Сделаем то же самое с полученным текстом и т. д. Через какое число таких операций мы впервые вернемся к исходному тексту?

6. Однажды 15 жителей острова правдолюбцев и лжецов сели за круглый стол, и каждый из них заявил: «Один из моих соседей – правдолюбец, а другой – лжец». Сколько правдолюбцев и сколько лжецов было среди этих 15 человек? Укажите все ответы.

7. На поле a1 шахматной доски стоит фигура. Два игрока передвигают её по очереди. Каждый из них может передвигать фигуру либо вправо на 1 или 2 клетки, либо вверх на любое число клеток. Выиграет тот, кто поставит фигуру на поле h8 (обозначено буквой x). Кто победит при правильной игре – первый или второй игрок и как он должен играть?

8								x
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1	$\oplus$							
	a	b	c	d	e	f	g	h

Вариант 6

1. Моторная лодка проходит по реке из пункта A в пункт B за 5 ч, а обратно – за 8 ч. За какое время бревно доплывёт из пункта A в пункт B?

2. Малыш может съесть банку варенья за 10 мин, а Карлсон – в 3 раза быстрее. За какое время они съедят эту банку варенья вместе?

3. В ноябре на круговом маршруте работали 7 автобусов, причём интервал их движения составлял 6 мин. Как изменится

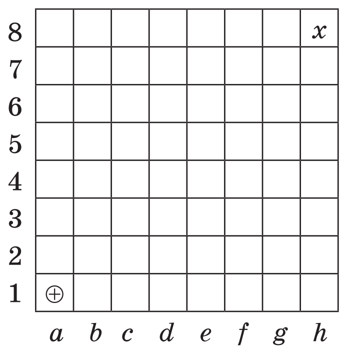
интервал движения автобусов, если в декабре на маршрут выйдет дополнительно 3 таких автобуса?

4. Известно, что $a - b + c = 3$ и $ab + bc - ac = 10$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?

5. Во фразе «Задачи олимпиады по экономике» передвинем в каждом слове последнюю букву на первое место: «иЗадач ыолимпиад оп еэкономик». Сделаем то же самое с полученным текстом и т. д. Через какое число таких операций мы впервые вернемся к исходному тексту?

6. Однажды 39 жителей острова правдолюбцев и лжецов сели за круглый стол, и каждый из них заявил: «Один из моих соседей – правдолюбец, а другой – лжец». Сколько правдолюбцев и сколько лжецов было среди этих 39 человек? Укажите все ответы.

7. На поле $a1$ шахматной доски стоит фигура. Два игрока передвигают её по очереди. Каждый из них может передвигать фигуру либо вправо на 1 или 2 клетки, либо вверх на 1 или 2 клетки. Выиграет тот, кто поставит фигуру на поле $h8$ (обозначено буквой x). Кто победит при правильной игре – первый или второй игрок и как он должен играть?



9 класс

Вариант 1

1. Вычислите число $x = \sqrt{48 - 24\sqrt{3}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$.

2. На сколько процентов увеличится площадь треугольника при увеличении каждой из сторон на 30% ?

3. Число x – натуральное. Из неравенств $2x>70$, $x<100$, $3x>25$, $x\geqslant 10$, $x>5$ два неверных и три верных. Чему равно число x?

4. Изменение температуры на один градус Цельсия соответствует изменению на 9/5 градусов Фаренгейта (шкала, принятая в США), и 0° по Цельсию составляет 32 градуса по шкале Фаренгейта. Есть ли температура, выражающаяся одинаковым числом градусов по обеим шкалам? Если есть, то какая?

5. Если при всех значениях x имеет место равенство $f(3+4x)=1-x$, то чему равно $f(5x-1)$?

6. Пастух продал стадо овец трем покупателям. Первому покупателю он продал половину всех бывших у него овец и ещё пол-овцы; второму – половину оставшихся овец и ещё пол-овцы; наконец, третьему – половину оставшихся овец и ещё пол-овцы. Сколько овец было в стаде, если известно, что ни одну овцу не пришлось резать пополам?

7. Чему равно число $\dfrac{К\cdot А\cdot Р\cdot Л\cdot С\cdot О\cdot Н}{В\cdot А\cdot Р\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\cdot Е}$, если каждая буква — это цифра? Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Получается в ответе вполне конкретное число.

Вариант 2

1. На острове 70% женатых мужчин и 3/5 замужних женщин. Какая доля населения острова состоит в браке?

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+yz=8 \\ yz+zx=9 \\ zx+xy=5 \end{cases}$$

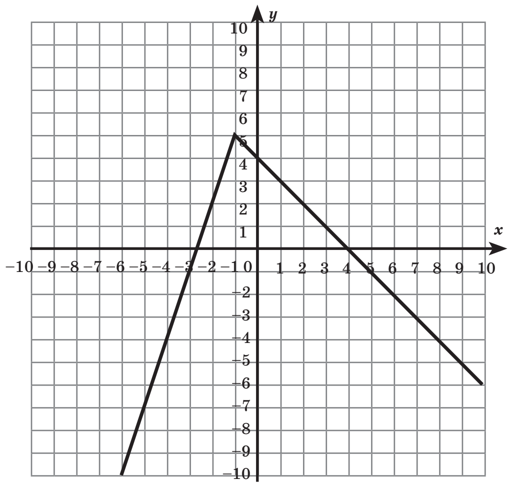
3. Вычислите сумму $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$.

4. Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с, а мимо стрелочника – за 15 с. Найдите длину поезда и его скорость.

5. Расстояние от Москвы до Клина 90 км, от Клина до Солнечногорска 24 км, от Солнечногорска до Зеленограда 30 км, от Зеленограда до Москвы 36 км. Каково расстояние от Солнечногорска до Москвы?

6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ расположены точки N и M соответственно, причём $AN : NB = 2 : 1$, $BM : MC = 2 : 3$. Прямые AM и DN пересекаются в точке O. Найдите отношения $OD{:}ON$ и $OA{:}OM$.

7. График функции $y = k|x - t| + ax + b$ изображён на рисунке. Найдите значения всех параметров k, t, a и b.



Вариант 3

1. Вычислите: $x = \sqrt{184 - 66\sqrt{7}} + \sqrt{79 - 24\sqrt{7}}$.

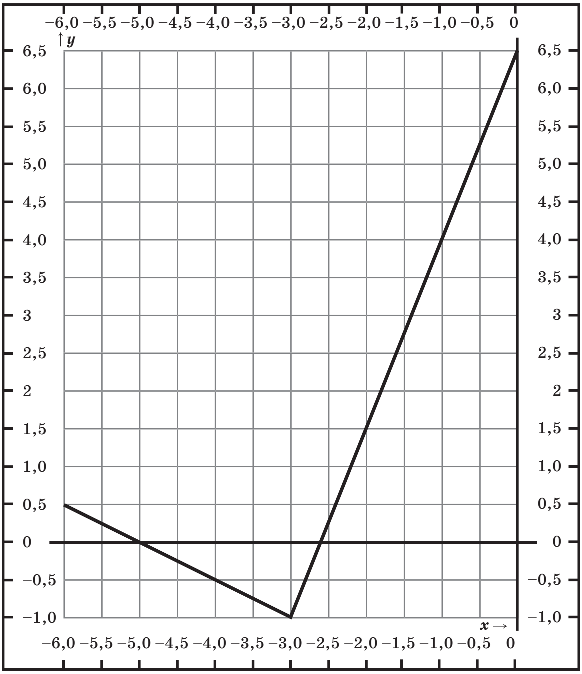
2. Решите уравнение $\sqrt[5]{x + 242} - \sqrt{17 - x} = -1$.

3. На острове 60% женатых мужчин и 2/5 замужних женщин. Какой процент населения острова состоит в браке?

4. Найдите множество значений функции $y = \dfrac{-x^2 + 9x - 24}{x - 4}$.

5. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB и делит её в отношении $AM{:}MB = 2{:}3$. Точка N лежит на стороне AC и делит её в отношении $AN{:}NC = 7{:}6$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $BO{:}ON$.

6. Для функции $y = a|x - b| + cx + d$, график которой изображён на рисунке, определите значения параметров a, b, c и d.



7. Вычислите сумму квадратов всех различных действительных корней уравнения $3x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 8x - 2 = 0$.

Вариант 4

1. Вычислите: $x = \sqrt{56 - 24\sqrt{5}} + \sqrt{24 - 8\sqrt{5}}$.

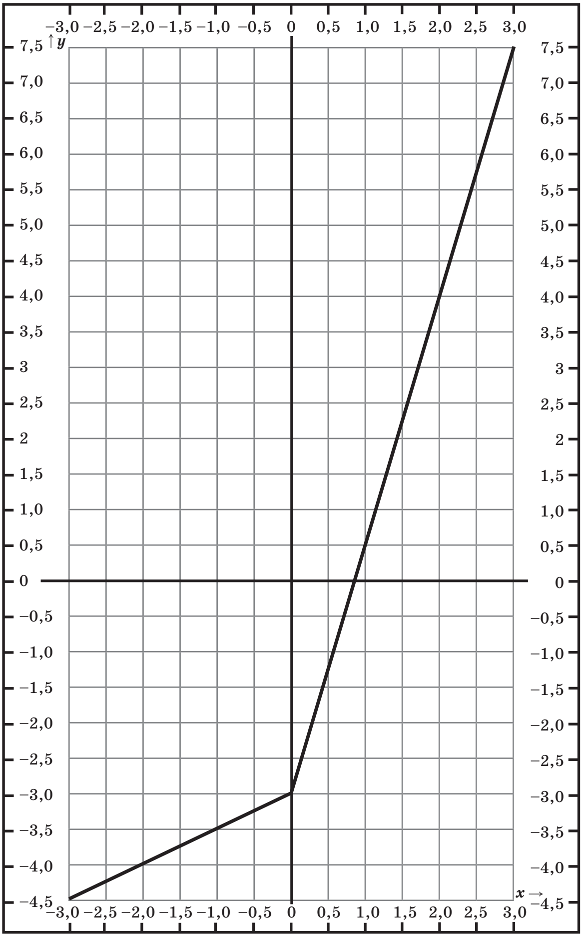
2. Решите уравнение $2\sqrt[7]{x + 124} + \sqrt{8 - x} = 2$.

3. На острове 75% женатых мужчин и $1/4$ замужних женщин. Какой процент населения острова состоит в браке?

4. Найдите множество значений функции $y = \dfrac{4x^2 + 21x + 24}{x + 4}$.

5. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB и делит её в отношении $AM:MB = 2:1$. Точка N лежит на стороне AC и делит её в отношении $AN:NC = 2:3$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $BO:ON$.

6. Для функции $y = a|x - b| + cx + d$, график которой изображён на рисунке, определите значения параметров a, b, c и d.



7. Вычислите сумму квадратов всех различных действительных корней уравнения $3x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 13x - 3 = 0$.

Вариант 5

1. Вычислите: $x = \sqrt{22 - 8\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$.

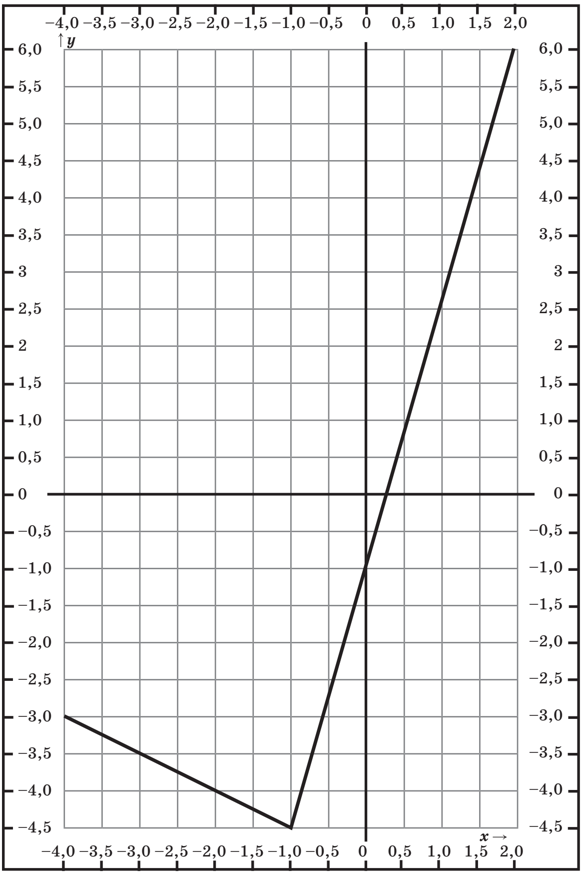
2. Решите уравнение $\sqrt{18 - x} - \sqrt[7]{x - 1} = 3$.

3. На острове 40% женатых мужчин и 1/10 замужних женщин. Какой процент населения острова состоит в браке?

4. Найдите множество значений функции $y = \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x - 5}$.

5. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB и делит её в отношении $AM:MB = 9:7$. Точка N лежит на стороне AC и делит её в отношении $AN:NC = 2:1$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $BO:ON$.

6. Для функции $y = a|x - b| + cx + d$, график которой изображён на рисунке, определите значения параметров a, b, c и d.



7. Вычислите сумму квадратов всех различных действительных корней уравнения $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 2x - 3 = 0$.

Вариант 6

1. Вычислите: $x = \sqrt{43 - 12\sqrt{7}} + \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$.

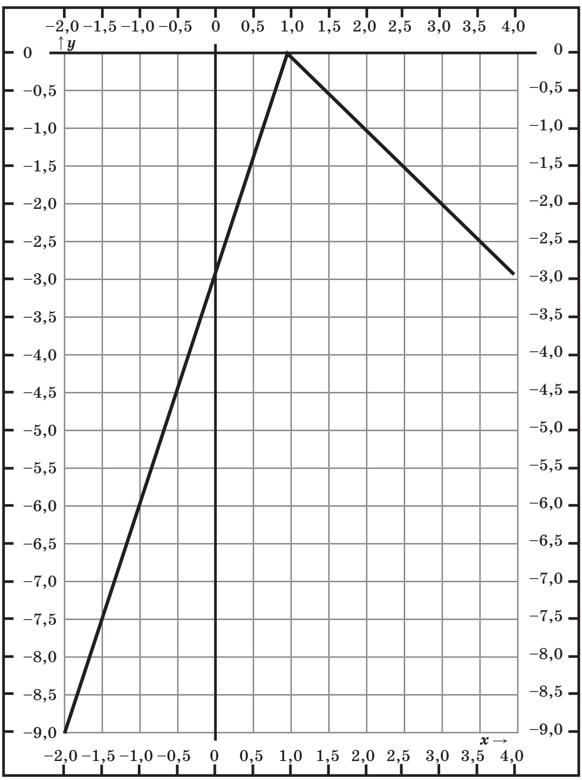
2. Решите уравнение $\sqrt[5]{x + 30} - \sqrt{18 - x} = -2$.

3. На острове 20% женатых мужчин и 3/5 замужних женщин. Какой процент населения острова состоит в браке?

4. Найдите множество значений функции $y = \dfrac{-x^2 + 3x + 6}{x - 5}$.

5. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB и делит её в отношении $AM:MB = 2:3$. Точка N лежит на стороне AC и делит её в отношении $AN:NC = 4:9$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $BO:ON$.

6. Для функции $y = a|x - b| + cx + d$, график которой изображён на рисунке, определите значения параметров a, b, c и d.



7. Вычислите сумму квадратов всех различных действительных корней уравнения $3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + x - 3 = 0$.

10 класс

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции
$y = (x^2 - 2x + 4)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 2$.

2. Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$. Найдите $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

3. На сторонах KL и LM треугольника KLM расположены точки A и B соответственно. При этом $LA : AK = 1 : 1$, $MB : BL = 1:8$. В каком отношении отрезок AB делит площадь треугольника KLM?

4. За круглым столом сидят 9 человек: рыцари (всегда говорящие правду) и лжецы (всегда лгущие). Каждый сказал: «Мои соседи – лжец и рыцарь». Сколько всего лжецов за столом?

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^4 + (a - 14)x^2 + 40 + 2a - 2a^2 = 0$ имеет четыре различных корня.

6. Трёхзначное число при перестановке первой цифры на последнее место увеличивается на 160%. Найдите все такие числа.

7. Известно, что при всех допустимых значениях x имеет место равенство $2f(x) + f\left(\frac{2x-1}{x-2}\right) = 1 - x$. Найдите функцию $f(x)$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\left|\frac{2x-5}{x-2}\right| \geqslant 3$.

2. Вычислите сумму $\frac{1}{2\cdot5} + \frac{1}{5\cdot8} + \frac{1}{8\cdot11} + \ldots + \frac{1}{98\cdot101}$.

3. Найдите основной период функции:
$f(x) = 2\sin\left(2{,}5x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{5x+\pi}{3}\right)$.

4. На затонувшей каравелле XIV в. были найдены шесть мешков с золотыми монетами. В первых четырёх мешках оказалось 60, 30, 20 и 15 золотых монет. Когда подсчитали монеты в оставшихся двух, кто-то заметил, что число монет в мешках составляет некую последовательность. Приняв это к сведению,

смогли бы вы сказать, сколько монет в пятом и шестом мешках?

5. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник на шесть частей, три из которых являются треугольниками, площади которых равны 8, 18 и 32. Найдите площадь данного треугольника.

6. Профессор и студент живут в одном доме и ходят пешком в один институт. Студент добирается до места за 20 мин, а профессор – за 30 мин. Через сколько минут студент догонит профессора, если тот выйдет из дома на 5 мин раньше студента?

7. Найдите функцию $f(x)$, если известно, что при всех допустимых значениях x она удовлетворяет условию $2f(x)+f\left(\dfrac{-3x-1}{3x+3}\right)=3x-3$.

Вариант 3

1. Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь 30 км он затрачивает на 2 ч больше, чем мотоциклист. Найдите среднюю скорость каждого из них (в км/ч).

2. Вычислите: $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{167}+\sqrt{169}}$.

3. Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(1;3)$ относительно прямой $3x+y+14=0$.

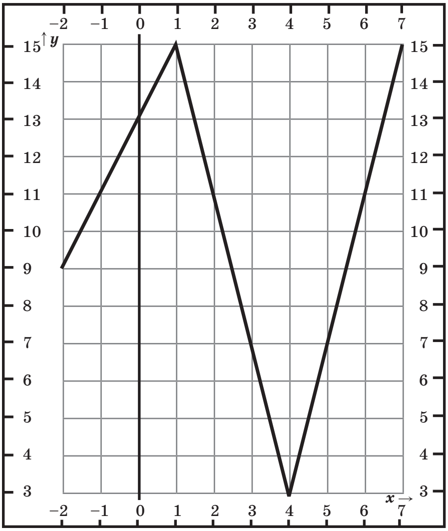
4. Представьте многочлен x^7+x^5+1 в виде произведения двух многочленов.

5. В треугольнике ABC через точки M и N, лежащие на биссектрисе AD, проведены прямые m и n, параллельные основанию BC, причём $AM:MN:ND=3:2:1$. В каком отношении прямые m и n делят площадь треугольника ABC?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+5}{6-x}}\cdot\frac{(x^2-6x+8)^3(x^2-1)^2}{(x^2+x-2)^3(x^2-10x+26)^5}\geqslant 0.$$

7. Для изображённой на графике функции
$y=a|x-1|+b|x-m|+cx$ определите параметры a, b, c и m.



Вариант 4

1. Велосипедист каждую минуту проезжает на 600 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь 48 км он затрачивает на 3 ч больше, чем мотоциклист. Найдите среднюю скорость каждого из них (в км/ч).

2. Вычислите:

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{13}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{358}+\sqrt{361}}.$$

3. Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(6;4)$ относительно прямой $4x+y-11=0$.

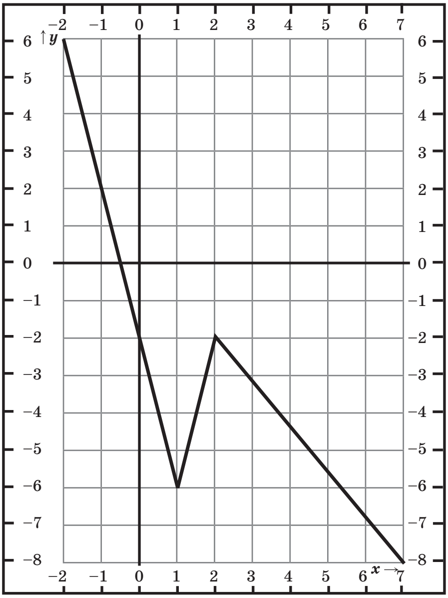
4. Представьте многочлен x^5+x+1 в виде произведения двух многочленов.

5. В треугольнике ABC через точки M и N, лежащие на биссектрисе AD, проведены прямые m и n, параллельные основанию BC, причём $AM:MN:ND=1:2:3$. В каком отношении прямые m и n делят площадь треугольника ABC?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+7}{7-x}}\cdot\frac{(x^2+7x+12)^8(x^2+7x+10)^6}{(x^2-3x-10)^5(x^2+4x+5)^6}\leqslant 0.$$

7. Для изображённой на графике функции
$y = a|x - 1| + b|x - m| + cx$ определите параметры a, b, c и m.



Вариант 5

1. Велосипедист каждую минуту проезжает на 1000 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь 43,2 км он затрачивает на 3 ч больше, чем мотоциклист. Найдите среднюю скорость каждого из них (в км/ч).

2. Вычислите:
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{16}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{191}+\sqrt{196}}.$$

3. Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(3;-6)$ относительно прямой $6x - y + 13 = 0$.

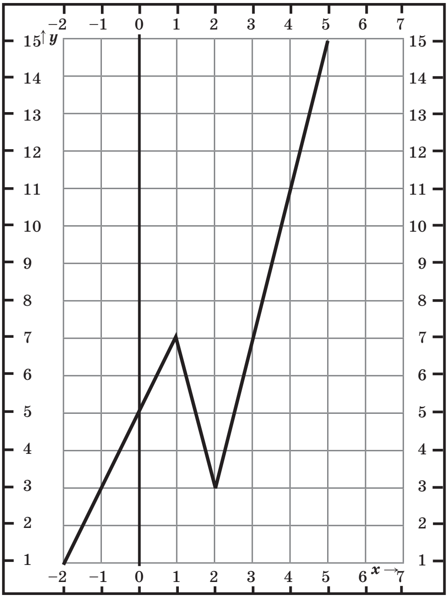
4. Представьте многочлен $x^7 + x^5 - 1$ в виде произведения двух многочленов.

5. В треугольнике ABC через точки M и N, лежащие на биссектрисе AD, проведены прямые m и n, параллельные основанию BC, причём $AM:MN:ND = 2:3:1$. В каком отношении прямые m и n делят площадь треугольника ABC?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+6}{7-x}}\cdot\frac{(x^2+4x+3)^4(x^2-x-12)^3}{(x^2-16)^6(x^2-2x+5)^3}\geqslant 0.$$

7. Для изображённой на графике функции $y = a|x-1| + b|x-m| + cx$ определите параметры a, b, c и m.



Вариант 6

1. Велосипедист каждую минуту проезжает на 1000 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь 28,8 км он затрачивает на 2 ч больше, чем мотоциклист. Найдите среднюю скорость каждого из них (в км/ч).

2. Вычислите:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{19}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{355}+\sqrt{361}}.$$

3. Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(-9;-2)$ относительно прямой $2x+5y-30=0$.

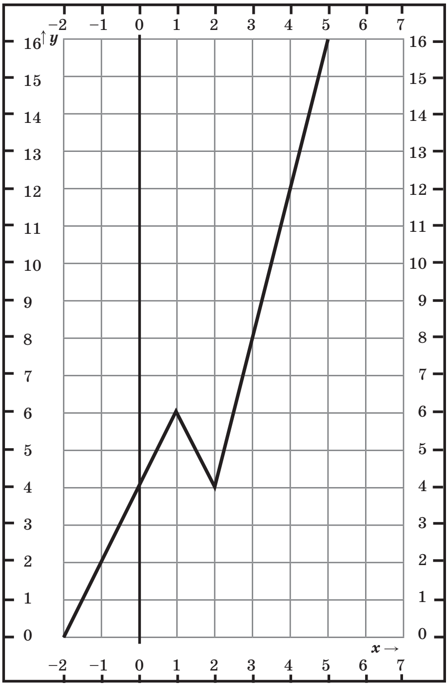
4. Представьте многочлен x^5+x-1 в виде произведения двух многочленов.

5. В треугольнике ABC через точки M и N, лежащие на биссектрисе AD, проведены прямые m и n, параллельные основанию BC, причём $AM:MN:ND = 3:1:2$. В каком отношении прямые m и n делят площадь треугольника ABC?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+6}{4-x}} \cdot \frac{(x^2+6x+9)^5(x^2+2x-3)^2}{(x^2-4)^3(x^2-2x+2)^3} \geqslant 0.$$

7. Для изображённой на графике функции $y = a|x-1| + b|x-m| + cx$ определите параметры a, b, c и m.



11 класс

Вариант 1

1. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+4}-|2x-1|}{\sqrt{8-x}-|2x-1|} \geqslant 1$.

2. Определите, под каким углом видно из начала координат множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 12x - 27$.

3. В свежих грибах содержание воды колеблется от 90 до 99%, а в сушёных – от 30 до 35%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. При этом нижнее основание трапеции AD – это диаметр окружности, а верхнее основание BC – хорда. Найдите острый угол трапеции, при котором она имеет наибольшую площадь.

5. Обыкновенную дробь $\frac{57}{67}$ обратили в бесконечную десятичную дробь, затем стёрли первую цифру после запятой и обратили полученную десятичную дробь в обыкновенную. Какую дробь получили в результате?

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длиной 4. На середине ребра BC взята точка M, а на ребре A_1D_1 на расстоянии 1 от вершины A_1 взята точка N. Найдите длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} = ax + (a+1)\pi$ не имеет решений.

Вариант 2

1. Решите неравенство $x^3 + 2\sqrt{x+3} \leqslant 7 - \sqrt[3]{3x+5}$.

2. Три тракторные бригады вместе вспахали поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе могут вспахать за 6 дней, а первая и третья вместе – за 8 дней. Во сколько раз производительность второй бригады больше, чем производительность третьей?

3. Вычислите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} |x-0{,}5| \leqslant 0{,}5 \\ y^2 \leqslant y \\ (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \end{cases}$$

4. Имеется последовательность квадратов, площадь первого из которых равна 1. Каждый следующий квадрат вписан в

предыдущий так, что его вершины делят стороны предыдущего в отношении 1:2. Найдите сумму площадей всех квадратов этой последовательности.

5. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнение $a|x-b| = x-2$ имеет более одного корня.

6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin x - \cos 25 = 0$.

7. Искомое натуральное число больше 400 и меньше 500. Найдите это число, если сумма его цифр равна 9 и это число составляет ровно $\frac{47}{36}$ от числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

Вариант 3

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x+1)(x+2)(x+5)(x+6)$.

2. Саша и Маша живут в одном доме и ходят пешком в одну школу. Саша добирается до школы за 10 мин, а Маша – за 15 мин. Через сколько минут Саша догонит Машу, если она выйдет из дома на 2 мин раньше Саши?

3. Найдите последнюю цифру числа $7 \cdot 2^{2014} + 3^{2014}$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно 5 и 125. Найдите площадь трапеции.

5. Дан угол $\angle ASB = 30^\circ$ с вершиной S. Точка M расположена внутри угла на расстоянии 2 и 3 от его сторон. В данный угол впишите треугольник MNK наименьшего периметра, так чтобы вершины N и K лежали на различных сторонах данного угла. Чему равен периметр такого треугольника?

6. Решите уравнение $12\sin^3 x + 16\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$.

7. Найдите все значения параметра p, при которых функция $f(x) = 3\sqrt{192+16x-x^2} - 4\sqrt{96-4x-x^2} - 2\sqrt{x^2-64} + px$ является чётной.

Вариант 4

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-1)(x+1)(x+4)(x+6)$.

2. Саша и Маша живут в одном доме и ходят пешком в одну школу. Саша добирается до школы за 15 мин, а Маша – за

25 мин. Через сколько минут Саша догонит Машу, если она выйдет из дома на 4 мин раньше Саши?

3. Найдите последнюю цифру числа $9 \cdot 2^{2014} + 3^{2015}$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно 2 и 32. Найдите площадь трапеции.

5. Дан угол $\angle ASB = 15^\circ$ с вершиной S. Точка M расположена внутри угла на расстоянии 3 и 4 от его сторон. В данный угол впишите треугольник MNK наименьшего периметра, так чтобы вершины N и K лежали на различных сторонах данного угла. Чему равен периметр такого треугольника?

6. Решите уравнение $12\sin^3 x + 32\sin^2 x + 25\sin x + 6 = 0$.

7. Найдите все значения параметра p, при которых функция $f(x) = 4\sqrt{6 + x - x^2} + \sqrt{6 - x - x^2} - 2\sqrt{x^2 - 4} - p$ является нечётной.

Вариант 5

1. Найдите наименьшее значение функции
$y = (x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 4)$.

2. Саша и Маша живут в одном доме и ходят пешком в одну школу. Саша добирается до школы за 20 мин, а Маша – за 25 мин. Через сколько минут Саша догонит Машу, если она выйдет из дома на 3 мин раньше Саши?

3. Найдите последнюю цифру числа $2^{2014} + 7 \cdot 3^{2014}$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно 8 и 18. Найдите площадь трапеции.

5. Дан угол $\angle ASB = 60^\circ$ с вершиной S. Точка M расположена внутри угла на расстоянии 4 и 3 от его сторон. В данный угол впишите треугольник MNK наименьшего периметра, так чтобы вершины N и K лежали на различных сторонах данного угла. Чему равен периметр такого треугольника?

6. Решите уравнение $12\sin^3 x - 20\sin^2 x - \sin x + 6 = 0$.

7. Найдите все значения параметра p, при которых функция $f(x) = 4\sqrt{6 + x - x^2} + 3\sqrt{12 - 4x - x^2} - \sqrt{x^2 - 4} + px$ является чётной.

Вариант 6

1. Найдите наименьшее значение функции
$y = (x - 4)(x - 2)(x + 1)(x + 3)$.

2. Саша и Маша живут в одном доме и ходят пешком в одну школу. Саша добирается до школы за 20 мин, а Маша – за 25 мин. Через сколько минут Саша догонит Машу, если она выйдет из дома на 3 мин раньше Саши?

3. Найдите последнюю цифру числа $2^{2014} + 2\cdot 3^{2015}$.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно 12 и 27. Найдите площадь трапеции.

5. Дан угол $\angle ASB = 75°$ с вершиной S. Точка M расположена внутри угла на расстоянии 5 и 4 от его сторон. В данный угол впишите треугольник MNK наименьшего периметра, так чтобы вершины N и K лежали на различных сторонах данного угла. Чему равен периметр такого треугольника?

6. Решите уравнение $12\sin^3 x + 20\sin^2 x - \sin x - 6 = 0$.

7. Найдите все значения параметра p, при которых функция $f(x) = 3\sqrt{6+x-x^2} + 2\sqrt{22-9x-x^2} + 3\sqrt{x^2-4} - p$ является нечётной.

Решения и ответы
8 класс

Вариант 1

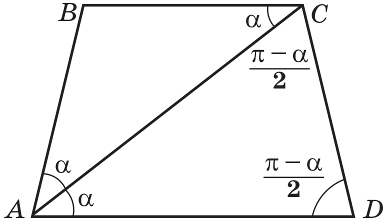
1. Саша, Лёша и Гоша сложились и купили палатку. Саша заплатил 40% от её цены, Лёша – 15% от оставшейся суммы, а Гоша – последние 3060 р. Сколько стоила палатка?

Решение. Пусть x – цена палатки.

Тогда $0{,}4x + 0{,}15\cdot 0{,}6x + 3060 = x \Leftrightarrow x = 6000$.

2. Равнобедренная трапеция $ABCD$ разбивается диагональю AC на два равнобедренных треугольника. Определите острый угол трапеции.

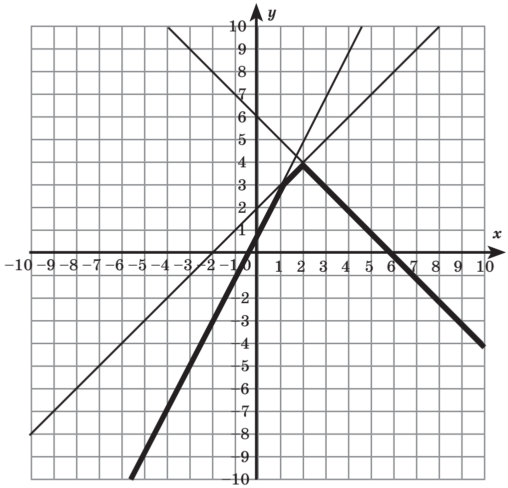
Решение.



Имеем $\frac{\pi-\alpha}{2}=2\alpha \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{5}=36^\circ$; $2\alpha=72^\circ$.

3. При каком значении x наименьшее из чисел $2x+1$, $6-x$, $x+2$ принимает наибольшее значение?

Решение. Построим графики трёх указанных функций.



При каждом значении x наименьшее значение из функций соответствует жирной линии на графике. Наибольшее значение из них, равное 4, принимается в точке $x=2$.

4. Во время праздника детям, сидевшим за круглым столом, принесли огромный кулёк с конфетами. Дети брали конфеты по кругу, первый взял одну конфету, второй – две конфеты и т. д. Каждый следующий брал на одну конфету больше, чем предыдущий. На втором круге в сумме было взято на 100 конфет больше, чем на первом. Сколько детей сидело за столом?

Решение. Пусть за столом сидело n детей. Тогда при первом обходе первый взял одну конфету, второй две и т.д., n-й взял n конфет. При повторном обходе первый берёт $(n+1)$ конфету, второй – $(n+2)$ и т. д. Каждый возьмёт на n конфет больше, чем при первом обходе. Следовательно, в сумме будет взято на n^2 конфет больше. Тогда $n^2=100 \Rightarrow n=10$.

5. До порубки леса лиственницы составляли 1% от всего леса. Поскольку лиственниц было существенно меньше других

деревьев, их решили вообще не рубить. После порубки леса лиственницы составили 2% от всего леса. Какой процент деревьев в лесу вырубили?

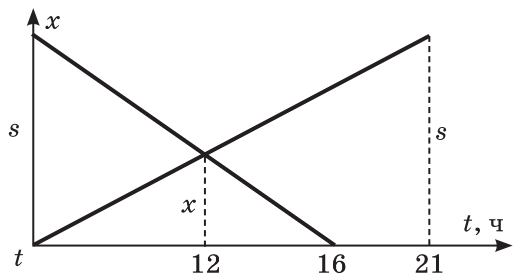
Решение. Пусть было первоначально одна лиственница и 99 ёлок. Всего 100 деревьев. После порубки ёлок их останется 49 (чтобы лиственница составляла 2%). Следовательно, вырубили 50% деревьев.

6. Когда Илья Муромец впервые увидел Кощея Бессмертного, Кощею было столько лет, сколько Илье и Соловью-разбойнику, вместе взятым. Сколько лет было Илье Муромцу, когда Кощею было столько, сколько Соловью-разбойнику, когда Илья Муромец впервые увидел Кощея?

Решение. Пусть первоначально Илье Муромцу было i лет, Кощею Бессмертному – k лет, Соловью-разбойнику – s лет. Тогда, по условию, $k = i + s$. Кощею было s лет $(k - s)$ лет тому назад, т.е. i лет тому назад. Тогда Илья Муромец только родился, т.е. ему было 0 лет.

7. Два странника одновременно отправились с рассветом в путь. Они шли по одной дороге, только один шёл из Дальних Вязём в Ближние, а другой – из Ближних в Дальние. Каждый из них шёл с постоянной скоростью. В полдень они встретились. Первый пришёл в Ближние Вязёмы в четыре вечера, а второй в Дальние – в девять вечера. В котором часу был рассвет?

Решение. Составим развёртку координаты по времени:



Из подобия треугольников имеем

$$\begin{cases} \dfrac{x}{s} = \dfrac{4}{16 - t} \\ \dfrac{x}{s} = \dfrac{12 - t}{21 - t} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{16 - t} = \frac{12 - t}{21 - t} \Rightarrow t = 6.$$

Вариант 2

1. Позавчера Маше было 14 лет, а в следующем году ей исполнится 17. Как это может быть?

Решение. День рождения 31 декабря, а фраза сформулирована 1 января.

2. Вес Карлсона составляет 20% от веса бока Фрекен Бок, который, в свою очередь, составляет 20% от веса остальной её части. На сколько процентов Фрекен Бок тяжелее Карлсона?

Решение. Пусть вес Карлсона равен k, вес бока Фрекен Бок равен b, вес остальной её части равен x, а вес всей Фрекен Бок равен B. Тогда по условию

$$\begin{cases} k = 0{,}2b \\ b = 0{,}2x \\ B = b + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5k \\ x = 5b \\ B = b + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5k \\ x = 25k \\ B = 30k \end{cases}$$

Далее получим $\dfrac{B-k}{k} \cdot 100\% = 2900\%$.

3. В трёхзначном числе последняя цифра 3. Если её переставить в начало числа, то получится число, которое на 1 превышает утроенное первоначальное число. Найдите начальное число.

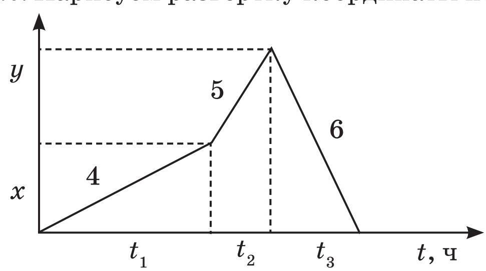
Решение. Пусть исходное число равно $\overline{xy3}$. Тогда имеем

$\overline{3xy} = 1 + 3 \cdot \overline{xy3} \Leftrightarrow 300 + \overline{xy} = 1 + 3 \cdot (10\overline{xy} + 3) \Leftrightarrow \overline{xy} = 10.$

Значит, исходное число равно 103.

4. Турист отправляется в поход из пункта A в пункт B и обратно и проходит весь путь за 3 ч 41 мин. Дорога из пункта A в пункт B идёт сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. На каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъёме в гору 4 км/ч, по ровному месту – 5 км/ч, а при спуске с горы – 6 км/ч, а расстояние между пунктами A и B равно 9 км?

Решение. Нарисуем развёртку координаты по времени:



Имеем

$$\begin{cases} x = 4t_1 \\ y = 5t_2 \\ 9 = 6t_3 \\ x + y = 9 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 3 + \dfrac{41}{60} = \dfrac{221}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{221}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = \dfrac{131}{60} \end{cases}$$

Поскольку требуется определить y, то исключим из системы x. Для этого умножим второе уравнение на 4 и вычтем из первого уравнения

$$y - \frac{4y}{5} = 9 - \frac{131}{15} \Leftrightarrow \frac{y}{5} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} \text{ км.}$$

5. Длину прямоугольника уменьшили на 10%, а ширину уменьшили на 20%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12%. На сколько процентов уменьшится периметр прямоугольника, если его длину уменьшить на 20%, а ширину уменьшить на 10%?

Решение. Пусть длина прямоугольника равна x, а ширина – y. Тогда

$$\begin{cases} 2\cdot(0{,}9x + 0{,}8y) = 0{,}88\cdot 2\cdot(x + y) \\ 2\cdot(0{,}8x + 0{,}9y) = n\cdot 2\cdot(x + y) \end{cases}$$

Из первого уравнения получим $x = 4y$. Подставим во второе уравнение $0{,}8\cdot 4y + 0{,}9y = n\cdot(4y + y) \Rightarrow n = 0{,}82$.

Следовательно, периметр уменьшится на 18%.

6. 12 человек несут 12 хлебов. Каждый мужчина – по 2 хлеба, каждая женщина – по 0,5 хлеба, каждый ребёнок – по 0,25 хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

Решение. Пусть было m мужчин, z женщин и d детей. Тогда получим:

$$\begin{cases} m + z + d = 12 \\ 2m + 0{,}5z + 0{,}25d = 12 \\ m, z, d \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + z + d = 12 \\ 8m + 2z + d = 48 \\ m, z, d \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + z + d = 12 \\ 7m + z = 36 \\ m, z, d \in N \end{cases}$$

Поскольку $z - 1 = 35 - 7m = 7\cdot(5 - m)$, то $(z - 1)$ кратно 7, т.е. $z = 7n + 1$. Но поскольку $z<12$, то либо $z = 1$, либо $z = 8$. В первом случае получим $m = 5$; $d = 6$. Во втором случае получим $m = 4$; $d = 0$, что противоречит условию, что есть дети.

Ответ: 5 мужчин, 1 женщина, 6 детей.

7. Найдите линейную функцию $f(x) = ax + b$, если при всех значениях x выполняется равенство $f(2 - f(x)) = 6 - 4x$.

Решение:

$a(2 -(ax + b)) + b = 6 - 4x \Leftrightarrow -a^2x + (2a - ab + b) = 6 - 4x$.

Это равенство выполняется при всех значениях x тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ 2a - ab + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2;\ b = -2 \\ a = -2;\ b = \dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$$

Вариант 3

1. Моторная лодка проходит по реке из пункта A в пункт B за 6 ч, а обратно – за 8 ч. За какое время бревно доплывёт из пункта A в пункт B?

Решение. Пусть v – собственная скорость лодки, u – скорость течения, расстояние от пукта A до пункта B равно s, искомое время равно t. Тогда получим

$$\begin{cases} s = (v + u)\cdot 6 \\ s = (v - u)\cdot 8 \\ s = ut \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (v + u)\cdot 6 = (v - u)\cdot 8 \\ (v - u)\cdot 8 = ut \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 7u \\ 6u\cdot 8 = ut \end{cases} \Rightarrow t = 48.$$

Ответ: 48 ч.

2. Малыш может съесть банку варенья за 6 мин, а Карлсон – в 2 раза быстрее. За какое время они съедят эту банку варенья вместе?

Решение. Малыш съедает в 1 мин 1/6 часть банки. Карлсон – 2/6 части банки. Значит, вместе за 1 мин они съедят 3/6 части банки. Следовательно, всю банку они съедят за 2 мин.

3. В ноябре на круговом маршруте работали 3 автобуса, причём интервал их движения составлял 10 мин. Как изменится интервал движения автобусов, если в декабре на маршрут выйдет дополнительно 2 таких автобуса?

Решение. На круг у автобуса уходит 30 мин. При работе 5 автобусов интервалы составят $\dfrac{30}{5} = 6$ мин.

4. Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 7$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?

Решение. Имеем тождество

$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ac)$.

Тогда получим $25 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2\cdot 7 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 11$.

5. Во фразе «Задачи математической олимпиады» передвинем в каждом слове последнюю букву на первое место: «иЗадач йматематическо ыолимпиад». Сделаем то же самое с полученным текстом и т. д. Через какое число таких операций мы впервые вернёмся к исходному тексту?

Решение. Слово «Задачи» состоит из 6 букв, и соответственно период возврата к исходному положению букв равен 6. Второе слово состоит из 14 букв, и период равен 14. Последнее слово состоит из 9 букв, и период равен 9. Наименьшее кратное чисел 6, 14 и 9 равно 126.

Ответ: 126.

6. Однажды 24 жителя острова правдолюбцев и лжецов сели за круглый стол, и каждый из них заявил: «Один из моих соседей – правдолюбец, а другой – лжец». Сколько правдолюбцев и сколько лжецов было среди этих 24 человек? Укажите все ответы.

Решение. Возможны два варианта.

Вариант 1. Все лжецы.

Вариант 2. Не все лжецы. Тогда есть хотя бы один рыцарь. Рядом с ним сидят рыцарь и лжец: ЛРР. Но тогда рядом с правым рыцарем сидит лжец: ЛРРЛ. Далее с правым лжецом сидит рыцарь: ЛРРЛР и т.д. Продолжая процесс, получим последовательность ЛРРЛРРЛРР... В этой последовательности рыцарей вдвое больше, чем лжецов. Следовательно, за столом сидят 16 рыцарей и 8 лжецов.

7. На поле a1 шахматной доски стоит фигура. Два игрока передвигают её по очереди, либо вправо, либо вверх на любое число клеток. Выиграет тот, кто поставит фигуру на поле h8 (обозначено буквой x). Кто победит при правильной игре – первый или второй игрок и как он должен играть?

8								x
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1	$\oplus$							
	a	b	c	d	e	f	g	h

Решение. Будем отмечать клетки, из которых игрок при его ходе выходит победителем, числом 1. В противном случае – числом 0. Очевидно, строку 8 и столбец h следует заполнить единицами, – это выигрышные позиции.

8	1	1	1	1	1	1	1	x
7								1
6								1
5								1
4								1
3								1
2								1
1	$\oplus$							1
	a	b	c	d	e	f	g	h

В поле $g7$ следует поставить нуль, поскольку игрок, находясь в этом поле, не сможет своим ходом поставить противника в проигрышное положение.

8	1	1	1	1	1	1	1	x
7							0	1
6								1
5								1
4								1
3								1
2								1
1	$\oplus$							1
	a	b	c	d	e	f	g	h

Но теперь оставшиеся клетки в строке 7 и в столбце g мы заполним единицами, поскольку играющий ходит на поле $g7$, и соперник окажется в проигрышном положении.

8	1	1	1	1	1	1	1	x
7	1	1	1	1	1	1	0	1
6							1	1
5							1	1
4							1	1
3							1	1
2							1	1
1	$\oplus$						1	1
	a	b	c	d	e	f	g	h

Продолжая далее этот процесс, получим

8	1	1	1	1	1	1	1	x
7	1	1	1	1	1	1	0	1
6	1	1	1	1	1	0	1	1
5	1	1	1	1	0	1	1	1
4	1	1	1	0	1	1	1	1
3	1	1	0	1	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1	1	1	1
1	⊕0	1	1	1	1	1	1	1
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

На большой диагонали – все клетки проигрышные. Следовательно, игрок, начинающий игру, проиграет. Каждым своим ходом его соперник (второй игрок) может поставить первого игрока на диагональ $a1$-$g7$ – проигрышные поля.

Вариант 4

1) 80 ч; 2) 2,5 мин; 3) 8 мин; 4) 14; 5) 72; 6) а) 22 правдолюбца и 11 лжецов; б) 0 правдолюбцев и 33 лжеца; 7) При правильной игре победит первый игрок. Каждым своим ходом он должен поставить фигуру на одно из полей, помеченных нулём:

8	1	0	1	0	1	0	1	x
7	0	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	⊕1	1	1	1	1	1	1	1
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Вариант 5

1) 30 ч; 2) 4 мин; 3) 50/8 мин = 6,25 мин; 4) 18; 5)18; 6) а) 10 правдолюбцев и 5 лжецов; б) 0 правдолюбцев и 15 лжецов; 7) При правильной игре победит первый игрок. Каждым своим

ходом он должен поставить фигуру на одно из полей, помеченных нулём:

8	1	0	1	1	0	1	1	x
7	0	1	1	0	1	1	0	1
6	1	1	0	1	1	0	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
1	⊕1	1	1	1	1	1	1	1
	a	b	c	d	e	f	g	h

Вариант 6

1) 26 ч 40 мин = 80/3 ч; 2) 2,5 мин; 3) 4,2 мин; 4) 29; 5)18; 6) а) 26 правдолюбцев и 13 лжецов; б) 0 правдолюбцев и 39 лжецов; 7) При правильной игре победит второй игрок. Каждым своим ходом он должен поставить фигуру на одно из полей, помеченных нулём.

8	1	0	1	1	0	1	1	x
7	0	1	1	0	1	1	0	1
6	1	1	0	1	1	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	1	0
4	0	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	0	1	1	0	1	1
2	1	0	1	1	0	1	1	0
1	⊕0	1	1	0	1	1	0	1
	a	b	c	d	e	f	g	h

9 класс

Вариант 1

1. Вычислите число $x = \sqrt{48 - 24\sqrt{3}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$.

Решение.

$x = \sqrt{48 - 24\sqrt{3}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} =$

$= 2\cdot\sqrt{(3 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2} = 2(3 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1) = 5.$

2. На сколько процентов увеличится площадь треугольника при увеличении каждой из сторон на 30% ?

Решение. Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, т.е. $1{,}3^2 = 1{,}69$. Следовательно, площадь увеличится на 69% .

3. Число x – натуральное. Из неравенств $2x>70$, $x<100$, $3x>25$, $x \geqslant 10$, $x>5$ два неверных и три верных. Чему равно число x?

Решение. Поскольку x – натуральное число, то

$2x > 70 \Leftrightarrow x > 35 \Leftrightarrow x \geqslant 36$ (a)

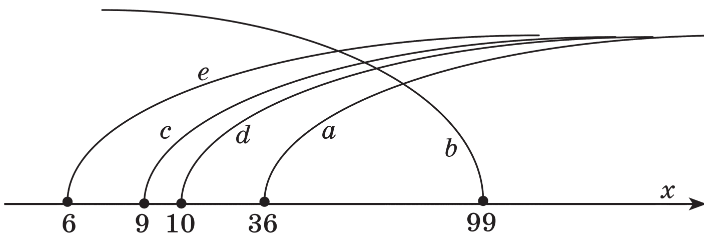
$x < 100 \Leftrightarrow x \leqslant 99$ (b)

$3x > 25 \Leftrightarrow x \geqslant 9$ (c)

$x \geqslant 10$ (d)

$x > 5 \Leftrightarrow x \geqslant 6$ (e)

Отметим промежутки на числовой оси:



Из натуральных чисел только число 9 удовлетворяет трём неравенствам и не удовлетворяет двум.

4. Изменение температуры на один градус Цельсия соответствует изменению на 9/5 градусов Фаренгейта (шкала, принятая в США), и 0° по Цельсию составляет 32 градуса по шкале Фаренгейта. Есть ли температура, выражающаяся одинаковым числом градусов по обеим шкалам? Если есть, то какая?

Решение. Пусть n – искомая температура (по Цельсию). Тогда имеем $0 + n = 32 + n \cdot \dfrac{9}{5} \Leftrightarrow n = -40$.

5. Если при всех значениях x имеет место равенство $f(3 + 4x) = 1 - x$, то чему равно $f(5x - 1)$?

Решение. Пусть $3 + 4x = t$.

Тогда $x = \dfrac{t-3}{4}$; $1 - x = 1 - \dfrac{t-3}{4} = \dfrac{7-t}{4}$.

Получим $f(t)=\dfrac{7-t}{4}$. Тогда $f(5x-1)=\dfrac{7-(5x-1)}{4}=\dfrac{8-5x}{4}$.

6. Пастух продал всё стадо овец трём покупателям. Первому покупателю он продал половину всех бывших у него овец и ещё пол-овцы; второму – половину оставшихся овец и ещё пол-овцы; наконец, третьему – половину оставшихся овец и ещё пол-овцы. Сколько овец было в стаде, если известно, что ни одну овцу не пришлось резать пополам?

Решение. Пусть в стаде x овец. Тогда первому покупателю он продал $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{2}$ овец. Осталось $x-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{x-1}{2}$ овец.

Второму покупателю он продал $\dfrac{x-1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{4}$ овцы, осталось $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{x-3}{4}$.

Третьему покупателю он продал $\dfrac{x-3}{8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{8}$ овцы, осталось $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x+1}{8}=0 \Rightarrow x=7$.

7. Чему равно число $\dfrac{К{\cdot}А{\cdot}Р{\cdot}Л{\cdot}С{\cdot}О{\cdot}Н}{В{\cdot}А{\cdot}Р{\cdot}Е{\cdot}Н{\cdot}Ь{\cdot}Е}$, если каждая буква — это цифра. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Получается в ответе вполне конкретное число.

Решение. Поскольку неповторяющихся букв всего 10, то задействованы все цифры. Поскольку в ответе сказано, что получается вполне конкретное число, то нуль будет в числителе и число равно 0.

Вариант 2

1. На острове 70% женатых мужчин и $3/5$ замужних женщин. Какая доля населения острова состоит в браке?

Решение. Пусть x – количество женатых мужчин и одновременно количество замужних женщин. Тогда количество холостяков среди мужчин равно $\dfrac{3}{7}x$, а среди женщин $\dfrac{2}{3}x$. Доля населения, состоящая в браке, равна

$$\frac{2x}{2x+\frac{3}{7}x+\frac{2}{3}x}=\frac{2\cdot 21}{42+9+14}=\frac{42}{65}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + yz = 8 \\ yz + zx = 9 \\ zx + xy = 5 \end{cases}$$

Решение. Сложим уравнения системы $2xy + 2yz + 2zx = 22 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 11$.

Из последнего уравнения вычтем уравнения системы

$$\begin{cases} xz = 3 \\ xy = 2 \\ zy = 6 \end{cases}$$

Теперь перемножим левые и правые части полученных уравнений: $(xyz)^2 = 36 \Leftrightarrow xyz = \pm 6$.

Полученное уравнение разделим на уравнения системы

$$\begin{cases} y = \pm 2 \\ z = \pm 3 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Ответ: (1;2;3), (–1;–2;–3).

3. Вычислите сумму $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{99\cdot 100}$.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 100} = \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{100-99}{99\cdot 100} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = 0{,}99.$$

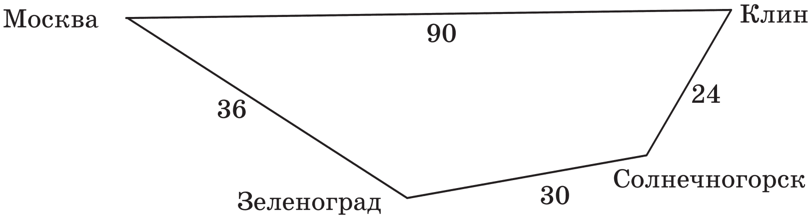
4. Поезд проходит мост длиной 450 м за 45 с. А мимо будки стрелочника – за 15 с. Найдите длину поезда и его скорость.

Решение. Пусть длина поезда равна d, а его скорость – v.

Тогда имеем $\begin{cases} 450 + d = v\cdot 45 \\ d = v\cdot 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 15\ \text{м/с} \\ d = 225\ \text{м} \end{cases}$.

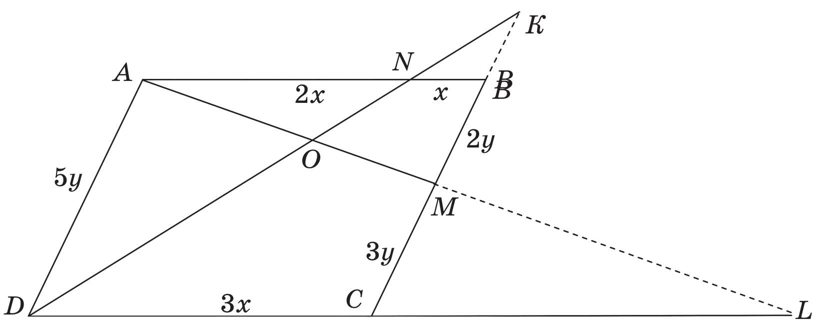
5. Расстояние от Москвы до Клина 90 км, от Клина до Солнечногорска 24 км, от Солнечногорска до Зеленограда 30 км, от Зеленограда до Москвы 36 км. Какое расстояние от Солнечногорска до Москвы?

Решение. Поскольку $90 = 24 + 30 + 36$, то Зеленоград и Солнечногорск расположены между Москвой и Клином (на одной прямой) и расстояние от Солнечногорска до Москвы равно 66 км.



6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ расположены точки N и M соответственно, причём $AN : NB = 2 : 1$, $BM : MC = 2 : 3$. Прямые AM и DN пересекаются в точке O. Найдите отношения $OD{:}ON$ и $OA{:}OM$.

Решение. Продолжим прямые AM и DN до пересечения их с продолжениями сторон параллелограмма в точках L и K.



Из подобия треугольников KNB и KDC получим

$$\frac{KB}{x}=\frac{KB+5y}{3x}\Leftrightarrow KB=\frac{5y}{2}.$$

Из подобия треугольников LCM и LDA получим

$$\frac{CL}{3y}=\frac{CL+3x}{5y}\Leftrightarrow CL=\frac{9x}{2}.$$

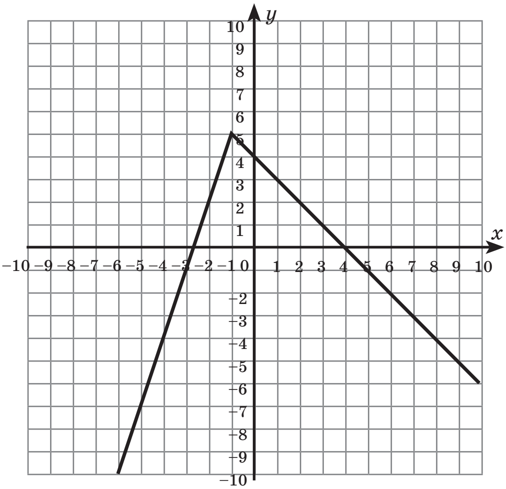
Из подобия треугольников OAN и OLD получим

$$\frac{OD}{OL}=\frac{3x+\frac{9x}{2}}{2x}=\frac{15}{4}.$$

Из подобия треугольников OAD и OMK получим

$$\frac{OA}{OM} = \frac{5y}{2y + \frac{5y}{2}} = \frac{10}{9}.$$

7. График функции $y = k|x - t| + ax + b$ изображён на рисунке. Найдите значения всех параметров k, t, a и b.



Решение. Графиком является кусочно-линейная функция, с «изломом» в точке, где меняется знак выражения $x - t$, т. е. в точке $x = t$. Следовательно, $t = -1$. Тогда $y = k|x + 1| + ax + b$.

При $x > -1$ коэффициент наклона прямой равен $k + a$, и из рисунка видно, что он равен -1.

При $x < -1$ коэффициент наклона прямой равен $-k + a$, и из рисунка видно, что он равен 3. Следовательно,

$$\begin{cases} k + a = -1 \\ -k + a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ a = 1. \end{cases}$$

Формула принимает следующий вид: $y = -2|x + 1| + x + b$.

Значение функции в точке $x = 0$ равно 4. Следовательно, $-2 + b = 4 \Leftrightarrow b = 6$.

Окончательно получим $y = -2|x + 1| + x + 6$.

Ответ: $k = -2$; $t = -1$; $a = 1$; $b = 6$.

Вариант 3

1. Вычислите: $x = \sqrt{184 - 66\sqrt{7}} + \sqrt{79 - 24\sqrt{7}}$.

Решение.

$$x=\sqrt{184-66\sqrt{7}}+\sqrt{79-24\sqrt{7}}=$$
$$=\sqrt{\underbrace{11^2+(3\sqrt{7})^2}_{184}-2\cdot 11\cdot 3\sqrt{7}}+\sqrt{\underbrace{4^2+(3\sqrt{7})^2}_{79}-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{7}}=$$
$$=|11-3\sqrt{7}|+|4-3\sqrt{7}|=(11-3\sqrt{7})+(3\sqrt{7}-4)=7.$$

2. Решите уравнение $\sqrt[5]{x+242}-\sqrt{17-x}=-1$.

Решение. Очевидно, $x = 1$ является корнем. Левая часть уравнения – возрастающая функция. Каждое своё значение функция принимает только один раз. Поэтому корень может быть только один.

Ответ: 1.

3. На острове 60% женатых мужчин и 2/5 замужних женщин. Какой процент населения острова состоит в браке?

Решение. Пусть на острове x женатых мужчин и столько же замужних женщин. Тогда неженатых мужчин будет $\frac{2}{3}x$, а незамужних женщин – $\frac{3}{2}x$. Всё население составит $2x+\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}x=\frac{25}{6}x$. Процент состоявших в браке:

$$\frac{2x}{\frac{25}{6}x}\cdot 100\% = 48\%.$$

4. Найдите множество значений функции $y=\dfrac{-x^2+9x-24}{x-4}$.

Решение. Множество значений функции – это значения y, для которых существуют x. Рассмотрим уравнение относительно x.

$$(x-4)y=-x^2+9x-24 \Leftrightarrow x^2+(y-9)x-4y+24=0.$$

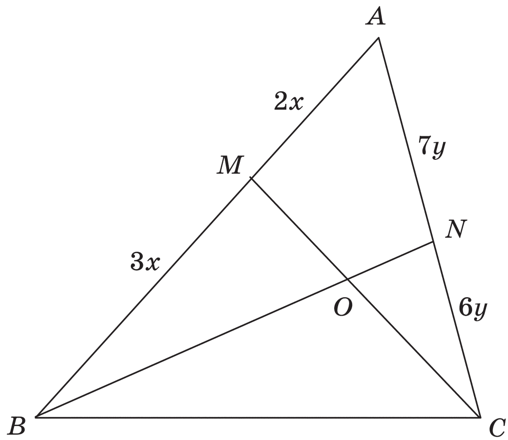
Необходимое и достаточное условие существования решения:

$$D\geqslant 0 \Leftrightarrow (y-9)^2+16y-96\geqslant 0 \Leftrightarrow y^2-2y-15\geqslant 0 \Leftrightarrow y\in(-\infty;-3]\cup[5;\infty).$$

5. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB и делит её в отношении $AM{:}MB = 2{:}3$. Точка N лежит на стороне AC и делит её в отношении $AN{:}NC = 7{:}6$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношение $BO{:}ON$.

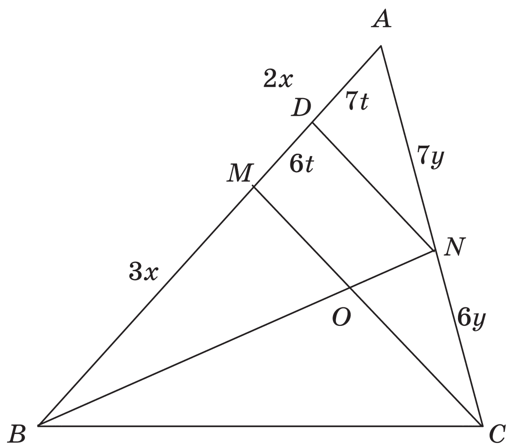
Решение. Решение. 1-й способ. Применим теорему Менелая, рассмотрев треугольник ABN и секущую CM:

$$\frac{2x}{3x}\cdot\frac{BO}{ON}\cdot\frac{6y}{13y}=1 \Rightarrow \frac{BO}{ON}=\frac{13}{4}.$$



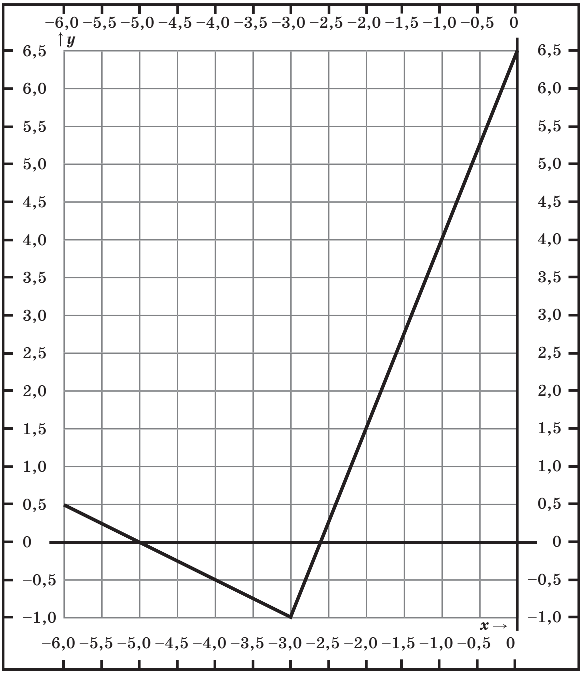
Ответ: 13:4.

2-й способ. Через точку N проведём прямую $ND \parallel CM$.



Тогда из теоремы Фалеса следует, что $MD{:}DA = 6{:}7$, т.е. $MD = 6t$, $AD = 7t$. Но поскольку $2x=6t+7t$, получим $x = 6{,}5t$. Тогда $\frac{BO}{ON}=\frac{3x}{6t}=\frac{3\cdot 6{,}5t}{6t}=\frac{13}{4}$.

6. Для функции $y = a|x - b| + cx + d$, график которой изображён на рисунке, определите значения параметров a, b, c и d.



Решение.

1) Графиком является кусочно-линейная функция, с «изломом» в точке, где меняется знак выражения $x - b$, т. е. в точке $x = b$. Следовательно, $b = -3$. Тогда $y = a|x + 3| + cx + d$.

2) При $x > -3$ коэффициент наклона прямой равен $a + c$, и из рисунка видно, что он равен 2,5. При При $x < -3$ коэффициент наклона прямой равен $-a + c$, и из рисунка видно, что он равен $-0{,}5$. Следовательно, $\begin{cases} a + c = 2{,}5 \\ -a + c = -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1{,}5 \\ c = 1 \end{cases}$.

Формула принимает следующий вид: $y = 1{,}5|x + 3| + x + d$.

3) Значение функции в точке $x = -3$ равно -1. Следовательно, $-3 + d = -1 \Leftrightarrow d = 2$. Получим $y = 1{,}5|x + 3| + x + 2$.

Ответ: $a = 1{,}5$; $b = -3$; $c = 1$; $d = 2$.

7. Вычислите сумму квадратов всех различных действительных корней уравнения $3x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 8x - 2 = 0$.

Решение. Попробуем представить левую часть в виде произведения двух квадратных трёхчленов с неопределёнными коэффициентами – целыми числами

$$3x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 8x - 2 = (3x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при равных степенях переменной x, получим

$$\begin{cases} a + 3c = 3 \\ ac + b + 3d = -11 \\ ad + bc = 8 \\ bd = -2 \end{cases}$$

Из последнего равенства следует, что возможны 4 варианта поиска:

b	1	−1	2	−2
d	−2	2	−1	1

Пробуем первый вариант. Пусть $b = 1$, $d = -2$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a + 3c = 3 \\ ac = -6 \\ -2a + c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ c = 2. \end{cases}$$

Нам повезло. Не придётся рассматривать остальные случаи. Имеем $(3x^2 - 3x + 1)(x^2 + 2x - 2) = 0$.

Поскольку $3x^2 - 3x + 1 > 0$ при всех действительных значениях x, то $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Тогда получим $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 + 4 = 8$.

Вариант 4

1) 4; 2) 4; 3) 37,5%; 4) $(-\infty;-19]\cup[-3;\infty)$; 5) 5:6; 6) $a = 1{,}5$; $b = 0$; $c = 2$; $d = -3$; 7) 11.

Вариант 5

1) 3; 2) 2; 3) 16%; 4) $(-\infty;1]\cup[25;\infty)$; 5) 7:3; 6) $a = 2$; $b = -1$; $c = 1{,}5$; $d = -3$; 7) 7.

Вариант 6

1) 7; 2) 2; 3) 30%; 4) $(-\infty;-11]\cup[-3;\infty)$; 5) 13:6; 6) $a = -2$; $b = 1$; c = 1; d = −1; 7) 3.

10 класс

Вариант 1

1. Найдите наименьшее значение функции

$y = (x^2 - 2x + 4)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 2$.

Решение. Пусть $x^2 - 2x + 4 = t$. Тогда, очевидно, $t \geqslant 3$. Имеем $y = t^2 - 2(t - 1) + 2 = t^2 - 2t + 4,\ t \geqslant 3$.

Поскольку на этом множестве функция возрастающая, то наименьшее значение функции достигается на левом конце, т.е. при $t = 3$, $y_{\min} = y(3) = 7$.

2. Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$. Найдите $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

Решение.

$x = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha) =$
$= \frac{1}{3}\cdot(1 - \sin\alpha\cdot\cos\alpha),$

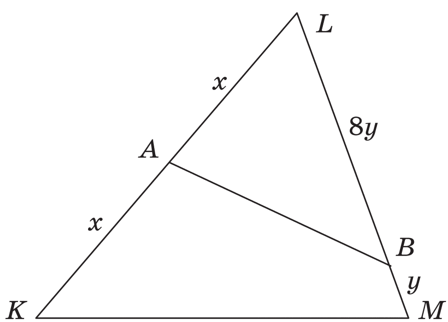
$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{4}{9},$

$$x = \frac{1}{3}\cdot\left(1 + \frac{4}{9}\right) = \frac{13}{27}.$$

3. На сторонах KL и LM треугольника KLM расположены точки A и B соответственно. При этом $LA : AK = 1 : 1$; $MB : BL = 1:8$. В каком отношении отрезок AB делит площадь треугольника KLM?

Решение. Площади треугольников: $S_{LAB} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot 8y\cdot\sin A$; $S_{LKM} = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 9y\cdot\sin A$.

Тогда $\frac{S_{LAB}}{S_{LKM}} = \frac{4}{9}$; $\frac{S_{LAB}}{S_{ABMK}} = \frac{4}{5}$.



4. За круглым столом сидят 9 человек: рыцари (всегда говорящие правду) и лжецы (всегда лгущие). Каждый сказал: «Мои соседи – лжец и рыцарь». Сколько всего лжецов за столом?

Решение. Возможны два варианта.

Вариант 1. Все лжецы.

Вариант 2. Не все лжецы. Тогда есть хотя бы один рыцарь. Рядом с ним сидят рыцарь и лжец: ЛРР. Но тогда рядом с правым рыцарем сидит лжец: ЛРРЛ. Далее с правым лжецом сидит рыцарь: ЛРРЛР и т.д. Продолжая процесс, получим последовательность ЛРРЛРРЛРР... В этой последовательности рыцарей вдвое больше, чем лжецов. Следовательно, за столом сидят 6 рыцарей и 3 лжеца.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^4 + (a - 14)x^2 + 40 + 2a - 2a^2 = 0$ имеет четыре различных корня.

Решение. Решим биквадратное уравнение:

$$x^2 = \frac{14 - a \pm\sqrt{(14 - a)^2 - 160 - 8a + 8a^2}}{2} = \frac{14 - a \pm\sqrt{36 - 36a + 9a^2}}{2} =$$

$$= \frac{14 - a \pm (3a - 6)}{2},$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 + a \\ x^2 = 10 - 2a. \end{array}\right.$$

Исходное уравнение имеет четыре различных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 4 + a > 0 \\ 10 - 2a > 0 \\ 4 + a \neq 10 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-4;2) \cup (2;5).$$

6. Трёхзначное число при перестановке первой цифры на последнее место увеличивается на 160%. Найдите все такие числа.

Решение. Пусть число равно $\overline{xyz}$. При перестановке получится $\overline{yzx}$. По условию, $\overline{yzx} = 2{,}6 \cdot \overline{xyz} \Leftrightarrow 10\overline{yz} + x = 2{,}6\cdot(100x + \overline{yz})$. Обозначим $\overline{yz} = n$ – двузначное число.

Тогда $10n + x = 2{,}6\cdot(100x + n)$,

или $5(10n + x) = 13\cdot(100x + + n) \Leftrightarrow n = 35x$.

Число n – двузначное только при $x = 1$ или $x = 2$. Искомые числа: 135 и 270.

7. Известно, что при всех допустимых значениях x имеет место равенство $2f(x)+f\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)=1-x$. Найдите функцию $f(x)$.

Решение. Пусть $t=\dfrac{2x-1}{x-2}$.

Тогда $tx-2t=2x-1 \Rightarrow x=\dfrac{2t-1}{t-2}$ и $1-x=1-\dfrac{2t-1}{t-2}=$ $=\dfrac{-t-1}{t-2}=\dfrac{t+1}{2-t}$.

Получим $2f\left(\dfrac{2t-1}{t-2}\right)+f(t)=\dfrac{t+1}{2-t}$, или $2f\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)+f(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$.

Далее имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2f(x)+f\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)=1-x \\ 2f\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)+f(x)=\dfrac{x+1}{2-x}. \end{cases}$$

Исключим из уравнений $f\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)$. Для этого достаточно первое уравнение умножить на 2 и вычесть второе уравнение: $3f(x)=2-2x-\dfrac{x+1}{2-x}=\dfrac{2x^2-7x+3}{2-x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{2x^2-7x+3}{3(2-x)}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\left|\dfrac{2x-5}{x-2}\right|\geqslant 3$.

Решение.

$$\left|\frac{2x-5}{x-2}\right|\geqslant 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2x-5}{x-2}\right)^2-3^2\geqslant 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2x-5}{x-2}-3\right)\left(\frac{2x-5}{x-2}+3\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-x+1}{x-2}\right)\left(\frac{5x-11}{x-2}\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{5x-11}{x-2}\right)\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(5x-11)}{(x-2)^2}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(5x-11)\leqslant 0 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1;2)\cup\left(2;\frac{11}{5}\right].$$

2. Вычислите сумму $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\dfrac{1}{98\cdot 101}$.

Решение.

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 101}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5-2}{2\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\frac{11-8}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{101-98}{98\cdot 101}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{101}\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{101}\right)=\frac{33}{202}.$$

3. Найдите основной период функции

$$f(x) = 2\sin\left(2{,}5x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{5x+\pi}{3}\right).$$

Решение. Период функции $f_1(x) = 2\sin\left(2{,}5x - \frac{\pi}{3}\right)$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{2{,}5} = \frac{4\pi}{5}$.

Период функции $f_2(x) = 3\cos\left(\frac{5x+\pi}{3}\right)$ равен $T_2 = \frac{2\pi}{5/3} = \frac{6\pi}{5}$.

Имеем $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3T_1 = 2T_2 = \frac{12\pi}{5} = 2{,}4\pi$.

4. На затонувшей каравелле XIV века были найдены шесть мешков с золотыми монетами. В первых четырёх мешках оказалось 60, 30, 20 и 15 золотых монет. Когда подсчитали монеты в оставшихся двух, кто-то заметил, что число монет в мешках составляет некую последовательность. Приняв это к сведению, смогли бы вы сказать, сколько монет в пятом и шестом мешках?

Решение. $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$; $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$; $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. Числа $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$ можно задать формулой $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Пусть в пятом мешке содержится x монет, а в шестом – y.

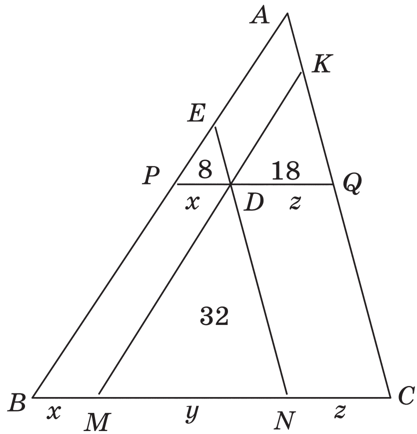
Тогда имеем $\frac{x}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 12$; $\frac{y}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow y = 10$.

5. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник на шесть частей, три из которых являются треугольниками, площади которых равны 8, 18 и 32. Найдите площадь данного треугольника.

Решение. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия (см. рисунок):

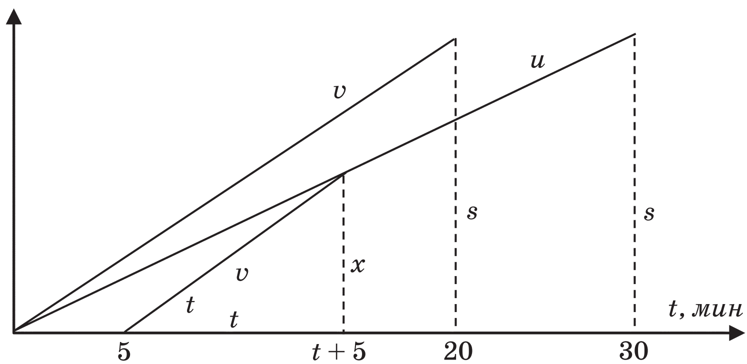
$$\begin{cases} \frac{32}{8} = \frac{y^2}{x^2} \\ \frac{18}{8} = \frac{z^2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 1{,}5x, \end{cases}$$

$$\frac{S_{ABC}}{8} = \frac{(x+y+z)^2}{x^2} = \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right)^2 = (1+2+1{,}5)^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 162.$$



6. Профессор и студент живут в одном доме и ходят пешком в один институт. Студент добирается до места за 20 мин, а профессор – за 30 мин. Через сколько минут студент догонит профессора, если тот выйдет из дома на 5 мин раньше студента?

Решение. Развёртка по времени имеет следующий вид:



Пусть v – скорость студента, u – скорость профессора. Тогда получим:

$$\begin{cases} s = v \cdot 20 \\ s = u \cdot 30 \\ x = vt \\ x = u(t+5) \end{cases} \Rightarrow t = 10.$$

7. Найдите функцию $f(x)$, если известно, что при всех допустимых значениях x она удовлетворяет условию $2f(x)+f\left(\dfrac{-3x-1}{3x+3}\right)=3x-3$.

Решение. Пусть $t=\dfrac{-3x-1}{3x+3}$.

Тогда $3tx+3t=-3x-1 \Rightarrow x=\dfrac{-3t-1}{3t+3}$ и $3x-3=\dfrac{-3t-1}{t+1}-3=\dfrac{-6t-4}{t+1}$.

Получим $2f\left(\dfrac{-3t-1}{3t+3}\right)+f(t)=\dfrac{-6t-4}{t+1}$, или $2f\left(\dfrac{-3x-1}{3x+3}\right)+f(x)=\dfrac{-6x-4}{x+1}$.

Далее имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2f(x)+f\left(\dfrac{-3x-1}{3x+3}\right)=3x-3 \\ 2f\left(\dfrac{-3x-1}{3x+3}\right)+f(x)=\dfrac{-6x-4}{x+1}. \end{cases}$$

Исключим из уравнений $f\left(\dfrac{-3x-1}{3x+3}\right)$. Для этого достаточно первое уравнение помножить на 2 и вычесть второе уравнение

$$3f(x)=6x-6-\frac{-6x-4}{x+1}=\frac{6x^2+6x-2}{x+1}.$$

Окончательно получим $f(x)=\dfrac{6x^2+6x-2}{3(x+1)}$.

Вариант 3

1. Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь 30 км он затрачивает на 2 часа больше, чем мотоциклист. Найдите среднюю скорость каждого из них (в км/ч).

Решение. Пусть скорость велосипедиста (в км/ч) равна v, а мотоциклиста – u. Тогда

$$\begin{cases} s=v\cdot\dfrac{1}{60} \\ s+0{,}8=u\cdot\dfrac{1}{60} \\ 30=u\cdot t \\ 30=v\cdot(t+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48=(u-v) \\ 30=v\cdot\left(\dfrac{30}{u}+2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=60 \\ v=12 \end{cases}$$

2. Вычислите: $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{167}+\sqrt{169}}$.

Решение. $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{167}+\sqrt{169}} =$

$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{1-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\ldots+\frac{\sqrt{167}-\sqrt{169}}{167-169}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{169}}{-2}=6.$$

3. Найдите координаты точки B, симметричной точке $A(1;3)$ относительно прямой $3x+y+14=0$.

Решение. Запишем уравнение прямой, перпендикулярной заданной и проходящей через точку A: $(x-1)-3(y-3)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x-3y+8=0$. Найдём точку пересечения этой прямой и первоначальной:

$$\begin{cases}3x+y+14=0\\ x-3y+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\ y=1.\end{cases}$$

Пусть $B(u;v)$ – искомая точка. Тогда получим

$$\begin{cases}-5=\dfrac{1+u}{2}\\ 1=\dfrac{3+v}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=-11\\ v=-1.\end{cases}$$

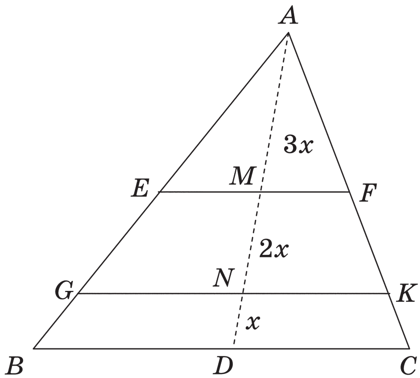
4. Представьте многочлен x^7+x^5+1 в виде произведения двух многочленов.

Решение.

$x^7+x^5+1=x^7+x^6+x^5-x^6+1=(x^7+x^6+x^5)-(x^6-1)=$
$=x^5(x^2+x+1)-(x^3-1)(x^3+1)=(x^2+x+1)(x^5-(x-1)(x^3+1))=$
$=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1).$

5. В треугольнике ABC через точки M и N, лежащие на биссектрисе AD, проведены прямые m и n, параллельные основанию BC, причём $AM:MN:ND=3:2:1$. В каком отношении прямые m и n делят площадь треугольника ABC?

Решение.



Пусть $S_{AEF}=S_1$; $S_{EFKG}=S_2$; $S_{GKCB}=S_3$. Тогда из подобия треугольников имеем

$$\begin{cases}\dfrac{S_1+S_2}{S_1}=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}\\ \dfrac{S_1+S_2+S_3}{S_1}=\left(\dfrac{6}{3}\right)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{16}{9}\\ \dfrac{S_3}{S_1}=\dfrac{11}{9}\end{cases}\Leftrightarrow S_1{:}S_2{:}S_3=9{:}16{:}11.$$

6. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+5}{6-x}}\cdot\frac{(x^2-6x+8)^3(x^2-1)^2}{(x^2+x-2)^3(x^2-10x+26)^5}\geqslant 0.$$

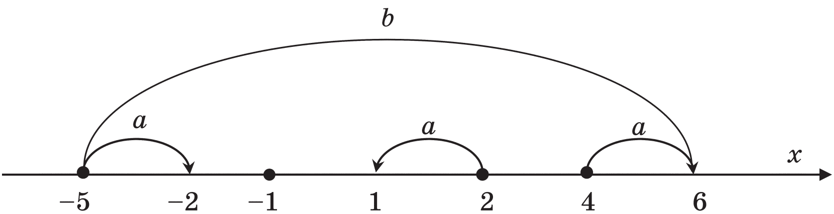
Решение. Имеем

$$\sqrt{\frac{x+5}{6-x}}\cdot\frac{(x^2-6x+8)^3(x^2-1)^2}{(x^2+x-2)^3(x^2-10x+26)^5}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+5)\,(x^2-6x+8)^3(x^2-1)^2}{(6-x)(x^2+x-2)^3(x^2-10x+26)^5}\geqslant 0\\ \dfrac{x+5}{6-x}\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

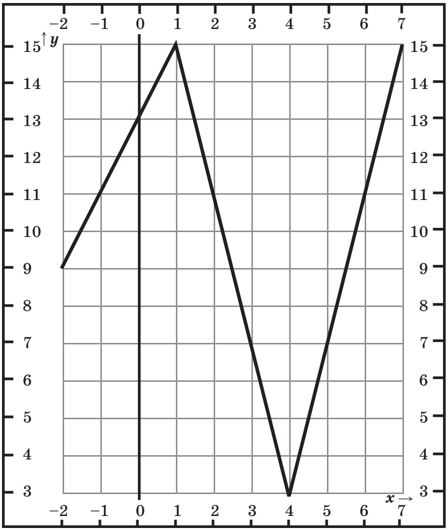
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-2)^3(x-4)^3(x-1)^2(x+1)^2}{(x-6)(x-1)^3(x+2)^3}\leqslant 0\\ \dfrac{x+5}{x-6}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-2)^3(x-4)^3(x+1)^2}{(x-6)(x-1)(x+2)^3}\leqslant 0 & (a)\\ \dfrac{x+5}{x-6}\leqslant 0 & (b)\end{cases}$$



Ответ: $[-5;-2)\cup(1;2]\cup[4;6)\cup\{-1\}$.

7. Для изображённой на графике функции
$y=a\,|x-1|+b|x-m|+cx$ определите параметры a, b, c и m.



Решение.

1) Данная функция – кусочно-линейная с «изломами» в точках $x = 1$ и $x = 4$ – в точках, где выражения под знаком модуля обращаются в нуль, т. е. $m = 4$.

2) При переходе через точку $x = 1$ (слева направо) наклон изменяется на $2a$. Справа от точки $x = 1$ угловой коэффициент равен -4, а слева $+2$. Изменение коэффициента наклона равно $(-4) - (+2) = -6$. Из равенства $2a = -6$ получим $a = -3$.

3) Теперь рассмотрим вторую точку «излома» ($x = 4$). Коэффициент наклона изменяется от -4 слева от этой точки до 4 справа от нее. Изменение коэффициента равно 8. Значит, $2b = 8 \Leftrightarrow b = 4$.

4) При $x > 4$ коэффициент наклона равен $a + b + c$ и по графику видно, что он равен 4.

Следовательно, $(-3) + 4 + c = 4 \Leftrightarrow c = 3$.

Ответ: $a = -3$; $b = 4$; $c = 3$; $m = 4$.

Вариант 4

1) 12; 48; 2) 17/3; 3) $(-2;2)$; 4) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$; 5) 1:8:27; 6) $(-2;5)\cup\{-7;-5;-4;-3\}$; 7) ($a = 4$; $b = -3$; $c = -3$; $m = 2$).

Вариант 5

1) 12; 72; 2) 13/5; 3) $(-9;-4)$; 4) $(x^2-x+1)(x^5+x^4+x^3-x-1)$; 5) 4:21:11; 6) $[-6;-4)\cup(-4;-3]\cup(4;7)\cup\{3\}$; 7) $(a=-3;\ b=4;\ c=3;\ m=2)$.

Вариант 6

1) 12; 72; 2) 3; 3) $(-1;18)$; 4) $(x^2-x+1)(x^3+x^2-1)$; 5) 9:7:20; 6) $[-6;-2)\cup(2;4)\cup\{1\}$; 7) $(a=-2;\ b=3;\ c=3;\ m=2)$.

11 класс

Вариант 1

1. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+4}-|2x-1|}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\geqslant 1$.

Решение. Имеем

$$\frac{\sqrt{x+4}-|2x-1|}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+4}-|2x-1|}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}-1\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\geqslant 0.$$

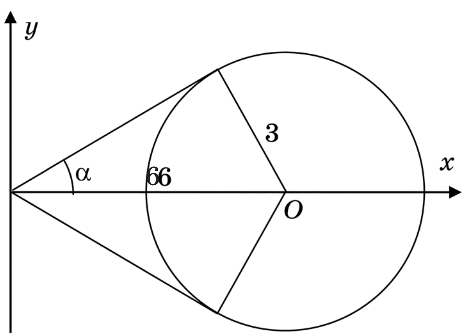
Используем метод замены множителей:

$$\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+4)-(8-x)}{(8-x)-(2x-1)^2}\geqslant 0\\ x\in[-4;8]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2x-4}{4x^2-3x-7}\leqslant 0\\ x\in[-4;8]\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[-4;-1)\cup\left(\frac{7}{4};2\right].$$

2. Определите, под каким углом видно из начала координат множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\leqslant 12x-27$.

Решение. Имеем $(x-6)^2+y^2\leqslant 9$ – круг с центром в точке $(6;0)$ радиуса 3.



Поскольку $\sin\alpha = \frac{3}{6} = 0{,}5$, то $\alpha = 30^\circ$; $2\alpha = 60^\circ$.

3. В свежих грибах содержание воды колеблется от 90 до 99%, а в сушёных – от 30 до 35%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

Решение. Вес грибов уменьшится в наибольшее число раз, если в свежих грибах содержание воды было 99%, а в сушёных – 30%. Пусть в сушёных грибах 30 г воды и 70 г грибной массы (всего 100 г). Тогда в свежих грибах 70 г грибной массы и $70\cdot99$ г воды. Всего получим 7000 г. Следовательно, вес грибов уменьшится в 70 раз.

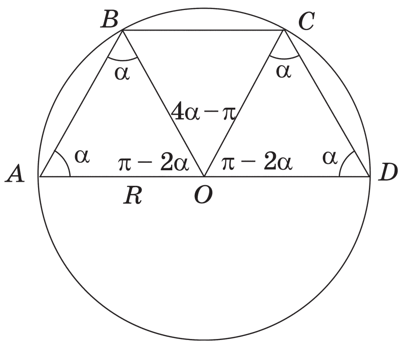
4. Трапеция *ABCD* вписана в окружность. При этом нижнее основание трапеции *AD* – это диаметр окружности, а верхнее основание *BC* – хорда. Найдите острый угол трапеции, при котором она имеет наибольшую площадь.

Решение. Только около равнобокой трапеции можно описать окружность. Поэтому $\angle A = \angle D = \alpha$. И поскольку O – центр окружности, то $\angle AOB = \angle DOC = \alpha$.

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}R^2\sin(\pi - 2\alpha) + \frac{1}{2}R^2\sin(4\alpha - \pi) = R^2\sin(2\alpha) - \frac{1}{2}R^2\sin(4\alpha) = \frac{R^2}{2}(2\sin(2\alpha) - \sin(4\alpha)) \Rightarrow \max_{\alpha\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$S' = 4\cos2\alpha - 4\cos4\alpha = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = \pm2\alpha + 2\pi n \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

При переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на минус – достаточное условие максимума.



5. Обыкновенную дробь $\frac{57}{67}$ обратили в бесконечную десятичную дробь, затем стёрли первую цифру после запятой и об-

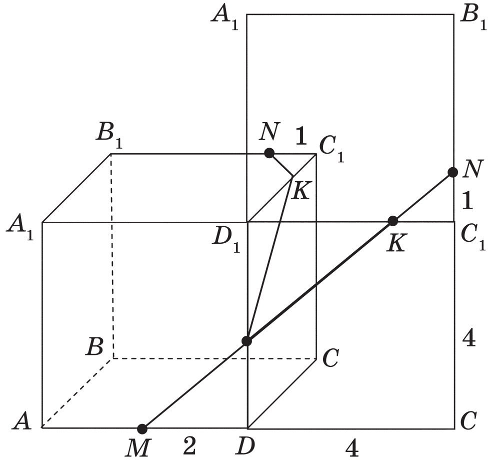
ратили полученную десятичную дробь в обыкновенную. Какую дробь получили в результате?

Решение. Имеем $\frac{57}{67} = \overline{0,8abc...}$ После стирания цифры 8 получили $\overline{0,abc...}$.

Это число равно $\overline{0,abc...} = (\overline{0,8abc...} - 0,8) \cdot 10 = \left(\frac{57}{67} - \frac{4}{5}\right) \cdot 10 = \frac{34}{67}$.

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длиной 4. На середине ребра AD взята точка M, а на ребре B_1C_1 на расстоянии 1 от вершины C_1 взята точка N. Найдите длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

Решение. Рассмотрим развёртку куба:



Наименьшее расстояние между точками M и N по поверхности куба равно $|MN| = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} = ax + (a+1)\pi$ не имеет решений.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

Её область определения $D(f) = (-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$. На каждом из этих двух интервалов функция непрерывна. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x\cdot\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1,\ x \neq -1.$$

Поскольку $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} \in (-\pi; \pi)$.

Отсюда следует, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ или $\operatorname{arctg} x + + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} = -\frac{3\pi}{4}$.

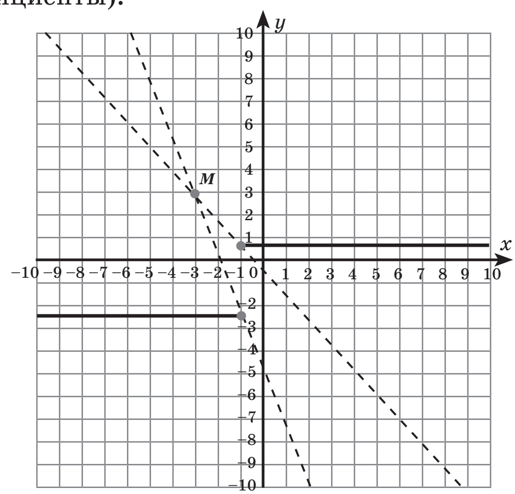
На интервале $(-1;\infty)$ функция непрерывна и равна константе. Для определения константы достаточно подставить любое значение, например $x = 0$. Получим $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

На интервале $(-\infty;-1)$ функция также непрерывна и равна константе. Для определения константы достаточно подставить любое значение, например $x = -2$. Получим $\operatorname{arctg}(-2) + \operatorname{arctg}(-3) < 0$. Следовательно, $f(x) = -\frac{3\pi}{4}$.

В итоге $f(x) = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4}, & x < -1 \\ \frac{\pi}{4}, & x > -1. \end{cases}$

Рассмотрим теперь правую часть исходного уравнения: $y = ax + (a+1)\pi$ или $y = a(x+\pi) + \pi$.

Это уравнение задаёт пучок прямых, проходящих через точку $M(-\pi;\pi)$. Параметр a определяет наклоны прямых (угловые коэффициенты).



Уравнение не имеет решений тогда и только тогда, когда лучи пучка не пересекают график функции $f(x)$. В нашем случае получим $a \in \left[-\frac{7\pi}{4(\pi-1)}; -\frac{3\pi}{4(\pi-1)}\right]$.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$x^3 + 2\sqrt{x+3} \leqslant 7 - \sqrt[3]{3x+5}.$$

Решение. В левой части неравенства – возрастающая функция, а в правой – убывающая. Они совпадают только в одной точке $x = 1$. С учётом ОДЗ получим $x \in [-3;1]$.

2. Три тракторные бригады вместе вспахали поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе могут вспахать за 6 дней, а первая и третья вместе – за 8 дней. Во сколько раз производительность второй бригады больше, чем производительность третьей?

Решение. Пусть x, y и z – производительности бригад. Примем всю работу за 1. Тогда получим

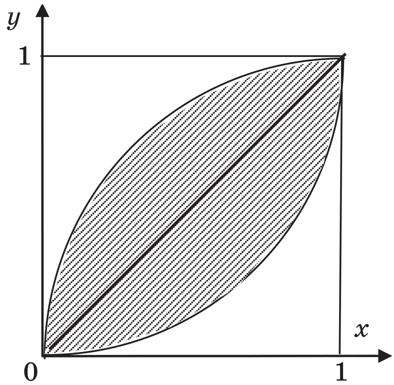
$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{4} \\ x + y = \frac{1}{6} \\ x + z = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{24} \\ y = \frac{1}{8} \\ z = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{z} = 1{,}5.$$

3. Вычислите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} |x - 0{,}5| \leqslant 0{,}5 \\ y^2 \leqslant y \\ (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} |x - 0{,}5| \leqslant 0{,}5 \\ y^2 \leqslant y \\ (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

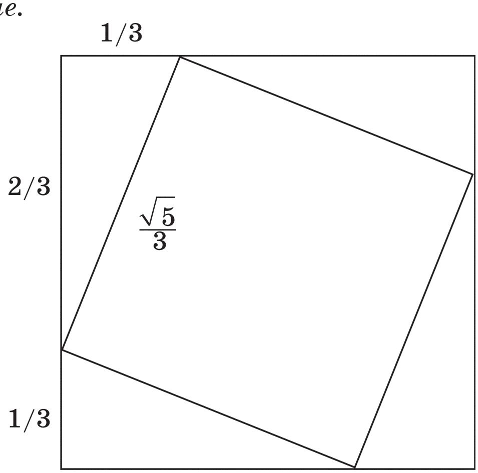


Фигура состоит из двух сегментов.

Площадь равна $S = 2\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$.

4. Имеется последовательность квадратов, площадь первого из которых равна 1. Каждый следующий квадрат вписан в предыдущий так, что его вершины делят стороны предыдущего в отношении 1:2. Найдите сумму площадей всех квадратов этой последовательности.

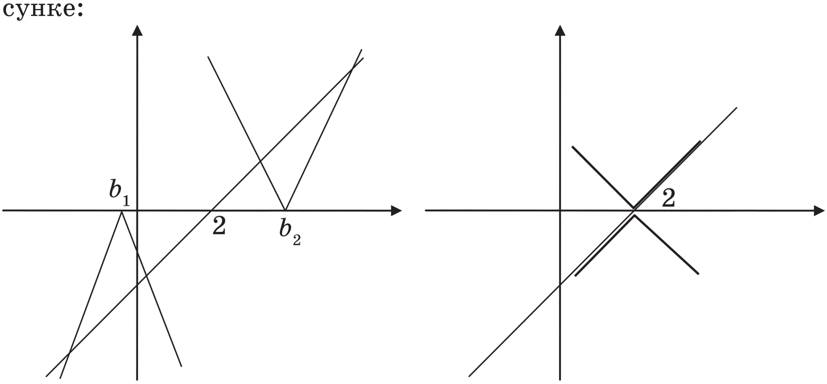
Решение.



Поскольку все квадраты подобны с коэффициентом подобия $\frac{\sqrt{5}}{3}$, то площади квадратов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$. Сумма прогрессии равна $s = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

5. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнение $a|x-b| = x-2$ имеет более одного корня.

Решение. Возможны четыре случая, изображённые на рисунке:



1-й случай: $b < 2$; $a < -1$.
2-й случай: $b > 2$; $a > 1$.
3-й случай: $b = 2$; $a = 1$.
4-й случай: $b = 2$; $a = -1$.

6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin x - \cos 25 = 0$.

Решение.

$$\sin x - \cos 25 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 25\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - 25 + 2\pi n \\ x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 25\right) + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi(1+4n)}{2} - 25 \\ x = \frac{\pi(1+4n)}{2} + 25. \end{array}\right.$$

В первой серии наибольший отрицательный корень равен $x_1 = \frac{13\pi}{2} - 25$, а во второй – $x_2 = -\frac{19\pi}{2} + 25$. Сравнение этих величин показывает, что $x_1 > x_2$. Следовательно, наибольший отрицательный корень уравнения $x_1 = \frac{13\pi}{2} - 25$.

7. Искомое натуральное число больше 400 и меньше 500. Найдите это число, если сумма его цифр равна 9 и это число составляет ровно $\frac{47}{36}$ от числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

Решение. Очевидно, первая цифра искомого числа равна 4. Число имеет вид $\overline{4xy}$, причём $4 + x + y = 9 \Leftrightarrow x + y = 5$.

Кроме того, $\overline{4xy} = \frac{47}{36} \cdot \overline{yx4} \Leftrightarrow 36 \cdot (400 + 10x + y) = 47 \cdot (100y + 10x + 4)$.

Решив полученную систему уравнений, получим $x = 2$; $y = 3$. Искомое число 423.

Вариант 3

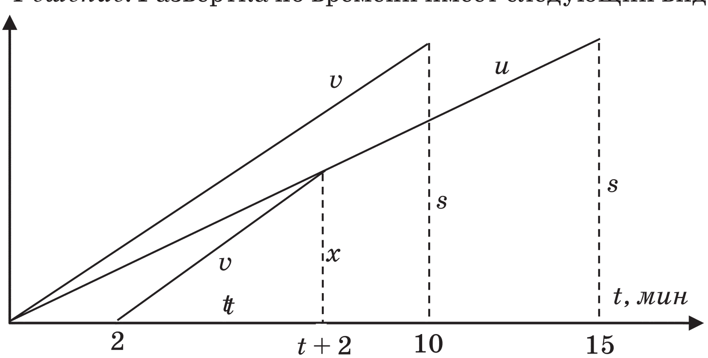
1. Найдите наименьшее значение функции
$y = (x + 1)(x + 2)(x + 5)(x + 6)$.

Решение. Имеем $y = (x + 1)(x + 2)(x + 5)(x + 6) = ((x + 1)(x + 6))((x + 2)(x + 5)) = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)$.

Пусть $x^2 + 7x + 6 = t$. Тогда наименьшее значение t достигается в точке $x = -3{,}5$ и равно $-6{,}25$. Функция имеет вид $y(t) = t(t + 4) = t^2 + 4\,t$, $t \in [-6{,}25;\infty)$. Поскольку вершина параболы $t = -2$ принадлежит промежутку $[-6{,}25;\infty)$, то наименьшее значение достигается в точке $t = -2$ и равно -4.

2. Саша и Маша живут в одном доме и ходят пешком в одну школу. Саша добирается до школы за 10 мин, а Маша – за 15 мин. Через сколько минут Саша догонит Машу, если она выйдет из дома на 2 мин раньше Саши?

Решение. Развёртка по времени имеет следующий вид:



Пусть v – скорость Саши, u – скорость Маши. Тогда получим:

$$\begin{cases} s = v\cdot 10 \\ s = u\cdot 15 \\ x = vt \\ x = u(t+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v = 3u \\ vt = u(t+2) \end{cases} \Rightarrow t = 4.$$

3. Найдите последнюю цифру числа $7\cdot 2^{2014} + 3^{2014}$.

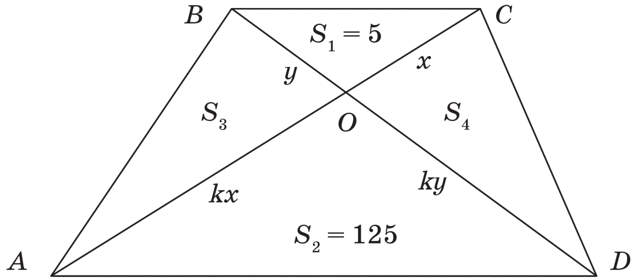
Решение. Выпишем степени чисел 2^n и 3^n:

n	2^n	3^n
1	2	3
2	4	9
3	8	27
4	16	81
5	32	243
6	64	729
7	128	2187
8	256	6561

Выписывая последние цифры степеней двойки и тройки, нетрудно увидеть цикличность – цифры повторяются с периодом 4. Поскольку $2^{2014} = 2^{503\cdot 4+2}$, то число 2^{2014} оканчивается на 4, а число $7\cdot 2^{2014}$ оканчивается на 8. Кроме того $3^{2014} = 3^{503\cdot 4+2}$, следовательно, оканчивается на 9. Значит, сумма $7\cdot 2^{2014} + 3^{2014}$ оканчивается на цифру 7.

4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно 5 и 125. Найдите площадь трапеции.

Решение.



Имеем

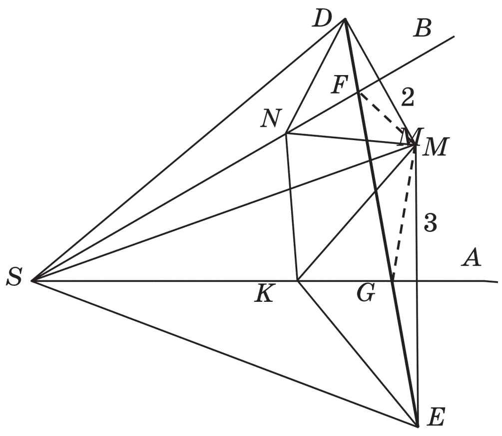
$$\begin{cases} S_1 = 0{,}5 \cdot xy \cdot \sin\alpha \\ S_2 = 0{,}5 \cdot k^2 xy \cdot \sin\alpha \\ S_3 = S_4 = 0{,}5 \cdot kxy \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Площадь всей трапеции равна

$S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = 5 + 125 + 2 \cdot 25 = 180.$

5. Дан угол $\angle ASB = 30^\circ$ с вершиной S. Точка M расположена внутри угла на расстоянии 2 и 3 от его сторон. В данный угол вписать треугольник MNK наименьшего периметра, так чтобы вершины N и K лежали на различных сторонах данного угла. Чему равен периметр такого треугольника?

Решение. Построим точки D и E, симметричные точке M относительно лучей SB и SA.



Поскольку $MN = DN$; $MK = KE$, то периметр треугольника MNK равен длине ломаной $DNKE$. Минимальный периметр соответствует минимальной длине ломаной, т.е. DE, – треугольник MFG имеет минимальный периметр, по длине равный отрезку DE. Поскольку $\angle DME = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, то по теореме косинусов находим длину DE:

$$P = |DE| = \sqrt{4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot \cos 150^\circ} = \sqrt{52 + 24\sqrt{3}} = 2\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}.$$

6. Решите уравнение $12\sin^3 x + 16\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$.

Решение. Пусть $\sin x = t, |t| \leqslant 1$. Тогда $12t^3 + 16t^2 - 5t - 3 = 0$. Очевидно, $t \neq 0$. Тогда разделим обе части уравнения на t^3: $\dfrac{3}{t^3} + \dfrac{5}{t^2} - \dfrac{16}{t} - 12 = 0$. Заменим $z = \dfrac{1}{t}$; $|z| \geqslant 1$. Получим

$$\begin{cases} 3z^3 + 5z^2 - 16z - 12 = 0 \\ |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

Теперь умножим уравнение на 9 и введём ещё одну замену (последнюю): $3z = y$, $|y| \geqslant 3$. Тогда

$$\begin{cases} y^3 + 5y^2 - 48y - 108 = 0 \\ |y| \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 6 \\ y = -9. \end{array}\right.$$

Учитывая замены, получим

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0{,}5 \\ \sin x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n \\ x = (-1)^{n+1} \arcsin \dfrac{1}{3} + \pi n. \end{array}\right.$$

7. Найдите все значения параметра p, при которых функция $f(x) = 3\sqrt{192 + 16x - x^2} - 4\sqrt{96 - 4x - x^2} - 2\sqrt{x^2 - 64} + px$ является чётной.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 192 + 16x - x^2 \geqslant 0 \\ 96 - 4x - x^2 \geqslant 0 \\ x^2 - 64 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)(x-24) \leqslant 0 \\ (x+12)(x-8) \leqslant 0 \\ x^2 - 64 \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-8; 8\}$$

Поскольку функция

$$f(x) = 3\sqrt{(x+8)(24-x)} - 4\sqrt{(x+12)(8-x)} - 2\sqrt{x^2 - 64} + px$$

чётная, потребуем выполнения равенства $f(-8) = f(8)$:

$$-4\sqrt{4\cdot 16} - 8p = 3\sqrt{16\cdot 16} + 8p \Leftrightarrow p = -5.$$

Ответ: $p = -5$.

Вариант 4

1) -25; 2) 6; 3) 3; 4) 50; 5) $\sqrt{100+96\cos 15^\circ}$ или $\sqrt{100+48(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$; 6) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n$; $n\in Z$; 7) 5.

Вариант 5

1) $-25/4$; 2) 12; 3) 7; 4) 50; 5) $\sqrt{148}$; 6) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; $(-1)^{n}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n$; $n\in Z$; 7) 1.

Вариант 6

1) -25; 2) 12; 3) 8; 4) 75; 5) $\sqrt{164+160\cos 75^\circ}$ или $\sqrt{164+40\sqrt{6}-40\sqrt{2}}$; 6) $(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n$; $n\in Z$; 7) 9.

Содержание

Учебное издание

Шагин Вадим Львович

МАТЕМАТИКА
Международная олимпиада молодёжи
2015

Редактор *Т. А. Чамаева*
Художник обложки *А. М. Драговой*
Компьютерная вёрстка *Г. М. Драговой*
Корректоры *И. Н. Панкова, Л. М. Бахарева*

Подписано в печать 26.03.2015. Формат $60\times90^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура FreeSetC.
Усл. печ. л. 4,5. Уч.-изд. л. 4,5. Заказ

Издательство «ВИТА-ПРЕСС».
121087, Москва, ул. Барклая, д. 6, стр. 5. Тел.: 8(499) 709-70-57, 709-70-78.
E-mail: info@vita-press.ru www.vita-press.ru