

## **М-оценки коэффициентов 2D-авторегрессии с необязательно выпуклой функцией потерь**

### **77-30569/246206**

# 10, октябрь 2011

В. Б. Горяинов\*, Е. Р. Горяинова\*\*

УДК 519.234.3

\*МГТУ им. Н.Э. Баумана

\*\*Высшая школа экономики

[mathmod@bmstu.ru](mailto:mathmod@bmstu.ru)

### **1. Введение**

Во многих областях науки и техники, в частности в теории распознавания образов и обработки изображений [1] и в эконометрике [2] для решения ряда задач фильтрации и прогноза используется модель 2D-авторегрессии

$$X_{ij} = a_{10}X_{i-1,j} + a_{01}X_{i,j-1} + a_{11}X_{i-1,j-1} + \epsilon_{ij}, \quad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

в которой неизвестные авторегрессионные коэффициенты  $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})^T$  подлежат оцениванию по наблюдениям авторегрессионного поля  $X_{ij}$  на прямоугольной решетке  $i = 0, 1, \dots, m, j = 0, 1, \dots, n$ . Если обновляющее (инновационное) поле  $\epsilon_{ij}$  не является гауссовским и/или поле  $X_{ij}$  наблюдается с ошибками, то наиболее популярные оценки наименьших квадратов параметра  $a$  [3] теряют свою эффективность. В этом случае целесообразно использовать более робастные процедуры [4–6]. В частности, М-оценка с функцией потерь Хьюбера частично наследует преимущества как оценок наименьших квадратов, так и оценок наименьших модулей [7]. В [7] для М-оценок с выпуклой функцией потерь (к которым относится функция Хьюбера) найдено асимптотическое распределение, оказавшееся нормальным, что позволило строить доверительные интервалы для коэффициентов  $a$  уравнения (1) и проверять различные статистические гипотезы об  $a$ . Более робастные оценки получаются, если вместо

неограниченной функции Хьюбера взять подходящую ограниченную функцию, например, бивес Тьюки. Однако эта функция не является выпуклой.

В настоящей работе доказана асимптотическая нормальность М-оценок коэффициентов  $a$  уравнения (1) с необязательно выпуклой функцией потерь. Методом Монте-Карло проведено сравнение М-оценок с функциями потерь Хьюбера и Тьюки с оценками наименьших квадратов в предположении о наблюдении поля  $X_{ij}$  со случайными аддитивными ошибками.

## 2. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Рассмотрим поле (1), где  $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$  — неизвестный вектор параметров, а  $\epsilon_{ij}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения  $F(x)$  и плотностью  $f(x)$ . Будем предполагать поле (1) стационарным. Как показано в [3], достаточным условием этого является отсутствие корней уравнения

$$1 - a_{10}z_1 - a_{01}z_2 - a_{11}z_1z_2 = 0$$

внутри единичного полидиска

$$|z_1| \leq 1, \quad |z_2| \leq 1,$$

что равносильно выполнению условий (см. [8])

$$|a_{pq}| < 1 \text{ для любых } (p, q) \in \mathcal{I} = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\},$$

$$(1 + a_{10}^2 - a_{01}^2 - a_{11}^2)^2 - 4(a_{10} + a_{01}a_{11})^2 > 0,$$

$$1 - a_{01}^2 > |a_{10} + a_{01}a_{11}|.$$

Обозначим через  $\hat{a} = (\hat{a}_{10}, \hat{a}_{01}, \hat{a}_{11})^T$  М-оценку параметра  $a$ , построенную по наблюдениям  $X = \{X_{ij}\}$ ,  $i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n$ . А именно,  $\hat{a}$  — точка минимума функции

$$\mathcal{L}(a) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \rho(X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1}). \quad (2)$$

В формуле (2) функция  $\rho$  может быть достаточно произвольной. Так, если  $\rho(x) = x^2$ , то М-оценки превращаются в оценки наименьших квадратов, если

$\rho(x) = |x|$ , то М-оценки совпадают с оценками наименьших модулей, а если  $\rho(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$ , то М-оценки становятся оценками максимального правдоподобия. В [7] рассматривалась функция Хьюбера [9, 10]

$$\rho_k(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq k, \\ 2k|x| - k^2, & \text{если } |x| > k, \end{cases}$$

где  $k$  — неотрицательный параметр. Эта функция является квадратичной в окрестности  $(-k, k)$  начала координат и растет линейно на бесконечности. Интуитивно ясно, что М-оценки с такой функцией должны наследовать лучшие свойства оценок наименьших квадратов и наименьших модулей. При  $k \rightarrow \infty$  М-оценки с  $\rho$ -функцией Хьюбера переходят в оценки наименьших квадратов, а при  $k \rightarrow 0$  — в оценки наименьших модулей.

**Теорема.** Пусть  $\hat{a}$  — минимум функции (2), где  $X_{ij}$  — стационарное поле, описываемое уравнением (1). Пусть также для  $\psi(x) = \rho'(x)$

$$\mathbb{E}[\psi(\epsilon_{11})] = 0, \quad (3)$$

$$\mathbb{E}[\psi^2(\epsilon_{11})] < \infty, \quad (4)$$

$$\mathbb{E}[\psi'(\epsilon_{11})] > 0, \quad (5)$$

а  $\psi''(x)$  ограничена на  $\mathbb{R}$ .

Тогда при  $m, n \rightarrow \infty$  случайный вектор  $\sqrt{mn}(\hat{a} - a^0)$  асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$\frac{\mathbb{E}[\psi^2(\epsilon_{11})]}{\mathbb{E}[\psi'(\epsilon_{11})]^2} B^{-1},$$

где  $B$  — ковариационная матрица вектора  $Z_{11} = (X_{01}, X_{10}, X_{00})$ .

**Доказательство.** Если  $a$  — минимум функции  $\mathcal{L}(a)$  в (2), то  $a$  является решением системы уравнений

$$L(a) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi(X_{ij} - Z_{ij}^T a) Z_{ij}, \quad (6)$$

где  $Z_{ij} = (X_{i-1,j}, X_{i,j-1}, X_{i-1,j-1})^T$ , а  $T$  — символ операции транспонирования.

Идея доказательства теоремы состоит в приближении функции  $L(a)$  ее линейной частью  $\tilde{L}(a)$ , доказательства близости  $\hat{a}$  и корня  $\tilde{a}$  уравнения  $\tilde{L}(a) = 0$  и установлении асимптотической нормальности  $\tilde{a}$ .

Установим на парах индексов  $(i, j)$  отношение порядка, полагая  $(i, j) < (k, l)$ , если: 1)  $j < l$  или 2)  $j = l$  и  $i < k$ . Упорядочим массивы  $\epsilon_{ij}$ ,  $X_{ij}$ ,  $Z_{ij}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n$  только что введенным отношением порядка на парах  $(i, j)$  их индексов. Обозначим через  $\mathfrak{A}_{ij}$   $\sigma$ -алгебру, порожденную случайными величинами  $\{\epsilon_{kl}, (k, l) < (i, j)\}$ . Массив  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{A}_{ij}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n$  упорядочим так же как массивы  $\epsilon_{ij}$ ,  $X_{ij}$  и  $Z_{ij}$ .

Заметим, что ковариационная матрица  $E(Z_{ij}Z_{ij}^T)$  вектора  $Z_{ij}$  в силу стационарности поля  $X_{ij}$  не зависит от  $i$  и  $j$  и совпадает с матрицей  $B$ .

Так как  $\epsilon_{ij}$  не зависит от  $\mathfrak{A}_{ij}$ , а  $Z_{ij}$  измерим относительно  $\mathfrak{A}_{ij}$ , то

$$\begin{aligned} E[\psi'(\epsilon_{ij})Z_{ij}Z_{ij}^T] &= E(E[\psi'(\epsilon_{ij})Z_{ij}Z_{ij}^T|\mathfrak{A}_{ij}]) = \\ &= E(Z_{ij}Z_{ij}^T E[\psi'(\epsilon_{ij})|\mathfrak{A}_{ij}]) = BE[\psi'(\epsilon_{11})]. \end{aligned}$$

Случайное поле  $\psi'(\epsilon_{ij})Z_{ij}Z_{ij}^T$  является стационарным и эргодическим как функция эргодических полей  $\epsilon_{ij}$  и  $X_{ij}$  [11, с. 170] и по закону больших чисел для эргодических полей [11, с. 181]

$$\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi'(\epsilon_{ij})Z_{ij}Z_{ij}^T \rightarrow E[\psi'(\epsilon_{11})Z_{ij}Z_{ij}^T] = BE[\psi'(\epsilon_{11})]. \quad (7)$$

Так как  $B$  — ковариационная матрица, то она положительно определена. Поэтому существует невырожденная симметричная положительно определенная матрица  $V$  размера  $3 \times 3$  такая, что  $B = V^2$ . Сделаем замену переменных

$$\alpha = \sqrt{mn}V(a - a^0), \quad a = a^0 + \frac{V^{-1}\alpha}{\sqrt{mn}}.$$

Тогда  $\hat{\alpha} = \sqrt{mn}V(\hat{a} - a^0)$  является решением уравнения  $\Phi(\alpha) = 0$ , где

$$\Phi(\alpha) = -\frac{1}{E[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi \left( \epsilon_{ij} - \frac{Z_{ij}^T V^{-1} \alpha}{\sqrt{mn}} \right) Z_{ij}.$$

Обозначим через  $\tilde{\alpha}$  решение уравнения  $\Psi(\alpha) = 0$ , где

$$\Psi(\alpha) = \alpha - \frac{1}{E[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi(\epsilon_{ij})Z_{ij}. \quad (8)$$

По центральной предельной теореме для мартингал-разностей [12, р. 171]  $\tilde{\alpha}$  асимптотически нормальна с математическим ожиданием

$$\begin{aligned} E\tilde{\alpha} &= \frac{1}{E[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(E[\psi(\epsilon_{ij})Z_{ij}|\mathfrak{A}_{ij}]) = \\ &= \frac{1}{E[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(Z_{ij}E[\psi(\epsilon_{ij})|\mathfrak{A}_{ij}]) = \\ &= \frac{1}{E[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(Z_{ij}E[\psi(\epsilon_{ij})]) = 0 \end{aligned}$$

и ковариационной матрицей

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{\alpha}) &= \frac{2}{mn(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{(i,j)<(k,l)} E(E[\psi(\epsilon_{ij})\psi(\epsilon_{kl})V^{-1}Z_{ij}(V^{-1}Z_{kl})^T|\mathfrak{A}_{ij}]) + \\ &+ \frac{1}{mn(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(E[\psi^2(\epsilon_{ij})V^{-1}Z_{ij}(V^{-1}Z_{ij})^T|\mathfrak{A}_{ij}]) = \\ &= \frac{2}{mn(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{(i,j)<(k,l)} E(\psi(\epsilon_{ij})E[\psi(\epsilon_{kl})V^{-1}Z_{ij}(V^{-1}Z_{kl})^T|\mathfrak{A}_{ij}]) + \\ &+ \frac{1}{mn(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(\psi^2(\epsilon_{ij})E[V^{-1}Z_{ij}(V^{-1}Z_{ij})^T|\mathfrak{A}_{ij}]) = \\ &= \frac{2}{mn(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{(i,j)<(k,l)} E[\psi(\epsilon_{ij})E[\psi(\epsilon_{kl})V^{-1}Z_{ij}(V^{-1}Z_{kl})^T]] + \\ &+ \frac{1}{mn(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E[\psi^2(\epsilon_{ij})E[V^{-1}Z_{ij}(V^{-1}Z_{ij})^T]] = \frac{E[\psi^2(\epsilon_{11})]}{(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} I, \end{aligned}$$

где  $I$  — единичная матрица.

Покажем, что  $\hat{\alpha} - \tilde{\alpha} = o_p(1)$  при  $m, n \rightarrow \infty$ , откуда будет следовать асимптотическая нормальность  $\hat{\alpha}$  и, стало быть  $\hat{\alpha}$ . Разлагая  $\Phi(\alpha)$  по формуле Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) - \Psi(\alpha) &= \\ &= -\frac{1}{E[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi \left( \epsilon_{ij} - \frac{Z_{ij}^T V^{-1} \alpha}{\sqrt{mn}} \right) Z_{ij} - \alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\mathbb{E}[\psi'(\epsilon_{11})]\sqrt{mn}} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi(\epsilon_{ij}) Z_{ij} = \\
& = \frac{1}{\mathbb{E}[\psi'(\epsilon_{11})]mn} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi'(\epsilon_{ij}) Z_{ij}^T V^{-1} \alpha Z_{ij} - \alpha + \\
& + \frac{1}{2(mn)^{3/2} \mathbb{E}[\psi'(\epsilon_{11})]} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi'' \left( \epsilon_{ij} - \tau_{ij} \frac{Z_{ij}^T V^{-1} \alpha}{\sqrt{mn}} \right) |Z_{ij}^T V^{-1} \alpha|^2 Z_{ij} + \\
& \qquad \qquad \qquad + o_p(1), \quad 0 < \tau_{ij} < 1.
\end{aligned}$$

Учитывая (7), получим, что

$$\frac{1}{\mathbb{E}[\psi'(\epsilon_{11})]mn} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi'(\epsilon_{ij}) Z_{ij}^T V^{-1} \alpha Z_{ij} - \alpha = o_p(1).$$

Из ограниченности  $\psi''(x)$  и положительной определенности  $V^{-2}$  следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left| \frac{1}{\mathbb{E}[\psi'(\epsilon_{11})](mn)^{3/2}} V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi'' \left( \epsilon_{ij} - \tau_{ij} \frac{Z_{ij}^T V^{-1} \alpha}{\sqrt{mn}} \right) |Z_{ij}^T V^{-1} \alpha|^2 Z_{ij} \right| & \leq \\
& \leq \text{Const} |\alpha|^2 \left( \max \left| \frac{Z_{ij}}{\sqrt{mn}} \right| \right) V^{-1} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[Z_{ij}^T V^{-2} Z_{ij}] = o_p(1)
\end{aligned}$$

равномерно для любого  $\alpha$  из произвольного компактного множества в  $\mathbb{R}$ . Поэтому

$$\Phi(\alpha) - \Psi(\alpha) = o_p(1) \quad \text{при } m, n \rightarrow \infty.$$

Из независимости  $\epsilon_{ij}$  от  $Z_{ij}$  и от  $\epsilon_{kl}$  и  $\tilde{X}_{kl}$  при  $(k, l) < (i, j)$  следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |\Psi(\alpha) - \alpha|^2 & = \mathbb{E}[|\tilde{\alpha}|^2] = \mathbb{E} \left| V^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \psi(\epsilon_{ij}) Z_{ij} \right|^2 = \\
& = \mathbb{E}[|\psi(\epsilon_{11})|^2] \mathbb{E}[Z_{11}^{-2} Z_{11}^T] < \infty.
\end{aligned}$$

Поэтому можно выбрать постоянную  $K$  таким образом, чтобы  $\mathbb{P}\{|\Psi(\alpha) - \alpha|^2 < K\}$  была сколь угодно большой. Так как

$$|\Phi(\alpha) - \alpha| \leq |\Phi(\alpha) - \Psi(\alpha)| + |\Psi(\alpha) - \alpha| \leq \text{Const}_1 \text{ для всех } \alpha \in [-K, K],$$

то по теореме Брауэра [13, с. 506] существует неподвижная точка  $\hat{\alpha}$  у функции  $h(\alpha) = \Phi(\alpha) - \alpha$ , т.е.  $\Phi(\hat{\alpha}) = 0$ , причем  $|\hat{\alpha}| \leq K$  с вероятностью сколь угодно близкой к 1. Отсюда и из (8) следует, что

$$|\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}| = |\Psi(\hat{\alpha})| = |\Phi(\hat{\alpha}) - \Psi(\hat{\alpha})| \rightarrow 0$$

по вероятности.

Таким образом  $\hat{\alpha}$  асимптотически нормальна с математическим ожиданием  $\alpha$  и ковариационной матрицей  $\frac{E[\psi^2(\epsilon_{11})]}{(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} I$ , а  $\hat{a}$  асимптотически нормальна с математическим ожиданием  $\alpha$  и ковариационной матрицей  $\frac{E[\psi^2(\epsilon_{11})]}{(E[\psi'(\epsilon_{11})])^2} B^{-1}$ . Теорема доказана.

### Пример.

При помощи пакета MATLAB были смоделированы  $N = 500$  матриц  $X_{ij}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n$  размера  $m = n = 30$  значений поля (1) с  $a = (0.40, -0.50, 0.90)$ . Случайные величины  $\epsilon_{ij}$  в (1) предполагались гауссовскими с математическим ожиданием  $E[\epsilon_{ij}] = 0$  и дисперсией  $D[\epsilon_{ij}] = 1$ . Каждое сотое значение  $X_{ij}$  искажалось ошибкой  $v_{ij}$  — гауссовской случайной величиной с  $E[v_{ij}] = 0$  и дисперсией  $D[v_{ij}] = 81$ . Таким образом, наблюдалось поле

$$Y_{ij} = X_{ij} + \eta_{ij}v_{ij},$$

где бернуллиевская случайная величина  $\eta_{ij}$  принимала значения 1 и 0 с вероятностями  $\gamma = 0.01$  и  $1 - \gamma = 0.99$  соответственно. Случайные величины  $\epsilon_{ij}$ ,  $v_{ij}$  и  $\eta_{ij}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n$ , предполагались независимыми.

Средние арифметические по  $N = 500$  реализациям оценок наименьших квадратов, М-оценок Хьюбера и М-оценок Тьюки параметра  $a = (0.40, -0.50, 0.90)$  равны соответственно  $(0.2619, -0.4425, 0.7144)$ ,  $(0.3413, -0.4755, 0.8367)$  и  $(0.3967, -0.4980, 0.8959)$ .

Средние квадратические отклонения по  $N = 500$  реализациям оценок наименьших квадратов, М-оценок Хьюбера и М-оценок Тьюки параметра  $a = (0.40, -0.50, 0.90)$  равны соответственно  $(0.0645, 0.0408, 0.0866)$ ,  $(0.0342, 0.0225, 0.0351)$  и  $(0.0273, 0.0234, 0.0278)$ .

Таким образом, результаты моделирования свидетельствуют о преимуществе М-оценок с функцией потерь Тьюки над М-оценками с функцией потерь Хьюбера и в особенности над оценками наименьших квадратов.

### 3. Заключение

М-оценки параметров  $2D$ -авторегрессионной модели являются состоятельными и асимптотически нормальными. Они значительно превосходят в эффективности оценки наименьших квадратов и заметно превосходят в эффективности М-оценки в достаточно типичном случае, когда наблюдения авторегрессионного поля являются нормальными и измеряются с достаточно редкими ошибками.

### Список литературы

1. Mast F., Jancke L. (Eds.) Spatial Processing in Navigation, Imagery and Perception. New York: Springer, 2007. 440 p.
2. LeSage J. P., Pace R. K. Introduction to Spatial Econometrics. Boca Raton: Taylor & Francis, 2009. 273 p.
3. Tjøstheim D. Statistical Spatial Series Modelling //Advances in Applied Probability. 1978. V. 10. № 1. P. 130–154.
4. Горяинов В. Б., Горяинова Е. Р. Непараметрическая идентификация пространственной модели авторегрессии в условиях априорной стохастической неопределенности //Автоматика и телемеханика. 2010. № 2. С. 31-41.
5. Горяинов В. Б. Идентификация пространственной авторегрессии ранговыми методами. // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 82-95.
6. Горяинов В. Б. Оценки наименьших модулей коэффициентов пространственной авторегрессии. // Изв.РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 58–65.
7. Горяинов В. Б. М-оценки коэффициентов пространственной авторегрессии. // Автоматика и телемеханика. 2012. В печати.
8. Basu S., Reinsel G. C. Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model //Advances in Applied Probability. 1993. V. 25. № 3. P. 631-648.



9. Хьюбер П.Дж. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
10. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния.- М.: Мир, 1989. 512 с.
11. Stout W. F. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974. 381 р.
12. Pollard D. Convergence of Stochastic Processes. New York: Springer-Verlag, 1984. 223 р.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. I. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.

## **M-estimates for $2D$ -autoregression coefficients with unessentially convex loss function**

**77-30569/246206**

**# 10, October 2011**

**V. B. Goryainov\*, E. R. Goryainova\*\***

\*Bauman Moscow State Technical University

\*\*Higher School of Economics

[mathmod@bmstu.ru](mailto:mathmod@bmstu.ru)

For the process of  $2D$ -autoregression of order  $(1, 1)$ , M-estimates with unessentially convex loss function were found to be asymptotically normal. Using computer simulation methods, the stability of these estimations to observational overshoots was studied.

### **References**

1. *Mast F., Jancke L.* (Eds.) *Spatial Processing in Navigation, Imagery and Perception*. New York: Springer, 2007. 440 p.
2. *LeSage J. P., Pace R. K.* *Introduction to Spatial Econometrics*. Boca Raton: Taylor & Francis, 2009. 273 p.
3. *Tjøstheim D.* *Statistical Spatial Series Modelling //Advances in Applied Probability*. 1978. V. 10. № 1. P. 130–154.
4. *Neparametricheskaya identifikaciya prostranstvennoy modeli avtoregressii v usloviyah apriornoy stohasticheskoy neopredelennosti. //Avtomatika I telemehanika*. 2010. № 2. С.31-41.
5. *Горяинов В. Б.* *Идентификация пространственной модели автoregressii rangovimi metodami. //Avtomatika I telemehanika //*. 2011. № 5. С. 82–95.
6. *Горяинов В. Б.* *Оценки наименьших модулей коэффициентов пространственной автoregressii // Izvestia RAN. Teoria I sistemy upravleniya*. 2011. № 4. С. 58–65.
7. *Горяинов В. Б.* *М-оценки коэффициентов пространственной автoregressii // Avtomatika I telemehanika*. 2012. (V pechati).
8. *Basu S., Reinsel G. C.* *Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model //Advances in Applied Probability*. 1993. V. 25. № 3. P. 631-648.

9. Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model //Advances in Applied Probability. 1993. V. 25. № 3. P. 631-648.
10. Hampel F., Ronchetti E., Rausseau P., Shtael V. Robastnost v statistike. Podhod na osnove funkicii vliania. M.: Mir, 1989. 512 s.
11. Stout W. F. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974. 381 p.
12. Pollard D. Convergence of Stochastic Processes. New York: Springer-Verlag, 1984. 223 p.
13. Danford N., Schvarts G. Lineynie operatori. Obchshaya teoria. M.: IL, 1962. 896 s.