

УДК 537.86

ВОЛНЫ ПЕРЕПАДА В РАСШИРЕННОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЁДИНГЕРА ПРИ УЧЁТЕ ИНДУЦИРОВАННОГО РАССЕЯНИЯ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРСИИ

Е. М. Громов *, *В. В. Тютин*

Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород, Россия

Исследованы стационарные волновые решения расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с нелинейной дисперсией и индуцированным рассеянием. Найдены новые классы волн перепада с нелинейной фазовой модуляцией, существование которых обусловлено балансом нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к высокочастотным стационарным волнам обусловлен возможностью их распространения на значительные расстояния с сохранением формы и переноса ими энергии и информации без значительных потерь. Такие волны возникают во многих моделях распространения интенсивных волновых полей в нелинейных диспергирующих средах: оптических импульсов в волоконных линиях связи, электромагнитных и ленгмюровских волн в плазме, поверхностных волн на глубокой воде и т. д. [1–7]. Распространение высокочастотных импульсов с достаточно большой протяжённостью хорошо описывается нелинейным уравнением Шрёдингера [8–10], учитывающим линейную дисперсию второго порядка и кубичную нелинейность. Стационарные волны в рамках этого уравнения существуют в результате баланса дисперсионного расширения волнового пакета, с одной стороны, и нелинейного сжатия, с другой стороны.

Уменьшение протяжённости высокочастотных волновых импульсов приводит к необходимости учитывать в нелинейном уравнении Шрёдингера члены более высокого (третьего) порядка малости. Эти члены соответствуют нелинейным эффектам укручения [11], индуцированного рассеяния [12] и линейного эффекта абберационного искажения, отвечающего линейной дисперсии третьего порядка. Возникающее в результате этого учёта уравнение традиционно называют расширенным нелинейным уравнением Шрёдингера. Ранее, в работах [13, 14], стационарные волны в рамках этого уравнения изучались с учётом лишь индуцированного рассеяния в пренебрежении нелинейной дисперсией и линейной дисперсией третьего порядка. В результате были найдены решения в виде стационарных ударных волн, обусловленных балансом индуцированного рассеяния и линейной дисперсии второго порядка. В работах [15–17] в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера исследовались стационарные волны с учётом нелинейной дисперсии и линейной дисперсии третьего порядка в пренебрежении индуцированным рассеянием: в статье [15] при нелинейной фазовой модуляции, в публикациях [16, 17] при линейной фазовой модуляции. В этом случае стационарные волны возникают в результате баланса нелинейной дисперсии и линейной дисперсии третьего порядка. В работе [18] рассматривались стационарные волны в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с учётом нелинейной дисперсии, но в пренебрежении индуцированным рассеянием и линейной дисперсией третьего порядка. В статье [19] описана стационарная волна перепада (ударная волна) в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с учётом индуцированного рассеяния, нелинейной дисперсии и нелинейности.

* egromov@hse.ru

Однако в указанной работе рассмотрен только один вид волн перепада (монотонный, без осцилляций, переход от нулевой к конечной амплитуде) при частном соотношении параметров уравнения. Также в статье [19] не определены условия существования ударных волн при произвольном соотношении параметров индуцированного рассеяния и нелинейной дисперсии.

В работе [20] численно рассмотрена динамика нестационарных волн огибающей в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с учётом индуцированного рассеяния, нелинейной дисперсии и нелинейности до пятого порядка включительно. Показано, что нестационарные ударные волны огибающей (как ограниченные в пространстве, так и неограниченные) распространяются с изменением скорости и амплитуды.

Следует отметить, что широко используемый в настоящее время термин «ударные волны» изначально применялся лишь для описания низкочастотных волн с бесконечной производной при наличии диссипации [21]. Такие волны являются нестационарными и существуют в результате динамического баланса нелинейности и диссипации. Характерные особенности таких волн — неоднозначность в точном решении модельного уравнения (которая интерпретируется как опрокидывание фронта волны и появление бесконечной производной волнового поля) и их пространственная ограниченность, т. е. конечность их энергии. В настоящее время для волн огибающей термин «ударные волны» подразумевает не опрокидывание волнового фронта, а малость характерной протяжённости волнового фронта по сравнению с длиной волны заполнения волнового пакета, т. е. существование бесконечной производной волнового поля не предполагается. С другой стороны, зачастую допускается ненулевое волновое поле на бесконечности, т. е. неограниченность его энергии. В классическом понимании такие волны огибающей следует именовать «волнами перепада». Однако во многих современных работах [13, 14, 18, 19] для обозначения «волн перепада» используется термин «ударные волны». Существование таких волн перепада может определяться не наличием диссипации, а балансом (например линейной дисперсии второго порядка и нелинейной дисперсии), приводящего к возникновению стационарных волн перепада. Последние распространяются с неизменной скоростью.

В данной работе анализируются стационарные волны огибающей в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с учётом индуцированного рассеяния и нелинейной дисперсии. Найдены новые классы стационарных волн перепада как на подложке (т. е. имеющие ненулевую величину при координате, стремящейся к плюс и к минус бесконечности), так и с осцилляциями на «хвостах» (т. е. с осцилляциями либо перед, либо после основного фронта перепада). Часть из найденных стационарных волн перепада существуют в результате баланса эффектов индуцированного рассеяния и нелинейной дисперсии, а другая часть — в результате баланса, с одной стороны, индуцированного рассеяния и, с другой стороны, нелинейности и линейной дисперсии второго порядка. Все найденные решения неограниченны в пространстве. Определено соотношение параметров индуцированного рассеяния и дисперсии нелинейности, при которых возможно существование ударных волн.

1. ИСХОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим динамику огибающей $U(\xi, t)$ волнового поля $U(\xi, t) \exp(i\omega t - ik\xi)$ в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с учётом нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + q \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha U |U|^2 + 2i\beta \frac{\partial(U |U|^2)}{\partial \xi} + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} = 0, \quad (1)$$

где q — коэффициент линейной дисперсии второго порядка, α — коэффициент кубичной нелинейности, β — коэффициент нелинейной дисперсии, μ — коэффициент индуцированного рассеяния.

Для решения уравнения (1) перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью V , т. е. введём новые независимые переменные $\eta = \xi - Vt$ и $t' = t$. Решение вновь полученного уравнения представим в виде стационарной волны: $U(\eta, t) = A(\eta) \exp[i\Omega t + i\varphi(\eta)]$. Для определения амплитуды $A(\eta)$ и фазы $\varphi(\eta)$ получим следующую систему уравнений:

$$q \frac{dK}{d\eta} A + 2qK \frac{dA}{d\eta} + 2(3\beta A^2 - V) \frac{dA}{d\eta} = 0, \quad (2)$$

$$q \frac{d^2 A}{d\eta^2} + (\alpha - 2\beta K) A^3 - 2\mu A^2 \frac{dA}{d\eta} + (2VK - qK^2 - 2\Omega) A = 0, \quad (3)$$

где $K \equiv d\varphi/d\eta$ — добавочное волновое число. Интегрируя уравнение (2), получим $(qK - V + 3\beta A^2/2) A^2 = C$, где C — постоянная интегрирования, определяемая параметрами стационарной волны при $\eta \rightarrow -\infty$. Полагая в дальнейшем $C = 0$, получим следующее выражение для добавочного волнового числа: $K = (V - 3\beta A^2/2)/q$. С учётом этого выражения уравнение для огибающей пакета примет вид

$$q^2 \frac{d^2 A}{d\eta^2} + 2\mu q A^2 \frac{dA}{d\eta} + (V^2 - 2q\Omega) A + (q\alpha - 2V\beta) A^3 + \frac{3}{4} \beta^2 A^5 = 0. \quad (4)$$

Отметим, что в упрощённом виде уравнения вида (4) для стационарных волн расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера ранее были неоднократно получены, проанализированы и в некоторых случаях решены. Например, в работе [22] при $\beta = 0$ и $\mu = 0$ (т. е. для классического нелинейного уравнения Шрёдингера) был построен аналог уравнения (4) и указаны различные типы его решений: периодические волны огибающей и солитоны огибающей. В той же работе был описан процесс возникновения нестационарной ударной волны огибающей. В статье [18] также было получено уравнение вида (4) при $\mu = 0$ и указаны его решения.

Однако наличие вынужденного рассеяния (т. е. отличие от нуля коэффициента μ) принципиально усложняет структуру уравнения (4). В результате в общем случае проинтегрировать его и найти его решение в явном виде не представляется возможным. Получить в рамках такого уравнения ограниченные в пространстве стационарные решения также не удаётся. Поэтому проанализируем уравнение (4) и его решения качественно при различных знаках разностей $V^2 - 2q\Omega$ и $q\alpha - 2V\beta$, рассмотрев фазовое пространство этого уравнения.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

При выполненном неравенстве $V^2 - 2q\Omega > 0$, после замены переменной $\rho = \eta \sqrt{V^2 - 2q\Omega}/q$, уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} - \frac{2\mu}{\sqrt{V^2 - 2q\Omega}} A^2 \frac{dA}{d\rho} + A + \frac{q\alpha - 2V\beta}{V^2 - 2q\Omega} A^3 + \frac{3}{4} \frac{\beta^2}{V^2 - 2q\Omega} A^5 = 0. \quad (5)$$

При условии $q\alpha - 2V\beta < 0$ уравнение (5), после замены амплитуды $A = B \sqrt{(V^2 - 2q\Omega)/(2V\beta - q\alpha)}$, сводится к уравнению

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} + pB^2 \frac{dB}{d\rho} + B - B^3 + rB^5 = 0, \quad (6)$$

где параметры $p = 2\mu \sqrt{V^2 - 2q\Omega}/(2V\beta - q\alpha)$, $r = (3/4)\beta^2 (V^2 - 2q\Omega)/(2V\beta - q\alpha)^2$. Параметр ($p \propto \mu$) характеризует индуцированное рассеяние, а $r \propto \beta^2$ — нелинейную дисперсию. При условии

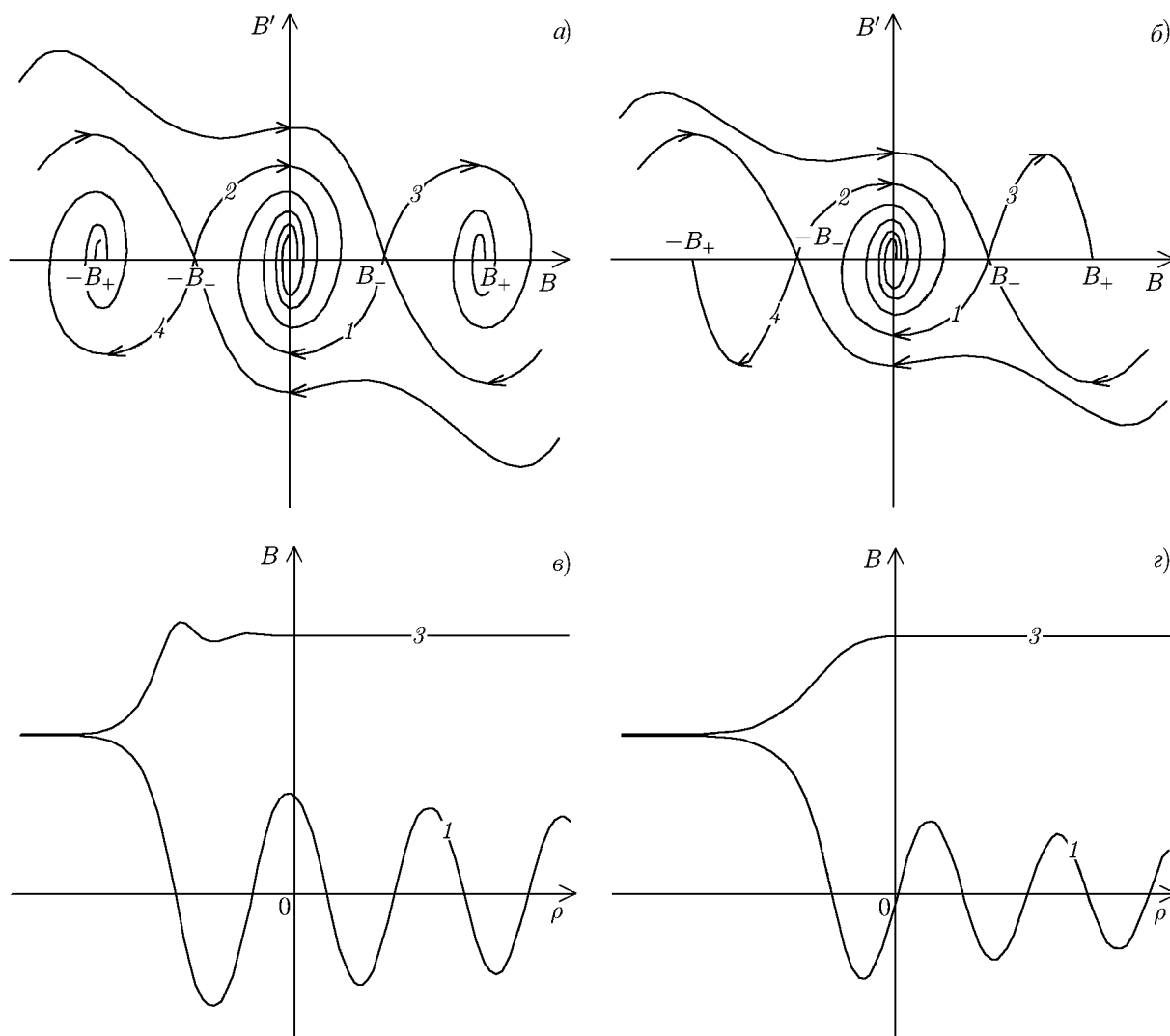


Рис. 1. Фазовые плоскости уравнения (6) (панели а, б) и соответствующие волны перепада при различных величинах p (панели в, з). Панели а, в отвечают неравенству $p < p_1$; панели б, з — $p \geq p_1$

$r > 1/4$ уравнение (6) имеет только одно состояние равновесия $B = 0$ (фокус), т. е. ограниченные по амплитуде стационарные волны не существуют в этом случае. В противоположном случае $r \leq 1/4$ уравнение (6) имеет 5 состояний равновесия: $B = 0$ (устойчивый фокус), $B = \pm B_+$ (устойчивые фокусы или узлы) и $B = \pm B_-$ (седла), где $B_{\pm}^2 = (1 \pm \sqrt{1 - 4r}) / (2r)$. На рис. 1а, б приведены фазовые плоскости уравнения (6) при $r \leq 1/4$ и различных соотношениях между параметрами p и r . Выходящие из седел сепаратрисы (траектории 1–4) соответствуют ограниченным по амплитуде стационарным волнам перепада. На рис. 1в, з приведены графики некоторых решений уравнения (6) — стационарных волн перепада, соответствующих траекториям 1 и 3 на рис. 1а, б. Рисунки 1а, в отвечают условию $p < p_1 = 4 \sqrt{r \sqrt{1 - 4r}} / (1 + \sqrt{1 - 4r})$ (слабое индуцированное рассеяние), рис. 1б, з — $p \geq p_1$ (сильное индуцированное рассеяние).

При достаточно слабом индуцированном рассеянии (рис. 1а, в) реализуются лишь ударные волны с затухающими пространственными осцилляциями — как на подложке (траектории 3 и 4), так и без подложки (траектории 1 и 2). Необходимо отметить, что при исчезновении нелинейной дисперсии ($r \rightarrow 0$) состояния равновесия $\pm B_+$ уравнения (6) уходят на бесконечность, а состо-

яния равновесия $\pm B_-$ стремятся по модулю к 1. Таким образом, ударные волны без подложки (траектории 1 и 2) при исчезновении нелинейной дисперсии сохраняются, и их существование обусловлено балансом эффектов индуцированного рассеяния, с одной стороны, и нелинейности и линейной дисперсии второго порядка, с другой стороны [13, 14]. Напротив, ударные волны на подложке (траектории 3 и 4) при исчезновении нелинейной дисперсии исчезают, т. е. их существование обусловлено балансом нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния.

При достаточно сильном индуцированном рассеянии (рис. 1б, з) реализуются ударные волны на подложках без осцилляций (kink-waves, траектории 3 и 4).

При выполненном неравенстве $q\alpha - 2V\beta > 0$ уравнение (6) не имеет решений в виде стационарных волн с конечной амплитудой.

В случае $V^2 - 2q\Omega < 0$ уравнение (5) заменой переменной $\rho = \eta \sqrt{2q\Omega - V^2} / q$ сводится к виду

$$\frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{2\mu A^2}{\sqrt{2q\Omega - V^2}} \frac{dA}{d\rho} - A + \frac{q\alpha - 2V\beta}{2q\Omega - V^2} A^3 + \frac{3}{4} \frac{\beta^2}{2q\Omega - V^2} A^5 = 0. \quad (7)$$

При условии $q\alpha - 2V\beta < 0$ из формулы (7) с помощью замены амплитуды $A = B \sqrt{(2q\Omega - V^2)/(2V\beta - q\alpha)}$ получим уравнение

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} + pB^2 \frac{dB}{d\rho} - B - B^3 + rB^5 = 0, \quad (8)$$

где параметры $p = 2\mu \sqrt{2q\Omega - V^2} / (2V\beta - q\alpha)$, $r = (3/4)\beta^2 (2q\Omega - V^2) / (q\alpha - 2V\beta)^2$. Уравнение (8) имеет 3 состояния равновесия: $B = 0$ (седло) и $B = \pm B_0$ (устойчивые фокусы или узлы), где $B_0^2 = (1 + \sqrt{1 + 4r}) / (2r)$. На рис. 2а, б приведены фазовые плоскости системы (8) при различных соотношениях между параметрами p и r . Выходящие сепаратрисы седла (траектории 1 и 2) соответствуют ограниченному по амплитуде стационарному волнам перепада без подложки. На рис. 2в, г приведены графики некоторых решений уравнения (8) — стационарных волн перепада, соответствующих траекториям 1 на рис. 2а, б. Рисунки 2а, в отвечают условию $p < p_2 = 4 \sqrt{r \sqrt{1 + 4r}} / (1 + \sqrt{1 + 4r})$ (слабое индуцированное рассеяние). В этом случае волны перепада имеют осцилляции на «хвостах». Рисунки 2б, г соответствуют неравенству $p \geq p_2$ (сильное индуцированное рассеяние). В этом случае реализуются волны перепада без осцилляций.

В частном случае, а именно при условии $r = (p - 1)(p + 3)/16$, уравнение (8) имеет записываемое в явном виде решение в форме ударной волны $B = \pm \sqrt{2(p - 1)(1 - \text{th } \rho)}$, совпадающее с найденным в статье [19].

Необходимо отметить, что при исчезновении нелинейной дисперсии ($r \rightarrow 0$), состояния равновесия $\pm B_0$ уравнения (8) уходят на бесконечность, что приводит к исчезновению стационарных волн перепада. Таким образом, существование ударных волн (траектории 1 и 2 на рис. 2) обусловлено балансом нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния.

При выполненном неравенстве $q\alpha - 2V\beta > 0$ из уравнения (7) с помощью замены амплитуды $A = B \sqrt{(2q\Omega - V^2)/(2V\beta - q\alpha)}$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 B}{d\rho^2} + pB^2 \frac{dB}{d\rho} - B + B^3 + rB^5 = 0, \quad (9)$$

где параметры $p = 2\mu \sqrt{2q\Omega - V^2} / (q\alpha - 2V\beta)$, $r = (3/4)\beta^2 (2q\Omega - V^2) / (q\alpha - 2V\beta)^2$. Уравнение (9) имеет три состояния равновесия: $B = 0$ (седло) и $B = \pm B_1$ (устойчивые фокусы или узлы), где $B_1^2 = (\sqrt{1 + 4r} - 1) / (2r)$. На рис. 3а, б приведены фазовые плоскости уравнения (9) при различных

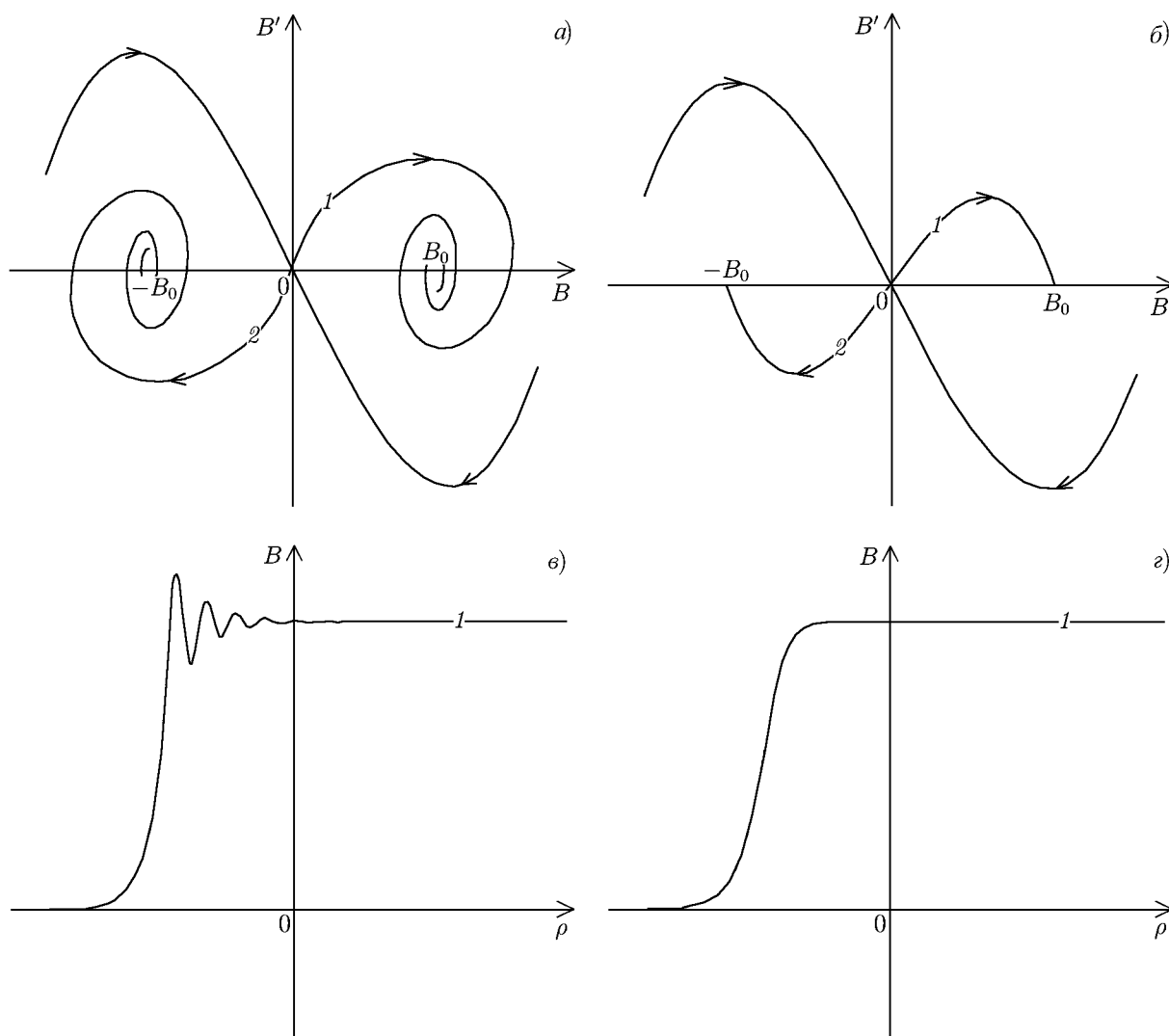


Рис. 2. Фазовые плоскости уравнения (8) (панели а, б) и соответствующие волны перепада (панели в, г). Панели а, в отвечают неравенству $p < p_2$; панели б, г — $p \geq p_2$

соотношениях между параметрами p и r . Выходящие из седла сепаратрисы соответствуют ограниченными по амплитуде стационарным волнам перепада без подложки (траектории 1 и 2). На рис. 3в, г приведены графики некоторых решений уравнений (9), соответствующих траекториям 1 на рис. 3а, б. Рисункам 3а, в отвечает условие $p < p_3 = 4 \sqrt{r \sqrt{1 + 4r} / (\sqrt{1 + 4r} - 1)}$ (слабое индуцированное рассеяние), рис. 3б, г — $p \geq p_3$ (сильное индуцированное рассеяние).

При достаточно слабом индуцированном рассеянии ($p < p_3$, рис. 3а, в) существуют ударные волны с затухающими пространственными осцилляциями (траектории 1 и 2). В предельном случае, отвечающем исчезновению индуцированного рассеяния ($p \rightarrow 0$), входящие и выходящие сепаратрисы седла замыкаются друг с другом, а состояния равновесия из фокусов $B = \pm B_1$ становятся центрами. Уравнение (9) в этом случае имеет известное солитонное решение [13]: $B^2 = 4/[1 + \sqrt{1 - 16r/3} \operatorname{ch}(2\rho)]$.

При достаточно сильном индуцированном рассеянии ($p \geq p_3$, рис. 3б, г) существуют ударные волны без осцилляций (траектории 1 и 2). В частном случае, а именно при выполнении условия $r = (1 + p)(p - 3)/16$, уравнение (9) имеет записываемое в явном виде аналитическое решение:

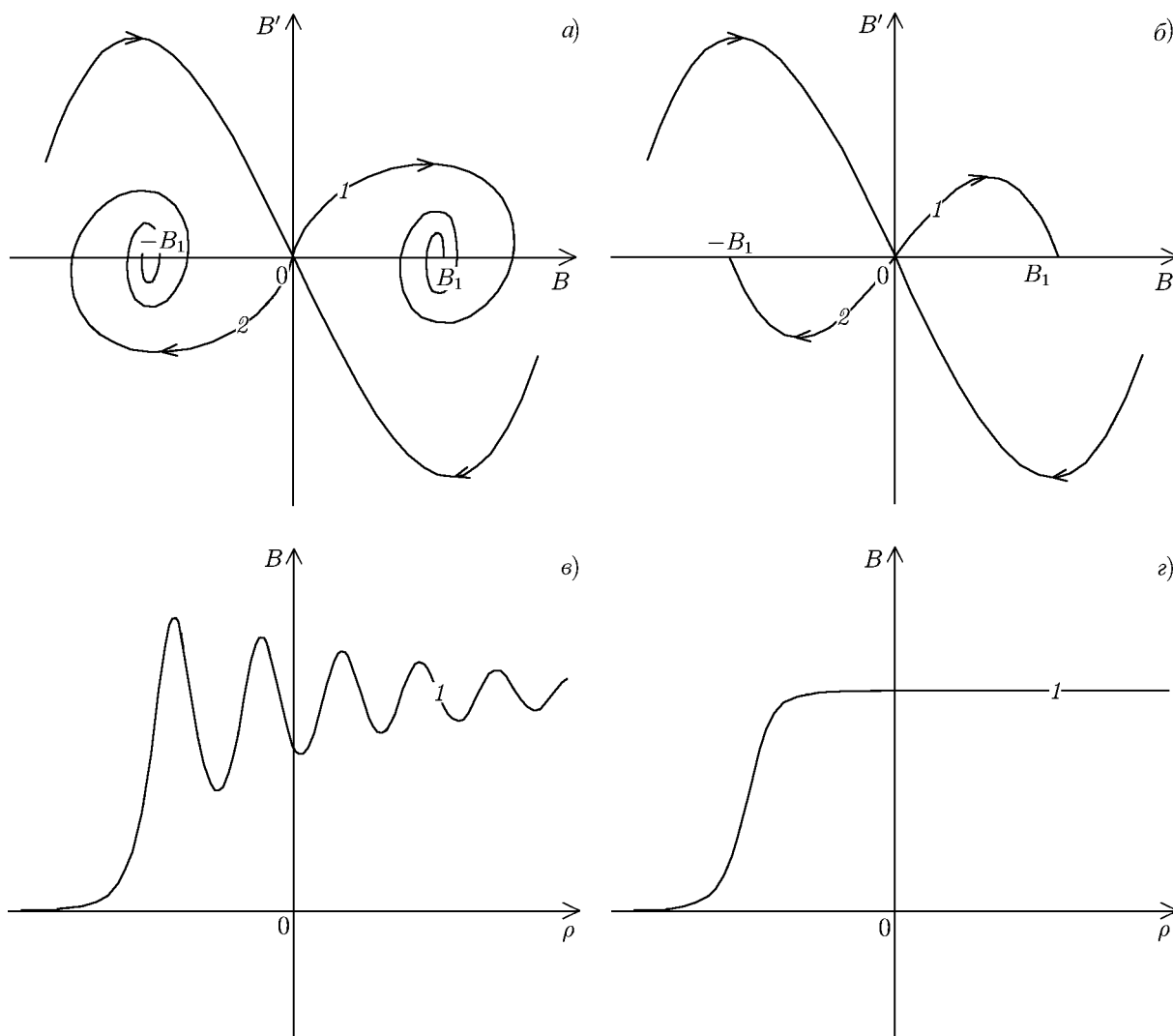


Рис. 3. Фазовые плоскости уравнения (9) (панели а, б) и соответствующие волны перепада (панели в, з). Панели а, в отвечают неравенству $p < p_3$; панели б, з — $p \geq p_3$

$$B = \pm \sqrt{2(p+1)(1 - \text{th } \rho)}.$$

Необходимо отметить, что при исчезновении нелинейной дисперсии ($r \rightarrow 0$) структура фазовой плоскости уравнения (9) сохраняется, т. е. в этом случае волны перепада существуют в результате баланса эффектов индуцированного рассеяния, с одной стороны, и нелинейности и линейной дисперсии второго порядка, с другой стороны.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера, учитывающего нелинейную дисперсию и индуцированное рассеяние, аналитически исследованы стационарные волны с нелинейной фазовой модуляцией. Найдены волны перепада (ударные волны), существование которых обусловлено балансом нелинейной дисперсии и индуцированного рассеяния. Также найдены волны перепада, существующие в результате баланса эффектов индуцированного рассеяния, с одной стороны, и нелинейности и линейной дисперсии второго порядка, с другой

стороны. Среди найденных волн перепада есть как волны на подложке, так и волны без подложки; как волны перепада с осцилляциями на одном из «хвостов», так и без осцилляций. Указаны соотношения параметров уравнения, при которых существуют найденные волны перепада. Роль линейной дисперсии третьего порядка при формировании ударных волн будет исследована в следующих работах.

Данная работа (проект 14-01-0023) выполнена при поддержке программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014–2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Infeld E., Rowlands G. *Nonlinear waves, solitons, and chaos*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
2. Agrawal G. P. *Nonlinear fiber optics*. San Diego: Academic Press, 2001.
3. Yang Y. *Solitons in field theory and nonlinear analysis*. New York: Springer, 2001.
4. Kivshar Y. S., Agrawal G. P. *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*. San Diego: Academic Press, 2003.
5. Dickey L. A. *Soliton equation and hamiltonian systems*. New York: World Scientific, 2005.
6. Malomed B. A. *Soliton management in periodic systems*. New York: Springer, 2006.
7. Dauxois T., Peyrard M. *Physics of solitons*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006.
8. Захаров В. Е. // *ЖЭТФ*. 1972. Т. 62, № 5. С. 1745.
9. Захаров В. Е., Шабат А. Б. // *ЖЭТФ*. 1972. Т. 34. С. 62.
10. Hasegawa A., Tappert F. // *Appl. Phys. Lett.* 1973. V. 23, No. 3. P. 142.
11. Oliviera J. R., Moura M. A. // *Phys. Rev. E*. 1998. V. 57. P. 4751.
12. Gordon J. P. // *Opt. Lett.* 1986. V. 11. P. 662.
13. Kivshar Y. S. // *Phys. Rev. A*. 1990. V. 42, No. 3. P. 1757.
14. Kivshar Y. S., Malomed B. A. // *Opt. Lett.* 1993. V. 18. P. 485.
15. Gromov E. M., Tyutin V. V. // *Wave Motion*. 1998. V. 28, No. 1. P. 13.
16. Громов Е. М., Таланов В. И. // *ЖЭТФ*. 1996. Т. 110. С. 137.
17. Gromov E. M., Talanov V. I. // *Chaos*. 2000. V. 10, No. 3. P. 551.
18. Громов Е. М., Таланов В. И. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1996. Т. 39, № 6. С. 735.
19. Nagaraja Kumar C., Durganandini P. // *Pramana — J. Phys.* 1999. V. 53, No. 2. P. 271.
20. Zhokholov P. A., Zheltikov A. M. // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. Art. no. 183903.
21. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. *Теоретическая физика*. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. Гл. 9.
22. Островский Л. А. // *ЖЭТФ*. 1966. Т. 51. С. 1189.

Поступила в редакцию 17 октября 2013 г.; принята в печать 9 января 2014 г.

KINK WAVES IN AN EXTENDED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH STIMULATED SCATTERING AND NONLINEAR DISPERSION

E. M. Gromov and V. V. Tyutin

The stationary wave solutions of the extended nonlinear Schrödinger equation with nonlinear dispersion and stimulated scattering are studied. New class of the kink waves with nonlinear phase modulation whose existence is attributed to the balance between nonlinear dispersion and stimulated scattering have been found.