

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ  
НИЖНИЙ НОВГОРОД

Научно-учебная лаборатория количественного анализа  
и моделирования экономики

*В.А. Силаева, А.М. Силаев*

**ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ  
ВОЛАТИЛЬНОСТИ ДОХОДНОСТИ ФОНДОВЫХ ИНДЕКСОВ**

Препринт Р1/2010/01

Серия Р1

Научные доклады лаборатории  
количественного анализа и  
моделирования экономики

Нижний Новгород  
НФ ГУ ВШЭ  
2010

УДК 336.76:004.4  
ББК 65в631  
С 36

Редактор серии Р1  
«Научные доклады лаборатории количественного анализа и  
моделирования экономики»  
*А.М. Силаев*

Силаева, В.А. Эконометрические модели оценивания волатильности доходности фондовых индексов. Препринт Р1/2010/01 / В.А. Силаева, А.М. Силаев – Нижний Новгород: НФ ГУ ВШЭ, 2010. – 46 с.

Исследованы статистические характеристики суточных доходностей фондовых индексов РТС и S&P 500 по историческим временным рядам этих индексов. Построены эконометрические модели доходностей фондовых индексов для классов моделей GARCH, TARЧН и EGARCH с помощью программирования в среде MATLAB. Найдены оценки изменяющейся условной волатильности на интервале наблюдения и прогнозные значения волатильности. Получены модели семейства GARCH, учитывающие зависимость однодневной доходности индекса РТС от доходностей фондовых индексов S&P 500, Nikkei 225 и FTSE 100.

УДК 336.76:004.4  
ББК 65в631

© В.А. Силаева, 2010  
© А.М. Силаев, 2010

## 1. ВВЕДЕНИЕ

На цены активов влияет большое количество факторов: новости, макроэкономические данные, отчеты компаний об итогах их деятельности, оценки стоимости компаний от ведущих инвестиционных фирм. Частота появления таких факторов различна. Это приводит к изменчивости доходностей активов и характеристик изменчивости доходности – волатильности. Волатильность – это статистический показатель и непосредственно не наблюдается, требуется провести оценку этого показателя по наблюдаемым данным.

Задачи оценивания и прогнозирования волатильности представляют значительный интерес в различных приложениях экономики и финансов. Параметры изменчивости доходности финансовых активов во времени могут использоваться для измерения риска и своевременной идентификации кризисов на финансовых рынках.

По моделям волатильности имеется обширная литература. В работах Г. Марковица по выбору оптимального портфеля активов [1] термин волатильность использовался для обозначения явления изменчивости временного ряда доходностей акций. Количественно волатильность характеризовалась как величина среднеквадратического отклонения доходности акций.

В 1973 Ф. Блэк, М. Шоулз и Р. Мертон в работах [2, 3] по ценообразованию опционов доходность активов описывали моделью геометрического броуновского движения в непрерывном времени. Волатильность задается в виде экзогенного параметра этой модели. На практике данный параметр оценивается по наблюдаемым временным рядам цен активов. Ещё ранее Б. Мандельброт [4] обратил внимание на эмпирические свойства доходностей, которые не соответствуют модели логнормальной диффузии и предложил использовать при описании

изменчивости доходностей активов более широкий класс Леви-устойчивых вероятностных распределений. Дальнейшее развитие финансовой теории привело к созданию стохастических моделей ценообразования финансовых активов, в которых волатильность сама рассматривается как случайный процесс.

Исследования и работы многих ученых выявили, что финансовые временные ряды обладают специфическими особенностями, учесть которые могут определенные эконометрические модели [5]. Модель условной гетероскедастичности (ARCH, autoregressive conditional heteroscedasticity) для оценки волатильности первым предложил использовать Р. Энгл в 1982 г. при моделировании инфляции в Великобритании [6]. Эта модель позднее была использована и для моделирования цен акций и обменных курсов [7]. В 2003 г. Р. Энгл был удостоен Нобелевской премии по экономике совместно с К. Гренджером за методы анализа экономических временных рядов с изменяющейся во времени волатильностью.

Развитием модели ARCH стала модель обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности (GARCH, generalized autoregressive conditional heteroscedasticity), предложенная Т. Боллерслом в 1986 г. [8–10]. В настоящее время модели ARCH, GARCH и различные их модификации с изменяющейся волатильностью стали рабочим инструментом исследования временных рядов и активно используется в экономике и финансах [11–17]. Задачи идентификации моделей финансовых активов, оценки их параметров, и применение этих моделей для снижения риска и неопределенности привлекает повышенный интерес со стороны ученых.

В настоящей работе данные модели используются для исследования статистических характеристик и построения эконометрических моделей дневной доходности индекса РТС.

## 2. НАБЛЮДАЕМЫЕ ДАННЫЕ

В настоящее время накоплено большое количество финансовых и экономических данных: цены финансовых активов, обменные курсы, макроэкономические показатели и др. Предположим, что наблюдаются рыночные показатели цены актива в конце торгового дня  $S_i$ ,  $n$  – количество наблюдений (торговых дней). Поскольку волатильность  $\sigma$  является ненаблюдаемым параметром, требуется провести оценку этого параметра по наблюдаемым данным.

Например, на рис. 1 представлен график индекса РТС (RTSI), построенный по суточным ценам закрытия биржи РТС с 1 сентября 1995 г. по 31 декабря 2009 г. (всего 3577 значений за все время вычисления индекса). Можно констатировать нестационарное поведение индекса во времени. На рис. 2 приведен график логарифма индекса РТС. Для сравнения на рис. 3, 4 представлены графики индекса S&P 500, построенные по суточным ценам закрытия Нью-Йоркской фондовой биржи для более длительного периода наблюдения с 1928 г. по 31 декабря 2009 г. (всего 21692 значения). Также можно констатировать нестационарное поведение данного показателя во времени.

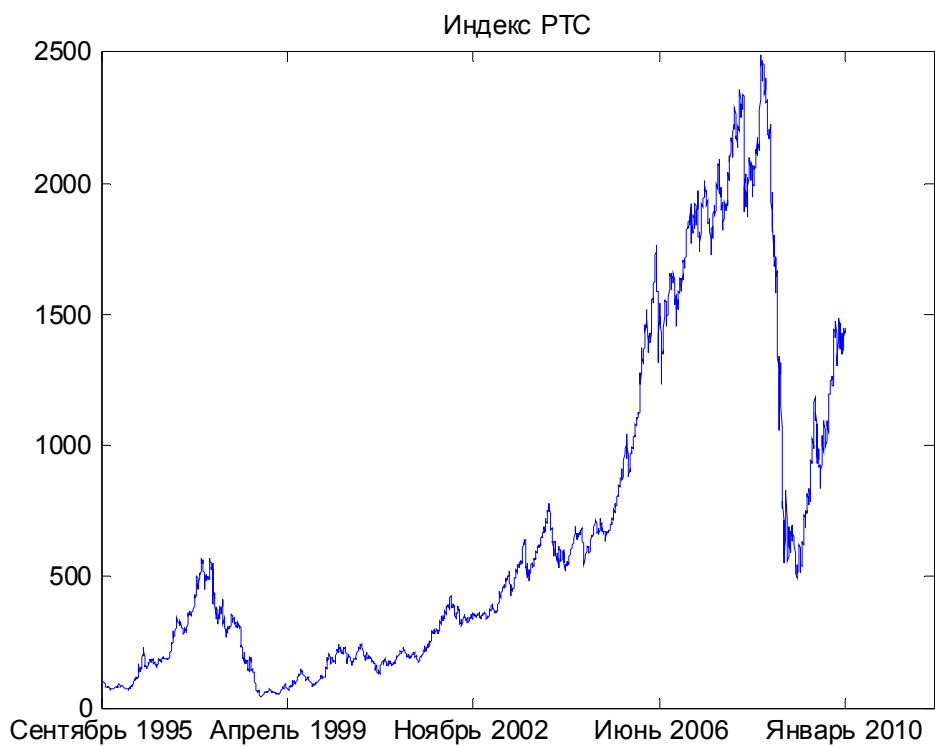


Рис. 1. График индекса РТС (RTSI).

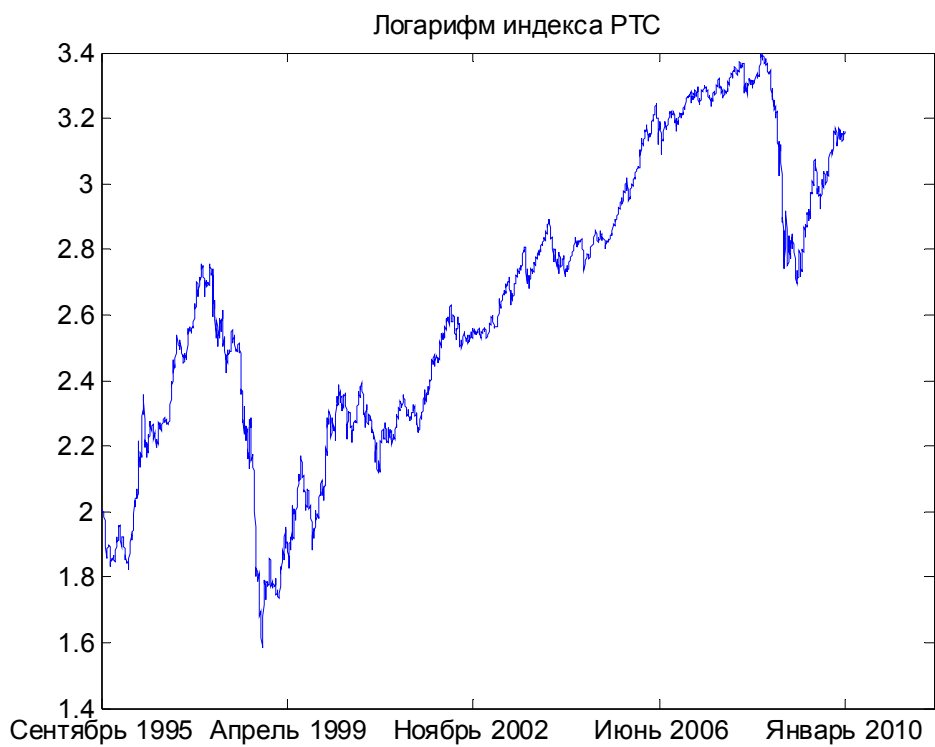


Рис. 2. График индекса РТС в логарифмическом масштабе.

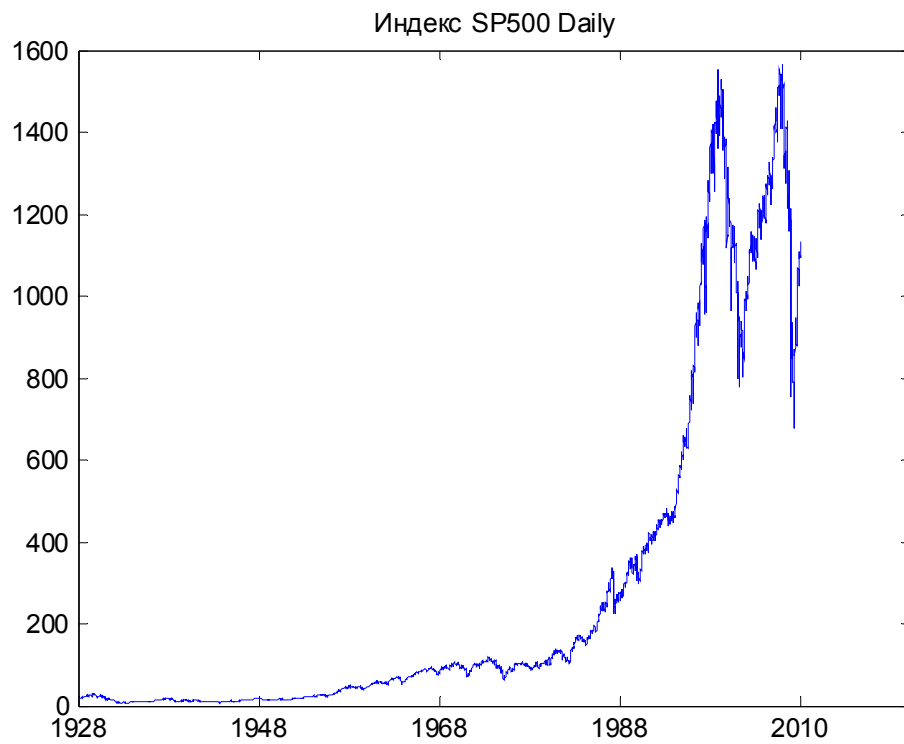


Рис. 3. График индекса S&P 500.

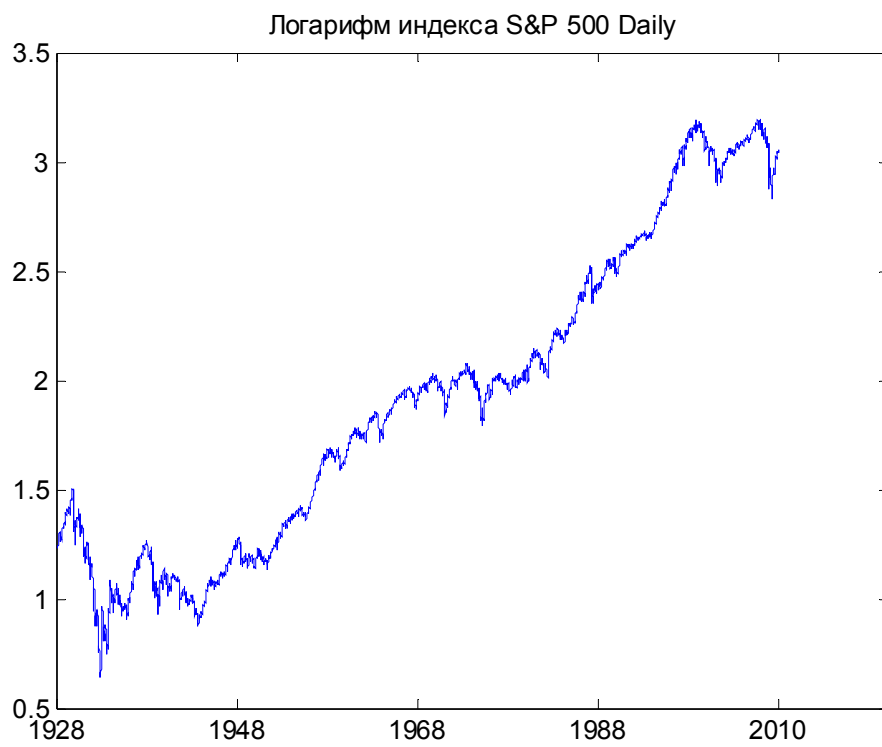


Рис. 4. График индекса S&P 500 в логарифмическом масштабе.

На графиках в логарифмическом масштабе видно, что в целом существует возрастающий тренд во времени, но в периоды кризисов значения индексов резко падают. Если перейти к логарифмической суточной доходности индекса  $r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ , вычисляемой по значениям индексов  $S_t$  и  $S_{t-1}$  по итогам торгов в два последовательных дня, то тренды исчезают. Таким образом, показатель доходности демонстрирует более регулярное поведение во времени.

На рис. 5, 6 представлены графики суточной доходности индексов РТС и S&P 500. На рис. 7, 8 приведены гистограммы и оценка интегральной функции распределения для суточных доходностей индексов РТС и S&P 500. На этих же рисунках показаны кривые для гауссовского распределения вероятностей с аналогичными значениями среднего значения и дисперсии. Можно заметить характерные острые вершины и медленно спадающие хвосты оценок плотности вероятности доходностей. Оценки первых четырех кумулянтов [18]: среднего значения  $m = E(r)$ , стандартного отклонения  $\sigma = \sqrt{E[(r - m)^2]}$ , коэффициентов асимметрии  $S = E[(r - m)^3] / \sigma^3$  и эксцесса  $k = E[(r - m)^4] / \sigma^4 - 3$ , а также максимальные и минимальные значения доходностей индексов даны в таблице 1.

Таблица 1. Статистические характеристики доходностей индексов.

|         | $m, \%$  | $\sigma, \%$ | $S$     | $k$     | max, % | min, % |
|---------|----------|--------------|---------|---------|--------|--------|
| РТС     | 0,074676 | 2,87         | -0,3762 | 6,6580  | 20,20  | -21,20 |
| S&P 500 | 0,019096 | 1,15         | -0,4330 | 19,7948 | 15,37  | -22,80 |



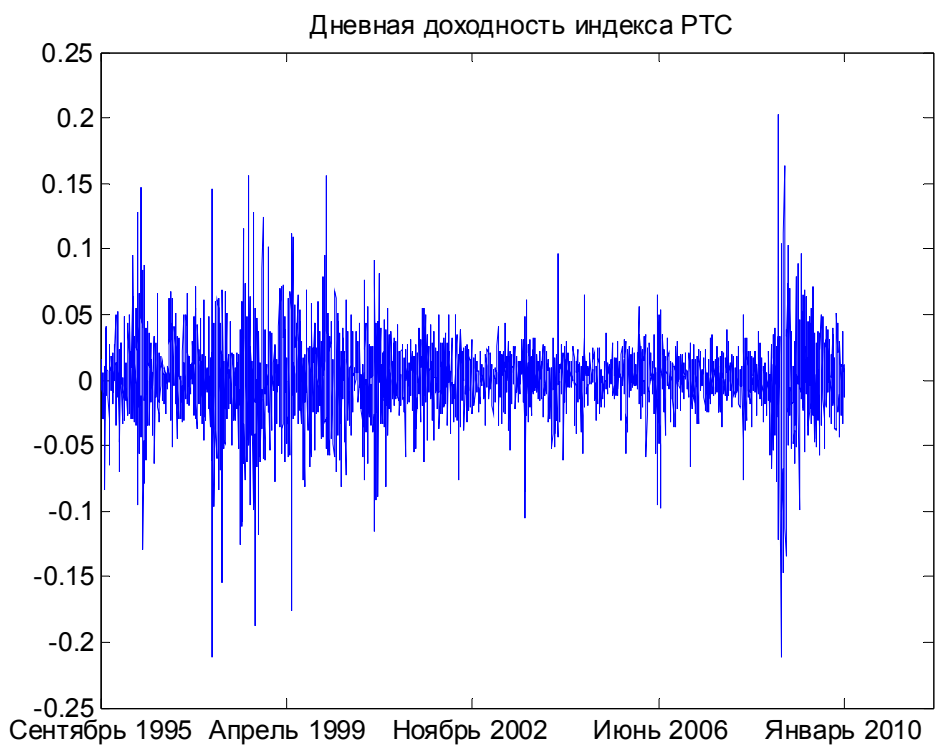


Рис. 5. График суточной доходности индекса РТС.



Рис. 6. График суточной доходности индекса S&P 500.

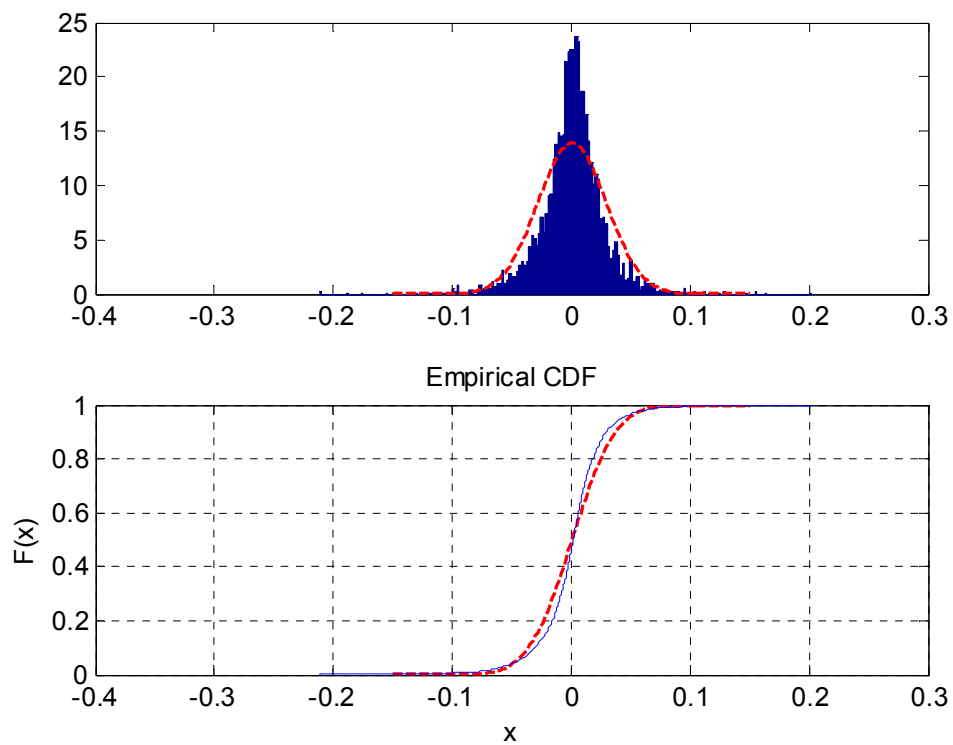


Рис. 7. Гистограмма суточной доходности индекса РТС.

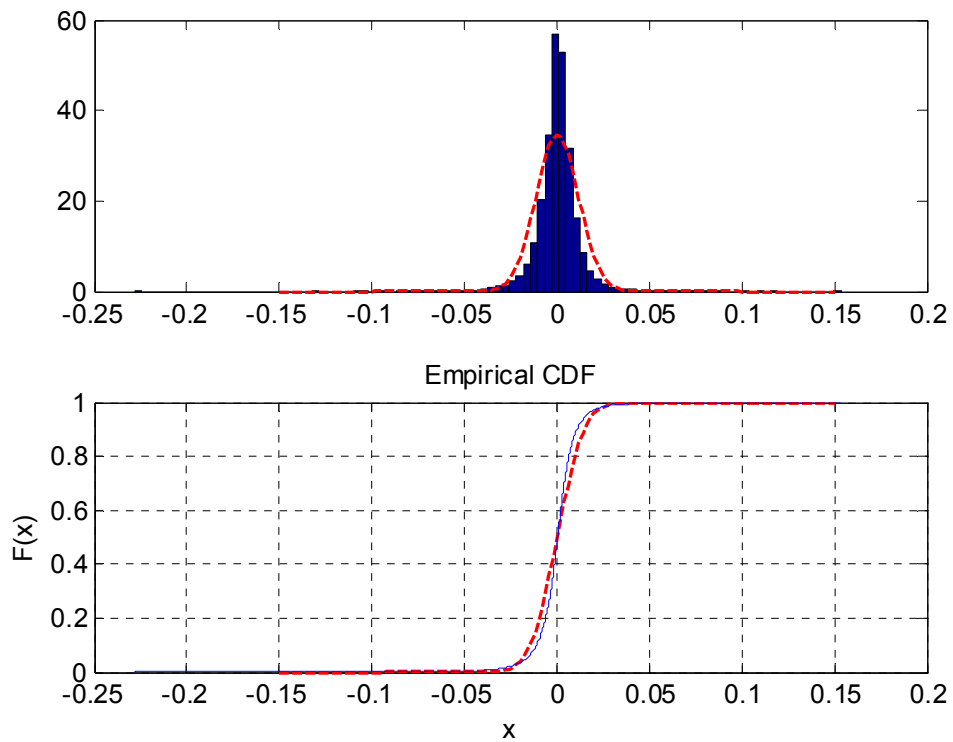


Рис. 8. Гистограмма суточной доходности индекса S&P 500.

### 3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФАКТЫ

В многочисленных исследованиях, проведенными различными учеными, было установлено, что финансовые временные ряды обладают рядом особенных характеристик – эмпирических стилизованных фактов. В частности, поведение индексов и их доходностей на рис. 5 – 8 демонстрирует эти особенности. Дадим их краткое описание [5, 10, 19, 20].

1). **Острове́ршинное распределение плотности вероятности доходностей, тяжелые хвосты, негауссовость распределения.** Тяжелые хвосты безусловного вероятностного распределения дневных доходностей приводят к тому, что экстремальные значения доходности могут наблюдаться более часто, чем в случае нормального распределения. Острове́ршинность плотности вероятности приводит к тому, что коэффициент эксцесса (excess kurtosis) принимает положительные значения ( $k = 6,7$  для доходности индекса РТС и  $k = 19,8$  для доходности индекса S&P 500).

2). **Значения эмпирических автокорреляционных функций доходностей уже при небольших лагах не имеют значимого отличия от нуля.** Например, на рис. 9, 10 приведены графики автокорреляционных функций доходности индексов РТС и S&P 500. На рисунках горизонтальными линиями обозначены границы 95%-х доверительных интервалов для значений автокорреляционных функций незначимо отличающихся от нуля. Выход автокорреляционной функции за пределы интервала означает, что соответствующее значение отличается от нуля с вероятностью ошибки менее 5% (в предположении нормального распределения доходности). Видно, что в случае индекса РТС отличается от нуля автокорреляция с лагом, равным 1. При этом коэффициент корреляции  $\rho(1) = 0,145$ . При задержках больших 1 значения доходности можно считать некоррелированными.



Рис. 9. Автокорреляционная функция доходности индекса РТС.



Рис. 10. Автокорреляционная функция доходности индекса S&P 500.

3). **Временные ряды абсолютных значений или квадратов доходности характеризуется значимой автокорреляцией**, причём автокорреляционная функция убывает медленно [21, 22] (так называемый эффект дальних корреляций или долгой памяти). Для иллюстрации на рис. 11, 12 приведены графики автокорреляционных функций квадратов доходности индекса РТС и индекса S&P 500. Видно, что для индекса РТС автокорреляция значительна для лагов больших 50 (если считать, что в году 250 торговых дней, то коррелированы значения квадратов суточной доходности для дней, отстоящих друг от друга на период более двух месяцев). Для индекса S&P 500 коррелированы значения квадратов суточной доходности с лагами более 1 года.

4). **Кластеризация волатильности.** Наблюдаются продолжительные периоды с относительно низкой волатильностью и периоды, в течение которых волатильность высока [10].

5). **Волатильность доходности активов положительно коррелирована с объёмом торгов.** Для объёмом торгов характерны те же свойства длинной памяти, что и для абсолютных значений доходности [23].

6). **Асимметрия и леввередж в динамической структуре волатильностей.** Положительные и отрицательные доходности одинаковой амплитуды, наблюдаемые в предшествующий период, оказывают различное влияние на текущую волатильность (асимметрия). При этом текущая доходность и будущая волатильность отрицательно коррелированы (леввередж). Положительные инновации влекут снижение волатильности.



Рис. 11. Автокорреляционная функция квадратов доходности индекса РТС.



Рис. 12. Автокорреляционная функция квадратов доходности S&P 500.

#### 4. МОДЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ ВОЛАТИЛЬНОСТИ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРЕДПОЛОЖЕНИИ О ЕЕ ПОСТОЯНСТВЕ

Для экономических прогнозов важно знать не только средний уровень переменных, но и ожидаемые отклонения от этого среднего уровня. Хотя реальная волатильность переменна, экономисты долгое время имели в своем распоряжении только такие статистические методы, которые основаны на предположении о ее постоянстве. В данном разделе кратко опишем основные из этих методов.

##### Историческая волатильность

Предположим, что наблюдаются рыночные показатели цены актива в конце торгового дня  $S_t$ ,  $n$  – количество наблюдений (торговых дней). Поскольку волатильность  $\sigma$  является ненаблюдаемым параметром, требуется провести оценку этого параметра по наблюдаемым ретроспективным данным. В качестве оценки годовой волатильности обычно используют формулы исторической волатильности (HV, historical volatility)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}, \quad \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t, \quad \sigma_y = \sigma / \sqrt{\tau}, \quad (1)$$

где  $r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$  – доходность, вычисляемая по значениям рыночного показателя цены акции в конце торгового дня  $S_t$ ,  $n$  – количество наблюдений (торговых дней). Величина  $\tau$  подбирается, чтобы суточную волатильность пересчитать в годовую. Например, если в году 250 торговых дней, то  $\tau = 1/250$ .

Формулы (1) предполагают, что ряд доходностей является стационарным временным рядом и волатильность не изменяется на интервале наблюдения.

### Метод экспоненциального сглаживания

Учесть изменчивость волатильности можно, сокращая интервал усреднения и используя методы скользящего среднего, одним из которых является метод экспоненциального сглаживания (EWMA, Exponentially Weighted Moving Average), реализованный в системе RiskMetrics [24]

$$\sigma_t = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^{n+1}} \sum_{i=1}^n \lambda^i (r_{t-i} - \bar{r})^2, \quad (2)$$

где  $\sigma_t$  – оценка однодневной волатильности в момент  $t$ ,  $\lambda$  – сглаживающий фактор, который выбирается в интервале  $0 < \lambda < 1$ , например  $\lambda = 0,94$ . Метод скользящего среднего приспособлен под медленные изменения волатильности, но недостаточно хорошо работает при быстрых изменениях параметров моделей, а также не способен объяснить и описать эффект кластеризации волатильности и другие стилизованные факты.

### Подразумеваемая волатильность

В модели Блэка-Шоулса ценообразования опционов стохастическое уравнение для изменения цен акций имеет вид

$$dS_t = \mu S_t dt + S_t \sigma dV_t. \quad (3)$$

где  $S_t$  – цена акции,  $V_t$  – стандартный винеровский процесс (броуновское движение),  $\mu$  – коэффициент дрейфа,  $\sigma$  – волатильность, которая предполагается постоянной. В предположении безарбитражности и существования безрискового актива для цен европейских бездивидендных колл и пут опционов выводятся уравнения [2, 3]:

$$\begin{aligned} c_t &= S_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2), \\ p_t &= X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где



$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}};$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}; \quad (5)$$

$S_t$  – цена акции в текущий момент времени;  $T$  – момент исполнения опциона;  $r$  – безрисковая ставка непрерывного начисления процентов;  $X$  –

цена исполнения опциона,  $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du$ . Формулы (4), (5)

позволяют вычислить величину волатильности – так называемую подразумеваемую волатильность (IV, implied volatility) по наблюдаемым значениям цены актива  $S_t$  и цены колл опциона  $c_t$  или пут опциона  $p_t$ . В отличие от исторической (1) подразумеваемая волатильность дает прогноз изменчивости доходности актива для будущего интервала времени до момента  $T$ . Относительным недостатком этого метода является использование модели геометрического случайного блуждания (3), которая не вполне подтверждается эмпирическими фактами.

### Логнормальное свойство цен активов

Из (3) следует, что логарифм цены актива  $G_t = \ln S_t$  удовлетворяет линейному стохастическому уравнению

$$dG_t = (\mu - \sigma^2 / 2) dt + \sigma dV_t \quad (6)$$

и описывается нормальным распределением вероятности. Условная плотность вероятности величины  $G_T$  имеет вид нормального распределения

$$P(G_T | G_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left\{-\frac{[G_T - G_t - (\mu - \sigma^2/2)(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}, \quad (7)$$

с математическим ожиданием  $(\mu - \sigma^2/2)(T - t)$  и дисперсией  $\sigma^2(T - t)$ . Соответственно для интервала времени  $T - t$  логарифмическая доходность  $r_{t,T} = \ln(S_T/S_t) = G_T - G_t$  также является гауссовской с плотностью вероятности

$$P(r_{t,T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left\{-\frac{[r_{t,T} - (\mu - \sigma^2/2)(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}. \quad (8)$$

Поскольку  $S_T = S_t e^{r_{t,T}}$ , из свойств нормального распределения следует, что математическое ожидание будущей цены актива  $S_T$  в момент  $t$  при известной текущей цене  $S_t$  равно  $E(S_T) = S_t e^{\mu(T-t)}$ , а дисперсия равна  $D(S_T) = S_t^2 e^{2\mu(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1]$ .

В реальности наблюдаемые временные ряды финансовых показателей демонстрируют негауссовость доходностей: плотности вероятности доходностей имеют тяжелые хвосты и острые вершины. Поэтому для получения более надежных оценок будущей волатильности необходимо использовать методы, учитывающие эмпирические особенности.

## 5. МОДЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

В литературе по эконометрическому моделированию временных рядов принято выделять два типа нелинейных моделей, позволяющих учесть изменяющуюся волатильность [25, 26]. Первая группа таких моделей, к которой относятся модели семейства GARCH, основывается на представлении волатильности в виде функции от наблюдаемых доходностей с заданным набором переменных. Во второй группе волатильность описывается уравнениями, содержащими дополнительный источник

неопределенности. Данную категорию составляют модели стохастической волатильности (SV, stochastic volatility).

Предпочтение в настоящее время чаще отдается моделям семейства GARCH и их спецификаций, поскольку процедура оценки параметров в этих использует метод максимального правдоподобия и в настоящее время реализована во многих прикладных пакетах статистической обработки данных.

В дальнейшем рассмотрим модели семейства GARCH, в которых временной ряд логарифма доходности финансового актива  $r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$  является условно нестационарным, то есть его условные математической ожидание и дисперсия зависят от времени:

$$\begin{aligned}\mu_t &= E_{t-1}(r_t) = E(r_t | F_{t-1}), \\ \sigma_t^2 &= Var(r_t | F_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}],\end{aligned}\tag{9}$$

где с помощью  $F_{t-1}$  обозначена вся накопленная информация о ценах активов до момента  $t-1$  включительно. Смысл моделей заключается в том, что они объясняют процесс изменения условной дисперсии  $\sigma_t^2$ .

Эконометрический анализ финансовых временных рядов в настоящей работе проводился с помощью программной среды MATLAB с использованием пакета прикладных программ Econometrics Toolbox. В семействе моделей GARCH спецификация ARMAX( $R, M, N$ ) временного ряда  $r_t$  в Econometrics Toolbox имеет вид [27]

$$r_t = C + \sum_{i=1}^R \phi_i r_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^M \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{k=1}^N \beta_k X(t, k),\tag{10}$$

где  $r_t$  – исследуемый наблюдаемый временной ряд доходностей;  $\varepsilon_t$  – ненормированные инновации;  $X(t, k)$ ,  $k = \overline{1, N}$  – ряды возможных

регрессоров;  $C, \beta_k, \theta_j, \phi_i, R, M$  – оцениваемые параметры и порядок моделей.

В классе моделей GARCH( $P, Q$ ) уравнение для условной дисперсии  $\sigma_t^2 = E_{t-1}(\varepsilon_t^2)$  имеет вид

$$\sigma_t^2 = K + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2, \quad (11)$$

с ограничениями  $\sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j < 1$ ,  $K > 0$ ,  $G_i \geq 0$ ,  $A_j \geq 0$ . Здесь параметрами являются коэффициенты  $K, G_i, A_j, P, Q$ .

В классе моделей TARARCH( $P, Q$ ), т.е. threshold ARCH [28] (другое название GJR( $P, Q$ ) – по именам Глостена, Джаганатана и Рюнкле [29]), уравнение для условной дисперсии имеет вид

$$\sigma_t^2 = K + \sum_{i=1}^P G_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^Q L_j I(\varepsilon_{t-j} < 0) \varepsilon_{t-j}^2, \quad (12)$$

где индикаторная функция  $I(\varepsilon_{t-j} < 0) = 1$ , если  $\varepsilon_{t-j} < 0$ , и  $I(\varepsilon_{t-j} < 0) = 0$  в противоположном случае. Параметрами являются коэффициенты  $K, G_i, A_j, L_j, P, Q$ . Ограничения на коэффициенты имеют вид

$$\sum_{i=1}^P G_i + \sum_{j=1}^Q A_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q L_j < 1, \quad K \geq 0, \quad G_i \geq 0, \quad A_j \geq 0, \quad A_j + L_j \geq 0.$$

В классе моделей EGARCH( $P, Q$ ) (exponential GARCH [30]) уравнение для условной дисперсии имеет вид

$$\ln \sigma_t^2 = K + \sum_{i=1}^P G_i \ln \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q A_j \left[ |z_{t-j}| - E(|z_{t-j}|) \right] + \sum_{j=1}^Q L_j z_{t-j}, \quad (13)$$

где введены стандартизованные (с нулевым средним и единичной дисперсией) инновации  $z_{t-j} = \varepsilon_{t-j} / \sigma_{t-j}$ .

Параметрами модели являются коэффициенты  $K, G_i, A_j, L_j, P, Q$ . Ограничения на параметры модели связано с тем, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\lambda^P - G_1\lambda^{P-1} - G_2\lambda^{P-2} - \dots - G_P = 0$$

были внутри окружности единичного радиуса.

Для оценки параметров моделей используется метод максимального правдоподобия. При этом предполагается, что значения процесса стандартизованных инноваций  $\{z_t\}$  в различные моменты времени статистически независимы и реализуются два подхода. Первый подход (модели  $N$  типа) основан на предположении о нормальном распределении значений инноваций  $z_t$  с плотностью вероятности

$$f(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z_t^2}{2}\right).$$

Второй подход (модели  $T$  типа) предполагает, что инновации  $z_t$  описываются  $t$  распределением Стьюдента с  $\nu$  степенями свободы с плотностью вероятностей вида

$$f(z_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{(\nu-2)\pi}} \left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2},$$

где  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$  – гамма-функция и  $\nu > 2$ . В этих предположениях в

модели EGARCH (13) среднее значение модуля величины  $z_{t-j}$

соответственно равно  $E(|z_{t-j}|) = \sqrt{2/\pi}$  для нормального распределения и

$E(|z_{t-j}|) = \sqrt{(\nu-2)/\pi} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$  для распределения Стьюдента.

В рамках моделей семейства GARCH удастся описать многие особенности ценообразования финансовых активов: островершинность и тяжелые хвосты плотности вероятности доходности  $r_t$ , а также эффекты кластеризации волатильности и дальних корреляций процесса квадратов доходности  $r_t^2$ . Модели TARЧH и EGARCH позволяют описать также эффекты асимметричности (левереджа).

Оценив параметры моделей, в результате применения алгоритмов обработки можно получить в каждый момент времени  $t$  на интервале наблюдения оценки процесса стандартизованных инноваций  $z_t$ , процесса условной волатильности  $\sigma_t$  доходности  $r_t$  и сформировать прогнозные значения волатильности, которые представляют интерес для различных прикладных задач финансовой экономики.

## **6. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РЯДОВ ДОХОДНОСТЕЙ ИНДЕКСОВ РТС И S&P 500**

В настоящей работе модели семейства GARCH используются для исследования статистических характеристик и построения эконометрических моделей дневной доходности фондовых индексов РТС и S&P 500.

Подбор параметров для эконометрических моделей доходностей проводился методом максимального правдоподобия отдельно для классов моделей ARMAX( $R, M, N$ )–GARCH( $P, Q$ ), TARЧH( $P, Q$ ) и EGARCH( $P, Q$ ) в предположении, что процесс инноваций  $\varepsilon_t$  распределен нормально или в соответствии с  $t$  распределением Стьюдента. Критериями для выбора порядков моделей  $R, M, P, Q$  являлись значения логарифма функции правдоподобия ( $LL$ ), значения информационных критериев Акаике ( $AIC$ ) и Шварца ( $BIC$ ) (чем меньше значения информационных критериев, тем лучше модель).

### Результаты моделирования без учета регрессоров

В моделях без учета регрессоров  $N = 0$  идентификация параметров моделей проводилась по историческим данным суточных значений закрытия индекса РТС (RTSI, RTS Index) с 1 сентября 1995 г. по 31 декабря 2009 г.

В случае предположения о нормальном распределении процесса инноваций  $z_t$  (модели  $N$  типа) лучшие результаты демонстрируют модели с параметрами  $R = P = Q = 1$ ,  $M = 0$ . Результаты моделирования сведены в табл. 2 (в скобках даны значения среднеквадратичных ошибок оцениваемых коэффициентов).

Таблица 2

| Параметры | AR(1) –<br>GARCH(1,1) – $N$                          | AR(1) –<br>TARCH(1,1) – $N$                          | AR(1) –<br>EGARCH(1,1) – $N$ |
|-----------|--|--|------------------------------|
| $C$       | 0,001605<br>(0,00033)                                | 0,001388<br>(0,00034)                                | 0,001487<br>(0,00031)        |
| $\phi_1$  | 0,1269<br>(0,018)                                    | 0,1301<br>(0,018)                                    | 0,1237<br>(0,017)            |
| $K$       | $1,6084 \times 10^{-5}$<br>( $1,57 \times 10^{-6}$ ) | $1,6469 \times 10^{-5}$<br>( $1,58 \times 10^{-6}$ ) | -0,3042<br>(0,027)           |
| $G_1$     | 0,8225<br>(0,0087)                                   | 0,8238<br>(0,0092)                                   | 0,9576<br>(0,0034)           |
| $A_1$     | 0,1661<br>(0,0088)                                   | 0,1403<br>(0,013)                                    | 0,3192<br>(0,015)            |
| $L_1$     |  | 0,04399<br>(0,014)                                   | -0,0310<br>(0,0082)          |
| $LL$      | 8404,811   | 8407,828   | 8392,531                     |
| $AIC$     | -16799,623   | -16803,656   | -16773,062                   |
| $BIC$     | -16768,713   | -16766,564   | -16735,970                   |

В случае предположения о  $t$  распределении Стьюдента процесса инноваций  $z_t$  (модели  $T$  типа) лучшие результаты по критериям Акаике ( $AIC$ ) и Шварца ( $BIC$ ) демонстрируют модели с параметрами  $M = P = Q = 1$ ,  $R = 0$ . При этом методом максимального правдоподобия оценивается также число степеней свободы  $\nu$  распределения Стьюдента. Результаты оценок сведены в табл. 3 (в скобках даны значения среднеквадратичных ошибок оцениваемых коэффициентов).

Таблица 3

| Параметры  | MA(1) –<br>GARCH(1,1) – $T$                         | MA(1) –<br>TARCH(1,1) – $T$                          | MA(1) –<br>EGARCH(1,1) – $T$ | AR(1) –<br>EGARCH(1,1) – $T$ |
|------------|---|--|------------------------------|------------------------------|
| $C$        | 0,002046<br>(0,00034)                               | 0,001995<br>(0,00034)                                | 0,002019<br>(0,00034)        | 0,001774<br>(0,00030)        |
| $\phi_1$   |   |  |                              | 0,1168<br>(0,017)            |
| $\theta_1$ | 0,1205<br>(0,017)                                   | 0,1210<br>(0,017)                                    | 0,1173<br>(0,017)            |                              |
| $K$        | $1,047 \times 10^{-5}$<br>( $2,28 \times 10^{-6}$ ) | $1,0647 \times 10^{-5}$<br>( $2,29 \times 10^{-6}$ ) | -0,1985<br>(0,040)           | -0,1983<br>(0,040)           |
| $G_1$      | 0,8498<br>(0,013)                                   | 0,8494<br>(0,013)                                    | 0,9736<br>(0,0052)           | 0,9736<br>(0,0052)           |
| $A_1$      | 0,1494<br>(0,015)                                   | 0,1415<br>(0,020)                                    | 0,2996<br>(0,024)            | 0,2994<br>(0,024)            |
| $L_1$      |   | 0,01463<br>(0,022)                                   | -0,01491<br>(0,013)          | -0,01527<br>(0,013)          |
| $\nu$      | 5,7192<br>(0,57)                                    | 5,7398<br>(0,58)                                     | 5,6149<br>(0,54)             | 5,6469<br>(0,55)             |
| $LL$       | 8503,310  | 8503,999   | 8497,568                     | 8497,334                     |
| $AIC$      | -16994,621  | -16993,998   | -16981,136                   | -16980,668                   |
| $BIC$      | -16957,528  | -16950,724   | -16937,862                   | -16937,394                   |



Для сравнения в табл. 3 приведены также оценки параметров модели AR(1)–EGARCH(1,1)– $T$ . Можно сделать вывод о том, оценки однотипных коэффициентов во всех моделях близки по величине и отличаются от нуля на 5% уровне значимости. Исключение составляют коэффициенты  $L_1$ , описывающие эффект леввереджа. В моделях  $T$  типа эти параметры не отличаются от нуля на 5% уровне значимости. В моделях  $N$  типа коэффициенты  $L_1$  с большой вероятностью отличаются от нуля и, следовательно, эффект леввереджа более выражен. Графики автокорреляционных функций стандартизованных инноваций  $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$  и их квадратов  $z_t^2$  для всех моделей примерно одинаковы – на рис. 13, 14 они представлены для модели AR(1)–EGARCH(1,1)– $N$ . Видно (и это подтверждается статистиками Льюнга-Бокса), что выполняется предположение о некоррелированности значений процесса  $z_t$  в различные моменты времени.

На рис. 15, 16 приведены реализация, а также гистограмма и выборочная интегральная функция распределения процесса  $z_t$  в модели AR(1)–EGARCH(1,1)– $N$ . Пунктиром на рис. 16 проведены графики для нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией. Следует отметить, что хотя гистограмма полученного процесса  $z_t$  близка к гауссовской плотности вероятности, тем не менее гипотеза о нормальности процесса  $z_t$  отвергается при 5% уровне значимости критериями Жака-Бера и Колмогорова-Смирнова на соответствие выборки нормальному распределению. Аналогично в моделях  $T$  типа гипотеза о том, что полученный ряд  $z_t$  описывается  $t$ -распределением Стьюдента с числом степеней свободы, равном  $\nu = 5,6$  или  $\nu = 5,7$  отвергается по критерию Колмогорова-Смирнова на 5% уровне значимости.



Рис. 13. Выборочная автокорреляционная функция ряда  $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ .



Рис. 14. . Выборочная автокорреляционная функция ряда  $z_t^2$ .

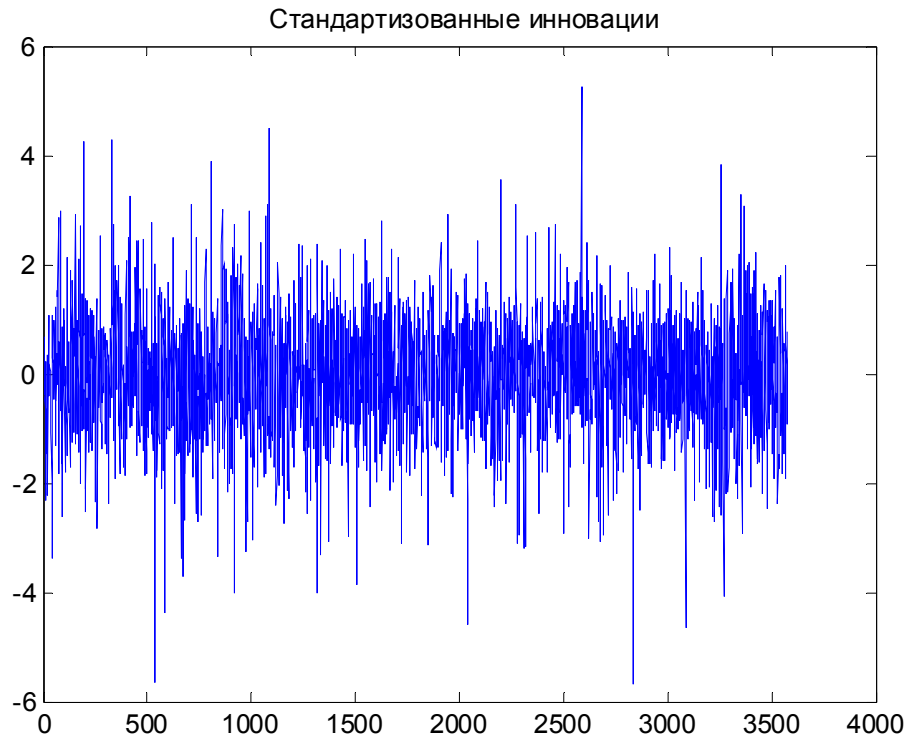


Рис. 15. Процесс инноваций  $z_t$  в модели AR(1)–EGARCH(1,1) –  $N$ .

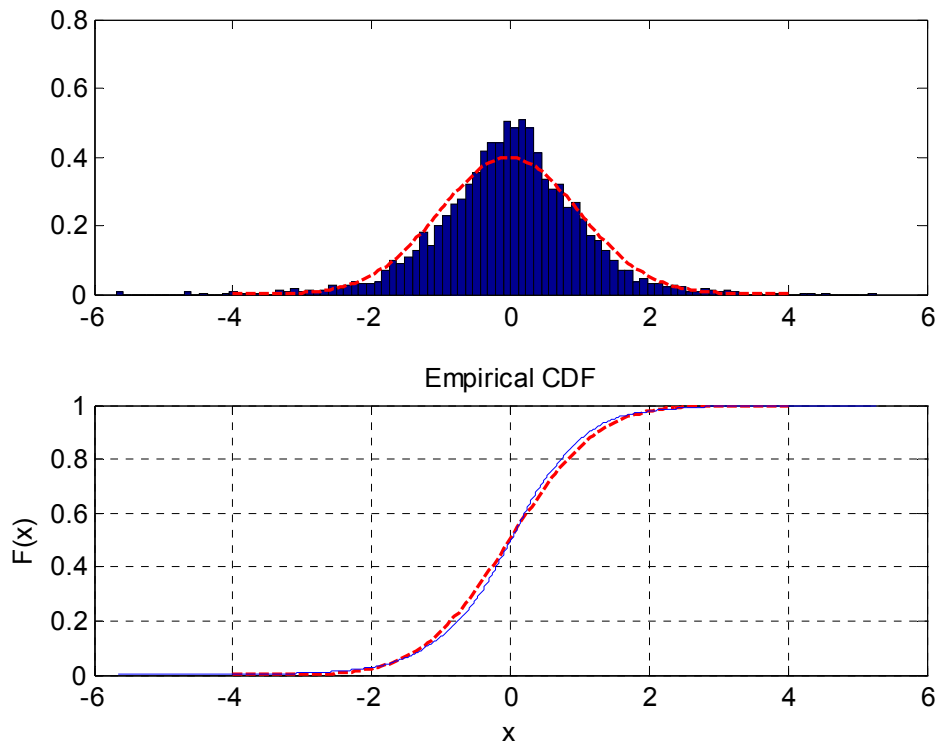


Рис. 16. Гистограмма и интегральная функция распределения ряда  $z_t$ .

Таким образом, предпосылки используемых моделей все-таки отличаются от итогового распределения процесса стандартизованных инноваций. Но, как видно из рис. 16, это отличие относительно невелико. Кроме того, различные варианты гауссовских приближений часто используются в нелинейных стохастических моделях [18]. Наконец, можно считать, что отличие от гауссовости или от  $t$ -распределения Стьюдента истинного процесса инноваций  $z_t$  в итоге не слишком влияет на волатильность  $\sigma_t$ , поскольку вырабатываемые оценки и прогнозные значения волатильности  $\sigma_t$  для различных моделей с определенной степенью точности примерно одинаковы.

Графики оценок волатильности доходности индекса РТС для моделей AR(1)–GARCH(1,1)– $N$  и AR(1)–EGARCH(1,1)– $N$  на интервале времени с 1 сентября 1995 г. по 31 декабря 2009 г. показаны на рис. 17, 18. На рис. 19, 20 показаны эти же оценки в более крупном масштабе на промежутке, охватывающим финансовый кризис, с 1 апреля 2008 г. по 31 декабря 2009 г. Прогнозные значения волатильности однодневной доходности индекса РТС на 50 следующих торговых дней, начиная с 11 января 2010 г. (примерно до апреля 2010 г.) приведены на рис. 21, 22. Можно отметить, что показатель волатильности дает количественную оценку неопределенности будущих значений индекса. Как видно из рис. 19, 20, волатильность однодневной доходности индекса РТС с середины лета 2008 г. увеличивалась в связи с финансовым кризисом, достигла осенью 2008 г. максимального значения 9%, затем медленно в течение 2009 г. снижалась и, наконец, в конце декабря 2009 г. практически достигла докризисного значения примерно 1,5%. Однако, тем не менее, прогнозируется небольшое увеличение волатильности в ближайшие месяцы.



Рис. 17. Оценка волатильности ряда  $r_t$  в модели  $AR(1)$ – $GARCH(1,1)$ – $N$ .



Рис. 18. Оценка волатильности ряда  $r_t$  в модели  $AR(1)$ – $EGARCH(1,1)$ – $N$ .



Рис. 19. Оценка волатильности в модели  $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$ - $N$ .



Рис. 20. Оценка волатильности в модели  $AR(1)$ - $EGARCH(1,1)$ - $N$ .

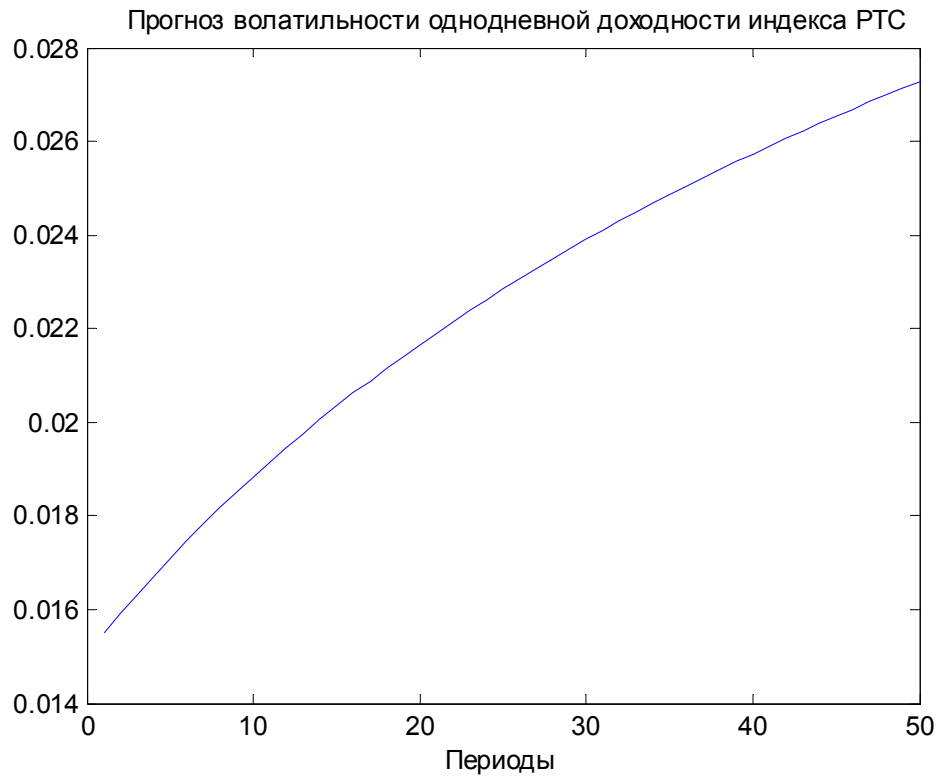


Рис. 21. Прогноз волатильности в модели  $AR(1)-GARCH(1,1)-N$ .

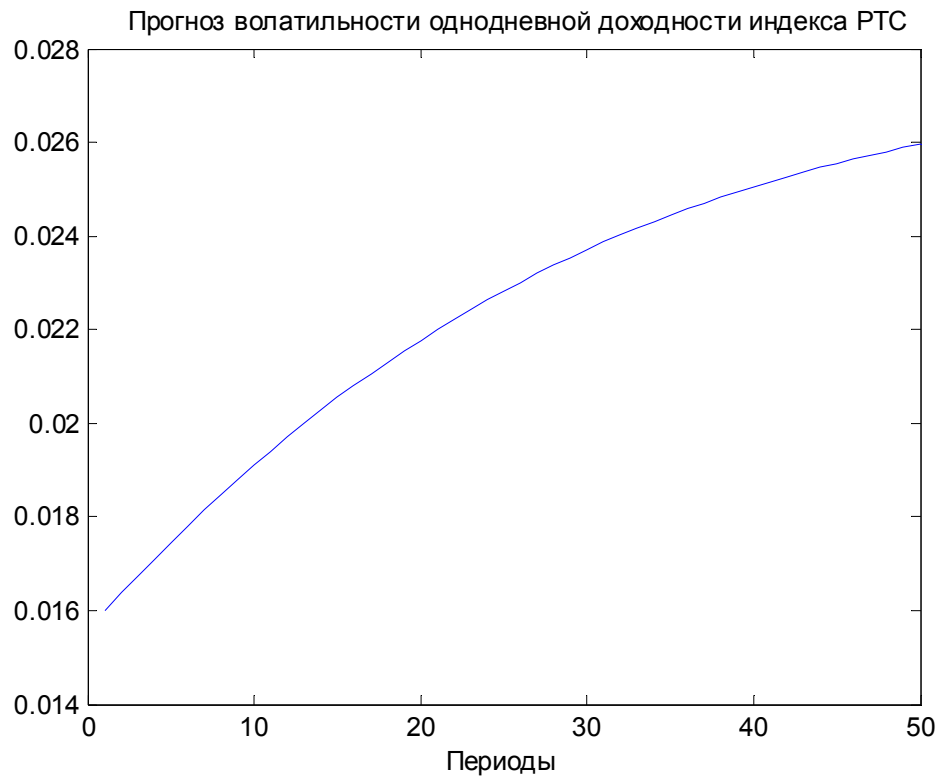


Рис. 22. Прогноз волатильности в модели  $AR(1)-EGARCH(1,1)-N$ .

## Эконометрические модели доходности индекса S&P 500

В [15] были найдены эконометрические модели семейства GARCH индекса S&P 500, построенные по суточным ценам закрытия Нью-Йоркской фондовой биржи с января 1928 по август 1991 г. Предпочтение было отдано моделям с параметрами  $R = 0$ ,  $M = 1$ ,  $P = 2$ ,  $Q = 1$ .

К настоящему времени накоплены дополнительно данные за последние 17 лет до 31 декабря 2009 г. (графики индекса представлены на рис. 3, 4), с учетом которых только для группы TGARCH эти порядки моделей более предпочтительны по информационным критериям Акаике и Шварца (в предположении гауссовских стандартных инноваций). Для группы моделей GARCH более лучшие результаты дают параметры  $R = 1$ ,  $M = 1$ ,  $P = 2$ ,  $Q = 1$ , а для группы моделей EGARCH соответственно параметры  $R = 1$ ,  $M = 1$ ,  $P = 2$ ,  $Q = 2$ . В итоге получены следующие модели для доходности индекса S&P 500 (в скобках приведены значения среднеквадратичных ошибок оцениваемых коэффициентов):

1). Модель ARMA(1,1)–GARCH(2,1)– $N$ :

$$r_t^{S\&P} = 0,0005311 - 0,1934r_t^{S\&P} + \varepsilon_t + 0,3043\varepsilon_{t-1};$$

(6,6 × 10<sup>-5</sup>)    (0,060)                    (0,059)

$$\sigma_t^2 = 9,1023 \times 10^{-7} + 0,6100\sigma_{t-1}^2 + 0,2812\sigma_{t-2}^2 + 0,1049\varepsilon_{t-1}^2.$$

(6,7 × 10<sup>-8</sup>)            (0,039)            (0,037)            (0,0029)

2). Модель MA(1)–TARCH(2,1)– $N$ :

$$r_t^{S\&P} = 0,0002462 + \varepsilon_t + 0,1182\varepsilon_{t-1};$$

(5,6 × 10<sup>-5</sup>)            (0,0072)

$$\sigma_t^2 = 1,0222 \times 10^{-6} + 0,6618\sigma_{t-1}^2 + 0,2396\sigma_{t-2}^2 + 0,0366\varepsilon_{t-1}^2 + 0,1077I(\varepsilon_{t-1} < 0)\varepsilon_{t-1}^2.$$

(6,2 × 10<sup>-8</sup>)            (0,044)            (0,042)            (0,0029)            (0,0046)



3). Модель ARMA(1,1)–EGARCH(2,2)–N:

$$r_t^{S\&P} = 0,0002453 - 0,1354r_{t-1}^{S\&P} + \varepsilon_t + 0,2445\varepsilon_{t-1}; \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t;$$

$$(6,4 \times 10^{-5}) \quad (0,060) \quad (0,059)$$

$$\ln \sigma_t^2 = -0,007815 + 1,7779 \ln \sigma_{t-1}^2 - 0,7789 \ln \sigma_{t-2}^2 + 0,1583 z_{t-1} - 0,1374 z_{t-2} -$$

$$(0,0010) \quad (0,013) \quad (0,013) \quad (0,0055) \quad (0,0056)$$

$$- 0,1681 \left[ |z_{t-1}| - \sqrt{2/\pi} \right] + 0,1618 \left[ |z_{t-2}| - \sqrt{2/\pi} \right].$$

$$(0,0044) \quad (0,0042)$$

Графики оценок волатильности доходности индекса S&P 500 для модели ARMA(1,1)–GARCH(2,1)–N для различных интервалов времени показаны на рис. 23–25. Прогнозные значения волатильности однодневной доходности приведены на рис. 26. Можно отметить, что в период кризисов волатильность суточной доходности индекса РТС больше на 2-3% по сравнению с волатильностью суточной доходности индекса S&P 500, а в периоды стабильности (роста индексов) больше примерно на 1%. Кроме того, судя по графикам на рис. 24-25, можно утверждать, что период нестабильности на финансовых рынках в США начался осенью 2007 г., острая фаза кризиса охватывает период с сентября 2008 г. по январь 2009 г. и завершение кризиса можно датировать августом 2009 г. Для российского рынка начало нестабильности можно связать с серединой лета 2008 г., период острой фазы примерно такой же (с середины сентября 2008 г. по январь 2009 г.), а завершение, судя по графикам волатильности для индекса РТС, затянулось до января 2010 г.

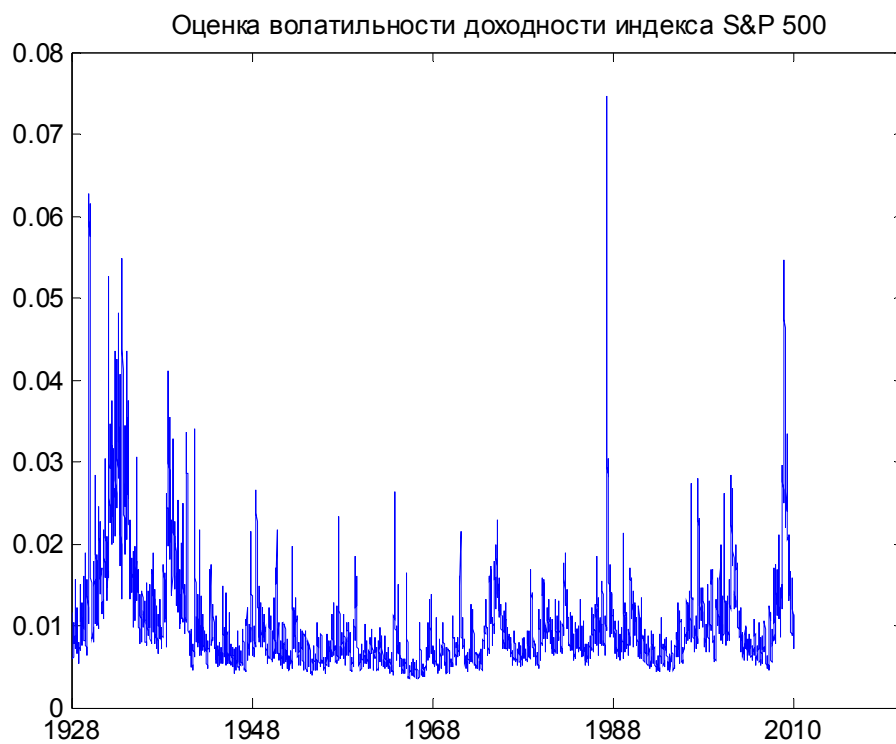


Рис. 23. Оценка волатильности доходности индекса S&P 500.



Рис. 24. Волатильность доходности с сентября 1995 г.



Рис. 25. Волатильность доходности с апреля 2008 г.

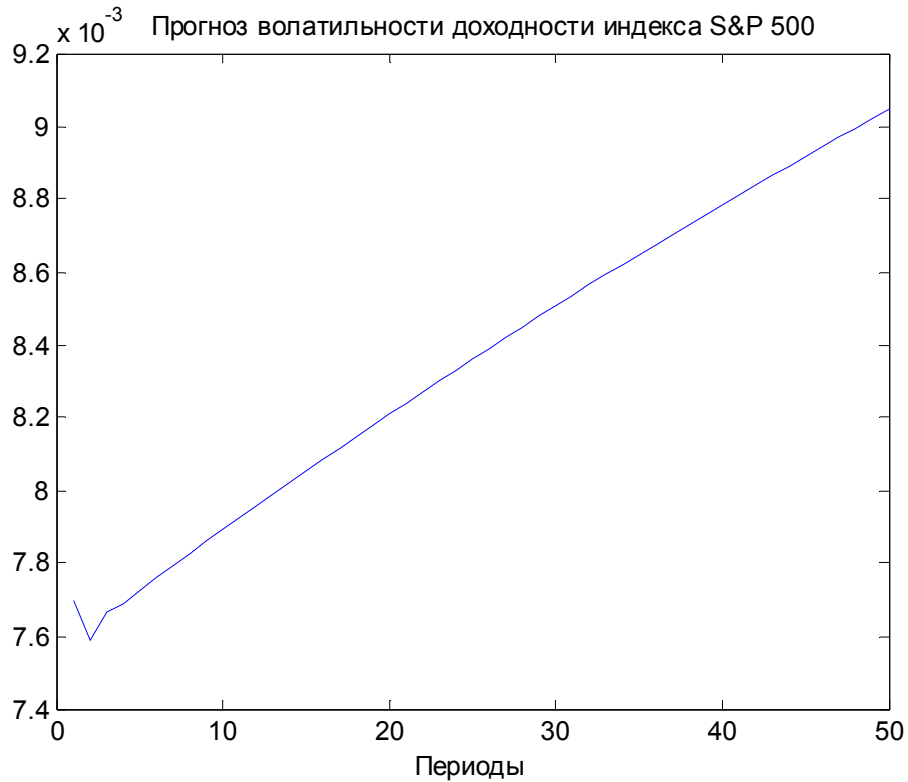


Рис. 26. Прогноз волатильности в модели ARMA(1,1)–GARCH(2,1)–N.

## Результаты моделирования с учетом регрессоров

Индекс РТС отражает макроэкономическую ситуацию в России и связан с мировыми фондовыми индексами. Эта связь прослеживается на рис. 27, на котором представлены графики индекса Nikkei 225, вычисляемого по итогам торгов фондовой биржи в Токио, FTSE 100 Index по итогам торгов фондовой биржи в Лондоне, индекса S&P 500, вычисляемого фондовой биржей в Нью-Йорке и индекса РТС с 1 сентября 1995 г. по 30 декабря 2009 г. На рис. 28 приведены графики тех же индексов в логарифмическом масштабе. Можно констатировать, что имеются статистические зависимости между значениями отдельных индексов, а также нестационарное поведение индексов во времени. Для проверки были вычислены нормированные взаимные корреляционные функции доходностей индексов. Результаты приведены на рис. 29-31.

Можно отметить, что доходность индекса РТС коррелирована с коэффициентом корреляции  $\rho_1(0)=0,238$  с доходностью индекса S&P 500 для одного и того же торгового дня, а также с коэффициентом корреляции  $\rho_1(-1)=0,182$  с доходностью индекса S&P 500 для предыдущего дня. Это можно объяснить, учитывая, что часовые пояса Москвы и Нью-Йорка отстоят на 8 часов. В один календарный день сначала в Москве закрывается биржа, при этом игроки ориентируются на цены закрытия предыдущего дня Нью-Йоркской фондовой биржи, а затем спустя несколько часов закрывается биржа в Нью-Йорке. В результате новости одного торгового дня создают соответствующие взаимные корреляции доходностей индексов. Аналогично доходность индекса РТС коррелирована с коэффициентом корреляции  $\rho_2(0)=0,266$  с доходностью индекса Nikkei 225 того же торгового дня, а также с коэффициентом  $\rho_2(1)=0,122$  с доходностью индекса Nikkei 225 следующего дня, т.к. биржа в Токио закрывается раньше, чем в Москве.

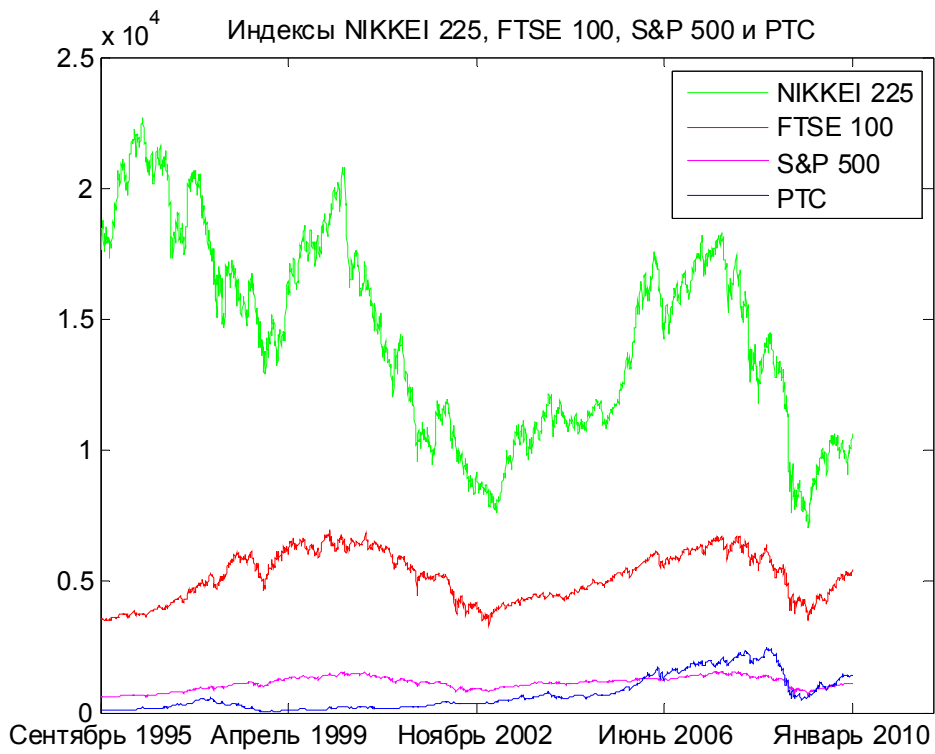


Рис. 27. Графики индексов Nikkei 225, FTSE 100, S&P 500 и PTC.

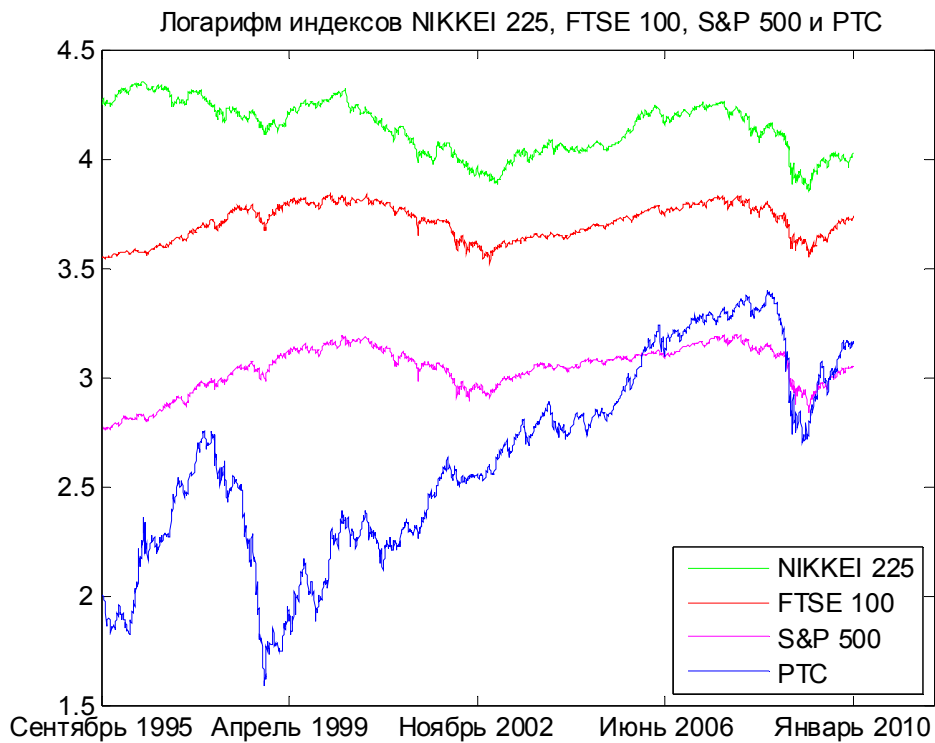


Рис. 28. Графики логарифмов значений индексов.

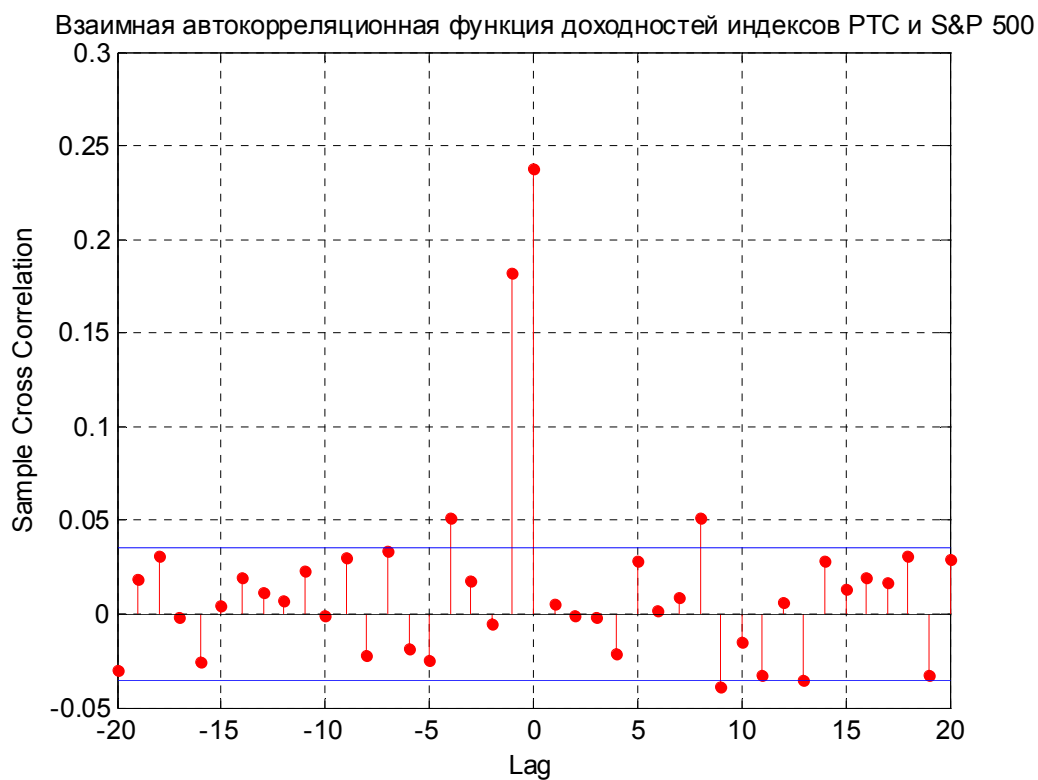


Рис. 29. Взаимная корреляционная функция доходностей PTC и S&P500.



Рис. 30. Взаимная корреляционная функция доходностей PTC и Nikkei 225.



Рис. 31. Взаимная корреляционная функция доходностей PTC и FTSE 100.

Наконец, с индексом FTSE 100 Лондонской биржи для одного календарного дня индекс PTC коррелирован с коэффициентом корреляции  $\rho_3(0) = 0,387$  (см. рис. 31).

Включим в эконометрическую модель доходности индекса PTC отдельными регрессорами ряды доходности индекса S&P 500 предыдущего дня и индексов Nikkei 225 и FTSE 100 того же торгового дня. Результаты оценок параметров методом максимального правдоподобия для различных моделей в предположении, что процесс инноваций  $z_t$  распределен нормально, приведены ниже (в скобках даны значения среднеквадратичных ошибок оцениваемых коэффициентов):

1). Модель ARMAX(0,1,3)–GARCH(1,1):

$$r_t^{PTC} = 0,001818 + 0,1389r_{t-1}^{S\&P} + 0,1807r_t^{Nikkei} + 0,5773r_t^{FTSE} + \varepsilon_t + 0,08760\varepsilon_{t-1};$$

|           |         |         |         |         |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| (0,00036) | (0,030) | (0,022) | (0,027) | (0,020) |
|-----------|---------|---------|---------|---------|

$$\sigma_t^2 = 1,1583 \times 10^{-5} + 0,8453 \sigma_{t-1}^2 + 0,1533 \varepsilon_{t-1}^2 ;$$

$$(1,41 \times 10^{-6}) \quad (0,0077) \quad (0,0082)$$

$$LL = 7406,586 ; AIC = -14797,172 ; BIC = -14748,703.$$

2). Модель ARMAX(0,1,3)–TARCH(1,1):

$$r_t^{PTC} = 0,001690 + 0,1375 r_{t-1}^{S\&P} + 0,1822 r_t^{Nikkei} + 0,5743 r_t^{FTSE} + \varepsilon_t + 0,08792 \varepsilon_{t-1} ;$$

$$(0,00037) \quad (0,031) \quad (0,023) \quad (0,027) \quad (0,020)$$

$$\sigma_t^2 = 1,1835 \times 10^{-5} + 0,8445 \sigma_{t-1}^2 + 0,1410 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,02424 I(\varepsilon_{t-1} < 0) \varepsilon_{t-1}^2 ;$$

$$(1,39 \times 10^{-6}) \quad (0,0076) \quad (0,0096) \quad (0,011)$$

$$LL = 7407,553 ; AIC = -14797,105 ; BIC = -14742,577.$$

3). Модель ARMAX(0,0,3)–EGARCH(2,2):

$$r_t^{PTC} = 0,001417 + 0,1021 r_{t-1}^{S\&P} + 0,2083 r_t^{Nikkei} + 0,5627 r_t^{FTSE} + \varepsilon_t ; \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t ;$$

$$(0,00032) \quad (0,030) \quad (0,022) \quad (0,028)$$

$$\ln \sigma_t^2 = -0,007140 + 1,8085 \ln \sigma_{t-1}^2 - 0,8096 \ln \sigma_{t-2}^2 + 0,3851 z_{t-1} - 0,3631 z_{t-2} -$$

$$(0,0025) \quad (0,027) \quad (0,026) \quad (0,018) \quad (0,017)$$

$$-0,03108 [|z_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}] + 0,02997 [|z_{t-2}| - \sqrt{2/\pi}] ;$$

$$(0,010) \quad (0,010)$$

$$LL = 7413,279 ; AIC = -14804,558 ; BIC = -14737,912.$$

Графики оценок волатильности доходности индекса РТС для модели ARMAX(0,0,3)–EGARCH(2,2) показаны на рис. 32, 33. Сравнивая данные результаты с рис. 19, 20, можно отметить, что учет в качестве регрессоров доходностей мировых финансовых индексов несколько снижает оценку волатильности доходности индекса РТС. В частности, максимальное значение волатильности равно 7,7% (достигнуто в начале октября 2008 г.). Прогнозные значения волатильности однодневной доходности приведены на рис. 34. Отметим, что в целом прогноз на некоторое увеличение волатильности в начале 2010 г. в данных моделях сохраняется.





Рис. 32. Оценки волатильности в модели  $ARMA(0,0,3)$ – $EGARCH(2,2)$ .



Рис. 33. Оценки волатильности доходности индекса РТС.

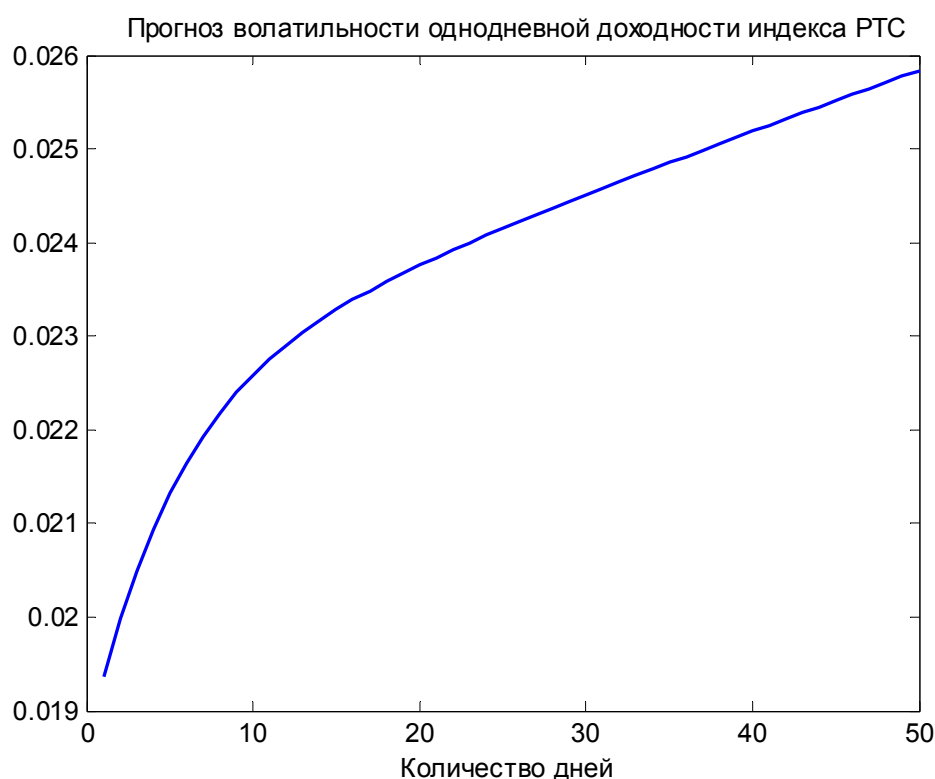


Рис. 34. Прогноз волатильности в модели  $ARMA(0,0,3)$ – $EGARCH(2,2)$ .

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы статистические характеристики суточных доходностей индексов РТС и S&P 500. Показано, что для данных рядов характерны все особенности финансовых временных рядов – негауссовость, тяжелые хвосты, кластеризация, леввередж, долгая память. Построены эконометрические модели дневной доходности индексов РТС и S&P 500 для классов моделей GARCH, TARЧН и EGARCH с помощью программирования в среде MATLAB. Найдены оценки изменяющейся условной волатильности на интервале наблюдения и прогнозные значения волатильности. Получены эконометрические модели семейства GARCH, учитывающие зависимость однодневной доходности индекса РТС от доходностей фондовых индексов S&P 500, Nikkei 225 и FTSE 100. В качестве

регрессоров в уравнении для доходности индекса РТС могут использоваться доходности и других мировых индексов, курсы валют, а также доходности различных финансовых активов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Markowitz H. Portfolio selection // Journal of Finance. 1952. Vol. 7. No. 1. Pp. 77 – 91.
2. Black F., Scholes M. Pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. No. 3. Pp. 637 – 654.
3. Merton R. Theory of rational option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. Vol. 4. Pp. 141 – 183.
4. Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // Journal of Business. 1963. Vol. 36. Pp. 394 – 419.
5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. – М.: «ФАЗИС», 1998.
6. Engle R.F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflation // Econometrica. 1982. Vol.50. Pp. 987 – 1008.
7. Engle R.F., Bollerslev T. Modelling the persistence of conditional variances // Econometric Reviews. 1986. Vol. 5. No. 1. Pp. 1 – 50.
8. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. Vol. 31. No. 3. Pp. 307 – 327.
9. Bollerslev T. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // The Review of Economics and Statistics. 1987. Vol. 69. No. 3. Pp. 542 – 547.

10. Bollerslev T., Chou R., Kroner K. ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence // *Journal of Econometrics*. 1992. Vol. 52. No. 1-2. Pp. 5 – 59.
11. Hamilton J.D. *Time series analysis*. – Princeton, N.J. Princeton University Press, 1994.
12. Harvey A.C. *Time series models*. – New York: Philip Allan, 1993.
13. Tsay R.S. *Analysis of financial time series*. – Cambridge University Press, 2nd ed., 2005.
14. Brooks C. *Introductory econometrics for finance*. – Cambridge University Press, 2nd ed., 2008.
15. Mills T.C., Markellos R.N. *The econometric modelling of financial time series*. – Cambridge University Press, 3rd ed., 2008.
16. Franses P.H., Dick van Dijk. *Nonlinear series models in empirical finance*. – Cambridge University Press, 2000.
17. Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C. *The econometrics of financial markets*. – Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.
18. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразования. – М.: Сов. радио, 1978.
19. Cont R. Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues // *Quantitative Finance*. 2001. Vol. 1. No. 2. Pp. 223 – 236.
20. Субботин А.В. Моделирование волатильности: от условной гетероскедастичности к каскадам на множественных горизонтах // *Прикладная эконометрика*. 2009. № 3(15). С. 94 – 138.

21. Ding Z., Granger C., Engle R. A long memory property of stock market returns and a new model // Journal of Empirical Finance. 1993. Vol. 1. No. 1. Pp. 83 – 106.
22. Ding Z., Granger C. Modeling volatility persistence of speculative returns: a new approach // Journal of Econometrics. 1996. Vol. 73. Pp. 185 – 215.
23. Lobato I., Velasco C. Long memory in stock market trading volume // Journal of Business & Economic Statistics. 2000. Vol. 18. No. 4. Pp. 410 – 427.
24. RiskMetrics™ – Technical Document. Fourth Edition. 1996. (<http://www.riskmetrics.com/system/files/private/td4e.pdf>).
25. Шепард Н. Статистические аспекты моделей типа ARCH и стохастическая волатильность // Обзорение прикладной и промышленной математики. 1996. Т. 3. Вып. 6. С. 764 – 826.
26. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа. – М.: «Анкил», 2006.
27. Econometrics Toolbox User's Guide. 2009. The MathWorks, Inc. ([www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)).
28. Zakoian J.-M. Threshold heteroscedastic models // J. Econom. Dynamics Control. 1994. V. 15 . Pp. 931 – 955.
29. Glonsten L., Jagannathan R., Runkle D. Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks // J. Finance. 1993. V. 48. No. 5. Pp. 1779 – 1801.
30. Nelson D.B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach // Econometrica. 1991. V. 59. Pp. 347 – 370.

*Препринт P1/2010/01*  
*Серия P1*  
*Научные доклады лаборатории количественного анализа и*  
*моделирования экономики*

Вера Андреевна Силаева,  
Андрей Михайлович Силаев

**Эконометрические модели оценивания волатильности доходности  
фондовых индексов**

Публикуется в авторской редакции