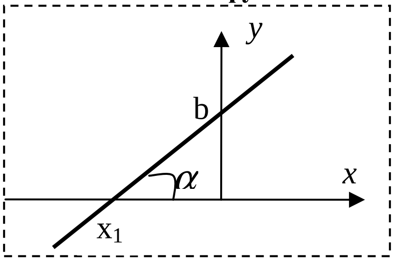
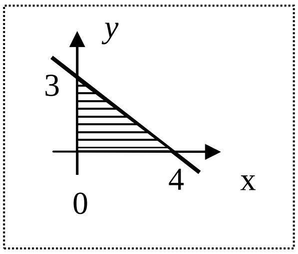
## 1. Линейная функция




***Уравнение прямой на плоскости***

$$\boxed{\begin{aligned} &y = kx + b, \\ &k = tg\alpha = \frac{b}{x_1} \end{aligned}}$$

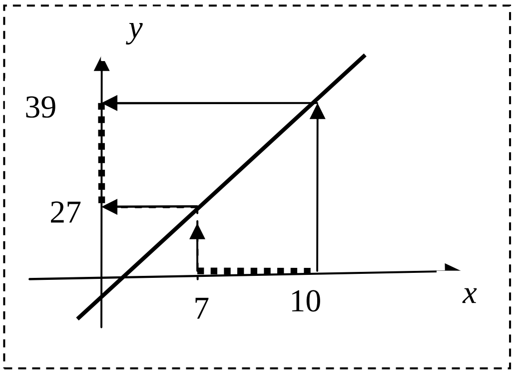
1. Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой $4y + 3x = 12$ и координатными осями.




$S = 6$

**Д.З.** Найти площадь треугольника, отсекаемого прямой $5y + 8x = 20$ и координатными осями.

2. Найти множество значений функции $y = 4x - 1$ при $x \in [7;10]$




$27 \le y \le 39$.

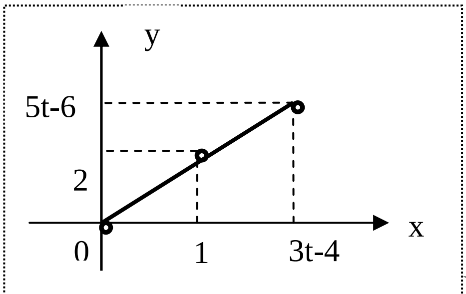
**Д.З.** Найти множество значений функции $y = 3x + 2$ при $x \in [4; 9]$.

3. При каком $p$ прямая $y = (p^2 - p + 5)x + 3 - p$ проходит через начало координат?

$b = 0 \;\Rightarrow\; p = 3$.

**Д.З.** При каком $p$ прямая $y = (p^2 - 2p + 5)x + 5 - p$ проходит через точку $(1;\ 2)$?

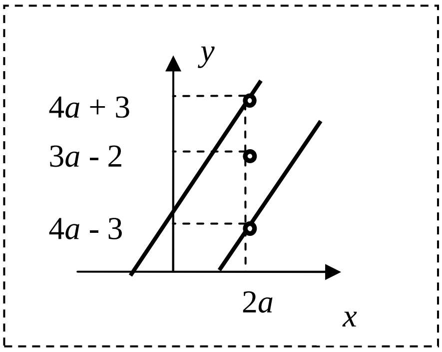
4. При каком $t$ точки $M_1(0;0)$, $M_2(1;2)$ и $M_3(3t-4;5t-6)$ лежат на одной прямой?




Пропорциональность компонент точек: $\dfrac{2}{1} = \dfrac{5t-6}{3t-4} \;\Rightarrow 6t - 8 = 5t - 6 \Rightarrow\; t_0 = 2$

**Д.З.** При каком $t$ точки $M_1(0;0)$, $M_2(2;3)$ и $M_2(4t-2;3t-1)$ лежат на одной прямой?

5. При каких $a$ точка $(2a;3a-2)$ лежит между прямыми $y=2x-3$ и $y=2x+3$?



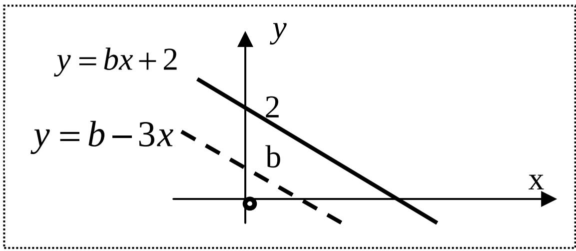

$4a-3<3a-2<4a+3 \Rightarrow -1<a<1$.

**Д.З.** При каких $a$ точка $(2a;3a-2)$ лежит между прямыми $y=2x-3$ и $y=2x+5$?

*Прямая* $y_1=k_1x+b_1$ *выше прямой* $y_2=k_2x+b_2$ *при всех* $x$ *при*

$$\boxed{\begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1>b_2 \end{cases}}$$

6. При каком $b$ прямая $y=bx+2$ целиком расположена выше прямой $y=b-3x$?

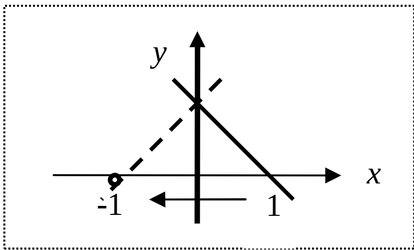


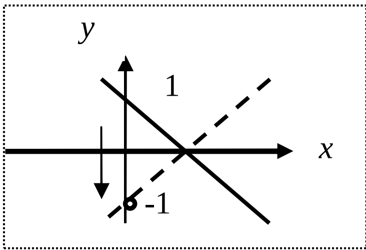

$$\begin{cases} b=-3 \\ b<2 \end{cases} \Rightarrow b=-3$$

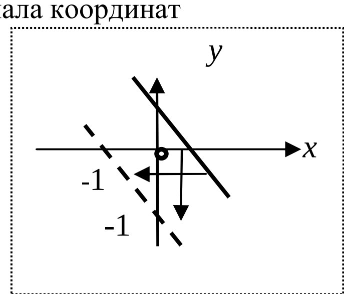
**Д.З.** При каком $b$ прямая $y=bx+4$ целиком расположена ниже прямой $y=b-3x$?

7. Составить уравнение прямой, которая симметрична прямой $x+y=1$ относительно

оси ординат — оси абсцисс — начала координат




$x\to -x$ — $y\to -y$ — $\begin{cases} x\to -x, \\ y\to -y \end{cases}$

Ответ $-x+y=1$ — $x-y=1$ — $-x-y=1$.

**Д.З.** Составить уравнение прямой, которая симметрична прямой $4x+5y=6$ относительно оси ординат, оси абсцисс и начала координат.

***Условие параллельности двух прямых***

$y_1=k_1x+b_1$ *и* $y_2=k_2x+b_2$:

$$\boxed{k_1=k_2}$$

8. При каком $k$ прямые $3y+2x=1$ и $y=kx+2$ параллельны?

$$\left[\begin{array}{l} y_1=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow k=-\frac{2}{3}. \\ y_2=kx+2 \end{array}\right.$$

**Д.З.** При каком $k$ прямые $4y+3x=2$ и $y=kx$ параллельны?

***Условие перпендикулярности двух прямых***

$y_1=k_1x+b_1$ *и* $y_2=k_2x+b_2$:

$$\boxed{k_1\cdot k_2=-1}$$

9. При каких $a$ прямые $y=(a+1)x+3-a$ и $y=(a-4)x-2a-1$ перпендикулярны?

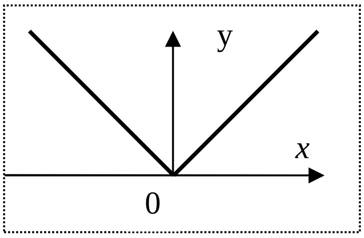
$(a+1)(a-4)=-1 \;\Rightarrow\; a^2-3a-4=-1 \;\Rightarrow\; a^2-3a-5=0 \;\Rightarrow\;$ 3.

**Д.З.** При каких $p$ прямые $y(x)=(p^2-p-1)x+1$ и $y(x)=(p^2-p-3)x+2$ перпендикулярны?

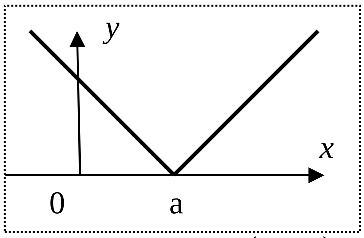
**Д.З.** При каком $k$ прямая $y=kx$ образует угол в $15^\circ$ с положительным направлением оси $ox$?

***Галка. Графики функций***

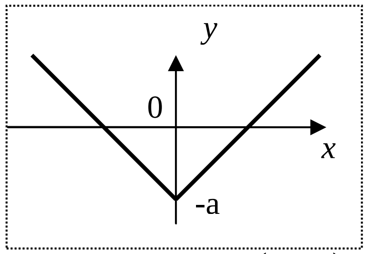
$\boxed{y=|x|=\begin{cases} x, \text{ при } x\ge 0 \\ -x, \text{ при } x<0 \end{cases}}$ $\boxed{y=|x-a|}$ $\boxed{y=|x|-a}$




*Начало координат*



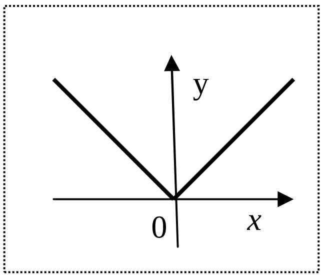

*Смещена вправо* $(a>0)$



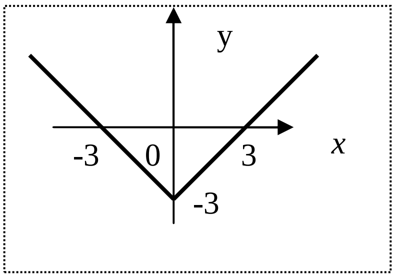

*Смещена вниз* $(a>0)$

10. Построить график функции $y=\big||x|-3\big|$

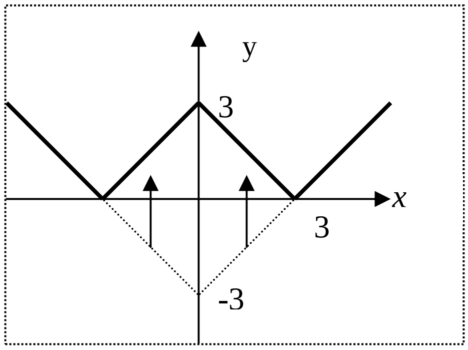
$y=|x| \quad\Rightarrow\quad y=|x|-3 \quad\Rightarrow\quad y=\big||x|-3\big|$




*Начало координат*




*Смещение вниз*

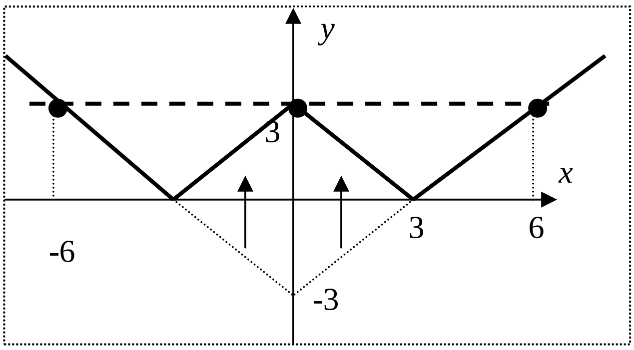



*Зеркальное отражение*

**Д.З.** Построить график функции $y=\big|\big||x|-3\big|-3\big|$.

11. Найти число решений уравнения $\big||x|-3\big|=3$.

Графический метод: Левая функция $y_л=\big||x|-3\big|$ (сплошная) Правая $y_п=3$ (пунктирная)



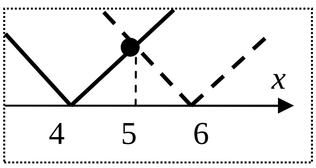

3 решения

**Д.З.** Найти число решений уравнения $\big|\big||x|-3\big|-3\big|=3$.

**Д.З.** Исследовать уравнение $\big|\big||x|-3\big|-3\big|=p$ на число решений в зависимости от параметра $p$.

12. Решить уравнение $|x-4|=|6-x|$.

Графический метод: Левая функция $y_л=|x-4|$ (сплошная) Правая $y_п=|x-6|$ (пунктирная)




$x=5$

**Д.З.** Решить уравнение $\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{25-10x+x^2}$ ;

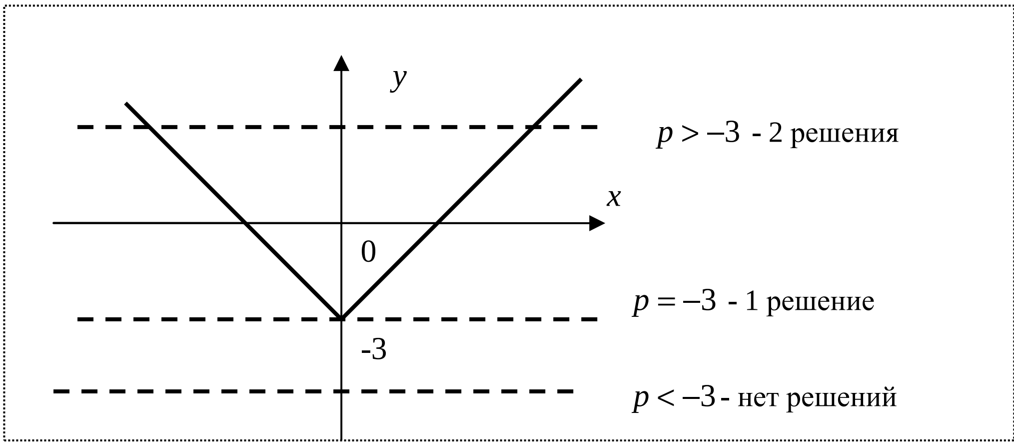
**Д.З.** Исследовать уравнение $|x-3|=|p-x|$ на число решений в зависимости от параметра $p$ .

13. Исследовать уравнение $|x|-p=3$ на число решений в зависимости от параметра $p$ .

$|x|-3=p$

Графический метод:

Левая функция $y_л=|x|-3$ (сплошная) Правая $y_п=p$ (пунктирная)




**Д.З.** Исследовать уравнение $\sqrt{x^2}-7=p$ на число решений в зависимости от параметра $p$ .

14. Исследовать уравнение $||x|-p|=3$ на число решений в зависимости от параметра $p$ .

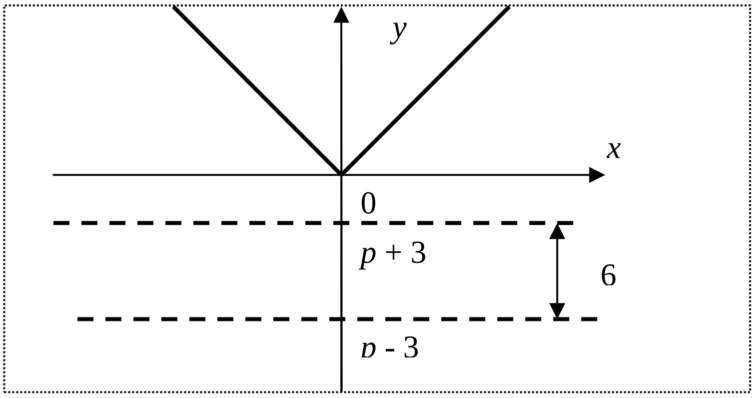
Снимаем внешний модуль возведением уравнения в квадрат

$(|x|-p)^2=3^2 \Rightarrow (|x|-p-3)(|x|-p+3)=0 \Rightarrow |x|=p\pm3$

*Графический метод:*

Левая функция $y_л=|x|$ - галка (сплошная) -

Правая функция $y_п=p\pm3$ - две параллельных прямых (пунктирные)




$p+3<0$ - нет решений

$p+3=0$ - 1 решение

$\begin{cases} p+3>0 \\ p-3<0 \end{cases} \Rightarrow -3<p<3$ - 2 решения

$p-3=0$ - 3 решения

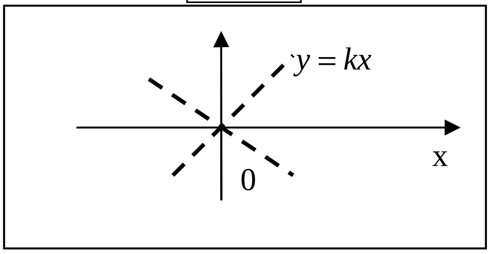
$p-3>0$ - 4 решения

**Д.З.** Исследовать уравнение $||x|-p-8|=9$ на число решений в зависимости от параметра $p$ .

**Д.З.** Исследовать уравнение $|||x|-p|-p|=3$ на число решений в зависимости от параметра $p$ .

### *Пучок прямых (веер) из начала координат*

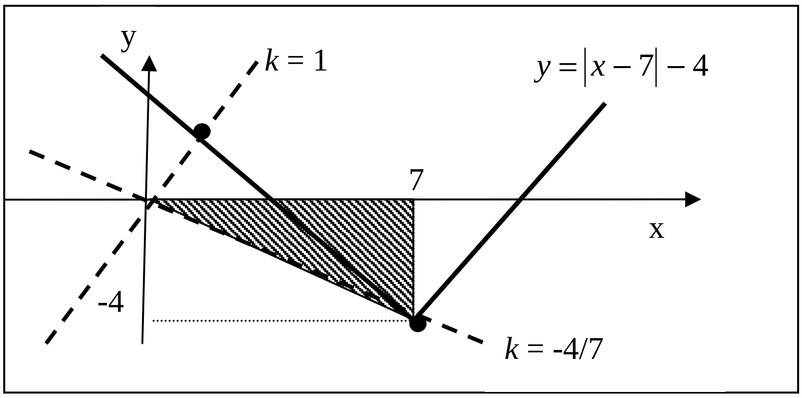
$$\boxed{y = kx}$$




15. При каких $k$ уравнение $|x-7|-4=kx$ имеет два решения?

Графический метод:

Левая функция $y_л = |x-7|-4$ (сплошная) Правая $y_п = kx$ (пунктирная)




$$-\frac{4}{7} < k < 1$$

**Д.З.** При каких $k$ уравнение $|x-3|+1=kx$ имеет два решения?

**Д.З.** При каких $k$ уравнение $|x-4|+2=kx$ имеет два решения?

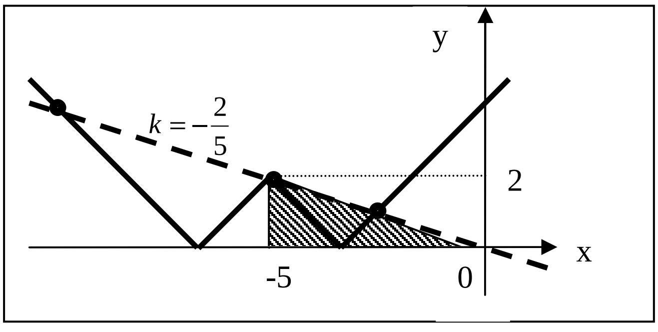
16. При каком $k$ уравнение $\left|\sqrt{x^2+10x+25}-2\right| = kx$ имеет три различных корня?

$$\left|\sqrt{(x-5)^2}-2\right| = kx \;\Rightarrow\; \big||x+5|-2\big| = kx$$

Графический метод:

Левая $y_л = \big||x+5|-2\big| = kx$ (сплошная),

Правая $y_п = kx$ (пунктирная)




$$k = -\frac{2}{5}$$

**Д.З.** Исследовать уравнение $\left|\sqrt{x^2+4x+4}-3\right| = kx+2$ на число решений в зависимости от параметра

**Д.З.** Исследовать уравнение $\left|\sqrt{x^2+6x+9}-1\right| = kx$ на число решений в зависимости от параметра.

17. Исследовать на число решений $x \cdot \left||x|-36\right| = kx$.

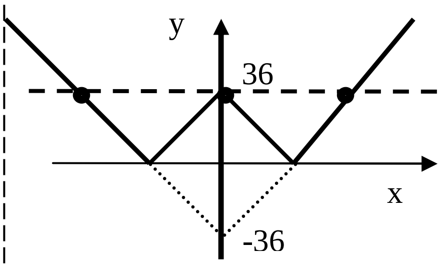
$$x \cdot \left(\left||x|-36\right| - k\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 0 - ось\ oy - одно\ решение \\ \left||x|-36\right| = k \end{array}\right.$$

Исследование уравнения $\left||x|-36\right| = k$

Графический метод:

Левая функция $y_л = \left||x|-36\right|$ (сплошная)

Правая $y_п = k$ ( пунктирная)




$k \geq 36 - 3\ решения$

$0 < k < 36$ - 5 реш

$k = 0$ - 3 реш

$k < 0$ – 1 реш

**Д.З.** Исследовать на число решений $|x| \cdot \left||x|-9\right| = kx$.

18. Исследовать на число решений $|x| \cdot \left||x|-16\right| = kx$.

$$x \geq 0:\; x \cdot |x-16| - kx = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot \left(|x-16| - k\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 0 - одно\ решение \\ |x-16| = k \end{array}\right..$$

Исследование уравнения $|x-16| = k$

Графический метод:

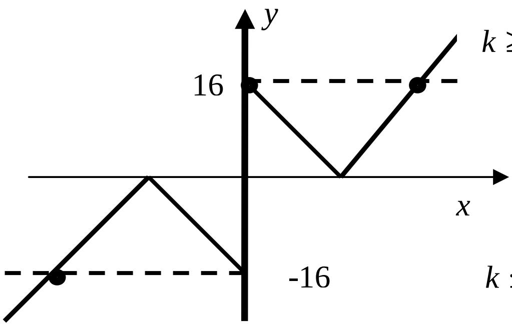
Левая функция $\begin{cases} y_л = |x-16| \\ x \geq 0 \end{cases}$ (сплошная) Правая $y_п = k$ ( пунктирная)

$$x < 0:\; -x \cdot |-x-16| - kx = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot \left(|-x-16| + k\right) = 0 \;\Rightarrow\; |-x-16| = -k \;\Rightarrow\; -|x+16| = k.$$

Исследование уравнения $-|x+16| = k$

Графический метод:

Левая функция $\begin{cases} y_л = -|x+16| \\ x < 0 \end{cases}$ (сплошная) Правая $y_п = k$ ( пунктирная)




$k \geq 16 - 2\ решения$

$-16 < k < 16 - 3\ решения$

$k \leq -16 - 2\ решения$

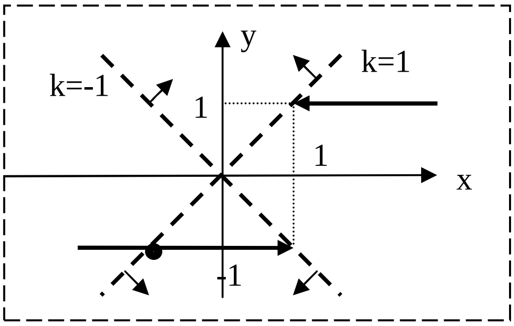
**Д.З.** Исследовать на число решений $|x| \cdot |x-8| = kx$

19. Исследовать уравнение $\frac{|x-1|}{x-1}=kx$ на число решений в зависимости от параметра $k$.

ОДЗ $x\neq 1$

Графический метод:

Левая $y_л=\frac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases}+1\ при\ x>1\\+1\ при\ x<1\end{cases}$ Правая $y_п=kx$.




$$\left[\begin{array}{l}k\geq 1-одно\ решение\\0<k<1-два\ решения\\-1<k\leq 0-нет\ решений\\k\leq -1\ -одно\ решение\end{array}\right.$$

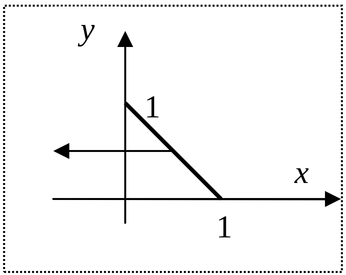
**Д.З.** Исследовать уравнение $x\cdot\frac{|x-1|}{x-1}=k|x|$ на число решений в зависимости от параметра $k$.

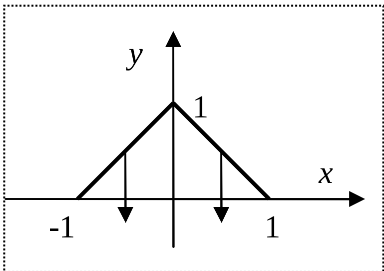
***График функции***

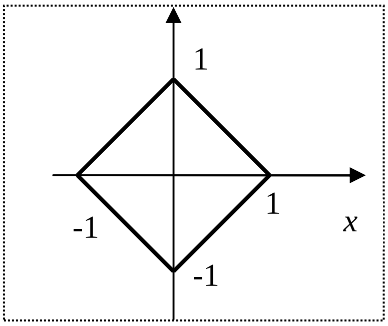
$$\boxed{|x|+|y|=1}$$

***(квадрат)***

$\begin{cases}x+y=1,\\x\geq 0, y\geq 0\end{cases}$ $x\to -x$ $\begin{cases}|x|+y=1\\y\geq 0\end{cases}$ $y\to -y$ $|x|+|y|=1$




**Д.З.** Построить график функции $|x-p|+|y|=1$***;***

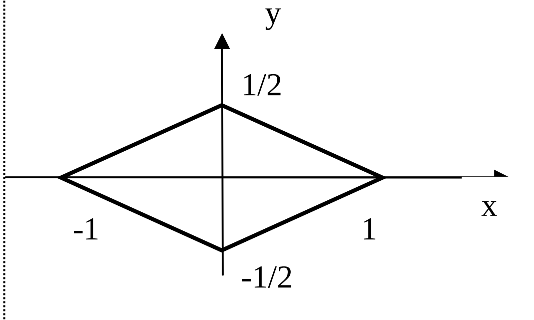
**Д.З.** Построить график функции $|x|+|y-q|=1$

**Д.З.** Исследовать систему $\begin{cases}|x-p|+|y|=1,\\|x|+|y-q|=1\end{cases}$ на число решений в зависимости от параметров $p$ и $q$.

***График функции***

$$\boxed{|x|+2|y|=1}$$

***(Ромб)***



## 2. Линейные неравенства, содержащие модуль

*Раскрытие модуля*

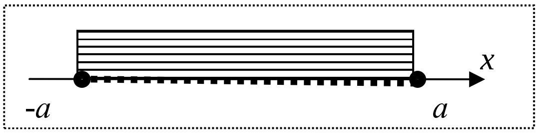
$$\boxed{|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}}$$

***Графический образ неравенства***

$$|x| \le a$$

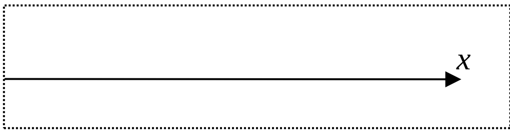
$$a \ge 0$$

$$-a \le x \le a$$




$$a < 0$$

$$\varnothing$$

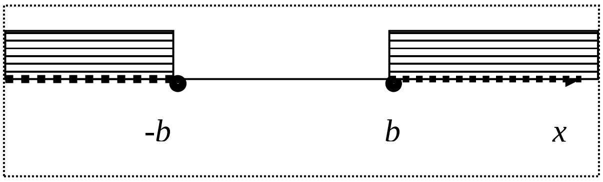



***Графический образ неравенства***

$$|x| \ge b$$

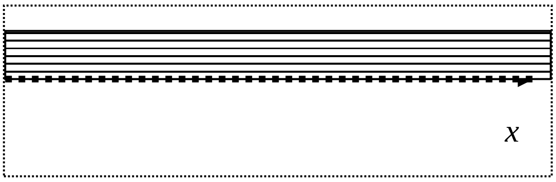
$$b \ge 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x \le -b \\ x \ge b \end{array}\right.$$




$$b < 0$$

$$x \in R$$




1. Решить неравенство $|x-2| \le -4$ $\quad |x+2| \ge -4$.
2. Найти длину решения $|x-2| \le 4 \Rightarrow$

$$-4 \le x-2 \le 4 \Rightarrow -2 \le x \le 6 \Rightarrow L = 6-(-2) = 6+2 = 8$$

**Д.З.** Решить систему $\begin{cases} |x-1| \ge 5, \\ |x-4| \le 8 \end{cases}$.

3. При каком $a$ длина решения неравенства $|4x-4a+4| \le a$ равна 9?

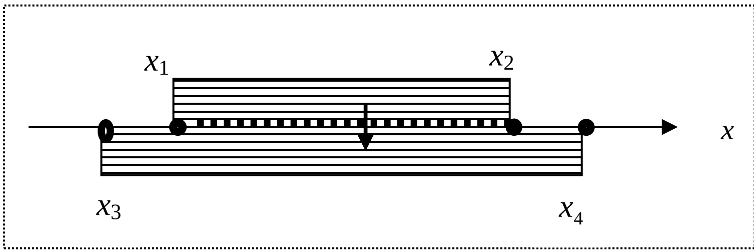
$$-a \le 4x-4a+4 \le a \Rightarrow 3a-4 \le 4x \le 5a-4 \Rightarrow \frac{3}{4}a-1 \le x \le \frac{5}{4}a-1 \Rightarrow L = \frac{5a}{4} - \frac{3a}{4} = \frac{a}{2} = 9 \Rightarrow a = 18$$

**Д.З.** Длина решения неравенства $|3x-2006a| \le a$ равна 4. Найти значение *a*.

**Д.З.** Длина интервала области определения функции $y = \sqrt{x-8+3a} + \sqrt{2-x}$ равна 9. Найти $a$.

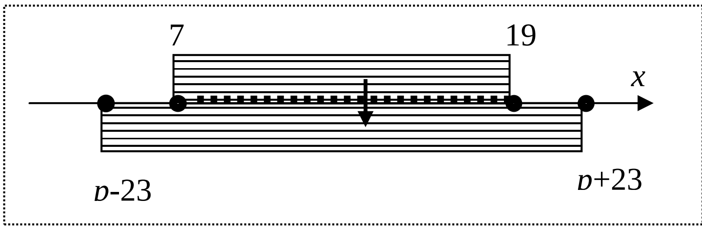
***1. Все числа из $x_1 \le x \le x_2$ являются решениями неравенства $x_3 \le x \le x_4$ :***

$$\begin{cases} x_3 \le x_1 \\ x_3 \ge x_2 \end{cases}$$




4. При каких $p$ любое решение неравенства $|x-13| \le 6$ является решением неравенства $|x-p| \le 23$?

$|x-13| \le 6 \Rightarrow 7 \le x \le 19$ $\qquad$ $|x-p| \le 23 \Rightarrow p-23 \le x \le p+23$




$$\begin{cases} p-23 \le 7 \\ p+23 \ge 19 \end{cases} \Rightarrow -4 \le p \le 30.$$

**Д.З.** При каких $p$ любое решение неравенства $|x-11| \le 7$ является решением неравенства $|x-p| \le 21$?

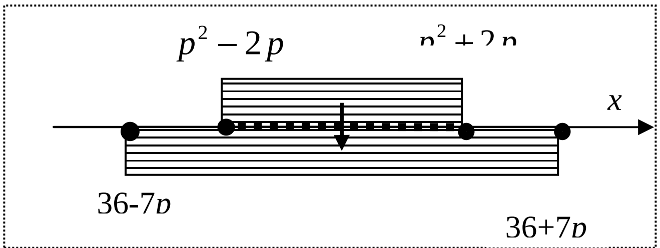
**Д.З.** При каких $p$ все решения неравенства $\left|x-p^2-p\right| \le 16$ являются решением неравенства $\left|x-p^2-4p\right| \le 49$?

5. При каких $p$ все решения $x^2-2p^2x+p^4-(2p)^2 \le 0$ также являются решением $x^2-72x+36^2-(7p)^2 \le 0$?
Оба неравенства четные по параметру $p$.

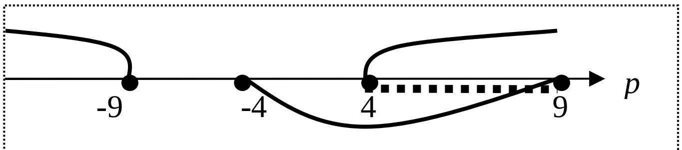
При $p \ge 0$:

$x^2-2p^2x+p^4-(2p)^2 \le 0 \Rightarrow (x-p^2)^2 \le (2p)^2 \Rightarrow \left|x-p^2\right| \le 2p \Rightarrow -2p \le x-p^2 \le 2p \Rightarrow p^2-2p \le x \le p^2+2p$.

$x^2-72x+36^2-(7p)^2 \le 0 \Rightarrow (x-36)^2 \le (7p)^2 \Rightarrow |x-36| \le 7p \Rightarrow -7p \le x-36 \le 7p \Rightarrow 36-7p \le x \le 36+7p$




$$\begin{cases} p^2-2p \ge 36-7p \\ p^2+2p \le 36+7p \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2+5p-36 \ge 0 \\ p^2-5p-36 \le 0 \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 4; \quad p \le -9 \\ -4 \le p \le 9 \\ p \ge 0 \end{cases}$$



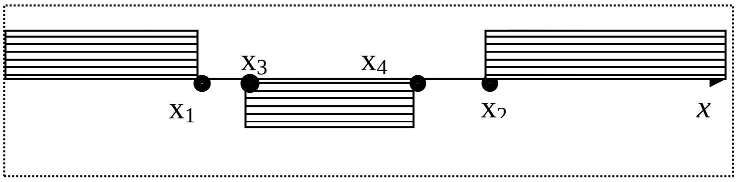

$4 \le p \le 9$.

В силу четности по $p$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} 4 \le p \le 9 \\ -9 \le p \le -4 \end{array}\right.$.

**Д.З.** При каких $p$ все решения $x^2-2p^2x+p^4-(3p)^2 \le 0$ также являются решением $x^2-72x+36^2-(8p)^2 \le 0$?

***2. Ни одно число из*** $\left[\begin{array}{l} x \le x_1 \\ x \ge x_2 \end{array}\right.$ ***не является решением из*** $x_3 \le x \le x_4$ ***:***

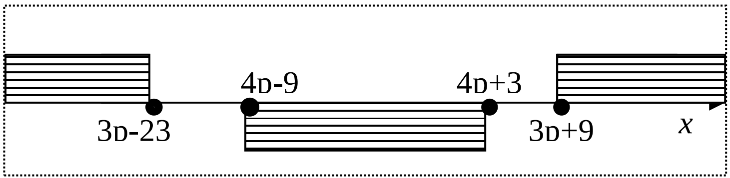
$$\begin{cases} x_1 < x_3 \\ x_2 > x_4 \end{cases}$$




6. При каких $p$ ни одно решение неравенства $|x-3p+7| \ge 16$ не является решением неравенства $|x-4p+3| \le 6$?

$$|x-3p+7| \ge 16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-3p+7 \ge 16 \\ x-3p+7 \le -16 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3p+9 \\ x \le 3p-23 \end{array}\right.$$

$$|x-4p+3| \le 6 \Rightarrow -6 \le x-4p+3 \le 6 \Rightarrow 4p-9 \le x \le 4p+3$$




$$\begin{cases} 3p+9 > 4p+3 \\ 3p-23 < 4p-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < 6 \\ p > -24 \end{cases} \Rightarrow -24 < p < 6$$

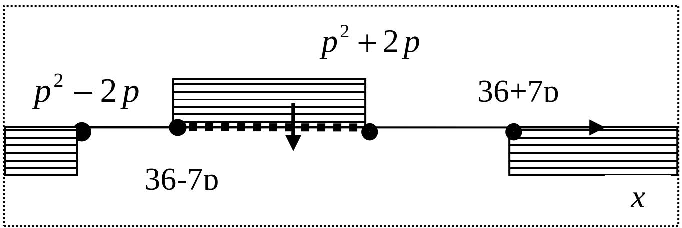
**Д.З.** При каких $p$ ни одно решение неравенства $|x-3p+4| \ge 17$ не является решением неравенства $|x-4p+6| \le 8$?

7. При каких $p$ ни одно решение $x^2-2p^2x+p^4-(2p)^2 \le 0$ не является решением $x^2-72x+36^2-(7p)^2 \ge 0$?
Оба неравенства четные по параметру $p$.

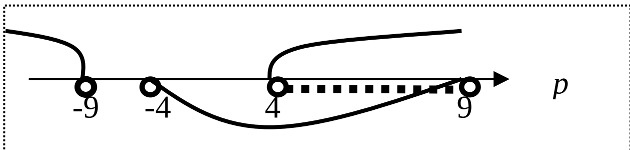
При $p \ge 0$:

$$x^2-2p^2x+p^4-(2p)^2 \le 0 \Rightarrow (x-p^2)^2 \le (2p)^2 \Rightarrow |x-p^2| \le 2p \Rightarrow -2p \le x-p^2 \le 2p \Rightarrow p^2-2p \le x \le p^2+2p.$$

$$x^2-72x+36^2-(7p)^2 \ge 0 \Rightarrow (x-36)^2 \ge (7p)^2 \Rightarrow |x-36| \ge 7p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 36+7p \\ x \le 36-7p \end{array}\right.$$




$$\begin{cases} p^2-2p > 36-7p \\ p^2+2p < 36+7p \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2+5p-36 > 0 \\ p^2-5p-36 < 0 \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > 4; \quad p < -9 \\ -4 < p < 9 \\ p \ge 0 \end{cases}$$



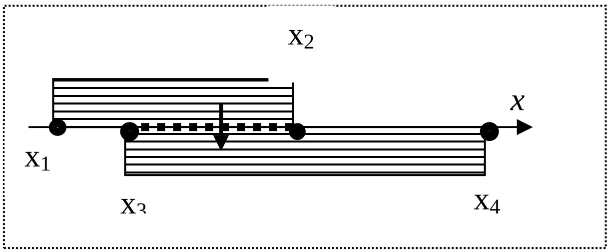

$4 < p < 9$.

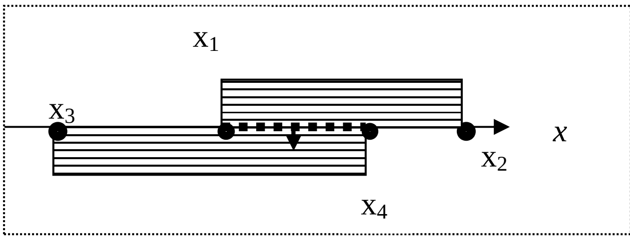
В силу четности по $p$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} 4 \le p \le 9 \\ -9 \le p \le -4 \end{array}\right.$

**Д.З.** При каких $p$ ни одно решение $x^2-2p^2x+p^4-(3p)^2 \le 0$ не является решением $x^2-72x+36^2-(8p)^2 \ge 0$?

***3. Хотя бы одно число из $x_1 \le x \le x_2$ является решением неравенства $x_3 \le x \le x_4$:***

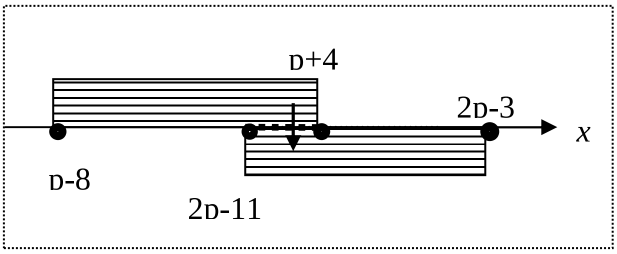
$$\begin{cases} x_2 \ge x_3 \\ x_4 \ge x_1 \end{cases}$$

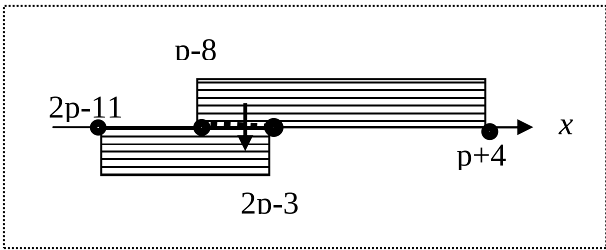



8. При каких $p$ хотя бы одно решение неравенства $|x-p+2| \le 6$ является решением неравенства $|x-2p+7| \le 4$?

$p-8 \le x \le p+4$ $\qquad$ $2p-11 \le x \le 2p-3$




$2p-11 \le p+4 \Rightarrow \ p \le 15$ $\qquad$ $p-8 \le 2p-3 \Rightarrow \ p \ge -5$

Ответ: $-5 \le p \le 15$

**Д.З.** При каких $p$ хотя бы одно решение неравенства $|x-p+6| \le 9$ является решением неравенства $|x-2p+4| \le 3$?

**Д.З.** При каких $a$ хотя бы одно число $x \in [2;5]$ является решением неравенства $x+a \ge 6$?

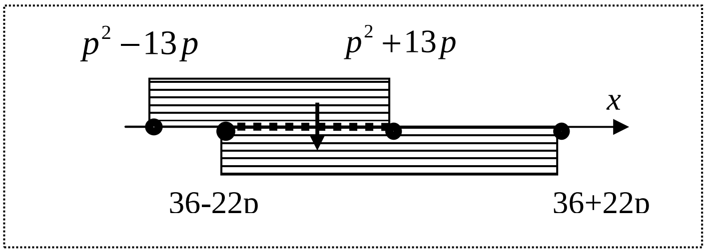
9. При каких $p$ хотя бы одно решение $x^2-2p^2x+p^4-(13p)^2 \le 0$ является решением $x^2-72x+36^2-(22p)^2 \le 0$?

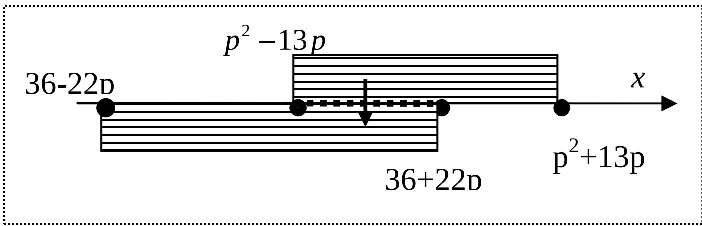
Оба неравенства четные по параметру $p$.

При $p \ge 0$:

$x^2-2p^2x+p^4-(13p)^2 \le 0 \Rightarrow (x-p^2)^2 \le (13p)^2 \Rightarrow |x-p^2| \le 13p \Rightarrow -13p \le x-p^2 \le 13p \Rightarrow \ p^2-13p \le x \le p^2+13p$.

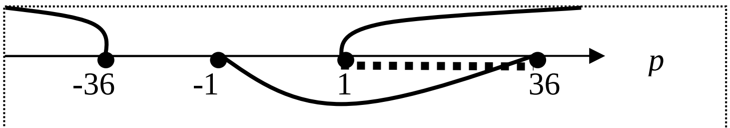
$x^2-72x+36^2-(22p)^2 \le 0 \Rightarrow (x-36)^2 \le (22p)^2 \Rightarrow |x-36| \le 22p \Rightarrow -22p \le x-36 \le 22p \Rightarrow 36-22p \le x \le 36+22p$




$p^2+13p \ge 36-22p$ $\qquad$ $p^2-13p \le 36+22p$

$$\begin{cases} p^2+13p \ge 36-22p \\ p^2-13p \le 36+22p \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2+35p-36 \ge 0 \\ p^2-35p-36 \le 0 \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 1;\ p \le -36 \\ -1 \le p \le 36 \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \le p \le 36.$$

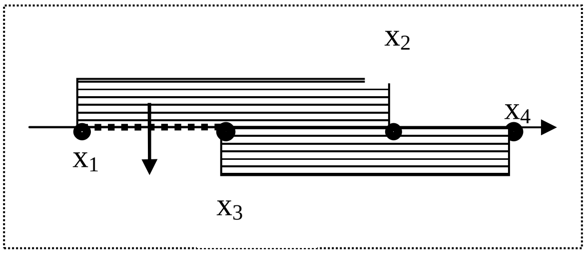



В силу четности по $p$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} 1 \le p \le 36 \\ -36 \le p \le -1 \end{array}\right.$.

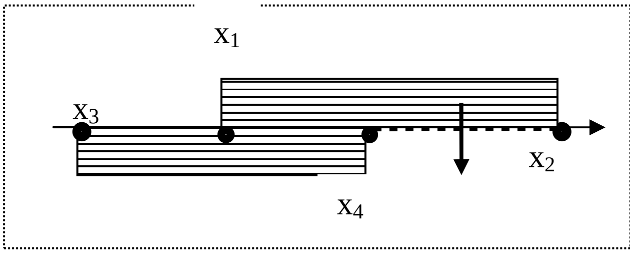
**Д.З.** При каких $p$ хотя бы одно решение $x^2-2p^2x+p^4-(2p)^2 \le 0$ является решением $x^2-36x+18^2-(5p)^2 \le 0$?

***4. Хотя бы одно число из $x_1 \le x \le x_2$ не является решением неравенства $x_3 \le x \le x_4$ :***

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < x_3 \\ x_2 > x_4 \end{array}\right.$$




$x_1 < x_3$

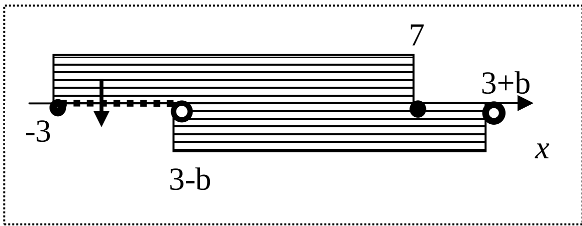


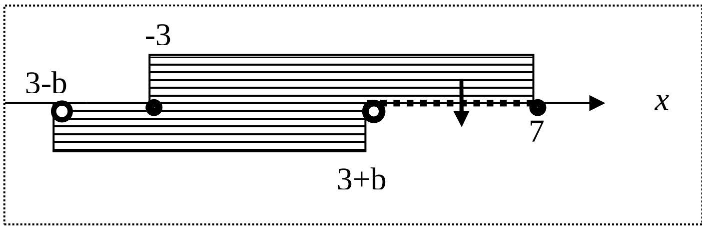

$x_2 > x_4$

10. При каких $b$ хотя бы одно решение неравенства $|x-2| \le 5$ не является решением неравенства $|x-3| < b$?

$|x-2| \le 5 \;\; \Rightarrow \;\; -3 \le x \le 7$

$|x-3| < b \;\Rightarrow\; 3-b \le x \le 3+b$




$3-b \ge -3 \;\Rightarrow\; b \le 6$ $\qquad$ $3+b \le 7 \;\Rightarrow\; b \le 4 \qquad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b \le 6 \\ b \le 4 \end{array}\right. \Rightarrow\; b \le 6$

**Д.З.** При каких $b$ хотя бы одно решение неравенства $|x-3| \le 6$ не является решением неравенства $|x-1| < b$?

**Д.З.** При каких $b$ хотя бы одно решение неравенства $|x| \le b$ не является решением неравенства $|x-12| < 23$?

---

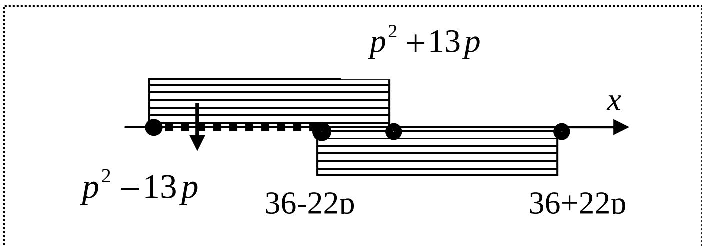
11. При каких $p$ хотя бы одно решение $x^2 - 2p^2x + p^4 - (13p)^2 \le 0$ не является решением $x^2 - 72x + 36^2 - (22p)^2 \le 0$?

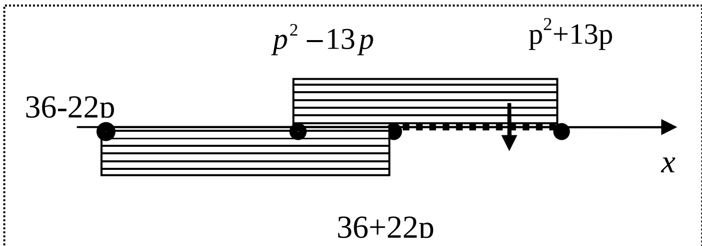
Оба неравенства четные по параметру $p$.

При $p \ge 0$:

$x^2 - 2p^2x + p^4 - (13p)^2 \le 0 \Rightarrow (x-p^2)^2 \le (13p)^2 \Rightarrow |x-p^2| \le 13p \Rightarrow -13p \le x - p^2 \le 13p \Rightarrow \;\; p^2 - 13p \le x \le p^2 + 13p$.

$x^2 - 72x + 36^2 - (22p)^2 \le 0 \Rightarrow (x-36)^2 \le (22p)^2 \Rightarrow |x-36| \le 22p \Rightarrow -22p \le x - 36 \le 22p \Rightarrow \;\; 36 - 22p \le x \le 36 + 22p$




$p^2 - 13p < 36 - 22p$ $\qquad$ $p^2 + 13p > 36 + 22p$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} p^2 + 9p - 36 < 0 \\ p^2 - 9p - 36 > 0 \end{array}\right. \\ p \ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -12 < p < 3 \\ p \ge 12 \\ p \le -3 \end{array}\right. \\ p \ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le p < 3 \\ p \ge 12 \end{array}\right.$$

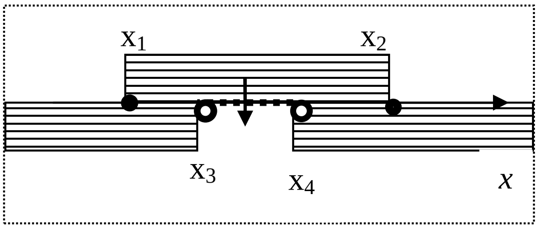
Ответ: В силу четности: $\left[\begin{array}{l} -3 < p < 3 \\ p \le -12 \\ p \ge 12 \end{array}\right.$.

**Д.З.** При каких $p$ хотя бы одно решение $x^2 - 2p^2x + p^4 - (2p)^2 \le 0$ не является решением $x^2 - 36x + 18^2 - (5p)^2 \le 0$?

---

***5. Хотя бы одно число из*** $x_1 \le x \le x_2$ ***не является решением неравенств*** $\left[\begin{array}{l} x < x_3 \\ x > x_4 \end{array}\right.$

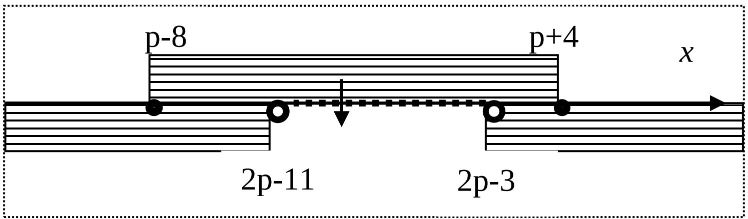
$$\begin{cases} x_3 \le x_2 \\ x_4 \ge x_1 \end{cases}$$




12. При каких $p$ хотя бы одно число из $|x-p+2| \le 6$ не является решением неравенства $|x-2p+7| > 4$?

$$|x-p+2| \le 6 \;\Rightarrow\; p-8 \le x \le p+4$$

$$|x-2p+7| > 4 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} x > 2p-3 \\ x < 2p-11 \end{array}\right.$$




$$\begin{cases} 2p-11 \le p+4, \\ 2p-3 \ge p-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \le 15, \\ p \ge -5 \end{cases} \Rightarrow\; -5 \le p \le 15$$

---

**Д.З.** При каких $p$ хотя бы одно решение из $|x-p+6| \le 9$ не является решением неравенства $|x-2p+4| > 3$?

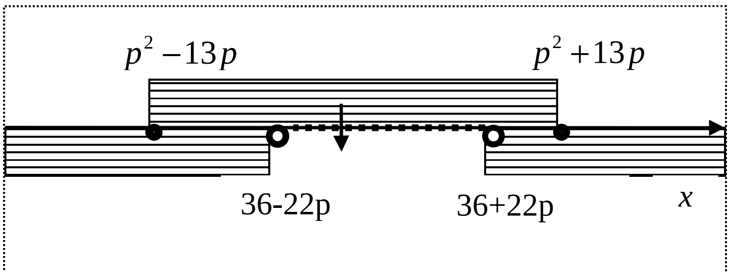
13. При каких $p$ хотя бы одно решение $x^2 - 2p^2x + p^4 - (13p)^2 \le 0$ не является решением $x^2 - 72x + 36^2 - (22p)^2 > 0$?

Оба неравенства четные по параметру $p$.

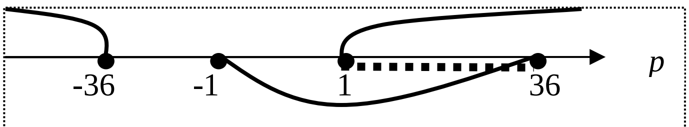
При $p \ge 0$:

$$x^2 - 2p^2x + p^4 - (13p)^2 \le 0 \Rightarrow \left(x-p^2\right)^2 \le (13p)^2 \Rightarrow |x-p^2| \le 13p \Rightarrow -13p \le x - p^2 \le 13p \Rightarrow\; p^2 - 13p \le x \le p^2 + 13p.$$

$$x^2 - 72x + 36^2 - (22p)^2 > 0 \Rightarrow (x-36)^2 > (22p)^2 \Rightarrow |x-36| > 22p \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-36 > 22p \\ x-36 < -22p \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 36+22p \\ x < 36-22p \end{array}\right.$$




$$\begin{cases} p^2 + 13p \ge 36 - 22p \\ p^2 - 13p \le 36 + 22p \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 + 35p - 36 \ge 0 \\ p^2 - 35p - 36 \le 0 \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 1;\ p \le -36 \\ -1 \le p \le 36 \\ p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \le p \le 36$$

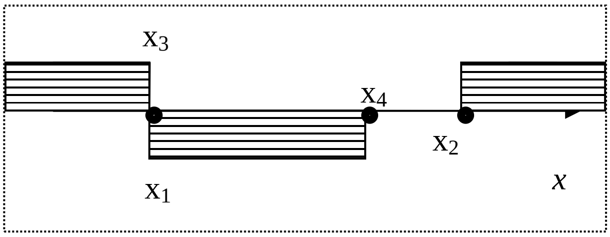


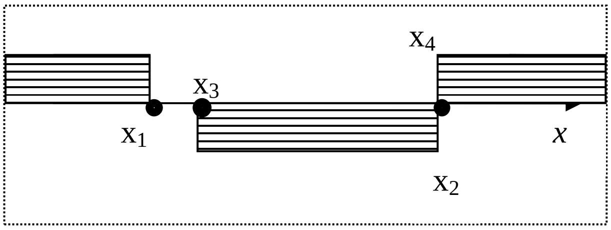

В силу четности по $p$ **Ответ**: $\left[\begin{array}{l} 1 \le p \le 36 \\ -36 \le p \le -1 \end{array}\right.$.

**Д.З.** При каких $p$ хотя бы одно решение $x^2 - 2p^2x + p^4 - (2p)^2 \le 0$ не является решением $x^2 - 36x + 18^2 - (5p)^2 > 0$?

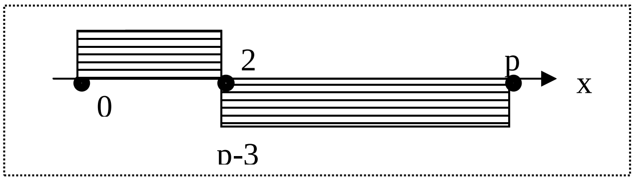
***Одно решение системы неравенств*** $\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} x \le x_1 \\ x \ge x_2 \end{array} \right. \\ x_3 \le x \le x_4 \end{cases}$

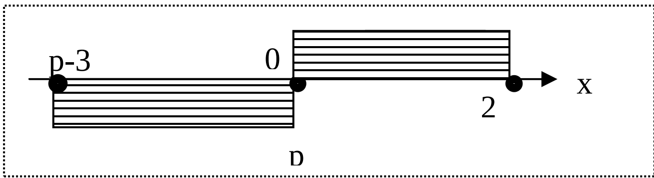
$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 > x_4 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x_4 = x_2 \\ x_3 > x_1 \end{cases}$




14. При каких $p$ система неравенств $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le p - x \le 3 \end{cases}$ имеет одно решение? $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ p - 3 \le x \le p \end{cases}$.



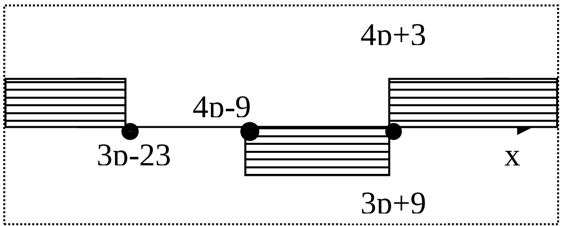




\ $\qquad \begin{cases} p - 3 = 2 \\ p \ge 2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} p = 0 \\ p - 3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} p = 5 \\ p = 0 \end{array} \right.$

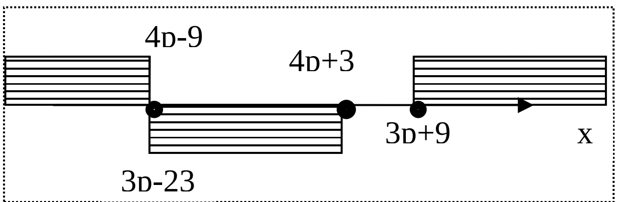
**Д.З.** При каких $p$ система неравенств $\begin{cases} 2 \le x \le 5, \\ 1 \le p - x \le 7 \end{cases}$ имеет одно решение?

15. При каких $p$ система неравенств $\begin{cases} |x - 3p + 7| \ge 16 \\ |x - 4p + 3| \le 6 \end{cases}$ имеет одно решение?

$$\begin{cases} \left[ \begin{array}{l} x - 3p + 7 \ge 16 \\ x - 3p + 7 \le -16 \end{array} \right. \\ -6 \le x - 4p + 3 \le 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} x \ge 3p + 9 \\ x \le 3p - 23 \end{array} \right. \\ 4p - 9 \le x \le 4p + 3 \end{cases}$$




$$\begin{cases} 4p + 3 = 3p + 9 \\ 3p - 23 < 4p - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 6 \\ p > -14 \end{cases} \Rightarrow p_1 = 6$$




$$\begin{cases} 3p - 23 = 4p - 9 \\ 4p + 3 < 3p + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -14 \\ p < 6 \end{cases} \Rightarrow p_2 = -14$$

Ответ: $p = 6, -14$.

**Д.З.** При каких $p$ система неравенств $\begin{cases} |x - 3p + 4| \ge 17 \\ |x - 4p + 6| \le 8 \end{cases}$ имеет одно решение?

***Бесконечное число решений системы*** $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1, \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

***Отсутствие решений системы*** $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1, \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

16. При каких $m$ система $\begin{cases} mx + 6y = 3 \\ 3mx + 2my = m \end{cases}$ имеет бесконечное число решений?

$$\frac{m}{3m} = \frac{6}{2m} = \frac{3}{m} \Rightarrow \begin{cases} 2m^2 - 18m = 0 \\ 6m = 6m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0;\, 9 \\ m - \textit{любое} \end{cases} \Rightarrow m = 0;\, 9.$$

**Д.З.** $\begin{cases} 6x^7 + py^9 = p - 2, \\ 3x^7 + 4y^9 = p - 5 \end{cases}$; $\begin{cases} (p+1)\cdot\sqrt[3]{x^5} - (p+3)\cdot\sqrt[5]{y^3} = 5, \\ \sqrt[3]{x^5} - (p+1)\cdot\sqrt[5]{y^3} = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} p^2 \cdot x + p \cdot y = 2 - p \cdot y, \\ x + 2y = 1 + p^2 \cdot x \end{cases}$.

17. При каких $m$ система $\begin{cases} mx + 2y = 2, \\ 3mx + my = m + 6 \end{cases}$ не имеет решений?

$$\frac{m}{3m} = \frac{2}{m} \neq \frac{2}{m+6} \Rightarrow \begin{cases} 2m^2 - 6m = 0 \\ 2m + 12 \neq 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0;\, 3 \\ 12 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0;\, 3.$$

**Д.З.** $\begin{cases} mx + 2y = 3, \\ 3mx + my = m \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + my = n, \\ mx + 27y = 3n \end{cases}$; $\begin{cases} mx^5 + 2y^7 = 2, \\ 3mx^5 + my^7 = m + 6 \end{cases}$; $\begin{cases} p \cdot x - p \cdot y = 5 - x + 3 \cdot y, \\ x - y = 2 + p \cdot y \end{cases}$.

18. При каких $p$ найдется два различных значения $q$, таких что система $\begin{cases} (p+2)\cdot x + (p^2 + p - 2)\cdot y = q^2 - 7q + 10, \\ (p-3)\cdot x + 24y = 6pq \end{cases}$

имеет бесконечное число решений.

$$\frac{(p+2)}{(p-3)} = \frac{(p^2 + p - 2)}{24} = \frac{q^2 - 7q + 10}{6pq} \Rightarrow$$

**1.** $\dfrac{(p+2)}{(p-3)} = \dfrac{(p^2 + p - 2)}{24} \Rightarrow \dfrac{(p+2)}{(p-3)} = \dfrac{(p+2)(p-1)}{24} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = -2 \\ \dfrac{1}{(p-3)} = \dfrac{(p-1)}{24} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = -2 \\ p^2 - 4p - 21 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = -2 \\ p = 7 \\ p = -3 \end{array}\right.$

**2.** $\dfrac{(p+2)}{(p-3)} = \dfrac{q^2 - 7q + 10}{6pq} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = -2 \Rightarrow \\ p = 7 \Rightarrow \\ p = -3 \Rightarrow \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \dfrac{0}{-5} = \dfrac{q^2 - 7q + 10}{-12q} \Rightarrow \\ \dfrac{9}{4} = \dfrac{q^2 - 7q + 10}{42q} \Rightarrow \\ \dfrac{-1}{-6} = \dfrac{q^2 - 7q + 10}{-18q} \Rightarrow \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} q^2 - 7q + 10 = 0 \Rightarrow \\ \dfrac{9}{2} = \dfrac{q^2 - 7q + 10}{21q} \Rightarrow \\ 1 = \dfrac{q^2 - 7q + 10}{-3q} \Rightarrow \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} q^2 - 7q + 10 = 0 \\ 2q^2 - (14 + 189)q + 20 = 0 \\ q^2 - 4q + 10 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} D > 0 \\ D > 0 \\ D < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = -2 \\ p = 7 \\ p = -3 - \textit{посторонний} \end{array}\right. \Rightarrow \text{Ответ} \left[\begin{array}{l} p = -2 \\ p = 7 \end{array}\right.$$

**Д.З.** При каких $p$ найдется два различных значения $q$, таких что система $\begin{cases} (p-4)\cdot x + (p^2 - 7p + 12)\cdot y = q^2 - 6q + 5, \\ (p-1)\cdot x + 24y = 4pq \end{cases}$

имеет бесконечное число решений.

## 2. Преобразование алгебраических выражений

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

1. Упростить $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5+4-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2-2\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$.

**Д.З.** Упростить $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ , $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4}$ .

2. Упростить $\sqrt[4]{\left(9-4\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{5}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}-\sqrt{5}=\left|\sqrt{5}-2\right|-\sqrt{5}=\sqrt{5}-2-\sqrt{5}=-2$.

**Д.З.** Упростить $\sqrt[4]{\left(37-20\sqrt{3}\right)^2}+2\sqrt{3}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x}=\sqrt{x}$.  $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

4. Вычислить $\left(\dfrac{x^3+27y^3}{3x+9y}-xy\right)\cdot\dfrac{1}{x^2-9y^2}$ при $x = 7+\sqrt{3}$, $y = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7\sqrt{3}}$

$$\left(\frac{(x+3y)\left(x^2-3xy+9y^2\right)}{3(x+3y)}-xy\right)\cdot\frac{1}{x^2-9y^2}=\frac{1}{3}\frac{\left(x^2-6xy+9y^2\right)}{x^2-9y^2}=$$

$$\frac{1}{3}\frac{(x-3y)^2}{(x-3y)(x+3y)}=\frac{1}{3}\frac{(x-3y)}{(x+3y)}=\frac{1}{3}\frac{7+\sqrt{3}-1-\frac{\sqrt{3}}{7}}{7+\sqrt{3}+1+\frac{\sqrt{3}}{7}}=\frac{1}{3}\frac{6+\frac{6\sqrt{3}}{7}}{8+\frac{8\sqrt{3}}{7}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{4}$$

**Д.З.** Вычислить $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:\dfrac{x-y}{(x+y)^2-4xy}+4\sqrt{xy}$ при $x=8+2\sqrt{15}$, $y=17-4\sqrt{15}$

**Д.З.** Вычислить $\dfrac{x\left[(x+y)^3+(x-y)^3\right]}{x^2-y^2}$ при $x=\sqrt{7}$, $y=\sqrt{3}$

5. Вычислить $\dfrac{a^4-27ab^3}{a^2+3ab+9b^2}:\left(3-\dfrac{a}{b}\right)+b$ при $a=\sqrt{2}+1, b=2\sqrt{2}$ .

$$\frac{a^4-27ab^3}{a^2+3ab+9b^2}:\left(3-\frac{a}{b}\right)+b=\frac{a\left(a^3-27b^3\right)}{a^2+3ab+9b^2}:\frac{3b-a}{b}+b=$$

$$\frac{a(a-3b)\left(a^2+3ab+9b^2\right)}{\left(a^2+3ab+9b^2\right)}\cdot\frac{b}{(3b-a)}+b=-ab+b=b(1-a)=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$$

**Д.З.** Вычислить $\dfrac{ab\left(b^2-a^2\right)+a^4-b^4}{a^4+a^2b^2-3a^3b}\div\dfrac{b^2-a^2}{a^3b}$ при $a=\sqrt{2}-1, b=\sqrt{2}+1$

**Д.З.** Вычислить $\sqrt{\dfrac{x^3-y^3}{x-y}+xy}$ при $x=\sqrt{5}-2,\ y=-\sqrt{5}-2$

6. Вычислить $x^2+\frac{1}{x^2}$ при $x-\frac{1}{x}=5$.

*Выделение полного квадрата* $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)+2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=25+2=27$

**Д.З.** Вычислить $x^3+\frac{1}{x^3}$ при $x-\frac{1}{x}=3$;

**Д.З.** Вычислить $x^4+\frac{1}{x^4}$ при $x+\frac{1}{x}=3$.

**Д.З.** Вычислить $x^6+\frac{1}{x^6}$ при $x+\frac{1}{x}=3$.

**Д.З.** Вычислить $xy$, если $x+y=8$ и $x^3+y^3=200$.

**Д.З.** Вычислить $x^2+y^2$, если $x-y=8$ и $xy=48$.

7. Найти $f(277)$, если $f(x)=\frac{x^{4/3}-1}{x^{2/3}-1}-x^{2/3}$

$$f(x)=\frac{x^{4/3}-1}{x^{2/3}-1}-x^{2/3}=\frac{\left(x^{2/3}-1\right)\cdot\left(x^{2/3}+1\right)}{x^{2/3}-1}-x^{2/3}=x^{2/3}+1-x^{2/3}=1 \qquad f(277)=1$$

**Д.З.** Найти $f(0{,}008)$, если $f(x)=\frac{x^{4/3}-1}{x+x^{1/3}}-x^{-1/3}$.

8.Вычислить $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$

$$\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)=\left(\sqrt[3]{7}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=7+2=9.$$

**Д.З.** Вычислить $\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$.

**Д.З.** Вычислить $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\left(x+y-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot\left(x+y+\sqrt{xy}\right)$ при $x=4, y=17$.

9. Найти $x$, если $\frac{(x-p)\left(x^2+xp+p^2\right)}{(x+p)\left(x^2-xp+p^2\right)}=\frac{19}{35}$ и $p=6$.

$$\frac{x^3-p^3}{x^3+p^3}=\frac{19}{35} \Rightarrow 35x^3-35p^3=19x^3+19p^3 \Rightarrow 16x^3=54p^3 \Rightarrow 2x=3p \Rightarrow x=\frac{3}{2}p=\frac{3\cdot 6}{2}=9.$$

**Д.З.** Найти $x$, если $\frac{(x-p)\left(x^2+xp+p^2\right)}{(x+p)\left(x^2-xp+p^2\right)}=\frac{7}{9}$ и $p=7$.

**Д.З.** Найти $\operatorname{ctg} x$, если $\frac{(\sin x-\cos x)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right)}{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x\right)}=\frac{19}{35}$.

**Д.З.** Вычислить $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[3]{b^3}}+\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{b^3}}$ при $a=27, b=8$.

**Д.З.** Найти $x$, если $\frac{x^3+3x^2p+3xp^2+p^3}{x^3-3x^2p+3xp^2-p^3}=\frac{125}{8}$ и $p=9$.

**Д.З.** Найти $\operatorname{tg} x$, если $\frac{\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x+3\sin x\cos^2 x+\cos^3 x}{\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x+3\sin x\cos^2 x-\cos^3 x}=\frac{1}{8}$.

10. Избавиться от иррациональности в знаменателе $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

*Умножение на сопряженную величину:*

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)}{x-x-1}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}.$$

11. Упростить $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}}$

$$=-\sqrt{x}+\underline{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}}+\underline{\underline{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+2}}}+\underline{\underline{\underline{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+3}}}}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+4}-\sqrt{x}.$$

**Д.З.** Упростить $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{x+48}+\sqrt{x+49}}$.

**Д.З.** Вычислить $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{143}+\sqrt{144}}$.

12. Упростить А=$\sqrt{4x+2\sqrt{4x^2-9y^2}}-\sqrt{4x-2\sqrt{4x^2-9y^2}}=$ при $-2x<3y<0$:

*Метод возведения в квадрат:*

$$A^2=4x+2\sqrt{4x^2-9y^2}-2\sqrt{\left(4x+2\sqrt{4x^2-9y^2}\right)\cdot\left(4x-2\sqrt{4x^2-9y^2}\right)}+4x-2\sqrt{4x^2-9y^2}$$

$$A^2=8x-2\sqrt{16x^2-4\left(4x^2-9y^2\right)}=8x-12\sqrt{y^2}=8x-12|y|=8x+12y\ \Rightarrow\ A=\sqrt{8x+12y}=2\sqrt{2x+3y}$$

**Д.З.** Упростить $\sqrt{6x+2\sqrt{9x^2-16y^2}}+\sqrt{6x-2\sqrt{9x^2-16y^2}}=$ при $x=15,\ y=9$:

**Д.З.** Упростить $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ при $1<x<2$.

**Д.З.** Вычислить $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$.

13. Решить уравнение $\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}=4$.

ОДЗ $x\geq 3$

*Метод возведения в квадрат:*

$$\left(x+1+4\sqrt{x-3}\right)+\left(x+1-4\sqrt{x-3}\right)+2\sqrt{\left(x+1+4\sqrt{x-3}\right)\cdot\left(x+1-4\sqrt{x-3}\right)}=16\ \Rightarrow\ x+\sqrt{x^2-14x+49}=7\ \Rightarrow$$

$$x+\sqrt{(x-7)^2}=7\ \Rightarrow\ x+|x-7|=7$$

1. $x\geq 7:\ \ x=7$
2. $x<7:$ 7=7 $\Rightarrow\ x<7$ Ответ: $3\leq x\leq 7$

**Д.З.** Решить уравнение $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=4$

**Д.З.** Решить уравнение $\sqrt{2x+2+2\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}=2$

14. Решить уравнение $x^2-2x+1+x^4-4x^2+1=0$.

*Выделение полных квадратов:* $\left(x^2-2x+1\right)+\left(x^4-4x^2+1\right)=0\ \Rightarrow\ (x-1)^2+\left(x^2-1\right)^2=0$.

*Сумма квадратов равна нулю:* $a^2+b^2=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}x-1=0\\ x^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}x=1\\ x=\pm1\end{cases}\Rightarrow\ x=1.$

**Д.З.** Решить уравнение $x^2-6x+9+x^4-18x^2+81=0$.

**Д.З.** Решить систему $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=0,\\ \sqrt{x^2-1}-\sqrt{y^2-4}=0\end{cases}$.

**Д.З.** Решить систему $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x-3}-|3y-1|=0,\\ \pi\sqrt{9y^2-6y+1}+\sqrt{x^2-4x+3}=0\end{cases}$