О характеризации производственных функций Солоу[1]

Рассматривается класс производственных функций, представляющих собой одно из ближайших обобщений многофакторных функций с постоянной и одинаковой эластичностью замены факторов–функций Солоу. Дается (по-видимому, впервые) полное аксиоматическое описание таких функций в терминах соотношений между дифференциальными характеристиками производственной функции. Класс функций Солоу описывается сначала с помощью характеристик, определяющих изменения предельной производительности факторов при их вариации. Затем предлагается характеризация многофакторных функций Солоу с использованием эластичностей по факторам предельной нормы замены для каждой пары факторов и дифференциального описания квазиоднородных функций. Попутно предлагаются новые варианты характеризации однородных функций с постоянной и равной для всех пар факторов эластичностью замены. Обобщается на многофакторный случай доказанная ранее первым автором теорема о виде однородной двухфакторной производственной функции, допускающей линеаризацию с помощью автономного шкалирования переменных, и показывается, что всякая квазиоднородная линеаризуемая с помощью такого шкалирования функция является функцией Солоу.

Введение

Двухфакторную функцию

$$y=(a_1 x_1^{a_3}+a_2 x_2^{a_4})^{a_5}, \tag{1}$$

где x_1, x_2 – независимые переменные, $a_1, \ldots, a_5$ – ненулевые константы (параметры), впервые предложил использовать в качестве производственной функции с оцениваемыми параметрами, по-видимому, Р. Солоу в 1956 г. (см. [1]). Через пять лет Солоу (уже совместно с Б. Минхасом, К. Эрроу и Х. Ченери) обосновал экономические предпосылки использования

---

[1] *Клейнер Г.Б., Пионтковский Д.И.* О характеризации производственных функций Солоу // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. № 2. С. 124–137. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 97-02-02128).

в качестве агрегированной модели производства упрощенного варианта данной функции, в котором параметры a_3 и a_4 априорно считаются равными [2]. Этот вид функций, названный первоначально по первым буквам фамилий авторов SMAC, впоследствии получил известность и широкое распространение под именем функции CES (*Constant Elasticity of Substitution*). Вместе с тем, однозначного обоснования данного вида производственных функций (названных впоследствии функциями Солоу) с помощью условий на поведение стандартных характеристик производственной функции (таких как предельная производительность, норма или эластичность замены факторов) или их соотношений не было предложено. П. Мощинскас и Р. Раяцкас в 1985 г. дали некоторое описание функции (1), используя предложенное ими обобщение эластичности замены факторов [3]. Именно в качестве показателя обобщенной эластичности замены факторов предлагалась величина

$$\sigma_\phi = \frac{\partial(\ln \phi)}{\partial(\ln \mathrm{MRS})}, \;\; y = \mathrm{const},$$

где $\mathrm{MRS} = \dfrac{\partial y}{\partial x_1} \Big/ \dfrac{\partial y}{\partial x_2}$ – предельная норма замены первого фактора вторым, а $\phi(x_1, x_2)$ – некоторая функция, следующим образом определяющая так называемую кривую дополняемости факторов: множество точек

$$M = \{(x_1, x_2) : \phi(x_1, x_2) = \mathrm{const}\}$$

включает точки, удовлетворяющие технологическому соотношению дополняемых факторов. При $\phi(x_1, x_2) = x_2 / x_1$, что соответствует пропорциональному изменению факторов, получается классическая эластичность замены факторов по Хиксу – Аллену. В [3] показывается, что при $\phi(x_1, x_2) = x_2^a / x_1$, где a – параметр, т. е. в случае, когда кривая дополняемости представляет собой степенную функцию, решением уравнения

$$\sigma_\phi = \mathrm{const}$$

является класс функций Солоу (1).

Это описание функций Солоу, однако, не может считаться полностью удовлетворительным, поскольку выбор в качестве ϕ степенной функции нуждается в самостоятельном обосновании.

В [4] было замечено, что функция Солоу удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial \ln \mathrm{MRS}}{\partial \ln x_1} = \mathrm{const}, \quad \frac{\partial \ln \mathrm{MRS}}{\partial \ln x_2} = \mathrm{const}.$$

Это условие тоже, как выяснилось, не эквивалентно утверждению о том, что производственная функция является функцией Солоу, и должно быть усилено дополнительными требованиями (см. п. 2). Таким образом, вопрос о построении системы условий на характеристики двухфакторной производственной функции, необходимых и достаточных для спецификации ее в виде функции Солоу, оставался открытым.

В 1963 г. В. Мукержи [5] предложила естественное обобщение функции Солоу на многофакторный случай в виде

$$y=(b_1x_1^{a_1}+\ldots+b_nx_n^{a_n})^c, \tag{2}$$

где a_i, b_i, c – ненулевые константы, и показала, что для этих функций показатели эластичности замещения по Аллену фактора i фактором j (AES_{ij}) и k-го фактора l-м (AES_{kl}) для различных пар факторов находятся в соотношениях, не зависящих от объемов факторов [5]. Однако это условие является лишь необходимым для того, чтобы функция имела вид (2), и не задает класс этих функций однозначно (для $n = 2$ оно не имеет смысла, а при $n > 2$ является необходимым и достаточным для того, чтобы функция имела так называемый вид CRES, т. е. это функции вида (2), в которых параметры зависят от объема производства y [6]).

П. Мощинскас и Р. Раяцкас [3] дали для многофакторной функции (2) обоснование с помощью показателей обобщенной частной эластичности замены факторов, определяемой аналогично двухфакторному случаю через технологическую кривую дополняемости факторов вида

$$\{(x_1,\ldots,x_n):x_i=x_j^{a_{ij}}\},\quad i,j=1,\ldots,n,$$

где a_{ij} – константы. Функция будет иметь вид (2) тогда и только тогда, когда обобщенные эластичности замены, задаваемые через указанную кривую дополняемости, постоянны и отличны от нуля и единицы для каждой пары факторов [3]. Так же как и в двухфакторном случае, обоснование может быть признано удовлетворительным только после обоснования вида самой кривой дополняемости.

Подобно двухфакторной ситуации, частным случаем функций Солоу (2) является функция

$$y=(b_1x_1^{a}+\ldots+b_nx_n^{a})^c, \tag{3}$$

где a, b_i, c – ненулевые константы. Эта функция при $n > 2$ может быть охарактеризована как:

а) однородная функция с постоянными и равными эластичностями замены пар факторов по Аллену [7];

б) однородная функция с постоянными эластичностями замены пар факторов по Михалевскому [8];

в) однородная функция с постоянными эластичностями замены пар факторов по Моришиме [9].

(В силу последних двух вариантов описания функции (2) для ее именования целесообразно использовать аббревиатуру CESM [4].)

В данной статье предлагается несколько вариантов однозначной характеризации двух- и многофакторных функций (1) и (2) через традиционные характеристики этих функций и некоторые их естественные модификации. По нашему мнению (см. также [4], [10] и др.), построение для каждого параметрического класса производственных функций ряда альтернативных систем дифференциальных, интегральных или функциональных уравнений, отражающих соотношения между экономически интерпретируемыми характеристиками производственной функции и составленных таким образом, что решением системы будет в точности данный параметрический класс, является необходимым условием использования этого параметрического класса для спецификации производственной функции (такую систему условий на характеристики естественно назвать системой, *эквивалентной* данному параметрическому классу производственных функций). Дело в том, что сама по себе параметрическая запись функции, как правило, не дает информации для полного экономического анализа свойств представляемой этой функцией технологии, в частности, интерпретации параметров функции. Интерпретируемыми и имеющими экономическое содержание являются в общем случае не параметры и операции, используемые при записи производственной функции, а ее характеристики, т. е. специальным образом отобранные производные зависимости. Поэтому необходимую информацию для экономической интерпретации производственной функции можно получить только при использовании производных зависимостей, представляющих эквивалентную систему. Зачастую исследование таких систем становится единственным способом сделать выбор и обосновать применение того или иного класса функциональных форм.

Упомянутые «эквивалентные» системы хорошо известны для большинства наиболее популярных классов функций, таких как функции Кобба – Дугласа, Леонтьева, CES и др. [4]. При этом чем больше вариантов эквивалентных систем известно исследователю, тем шире арсенал доступных для него инструментов моделирования, выше шансы на построение более адекватной и эффективной производственной функции. Этим объясняется желание авторов заполнить имеющийся в литературе пробел и предложить несколько систем, эквивалентных производственной функции Солоу.

Статья состоит из трех частей. В первой части дается характеризация двухфакторной функции Солоу с помощью характеристик, определяющих изменения предельной производительности факторов при их вариации. Во второй части кроме подобной двухфакторному случаю характеризации многофакторных функций Солоу предлагается эквивалентная характеризация с использованием изменения предельной нормы замены каждой пары факторов и дифференциального описания квазиоднородных функций. Попутно предлагаются новые варианты характеризации однородных функций CESM. В третьей части обобщается на многофакторный случай доказанная в [4] теорема о виде однородной двухфакторной производственной функции, допускающей линеаризацию с помощью автономного шкалирования переменных, и показывается, что всякая квазиоднородная линеаризируемая с помощью такого шкалирования функция является функцией Солоу.

1. Двухфакторные функции Солоу

Пусть $y = f(x_1, x_2)$ – двухфакторная производственная функция; предполагается, что f неотрицательна, дважды дифференцируема и монотонно возрастает по обоим аргументам на R_+^2. Функция f называется *функцией Солоу*, если она представима в виде

$$y = (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_4})^{a_5}, \tag{4}$$

где $a_1 - a_5$ – ненулевые константы, причем a_3, a_4, a_5 имеют одинаковый знак, а a_1, a_2 положительные.

Заметим сначала, что, как видно из формулы (4), такой класс производственных функций можно охарактеризовать одним из двух способов.

А). Существует такая степенная замена одной из переменных x_1, x_2, скажем, x_2,

$$x_2 \to x_2^c,$$

где c – такая ненулевая константа, что y становится функцией CES (см. [4, с. 93]).

Б). Существует такая степенная замена переменных

$$x_1 \to x_1^{c_1}, \quad x_2 \to x_2^{c_2}, \quad y \to y^{c_3},$$

где $c_1 - c_3$ – такие ненулевые константы, что y становится линейной функцией.

Для вывода описания функций Солоу с помощью дифференциальных соотношений между ее характеристиками обозначим через $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ предельную производительность ресурса i при $i = 1, 2$ и, представив f_i в виде функций от $\ln f$, $\ln x_i$ введем функции

$$q_i(f, x_i) = \frac{\partial(\ln f_i)}{\partial(\ln f)}$$

$$p_i(f, x_i) = \frac{\partial(\ln f_i)}{\partial(\ln x_i)}.$$

Функции q_i и p_i, $i = 1, 2$ являются характеристиками производственной функции второго порядка в смысле [4]. Значение функции q_i можно интерпретировать как величину процентного изменения предельной производительности фактора i при постоянном его значении и изменении объема выпуска на 1% (соответственно, меняется значение оставшегося фактора), а значение функции p_i – как величину процентного изменения предельной производительности фактора i при постоянном объеме выпуска и изменении этого фактора на 1% (соответственно, меняется значение оставшегося фактора).

Заметим, что при определении характеристик q_1 и p_1 замена переменных в предельной производительности первого фактора f_1 была иной $(x_1 \to x_1,\ x_2 \to f)$, чем в предельной производительности второго фактора f_2 при определении характеристик q_2 и p_2 $(x_1 \to f,\ x_2 \to x_2)$, что является не совсем традиционным для теории производственных функций: обычно замена переменных делается один раз для формирования группы «одноименных» характеристик, каждая из которых соответствует какому-либо фактору.

Используя введенные характеристики, можно предложить следующее описание функций Солоу.

Предложение 1. *Пусть* $y = f(x_1, x_2)$ *– такая производственная функция, что*

$$\lim_{x_1 \to 0,\ x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = 0,$$

$$\lim_{x_1 \to \infty,\ x_2 \to \infty} f(x_1, x_2) = \infty.$$

Эта функция является функцией Солоу тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех эквивалентных условий:

1) $p_i = \text{const},\ q_i = \text{const}$ *при* $i = 1, 2$, *причем* $p_i \neq -1,\ q_i \neq 1$;

2) $q_i = \text{const}$ *при* $i = 1, 2$ *и* $p_1 = \text{const}$, *причем* $p_1 \neq -1,\ q_i \neq 1$;

3) $q_i = \text{const}$ *при* $i = 1, 2$ *и* $p_2 = \text{const}$, *причем* $p_2 \neq -1,\ q_i \neq 1$.

Доказательство. Если f – функция Солоу, т. е. она определяется формулой (4), то, как показывают прямые вычисления,

$$q_1 = q_2 = \frac{a_5 - 1}{a_5}, \quad p_1 = a_3 - 1, \quad p_2 = a_4 - 1.$$

Поскольку все a_i здесь ненулевые, то условие 1) выполняется.

Так как из условия 1) следуют 2) и 3), а сами эти два условия отличаются только нумерацией переменных, то достаточно доказать, что из 2) следует, что f – функция Солоу.

Итак, пусть q_1, p_1, p_2 – константы, причем выполняются ограничения из условия 2). Тогда полный дифференциал функции $\ln f_1$ записывается как

$$d(\ln f_1) = q_1 d(\ln f) + p_1 d(\ln x_1),$$

откуда

$$\ln f_1 = \ln \frac{\partial f}{\partial x_1} = q_1 f + p_1 x_1 + \ln c_0,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_0 f^{q_1} x_1^{p_1},$$

где c_0 = const. Согласно 2), $p_1 \neq -1$, $q_1 \neq 1$, поэтому

$$\frac{1}{1-q_1} f^{1-q_1} = \frac{c_0}{1+p_1} x_1^{1+p_1} + h(x_2), \tag{5}$$

где h – дифференцируемая функция.

Продифференцировав это выражение по x_2:

$$f^{-q_1} f_2 = h'(x_2),$$

получим, что функция h дифференцируема дважды, причем $h'(x_2) > 0$. Тогда

$$\ln f_2 = \ln h'(x_2) + \ln f.$$

Положим $\ln h'(x_2) = g(\ln x_2)$. Теперь

$$p_2 = \frac{\partial(\ln f_2)}{\partial(\ln x_2)} = g'(\ln x_2),$$

откуда $\ln h' = p_2 \ln x_2$, т. е. $h'(x_2) = x_2^{p_2}$, и, поскольку $p_2 \neq -1$, получаем

$$h(x_2) = \frac{c_1}{1+p_2} x_2^{1+p_2} + c,$$

где c_1, c = const. Перейдя в соотношении (5) к пределу при $x_1 \to \infty$, $x_2 \to \infty$ и при $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$, приходим к тому, что $c = 0$.

Учитывая формулу (5), получаем

$$f = \left(\frac{c_0(1-q_1)}{1+p_1} x_1^{1+p_1} + \frac{c_1(1-q_1)}{1+p_2} x_2^{1+p_2} \right)^{\frac{1}{1-q_1}},$$

т. е. f – функция Солоу.

Из приведенной выше характеризации функций Солоу через степенную замену одной из переменных получаем еще одно описание двухфакторной функции с постоянной эластичностью замены.

Следствие 1. *Пусть* $f(x_1, x_2)$ *– однородная производственная функция. Тогда f является функцией* CES *в том и только в том случае, когда выполняются эквивалентные условия* 1)–3) *из предложения* 1.

Замечание. Рассуждая аналогично доказательству предложения 1, получаем, что условие $p_1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$, $q_1 = \text{const}$ равносильно выполнению следующего соотношения для f:

$$\phi_0(f) = c_1\phi_1(x_1) + c_2\phi_2(x_2) + c,$$

где при $i = 1, 2$

$$\phi_i(t) = \begin{cases} t^{p_i}, & p_i \neq -1, \\ \ln t, & p_i = -1 \end{cases} \tag{6}$$

и

$$\phi_0(t) = \begin{cases} t^{1-q_i}, & q_1 \neq 1, \\ \ln t, & q_1 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

При этом мы уже не требуем, чтобы в точке (0, 0) производственная функция принимала нулевое значение, поскольку в этой точке логарифмы не определены. В частности, при $p_1 = p_2 = -1$, $q_1 = 1$ получаем, что f – функция Кобба – Дугласа.

2. Многофакторные функции Солоу

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ – n-факторная производственная функция, $n \geq 2$; как и выше, предполагается, что f неотрицательна, дважды дифференцируема и монотонно возрастает по каждому аргументу на R_+^n. Кроме того, мы будем предполагать, что

$$\lim_{x_1 \to 0, \ldots, x_n \to 0} f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

$$\lim_{x_1 \to \infty, \ldots, x_n \to \infty} f(x_1, \ldots, x_n) = \infty.$$

Многофакторным аналогом функции Солоу служит функция вида

$$y = (b_1 x_1^{a_1} + \ldots + b_n x_n^{a_n})^c, \tag{8}$$

где a_i, b_i, c – ненулевые константы.

Из монотонности следует, что константы c, a_1, …, a_n одного знака, а константы $b_1, \ldots, b_n$ положительные. Эту функцию мы также будем называть функцией Солоу, хотя в литературе встречается и название «функция

Мукержи» [3] по имени ученого, впервые предложившего данную функцию и исследовавшего ее свойства [5].

К этому частному случаю естественным образом, как и в двухфакторном случае, приводится функция Солоу. Приведем для таких функций аналогичные двухфакторному случаю критерии.

А). Существует такая степенная замена каких-либо $n-1$ переменных среди $x_1,\dots,x_n$, скажем, $x_2,\dots,x_n$,

$$x_i \to x_i^{m_i}, \quad 2 \le i \le n,$$

где m_i – ненулевые константы, что y становится функцией CESM (см. [4, с. 106]).

Б). Существует такая степенная замена переменных

$$x_i \to x_i^{m_i}, \quad 1 \le i \le n, \quad y \to y^{m_0},$$

где $m_0,\dots,m_n$ – такие ненулевые константы, что y становится линейной функцией.

Для того чтобы, аналогично случаю двухфакторных функций, описать критерий многофакторных функций Солоу в терминах дифференциальных уравнений, нужно ввести многофакторные аналоги характеристик p_i и q_i.

Как и выше, пусть $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ – предельная производительность ресурса i при $i = 1, \dots, n$ [4]. Введем новые переменные $z_{km} = \dfrac{x_k}{x_m}$, где k, m пробегают все значения от 1 до n, кроме одного фиксированного значения i. Переменные z_{km}, очевидно, связаны следующими соотношениями:

$$z_{kk} = 1, \quad z_{kl} z_{lm} = z_{km}.$$

Значит, можно выбрать набор $v_1,\dots,v_{n-2}$ из них, включающий лишь $n-2$ переменные, через которые все остальные переменные z_{km} однозначно выражаются. Например, в качестве такого набора можно взять $n-2$ переменные

$$v_1 = z_{1,2},\ v_2 = z_{2,3},\dots,\ v_{i-1} = z_{i-1,\,i+1},\ v_i = z_{i+1,\,i+2},\dots,\ v_{n-2} = z_{n-1,\,n}.$$

Представим f_i в виде функций от $\ln f$, $\ln x_i$, $\ln v_1$, …, $\ln v_{n-2}$. Введем теперь функции

$$q_i(\ln f, \ln x_i, v_1,\dots,v_{n-2}) = \frac{\partial(\ln f_i)}{\partial(\ln f)},$$

$$p_i(\ln f, \ln x_i, v_1, \ldots, v_{n-2}) = \frac{\partial(\ln f_i)}{\partial(\ln x_i)}$$

и

$$r_i^j(\ln f, \ln x_i, v_1, \ldots, v_{n-2}) = \frac{\partial(\ln f_i)}{\partial(\ln v_j)}, \quad j = 1, \ldots, n-2.$$

Значение функции q_i можно интерпретировать как величину процентного изменения предельной производительности фактора i при постоянном значении этого фактора, постоянном соотношении остальных факторов и изменении объема выпуска на 1%, а значение функции p_i – как величину процентного изменения предельной производительности фактора i при постоянном объеме выпуска, постоянном соотношении остальных факторов и изменении данного ресурса на 1%. Кроме того, отметим, что тождественное равенство нулю функций r_i^j при всех j от 1 до $n-2$ означает, что величина изменения предельной производительности фактора i при постоянном объеме выпуска и постоянном значении этого фактора не зависит от соотношений остальных факторов.

Предложение 2. *Производственная функция* $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ *является функцией Солоу тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух эквивалентных условий:*

1) *для всякого* $1 \le i \le n$, $p_i = \text{const}$, $q_i = \text{const}$, *причем* $p_i \ne -1$, $q_i \ne 1$, *и при всех* $1 \le j \le n-2$, $1 \le i \le n$, *функции* r_i^j *тождественно равны нулю;*

2) *для всякого* $1 \le k \le n$, $p_k = \text{const}$, *причем* $p_k \ne -1$, *и для некоторого* i, $1 \le i \le n$, *при всех* $1 \le j \le n-2$ *функции* r_i^j *тождественно равны нулю, а функция* q_i *постоянна, причем* $q_i \ne 1$.

Доказательство. Для функций вида (8) прямые вычисления показывают, что при всех допустимых i, j

$$q_i = \frac{c-1}{c}, \quad p_i = a_i - 1, \quad r_i^j = 0$$

Поскольку все константы в (8) ненулевые, требуемые условия выполняются.

Обратно, пусть выполняется условие 2). Тогда полный дифференциал функции $\ln f_i$ имеет вид

$$d(\ln f_i) = q_i d(\ln f) + p_i d(\ln x_i),$$

откуда

$$\ln f_i = \ln \frac{\partial f}{\partial x_i} = q_i \ln f + p_i \ln x_i + \ln c_0,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = c_0 f^{q_i} x_i^{p_i},$$

где $c_0 > 0$ – константа.

Поскольку $p_i \neq -1,\ \ q_i \neq 1$ отсюда получаем, что

$$\frac{1}{1-q_i} f^{1-q_i} = \frac{c_0}{1+p_i} x_i^{1+p_i} + h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{9}$$

где h – дифференцируемая функция от n – 1 переменной.

Продифференцируем по x_j, где $j \neq i$:

$$f^{-q_i} f_j = \frac{\partial h}{\partial x_j};$$

отсюда функция $\frac{\partial h}{\partial x_j}$ дифференцируема и неотрицательна. Теперь

$$\ln f_j = \ln \frac{\partial h}{\partial x_j} + q_i \ln f.$$

Положим $g(x_1, \ldots, x_n) = \ln \frac{\partial h}{\partial x_j}$. Тогда

$$p_j = \frac{\partial(\ln f_j)}{\partial(\ln x_j)} = \frac{\partial q}{\partial \ln x_j},$$

откуда $g = p_j \ln x_j + \ln c_j$, где c_j = const, т. е. $\frac{\partial h}{\partial x_j} = x_j^{p_j} c_j$. В силу произвольности выбора j получаем, что для всякого $k \neq i$

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = x_k^{p_k} c_k.$$

Поскольку $p_j \neq -1$ для всякого j, получаем, что

$$h = \frac{c_1}{1+p_1} x_1^{1+p_1} + \ldots + \frac{c_{i-1}}{1+p_{i-1}} x_{i-1}^{1+p_{i-1}} + \frac{c_{i+1}}{1+p_{i+1}} x_{i+1}^{1+p_{i+1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{c_n}{1+p_n} x_n^{1+p_n} + c,$$

где c = const. Перейдя в соотношении (9) к пределу при $x_1 \to \infty,\ \ldots,\ x_n \to \infty$ и при $x_1 \to 0,\ \ldots,\ x_n \to 0,$ получаем, что c = 0. Тогда функция f, вычисленная по формуле (9), является функцией вида (3). ■

Аналогично случаю двухфакторных функций, получаем

Следствие 2. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *– однородная производственная функция. Тогда f является функцией* CESM *в том и только в том случае, когда выполняются эквивалентные условия* 1)–2) *из предложения* 2.

Приведем еще одну характеризацию функций Солоу. Напомним, что функция $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ называется *квазиоднородной*, если существует такая невырожденная степенная замена переменных

$$x_i \to x_i^{m_i}, \quad 1 \le i \le n,$$

что относительно новых переменных f становится однородной функцией. Это условие равносильно тому, что существуют такие ненулевые константы $d,\ m_1,\ldots,m_n$, что для любого вектора $x = (x_1,\ldots,x_n)$ и положительного числа a имеем: если векторы x и $(a^{m_1}x_1,\ldots,a^{m_n}x_n)$ лежат в области определения функции f, то $f(x_1,\ \ldots,\ x_n) = a^d f(a^{m_1}x_1,\ \ldots,\ a^{m_n}x_n)$. Очевидно, что функции Солоу квазиоднородны.

Кроме того, функция Солоу обладает еще одним примечательным свойством [4, с. 108]. Пусть $\mathrm{MRS}_{ij} = f_i/f_j$ – предельная норма замены ресурса i ресурсом j. Тогда для функций вида (8) имеем: для всех i, j, k от 1 до n

$$\frac{\partial \ln \mathrm{MRS}_{ij}}{\partial \ln x_k} = \begin{cases} a_i - 1, & k = i; \\ 1 - a_j, & k = j; \\ 0, & k \ne i, j. \end{cases} \qquad (10)$$

Оказывается, эти два условия вполне определяют класс функций Солоу.

Предложение 3. *Пусть* $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ *– квазиоднородная производственная функция и существуют такие ненулевые константы* $a_1,\ldots,a_n$, *что выполняются условия* (10). *Тогда f – функция Солоу.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что достаточно доказать предложение 3 для однородных функций. В самом деле, по определению, всякую квазиоднородную функцию степенной заменой аргументов можно перевести в однородную. Как видно из формулы (8), всякая невырожденная степенная замена переменных переводит класс функций Солоу в себя. С другой стороны, как показывают прямые вычисления, если функция f удовлетворяет условиям (10), то после замены переменных

$$x_i \to x_i^{m_i}, \quad 1 \le i \le n,$$

она будет удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \ln \mathrm{MRS}_{ij}}{\partial \ln x_k} = \begin{cases} m_i a_i - 1, & k = i; \\ 1 - m_j a_j, & k = j; \\ 0, & k \ne i, j. \end{cases}$$

Таким образом, сделав невырожденную степенную замену переменных $x_1, \ldots, x_n$, мы, не потеряв общности, придем к случаю однородной функции.

Итак, пусть функция f однородна степени D и удовлетворяет условиям (10). Тогда для всякого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и такого положительного числа $a \neq 1$, что x и ax лежат в области определения функции f

$$f(ax) = a^D f(x), \quad f_i(ax) = a^{D-1} f_i(x)$$

(т. е. функции f также однородные), откуда $\mathrm{MRS}_{ij}(ax) = \mathrm{MRS}_{ij}(x)$. Из формул (10) имеем

$$d \ln \mathrm{MRS}_{ij}(x) = (a_i - 1) d \ln x_i - (a_j - 1) d \ln x_j,$$

откуда

$$d \ln \mathrm{MRS}_{ij}(ax) = (a_i - 1) d \ln x_i - (a_j - 1) d \ln x_j + (a_i - a_j) \ln a,$$

и для всех i, j получаем $a_i = a_j$.

Теперь достаточно сослаться на [4, с. 106] (в случае, если $n \geq 3$): если для однородной функции f величина MRS_{ij} зависит только от отношения x_i / x_j, то f – функция CESM и, следовательно, функция Солоу. В нашем случае легко получить и непосредственное доказательство.

В самом деле, обозначив $t = a_1 - 1 = \ldots = a_n - 1$, для всех i, j имеем уравнение

$$d \ln \mathrm{MRS}_{ij}(x) = t(d \ln x_i - d \ln x_j).$$

Тогда для эластичности замены по Михалевскому [4, с. 76] получаем

$$\sigma_{ij}^M = \frac{d \ln\left(\dfrac{f_j}{f_i}\right)}{d \ln\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)} = -t = \mathrm{const},$$

т. е. f – функция CESM.

Для полноты картины предпосылок, однозначно характеризующих функцию Солоу через соотношения между характеристиками производственной функции, приведем подобную формализацию условия квазиоднородности. Обозначим через g_i эластичность выпуска по ресурсу i

$$g_i = \frac{\partial(\ln f)}{\partial(\ln x_i)},$$

где $1 \leq i \leq n$, и пусть

$$p(x_1, \ldots, x_n) = e^{-x_1^2 - \ldots - x_n^2} (1 + g_1^2)^{-1} \ldots (1 + g_n^2)^{-1}.$$

Положим $g_0(x_1,...,x_n) \equiv 1$. Тогда функции

$$p(x_1,\ldots,x_n)g_0(x_1,\ldots,x_n)^2,\ p(x_1,\ldots,x_n)g_1(x_1,\ldots,x_n)^2,\ldots$$
$$\ldots, p(x_1,\ldots,x_n)g_n(x_1,\ldots,x_n)^2$$

интегрируемы на области D определения функции f, т. е. функции $g_0 = 1$, $g_1,\ldots,g_n$ лежат в пространстве функций с интегрируемым квадратом на D с весом p, что позволяет определить для любых двух из них скалярное произведение

$$\left\langle g_i, g_j \right\rangle = \int\limits_D p(x_1,\ldots,x_n)\, g_i(x_1,\ldots,x_n)\, g_j(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots x_n.$$

Предложение 4. *Пусть* $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ *– дважды дифференцируемая производственная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *функция f является квазиоднородной;*

2) *эластичности выпуска по ресурсам связаны линейным соотношением* $d_1 g_1 + \ldots + d_n g_n = d$, *где* $d, d_1,\ldots,d_n = \text{const}$;

3) *определитель матрицы* $(\left\langle g_i, g_j \right\rangle)$ *для* $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n$, *равен тождественно нулю.*

Если функция f строго возрастает по аргументам на всей области $x_1 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,$ *то условия* 1)–3) *эквивалентны следующему условию*;

4) *для каких-то (или, что равносильно, для любых) положительных чисел* $a_1,\ldots,a_n$ *выполняется соотношение*

$$\frac{g_1(x_1,\ldots,x_n)}{g_1(a_1,0,\ldots,0)} + \ldots + \frac{g_n(x_1,\ldots,x_n)}{g_n(0,\ldots,0,a_n)} = 1.$$

Отметим, что условие 2) – это квазиоднородный аналог классической формулы Эйлера, характеризующей однородные дифференцируемые функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квазиоднородность означает, что существуют такие ненулевые константы d, d_1, d_n, что для любого вектора $x = (x_1,\ldots,x_n)$ и положительного числа a имеем: если векторы x и $(a^{d_1}x_1,\ldots,a^{d_n}x_n)$ лежат в области определения функции f, то

$$a^d f(x_1,\ldots,x_n) = f(a^{d_1}x_1,\ldots,a^{d_n}x_n).$$

Продифференцировав это соотношение по a и подставив $a = 1$, получим равенство

$$df(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{11}$$

Разделив обе части этого равенства на f, получим

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{x_i}{f} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

что равносильно условию 2).

Обратно, пусть выполняется 2). Введем новую функцию g такую, что $g(\ln x_1, \dots, \ln x_n) = \ln f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда

$$d = \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial g\left(z_1, \dots, z_n\right)}{\partial z_i},$$

откуда

$$\frac{\partial g(z_1 + d_1 t, \dots, z_n + d_n t)}{\partial t} = d$$

или

$$g(z_1 + d_1 t, \dots, z_n + d_n t) = q(z_1, \dots, z_n) + dt.$$

При $t \to 0$ получаем, что $q(z_1, \dots, z_n) = g(z_1, \dots, z_n)$, откуда непосредственно следует квазиоднородность функции f. Итак, эквивалентность условий 1) и 2) доказана.

Условие 3) означает, что все функции $g_0 = 1$, $g_1, \dots, g_n$ обладают интегрируемым квадратом на области D с весом p (т. е. все они лежат в пространстве $L_2[D, p(x_1, \dots, x_n)]$ и определитель Грама этой системы функций тождественно равен нулю. Как хорошо известно из классической теории дифференциальных уравнений с частными производными, его равенство нулю равносильно линейной зависимости функций 1, $g_1, \dots, g_n$, т. е. равносильно условию 2). Таким образом, эквивалентность первых трех условий доказана.

Докажем, что они эквивалентны 4). Из строгой монотонности функции f следует, что ее частные производные и все эластичности выпуска по ресурсам положительны во всех точках, кроме точки 0, ..., 0. Таким образом, все константы в знаменателе условия 4) ненулевые, и это условие имеет смысл. Поскольку соотношение из условия 4) является частным случаем соотношения из условия 2), то из 4) следует квазиоднородность функции f.

Пусть теперь выполняется 2). Подставляя в равенство (11) точку $(0, \dots, a_k, \dots, 0)$ (нули стоят на всех местах, кроме k-го), получаем

$$df(0, \dots, a_k, \dots, 0) = d_k a_k \frac{\partial f}{\partial a_k}(0, \dots, a_k, \dots, 0)$$

или

$$d/d_k = a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(0, \dots, a_k, \dots, 0)/f(0, \dots, a_k, \dots, 0) = g_k(0, \dots, a_k, \dots, 0).$$

Следовательно, соотношение из условия 2) можно переписать в виде

$$1=\sum_{k=1}^{n}\frac{g_k\left(z_1,\ldots,z_n\right)}{g_k(0,\ldots,a_k,\ldots,0)},$$

что равносильно 4).

Замечание. Как видно из доказательства, весовую функцию p из условия 3) можно выбрать и иную, чем в формулировке предложения 4: требуется лишь, чтобы она была положительной на области D определения функции f и чтобы функции

$$p(x_1,\ldots,x_n),\, p(x_1,\ldots,x_n)\, g_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2,\ldots, p(x_1,\ldots,x_n)\, g_n(x_1,\ldots,x_n)^2$$

были интегрируемы на области D.

3. Функции, линейные с точностью до замены переменных

Пусть $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ – производственная функция: предполагается, что f неотрицательна, дважды дифференцируема и монотонно возрастает по аргументам на R_+^n. Кроме того, пусть f однородна некоторой степени d. Предположим, что путем изменения шкал измерения мы сделали y *линейной* относительно новых переменных: это означает, что y имеет вид

$$y=\psi(\phi_1(x_1)+\ldots+\phi_n(x_n)),$$

где $\psi,\ \phi_1,\ldots,\phi_n$ – монотонно возрастающие функции на R_+, причем мы будем предполагать, что они имеют непрерывные вторые производные. Здесь ϕ_i – функция изменения шкалы фактора i, а ψ – функция, обратная к функции изменения шкалы выпуска.

Кроме того, пусть f однородна некоторой степени d. Какие функции f могут быть представлены в таком виде? Для двухфакторных функций (т. е. при $n = 2$) ответ дан в [4, с. 101–102]: это в точности функции CES и функции Кобба – Дугласа. Следующая теорема обобщает этот результат на случай многофакторных функций: искомый класс составляют функции Кобба – Дугласа и функции CESM (т. е. функции с постоянной эластичностью замены факторов по Михалевскому, см. [4]).

Теорема 2. *Пусть*

$$y=\psi(\phi_1(x_1)+\ldots+\phi_n(x_n)),$$

где $\psi,\ \phi_1,\ldots,\phi_n$ *– монотонно возрастающие функции на* R_+*, обладающие непрерывными вторыми производными, и функция* $y(x_1,\ldots,x_n)$ *однородна степени* d*. Тогда либо*

$$y=\alpha x_1^{a_1}\ldots x_{n-1}^{a_{n-1}} x_n^{d-a_1-\ldots-a_{n-1}},$$

либо

$$y = \alpha(a_1 x_1^b + \ldots + a_n x_n^b)^{d-b},$$

где $\alpha, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, b$ – *константы.*

Доказательство. Однородность означает, что для любых $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n$, $a \in R_+$

$$y(ax) = a^d y(x).$$

Для всякого i, $1 \le i \le n$ имеем

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x_i} = \psi'(\phi_1(x_1) + \ldots + \phi_n(x_n))\phi_i'(x_i),$$

откуда

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial y}{\partial x_j}} = \frac{\phi_i'(x_i)}{\phi_j'(x_j)}.$$

С другой стороны, для любого $a > 0$

$$\frac{\partial y(ax)}{\partial x_i} = \psi'(\phi_1(ax_1) + \ldots + \phi_n(ax_n))\phi_i'(ax_i)a,$$

и

$$\frac{\partial y(ax)}{\partial x_i} = \frac{\partial(a^d y(x))}{\partial x_i} = a^d \frac{\partial y(x)}{\partial x_i}.$$

Таким образом,

$$\frac{\phi_i'(ax_i)}{\phi_j'(ax_j)} = \frac{\dfrac{\partial y(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial y(x)}{\partial x_j}} = \frac{\phi_i'(x_i)}{\phi_j'(x_j)}.$$

Значит, для любых $x_i, x_1 \in R_+$

$$\frac{\phi_i'(ax_i)}{\phi_i'(x_i)} = \frac{\phi_1'(ax_1)}{\phi_1'(x_1)},$$

и

$$\frac{\phi_i'(ax_i)}{\phi_i'(x_i)} = \frac{\phi_1'(a)}{\phi_1'(x_1)} = p(a).$$

В обозначениях $x_i = t$, $q(t) = \phi_1'(t)$ имеем $q(at) = q(t)p(a)$, где, как следует из монотонности шкал, $q(t) > 0$ при $t \in R_+$.

При $t = 1$ имеем $q(a) = q(1)p(a)$, и для $p(a) = q(a)/q(1)$ получаем функциональное соотношение $p(at) = p(a)p(t)$.

Продифференцируем по t, тогда

$$ap'(at) = p(a)p'(t).$$

Положим $t = 1$.

$$ap'(a) = p(a)p'(1),$$

$$\frac{p'(a)}{p(a)} = \frac{p'(1)}{a},$$

$$(\ln p)'(a) = \frac{p'(1)}{a} = \mathrm{const},$$

откуда $p(t) = bt^c$, где b, c – константы. Учитывая, что $p(1) = 1$, имеем: $p(t) = t^c$.

Таким образом, получаем

$$q_i(t) = \phi_i'(t) = a_i t^c,$$

$$q_1(t) = \phi_1'(t) = a_1 t^c,$$

и аналогично для всякого j

$$q_j(t) = \phi_j'(t) = a_j t^c,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – некоторые константы, положительные в силу монотонности шкал. Тогда при $c = -1$ получаем $\phi_j(t) = a_j \ln t + c_j$, а при $c \neq -1$ имеем $\phi_j(t) = \dfrac{a_j}{c+1} t^{c+1} + c_j$.

В первом случае

$$y(x) = \psi_0(a_1 \ln x_1 + \ldots + a_n \ln x_n),$$

где $\psi_0(t) = \psi(t + c_1 + \ldots + c_n)$, или

$$y(x) = \psi_1(x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}),$$

где $\psi_1(t) = \psi_0(\ln t)$. Из однородности $\psi_1(a^{a_1 + \ldots + a_n}) = a^d \psi_1(1)$, откуда

$$y(x) = \alpha x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n},$$

где $b_1 + \ldots + b_n = d$.

Во втором случае

$$y(x) = \psi_0(a_1 x_1^{c+1} + \ldots + a_n x_n^{c+1}),$$

где $\psi_0(t) = \psi\left(\dfrac{t}{c+1} + c_1 + \ldots + c_n\right)$.

Из однородности $\psi_0(a_1 t^{c+1} + \ldots + a_n t^{c+1}) = t^d \psi_0(a_1 + \ldots + a_n)$, откуда

$$y(x) = \alpha(a_1 x_1^{c+1} + \ldots + a_n x_n^{c+1})^{d-c-1}.$$

Следствие 2. *Предположим, что функция* $y(x_1,...,x_n)$ *квазиоднородна, но не однородна. Тогда она представима в виде*

$$y = \psi(\phi_1(x_1) + \ldots + \phi_n(x_n)),$$

где $\psi,\ \phi_1,\ldots,\phi_n$ *– монотонно возрастающие функции на* R_+*, обладающие непрерывными вторыми производными, в том и только в том случае, когда* y *– функция Солоу.*

Доказательство. Очевидно, что всякая функция Солоу представима в требуемом виде. Докажем обратное утверждение.

Квазиоднородность означает, что для некоторых констант $d, d_1, \ldots, d_n$

$$a^d y(x_1,\ldots,x_n) = y(a^{d_1}x_1,\ldots,a^{d_1}x_n).$$

Из монотонности следует, что все константы $d, d_1, \ldots, d_n$ одного знака. Сделаем степенную замену переменных χ: $x_i \to z_i^{d_i}$ для $1 \le i \le n$; тогда функция $Y(z) = y^{1/d}(x)$ является однородной первой степени и монотонно возрастающей по всем переменным. Она остается квазиоднородной, т. е.

$$Y = \Psi(\Phi_1(z_1) + \ldots + \Phi_n(x_n)),$$

где из монотонности все функции $\Psi,\ \Phi_1,\ldots,\Phi_n$ либо одновременно монотонно возрастающие, либо монотонно убывающие. В последнем случае сделаем еще одну замену. Положим $v_i = 1/z_i$, $\bar{\Phi}_i(v_i) = \Phi_i(z_i)$, $\bar{\Psi}(t) = 1/\Psi(t)$, $\bar{Y}(v_1,\ldots,v_n) = Y(z_1,\ldots,z_n)$. Тогда

$$\bar{Y} = \bar{\Psi}(\bar{\Phi}_1(v_1) + \ldots + \bar{\Phi}_n(v_n)),$$

причем функции $\bar{\Psi},\ \bar{\Phi}_1,\ldots,\bar{\Phi}_n$ – монотонно возрастающие, как и функция $\bar{Y}(v_1,\ldots,v_n)$.

Таким образом, в любом случае либо функция Y, либо функция $\bar{Y}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, т. е. одна из этих функций (а вместе с ней и другая) является либо функцией CESM, либо функцией Кобба – Дугласа. Однако если бы функция Y была функцией Кобба – Дугласа, то обратная к χ степенная замена переменных $z_i \to x_i^{1/d_i}$ превращала бы ее снова в функцию Кобба – Дугласа, т. е. в однородную функцию. Следовательно, в этом случае функция y была бы однородной. Значит,

$$Y = (z_1,\ldots,z_n) = \alpha(a_1 z_1^b + \ldots + a_n z_n^b)^{d-b},$$

откуда

$$y(x_1,\ldots,x_n) = \alpha\left(a_1 x_1^{\frac{b}{d_1}} + \ldots + a_n x_n^{\frac{b}{d_n}}\right)^{d-b},$$

т. е. y – функция Солоу.

Литература

1. *Браун М.* Теория и измерение технического прогресс. М.: Статистика, 1971.
2. *Arrow K.J., Chenery H.B., Minhas B.S., Solow R.M.* Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency // Rev. Econ. Stat. 1961. No. 43.
3. *Мощинскас П.И., Раяцкас Р.Л.* Некоторые аспекты построения моделей макротехнологии // Экономика и математические методы. 1985. Т. 21. Вып. 6.
4. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986.
5. *Mukerji V.* A Generalized S.M.A.C. Function with Constant Ratios of Elasticity of Substitution // Rev. Econ. Stud. 1963. No. 30.
6. *Gorman W.M.* Production Functions in which the Elasticities of Substitution Stand in Fixed Proportions to Each Other // Rev. Econ. Stud. 1965. No. 32.
7. *Uzawa H.* Production Functions with Constant Elasticities of Substitution // Rev. Econ. Stud. 1962. No. 29.
8. *Клейнер Г.Б., Сирота Б.Н.* О производственных функциях с постоянными и переменными эластичностями замены факторов // Экономика и математические методы. 1975. Т. 11. Вып. 3.
9. *Blackorby C., Russell R.* The Morishima Elasticity of Substitution; Symmetry, Constancy, Separability, and Its Relationship to Hicks and Allen Elasticities // Rev. Econ. Stud. 1981. No. 48.
10. *Лизер С.* Эконометрические методы и задачи. М.: Статистика, 1970.