

П 4.3
П75

СК

Приборы и Системы.

Управление, Контроль, Диагностика

Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics

1-2015

ISSN: 2073-0004



СОДЕРЖАНИЕ

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В.К. АБРОСИМОВ, В.Г. КОЗЛОВ

Метод и программно-аппаратные средства обеспечения устойчивости сетей управления сложными системами в нештатных ситуациях 2

*В.В. МИХАЙЛОВ
М.Е. СЕМЕНОВ, С.Л. КИРНОСОВ*

Учет фрактальных свойств при функционировании авиационной системы поддержки принятия метеозависимых решений 12

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

П.Ю. ЭНАТСКАЯ, Е.Р. ХАКИМУЛЛИН

Анализ схемы равновероятного размещения различных частиц по неразличимым ячейкам 19

ОПТИМИЗАЦИЯ И БЕЗОПАСНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

*А.В. ЯКОВЛЕВ, В.Е. ДИДРИХ
П.А. ЩЕРБИНИН, Т.И. МОСКВИЧЕВА*

Сетевая динамическая модель системы обнаружения троянских программ 25

ПРИБОРЫ И СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ

А.П. ЛЕОНОВ

К определению коэффициента передачи скоростной обратной связи в цифровой прецизионной позиционной системе с широтно-импульсным управлением 33

ДАТЧИКИ

*А.З. БАДАЛОВ
Ф.Г. АГАЕВ, А.М. ИЗМАЙЛОВ*

Исключение ряда составляющих основной погрешности акустических расходомеров 39

ИЗМЕРЕНИЯ, КОНТРОЛЬ, ДИАГНОСТИКА

А.Ф. ВАЛЕЕВ, Н.А. СОЛОВЬЕВ

Информационно-измерительная система управляемой насосной откачки пластовой жидкости из обводненных газовых скважин 46

*В.Х. ЯСОВЕЕВ
Р.Ю. МУКАЕВ, А.А. ШМЕЛЕВ*

Система калибровки магнитострикционных преобразователей линейных перемещений 55

Ю.В. ПОПОВ

Термографический контроль системы электроснабжения воздушных судов 62

Учредитель и издатель журнала
ООО «НАУЧТЕХЛИТИЗДАТ»

Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-1131
Подписной индекс 79214

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:

Т.Г. САМХАРАДЗЕ, д-р техн. наук, профессор

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:

В.А. БУЗАНОВСКИЙ, д-р техн. наук

В.М. РЫБИН, д-р техн. наук, профессор,
засл. деятель науки и техники РФ,

М.А. ЧИСТЯКОВА, канд. эконом. наук, доцент.

РЕДАКЦИЯ:

Чистякова М.А., Гончарова В.Б.

Годованец Н.Н., Краснова Л.М., Мазурова С.В.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Гуляев Ю.В. — академик РАН (Россия)

Загородный А.Г. — академик РАН,
академик НАН Украины (Украина)

Федоров И.Б. — академик РАН (Россия)

Хомич В.Ю. — академик РАН (Россия)

Щербаков И.А. — академик РАН (Россия)

Федик И.И. — член-корреспондент РАН (Россия)

Аксенов Ю.П. — доктор техн. наук (Россия)

Бузановский В.А. — доктор техн. наук (Россия)

Буланова Т.А. — доктор техн. наук, профессор (Россия)

Галиев А.Л. — доктор техн. наук, профессор (Россия)

Громов Ю.Ю. — доктор техн. наук, профессор (Россия)

Гузаиров М.Б. — доктор техн. наук, профессор (Россия)

Лошак Ж. — доктор философии, профессор (Франция)

Каперко А.Ф. — доктор техн. наук, профессор (Россия)

Карась В.И. — доктор физ.-мат. наук, профессор (Украина)

Кусмарцев Ф.В. — доктор философии, профессор (Англия)

Матвеев В.А. — доктор техн. наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ (Россия)

Михайлов Ю.Б. — доктор техн. наук, профессор (Россия)

Натышвили О.Г. — доктор техн. наук, профессор (Грузия)

Прохоцкий Ю.М. — доктор техн. наук (Россия)

Романов А.А. — доктор техн. наук (Россия)

Рыбин В.М. — доктор техн. наук, профессор,
заслуженный деятель науки и техники РФ (Россия)

Самхарадзе Т.Г. — доктор техн. наук, профессор (Россия)

Чебышов С.Б. — доктор техн. наук, профессор (Россия)

Чистякова М.А. — канд. эконом. наук, доцент (Россия)

Щербаков Н.С. — доктор техн. наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ (Россия)

Голишников Б.Е. — верстка и дизайн полноцветной печати

Материалы, опубликованные в настоящем журнале, не могут быть полностью или частично воспроизведены, тиражированы и распространены без письменного разрешения редакции

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются
Публикации статей соискателей ученых степеней бесплатная

Подписано в печать 25.12.2014

Формат 60x88 1/8. Бумага кн.-журн. Печать офсетная

Усл.-печ. л. 5, 18. Уч.-изд. 7,04.

Зак. 343. Тираж 4900 экз. Цена договорная

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

107258, г. Москва, Алымов пер., д. 17, стр. 2, «Издательство»

Тел.: 8-916-185-55-45 (редакция)

8-499-162-74-54 (бухгалтерия)

Факс: 8-499-168-13-69, 8-499-168-23-58

E-mail: ikd2004@mail.ru

http://www.tgizd.ru

Оригинал-макет и электронная версия

подготовлены ООО «Научтехлитиздат»

Отпечатано в типографии ООО «Научтехлитиздат»

107258, Москва, Алымов пер., д. 17, корп. 2

Тел.: 8 (499) 168-21-28

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

П.Ю. ЭНАТСКАЯ, кандидат физ-мат. наук, доцент
Е.Р. ХАКИМУЛЛИН,
кандидат физ-мат. наук, доцент
E-mail: nat1943@mail.ru
(МИЭМ НИУ «Высшая школа Экономики»)
Москва, Российская Федерация

АНАЛИЗ СХЕМЫ РАВНОВЕРОЯТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ РАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ

Основная задача исследования состоит в нахождении числа исходов изучаемой схемы и их перечисления в явном виде. Для этого обсуждается форма представления исходов. На основе сравнения с аналогичной схемой с неразличимыми частицами, изученной в [1] с найденным числом исходов S выводится явная формула для числа исходов N данной схемы, выраженная через S .

Наряду с достаточно трудоемким аналитическим вычислением числа исходов схемы N , предполагающее предварительное нахождение числа S по [1], предлагается численный метод определения N при любых фиксированных значениях параметров схемы (n – числа ячеек и r – числа частиц) путем построения графа состояний случайного процесса поединичного последовательного размещения частиц по ячейкам до r -ого шага с определенной дисциплиной нумерации состояний, описывающих в принятой форме исходы схемы.

По этому же графу с указанием легко вычисляемых вероятностей переходов из состояния в состояние предлагается процедура вычисления вероятностного распределения исходов схемы после размещения фиксированного числа частиц. Таким образом, получаем полный перечень всех исходов схемы и их вероятностное распределение.

Кроме этого, приведен численный метод приближенного вычисления числа исходов схемы методом стохастического моделирования. Вопросы моделирования исходов схемы также рассмотрены.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: случайный процесс, метод графов, вероятностный анализ, комбинаторная схема, граф состояний, добавление частиц, вероятностные распределения исходов.

P.Y. ENATSKAYA, Candidate of Physical and
Mathematical Sciences, Associate Professor
E.R. KHAKIMULLIN, Candidate of Physical and
Mathematical Sciences, Associate Professor
E-mail: nat1943@mail.ru
(NRU MIEM «Higher School of Economics»)
Moscow, Russian Federation

THE ANALYSIS OF THE SCHEME OF EQUIPROBABLE PLACEMENT OF DISTINCTIVE PARTICLES ON INDISCERNIBLE CELLS

The primal problem of research consists in finding of number of outcomes of the studied scheme and their transfer in an explicit form. The form of representation of outcomes is for this purpose discussed. On the basis of comparison with the similar scheme with indiscernible particles studied in [1] with the found number of outcomes of S the apparent formula for number of outcomes of N these schemes expressed through S is removed.

Along with rather laborious analytical calculation of number of outcomes of the scheme N , the assuming preliminary finding of number S on [1], is offered a numerical method of definition of N at any fixed values of parameters of the scheme (n – numbers of cells and r – number of particles) by creation of a state graph of casual process of poyedinichny serial placement of particles on cells to r -oho step with particular discipline of numbering of the states describing scheme outcomes in the taken form.

On the same count with the indication of easily calculated probabilities of transitions from a state to a state procedure of calculation of probability distribution of outcomes of the scheme after placement of the fixed number of particles is offered. Thus, we receive the complete list of all outcomes of the scheme and their probability distribution.

Besides, the numerical method of approximate calculation of number of outcomes of the scheme is given by method of stochastic model operation. Questions of model operation of outcomes of the scheme are also considered.

KEYWORDS: casual process, method of counts, probability analysis, combinatorial scheme, state graph, addition of particles, probability distributions of outcomes.

ВВЕДЕНИЕ

В обширной литературе по комбинаторике [3...13] явная формула для числа N исходов изучаемой схемы не обнаружена, не предложены численные методы для вычисления N и не приведен алгоритм перебора исходов схемы.

В ряде источников предлагаются общие подходы к решению задач перечислительной комбинаторики, а именно, в [5...10] – это метод построения перечисляющих производящих функцией с отдельными примерами, не включающими изучаемую здесь схему; в [8] и [12] рассматривается теория перечисле-

ния, основанная на методе производящих функций; в [8] предлагается метод перечисления, связанный с рассмотрением алгебр инцидентности и использованием функций Мебиуса на частично упорядоченных множествах; в [4] представлены числа Стирлинга I-го и II-го рода как соответственно числа размещений r различных частиц по n различным ячейкам и как разбиение множества из n элементов на k непустых классов; в [11] в качестве инструмента решения перечислительных задач комбинаторики приведен перманент матрицы.

Здесь предложен другой подход к решению перечислительных задач комбинаторики для данной схемы.

1. Вид результата размещения

Все исходы размещения r различных частиц по n неразличимым ячейкам определяются составами попавших в ячейки частиц, т.е. их номерами от 1 до r . Для записи каждого исхода размещения будем использовать фигурные скобки, внутри которых в круглых скобках будем перечислять составы всех n ячеек (если в ячейке одна частица, то ее номер будем приводить без круглых скобок). Исходы размещения в фигурных скобках будут следовать в порядке ячеек с большими уровнями заполнений, что соответствует порядку размещения частиц по одной в ячейки по мере роста их уровней заполнения. Составы ячеек с одинаковыми уровнями заполнений перечисляем в алфавитном порядке, считая алфавитом числа от 1 до r . Ноль будет означать пустую ячейку. Поясним все это на примерах.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $r = 4$. Тогда запись исхода а) $\{0,0,(1,2,3,4)\}$ означает, что две ячейки пусты, а в оставшейся ячейке – все четыре частицы; б) $\{0,2,(1,3,4)\}$ означает, что одна ячейка пуста, в одной – частица с номером 2, а в оставшейся ячейке – частицы с номерами 1, 3, 4; в) $\{0,(1,4),(2,3)\}$ означает, что одна ячейка пустая, в одной – частицы с номерами 1 и 4, а в оставшейся ячейке – частицы с номерами 2 и 3. Причем исход $\{1,2,(3,4)\}$ стоит раньше, т.е. имеет меньший номер, чем исход $\{0,(1,2),(3,4)\}$, а исход $\{0,(1,3),(2,4)\}$ – раньше, чем исход $\{0,(1,4),(2,3)\}$.

2. Соответствие между схемами равновероятного размещения различных и неразличимых частиц по неразличимым ячейкам

В дальнейшем для краткости исходную схему размещения будем называть схемой 1, а альтернативную – схемой 2.

Если сгруппировать все исходы схемы 1 с одинаковыми наборами уровней заполнения ячеек в одну группу, то каждая группа состояний (исходов) схемы 1 будет соответствовать одному состоянию схемы 2.

Если состояния схемы 2 после размещения r частиц представим векторами,

$$\bar{\mu}_r^{(j)} = (\mu_0^{(j)}, \mu_1^{(j)}, \dots, \mu_r^{(j)}),$$

где $\mu_r^{(j)}$ – число ячеек, содержащих в схеме 2 ровно i частиц

$$(i = \overline{0, r}, \sum_{i=0}^r \mu_i^{(j)} = n, \sum_{i=0}^r i \mu_i^{(j)} = r), j = \overline{1, N^*},$$

N^* – число исходов схемы 2, полученное в [1], то каждому вектору $\bar{\mu}_r^{(j)}$ схемы 2 соответствует S_j равновероятных состояний схемы 1, форма представления которых и порядок их перечисления описан в п. 1, так что они отличаются друг от друга только составами частиц в ячейках при одинаковых наборах уровней заполнения ячеек, т.е. при одинаковых структурах векторов группы.

3. Вычисление общего числа исходов схемы 1

Пусть S – общее число исходов схемы 1, а S_j – численность j -ой группы исходов (по п. 2), определяемая j -ым состоянием схемы 2 и описываемая вектором $\bar{\mu}_r^{(j)}$ после размещения r неразличимых частиц. Тогда число S_j определяется количеством делений r различных частиц схемы 1 на различные группы частиц, составляющих разные уровни заполнения ячеек, и делениями каждой из этих групп на неразличимые подгруппы ячеек одинакового размера, задаваемых вектором $\bar{\mu}_r^{(j)}$. Тогда в схеме 1 получаем, что

$$S_j = \prod_{i=1}^r C_{i \mu_r^{(j)}}^{i \mu_r^{(j)}} \frac{(i \mu_r^{(j)})!}{(i!)^{\mu_r^{(j)}} (\mu_r^{(j)})!}, \quad (1)$$

а искомое число S вычисляется по формуле

$$S = \sum_{j=1}^{N^*} S_j, \quad (2)$$

где N^* определено в п. 2 и вычислено в [1].

А для вычисления числа S по (2) необходимо иметь явный перечень всех векторов $\{\bar{\mu}_r^{(j)}\}$, алгоритм получения которых по соответствующему графу состояний последовательного поединичного размещения частиц по схеме 2 приведен в [1].

Для небольших значений r и n расчет по формулам (1) и (2) числа S удастся сделать вручную, а для больших значений требуется разработка программы перечисления всех $N^* = N^*(r, n)$ исходов схемы 2 по описанному в [1] алгоритму и вычисление чисел исходов $\{S_j\}$ схемы 1, соответствующих векторам $\{\bar{\mu}_r^{(j)}\}$ в схеме 2 по (1). Тогда число S останется найти по (2).

Для иллюстрации вычисления числа S приведем численный пример при небольших значениях параметров r и n .

Пример 2. Пусть $r = 4$, $n = 3$, как в примере 1. Будем, как описано в [1], строить граф состояний системы, определяемых наборами уровней заполнения ячеек при последовательном поединичном равновероятном размещении частиц в схеме 2. Обозначение в графе $E_i^{(l)}$ будет означать состояние номер i после размещения l частиц, которое описывается вектором длины $(l + 1)$

численностей ячеек с уровнями заполнений от 0 до l частиц, а порядок нумерации состояний после размещения l частиц описан в [1] и, коротко, производится в соответствии с размещением частиц по мере роста уровней их заполнения на предыдущем шаге. (Здесь под шагом понимается размещение следующей частицы в схеме 2). Все состояния на l -ом шаге будут описываться всеми векторами вида,

$$\bar{\mu}_r^{(j)} = (\mu_r^{(0)}, \mu_r^{(1)}, \dots, \mu_r^{(l)}),$$

где $\mu_r^{(k)}$ – число ячеек с k частицами, $k = \overline{1, l}$ а j – номер вектора, $j = \overline{1, N^*}$.

В примере 2 для нахождения численностей групп $\{S_j\}$ исходов схемы 1 нас интересуют векторы $\bar{\mu}_r^{(j)}$ при $l = r = 4$. Имеем в этом случае граф состояний представленный на рисунке 1.

По графу получаем 4 разных вектора

$$\mu_4^{(1)}, \mu_4^{(2)}, \mu_4^{(3)}, \mu_4^{(4)},$$

N^* (т.е. $N^* = 4$), соответствующих группам состояний по S_j в каждой исходной схеме 1, $j = \overline{1, 4}$. Найдем эти значения S_j по (2). Число состояний S_1 соответствует вектору $\mu_4^{(1)} = (0, 2, 1, 0, 0)$ схемы 2, и по (1) $S_1 = C_2^4 = 6$, что совпадает с визуальным перебором первой группы состояний схемы 1:

$$\{(1), (2), (3, 4)\}, \{(1), (3), (2, 4)\}, \{(1), (4), (2, 3)\},$$

$$\{(2), (3), (1, 4)\}, \{(2), (4), (1, 3)\}, \{(3), (4), (1, 2)\},$$

т.е. 6 исходов схемы 1. Число состояний S_2 соответствует вектору $\mu_4^{(2)} = (1, 0, 2, 0, 0)$ схемы 2, и по (1)

$$S_2 = C_4^4 \frac{4!}{(2!)^2 2!} = 3,$$

что совпадает с визуальным перебором второй группы состояний схемы 1:

$$\{(0), (1, 2), (3, 4)\}, \{(0), (1, 3), (2, 4)\},$$

$$\{(0), (1, 4), (2, 3)\},$$

т.е. 3 исхода схемы 1. Число состояний S_3 соответствует вектору $\mu_4^{(3)} = (1, 1, 0, 1, 0)$ схемы 2, и по (1) $S_3 = C_4^1 = 3 = 3$, что совпадает с визуальным перебором третьей группы состояний схемы 1;

$$\{(0), (1), (2, 3, 4)\}, \{(0), (2), (1, 3, 4)\},$$

$$\{(0), (3), (1, 2, 4)\}, \{(0), (4), (1, 2, 3)\},$$

т.е. 4 исхода схемы 1. Число состояний S_4 соответствует вектору $\mu_4^{(4)} = (2, 0, 0, 0, 1)$ схемы 2, и по (1) $S_4 = C_4^1 = 1$, что визуально соответствует состоянию $\{(0), (0), (1, 2, 3, 4)\}$, представляющему четвертую группу состояний схемы 1, т.е. 1 исход схемы 1. Отсюда по (2) имеем $S = 6 + 3 + 4 + 1 = 14$ состояний схемы 1, что уже проверено визуальным перебором каждой группы состояний схемы 1.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВСЕХ ИСХОДОВ СХЕМЫ 1

В работе [1] получено распределение вероятностей всех N^* состояний схемы 2. т.е. дан порядок перечисления всех состояний схемы 2 и их вероятности $\{\bar{\mu}_r^{(j)}\}$, $j = \overline{1, N^*}$.

В соответствии с п. 2 это означает, что в схеме 1 получено распределение вероятностей групп равновероятных в каждой j -ой группе состояний, учитывающих различимость частиц и соответствующих вектору $\bar{\mu}_r^{(j)}$ схемы 2. Тогда для нахождения вероятностей всех S_j состояний, j -ой группы схемы 1 нужно вероятность p_j вектора $\bar{\mu}_r^{(j)}$ в схеме 2 разделить на S_j , а перечисление состояний j -ой группы производить в порядке, определенном в п.1.

Покажем это на примере.

Пример 3. Пусть, как и в примере 2, $r = 4$, $n = 3$. Тогда рисунок 1 в примере 2 дополним указанием на ребрах графа состояний при последовательном поединичном размещении частиц по ячейкам в схеме 2 вероятностями соответствующих переходов.

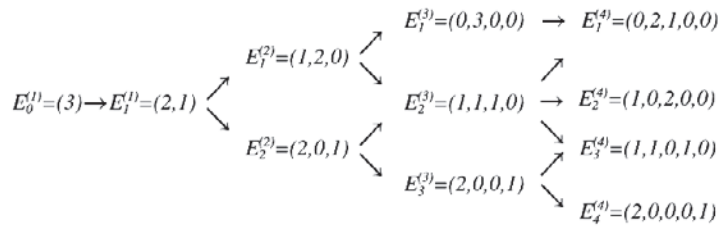


РИС. 1. Граф состояний по примеру 2

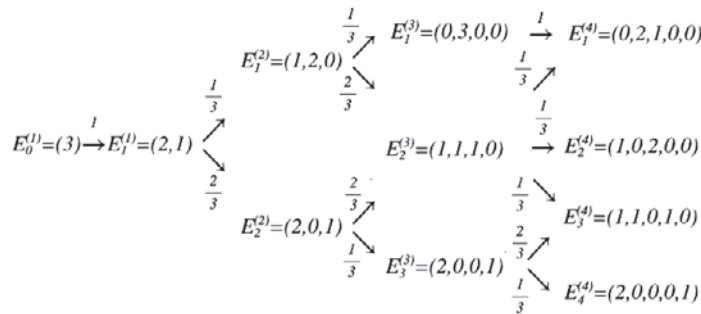


РИС. 2. Граф состояний по примеру 3

По графу получено $N^* = 4$ разных вектора состояния в схеме 2:

$$\mu_4^{(1)}, \mu_4^{(2)}, \mu_4^{(3)}, \mu_4^{(4)},$$

т.е. $N^* = 4$ группы состояний по S_j , $j = \overline{1, N^*}$ в схеме 1. В примере 2 значения S_1, S_2, S_3, S_4 получены

$$S_1 = 6, S_2 = 3, S_3 = 4, S_4 = 1; S = \sum_{j=1}^4 S_j = 14$$

состоянии схемы 1.

По графу (рис. 2) вычислим сначала вероятности векторов $\{\bar{\mu}_r^{(j)}\}$, $j = \overline{1, 4}$, т.е. состояний схемы 2.

$$p_1 = P(\bar{\mu}_4^{(1)} = (0, 2, 1, 0, 0)) = P(1, 1, 1, 1) + P(1, 1, 2, 1) + P(1, 2, 2, 1) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$p_2 = P(\bar{\mu}_4^{(2)} = (1, 0, 2, 0, 0)) = P(1, 1, 2, 2) + P(1, 2, 2, 2) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$p_3 = P(\bar{\mu}_4^{(3)} = (1, 1, 0, 1, 0)) = P(1, 1, 2, 3) + P(1, 2, 2, 3) + P(1, 2, 3, 3) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27},$$

$$p_4 = P(\bar{\mu}_4^{(4)} = (2, 0, 0, 0, 1)) = P(1, 2, 3, 4) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27},$$

где обозначение $P(a, b, c, d)$ означает траекторию переходов состояний $E_a^{(1)} \rightarrow E_b^{(1)} \rightarrow E_c^{(1)} \rightarrow E_d^{(1)}$.

Проверка,

$$\sum_{j=1}^4 p_j = \frac{12}{27} + \frac{6}{27} + \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = 1.$$

Отсюда получаем распределение вероятностей всех 14 состояний схемы I, перечисленных в примере 2 в форме таблицы 1, где j -номер группы состояний, i -номер состояния в схеме 1.

Проверка

$$\frac{2}{27} \cdot 6 + \frac{2}{27} \cdot 3 + \frac{2}{27} \cdot 4 + \frac{1}{27} \cdot 1 = \frac{12}{27} + \frac{6}{27} + \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = 1$$

Итак, получено распределение вероятностей всех 14 исходов схемы 1.

Перебор траекторий по графу (рис.2) в данном примере с небольшими значениями параметров схемы 2 r и n не представляет трудности, однако, в общем случае алгоритм такого перебора для каждого конечного состояния описан в [1] и, коротко, состоит в установлении его порядка, от конечного состояния к единственному начальному по направлениям обратных стрелок графа и сверху вниз на каждом шаге.

ТАБЛИЦА 1

j		i	Состояние схемы I	Вероятность состояние
1	6	1	{(1),(2),(3,4)}	$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$
		2	{(1),(3),(2,4)}	$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$
		3	{(1),(4),(2,3)}	$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$
		4	{(2),(3),(1,4)}	$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$
		5	{(2),(4),(1,3)}	$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$
		6	{(3),(4),(1,2)}	$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$
2	3	7	{(0),(1,2),(3,4)}	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$
		8	{(0),(1,3),(2,4)}	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$
		9	{(0),(1,4),(2,3)}	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}$
3	4	10	{(0),(1),(2,3,4)}	$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{27}$
		11	{(0),(2),(1,3,4)}	$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{27}$
		12	{(0),(3),(1,2,4)}	$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{27}$
		13	{(0),(4), (1,2,3)}	$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{27} = \frac{2}{27}$
4	1	14	{(0),(0),(1,2,3,4)}	

5. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ВСЕХ ИСХОДОВ ИЗУЧАЕМОЙ СХЕМЫ 1

Для явного перечисления всех исходов схемы 1 размещения r различных частиц по n неразличимым ячейкам построим случайный процесс последовательного поединичного равновероятного размещения частиц с растущими номерами, начиная с 1 до номера шага размещения, совпадающим с числом размещенных частиц, по n ячейкам, записывая состояния процесса в виде исходов схемы 1, описанных

в п.1 в указанном там же порядке для каждого фиксированного состояния на предыдущем шаге. Тогда на g -ом шаге будем иметь перечень всех возможных, частично упорядоченных, описанным выше способом состояний, относительно каждого из состояний $(r - 1)$ -го шага.

Для иллюстрации описанной процедуры приведем числовой пример.

Пример 4. Пусть снова, как и в примере 3, $n = 3$, $r = 4$. Проверим полученный там результат числа, перечня исходов нашей схемы и их вероятностного распределения путем построения описанного случайного процесса. Введем обозначение j -ого состояния процесса на i -ом шаге: $T_j^{(i)}$, и будем описывать исходы размещения, как указано в п.1, т.е. в виде перечня совокупностей номеров частиц в n ячейках в порядке роста уровней их заполнения, а при одинаковых уровнях заполнения ячеек в алфавитном порядке, считая алфавитом номера размещенных элементов. Такая форма записи состояний процесса обеспечивает единообразие представления и удобство их сравнения. Нумерацию исходов процесса производим в порядке попадания последней добавленной на рассматриваемом шаге размещения частицы в ячейки с растущим предварительным уровнем заполнения, т.е. в порядке записи исхода на предыдущем шаге.

Представим случайный процесс графом переходов из состояния в состояние указанием вероятностей переходов на ребрах графа.

По графу получаем те же 14 исходов размещения в схеме 1, что и были получены в примере 3 п.4 другим способом. Распределение вероятностей всех этих исходов легко считаются по графу на рисунке 3 по единственному для каждого конечного состояния траекториям:

$$P(T_1^{(4)}) = P(T_2^{(4)}) = \dots = P(T_9^{(4)}) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27},$$

$$P(T_{10}^{(4)}) = P(T_{11}^{(4)}) = P(T_{12}^{(4)}) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27},$$

$$P(T_{13}^{(4)}) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27},$$

$$P(T_{14}^{(4)}) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

Результат распределения вероятностей снова совпал с полученными другим способом в примере 3.

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСХОДОВ СХЕМЫ 1

Первый способ. По распределению вероятностей всех исходов схемы 1, полученного по графу типа представленному на рисунке 2, моделируем исходы методом маркировки (см., например, [2]).

Второй способ. Моделируем исходы схемы размещения g различных частиц по n различным ячейкам описанным в [2] способом M_1 раз. (Далее эту схему будем называть вспомогательной.)

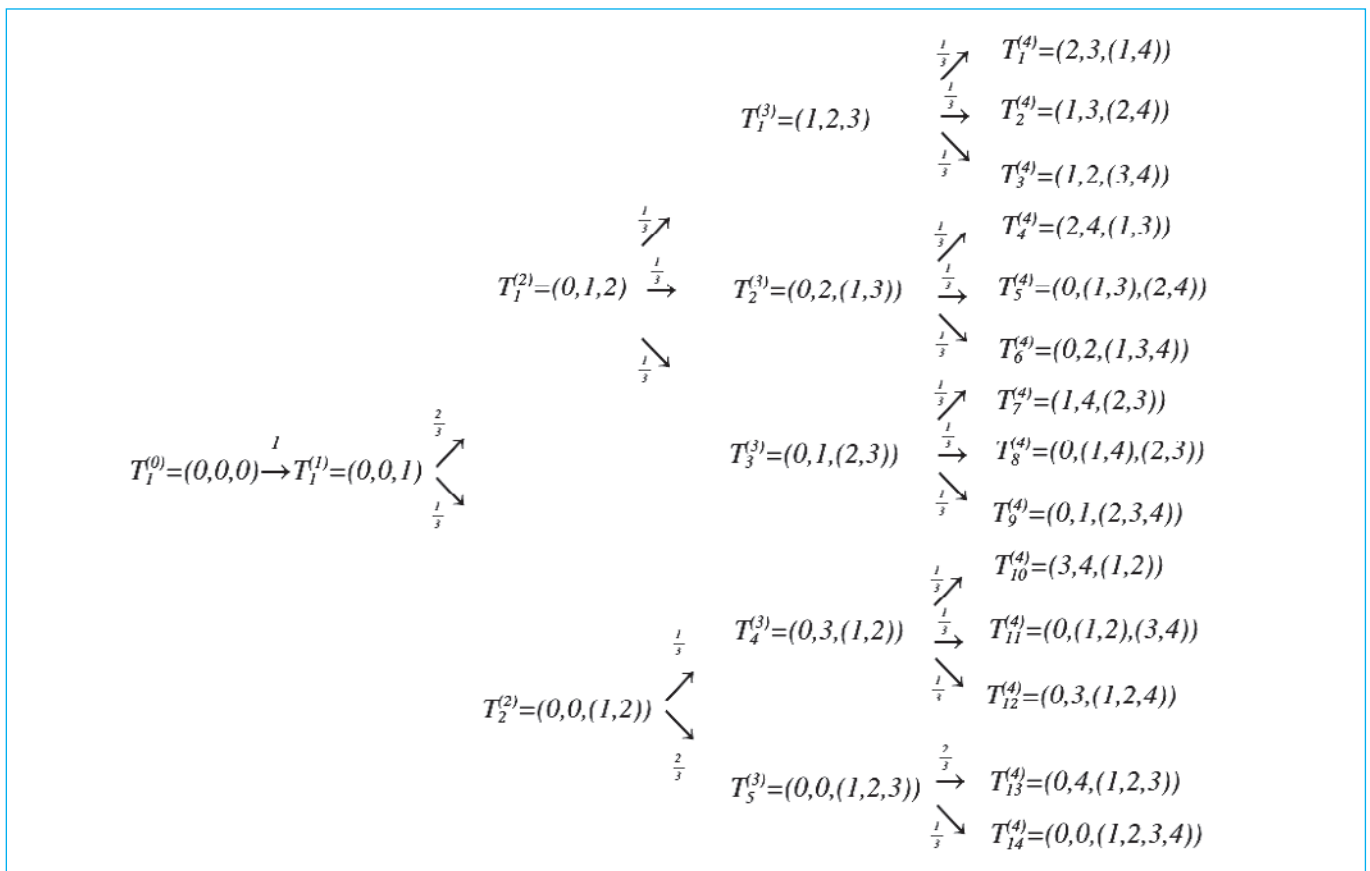


РИС. 3. Граф состояний по примеру 4

Шаги дальнейшего моделирования:

- 1) среди M_i исходов вспомогательной схемы отбраковываем M_{i+1} повторяющихся – остается Δ_i разных исходов;
- 2) Δ_i разных исходов вспомогательной схемы записываем в форме, описанной в п. 1, как исходы схемы 1, отбраковывая одинаковые – получаем M_i исходов схемы 1;
- 3) заменяя M_i на M_{i+1} , – на Δ_{i+1} , M_i^* на M_{i+1}^* повторяем шаги 1) и 2), меняя i от 1 до значения, пока на шаге 1) не окажется отбраковано;
- 4) искомая выборка исходов схемы 1 получается путем объединения совокупностей результатов шага 2 общим объемом

$$M^* = \sum_{i=1} M_i^* .$$

7. Точный и приближенный расчет числа S исходов схемы 1

Точный расчет числа S приведен в п. 3 и использует анализ схемы 2 в [1], а именно, описание всех исходов схемы 2 путем составления графа по правилу, описанному в [1], примером которого в настоящей статье является граф в примере 3 п. 4, представленный на рисунке 2. Точное значение числа, S получается по (1) и (2), где N^* – число разных состояний схемы 2. т.о. конечных исходов по графу.

Приближенное значение числа S получаем при стохастическом моделировании M^* исходов схемы 1 при втором способе моделирования (см, п. 5) методом пропорции, т.е. из соотношения

$$\frac{n^r}{S} \approx \frac{M_1}{M^*} ,$$

где n^r – общее число исходов вспомогательной схемы п. 6, а M_1 – число ее смоделированных исходов известным, например, из [2] способом, откуда имеем

$$S \approx \frac{n^r M^*}{M_1} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // *Дискретная математика* (в печати).
2. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. *Стохастическое моделирование*. М.: МИЭМ. 2012. 185 с.
3. Виленкин Н.Я. *Комбинаторика*. М.: Наука. 1969. 323 с.
4. Риордан Дж. *Введение в комбинаторный анализ*. М.: Издательство Иностранной Литературы. 1963. 288 с.
5. Гульден Я., Диксон Д. *Перечислительная комбинаторика*. М.: Наука. 1990. 504 с.
6. Тимашев А.Н. *Обобщенная схема размещений в задачах вероятностной комбинаторики*. М.: Академиздатцентр «Наука», РАН. 2011. 267 с.
7. Сачков В.Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. М.: Издательство МЦНМО. 2004. 384 с.
8. Сачков В.Н. *Комбинаторные методы дискретной математики*. М.: Наука. 2004. 385 с.
9. Холл М. *Комбинаторика*. М.: Мир. 1970. 424 с.
10. Кофман А. *Введение в прикладную комбинаторику*. М.: Наука, 1975. 480 с.
11. Минк Х. *Перманенты, пер. с англ.* М.: Мир. 1982. 214 с.
12. Харри Ф. *Теория графов, пер. с англ.* М.: БИНОМ Лаборатория знаний. 2013. 324 с.

REFERENCES

1. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. Analiz skhemy razmeshcheniya nerazlichimykh chastits po nerazlichimym yacheykam [Analysis layout indistinguishable particles to cells indistinguishable]. *Diskretnaya matematika* (v pechati) [Discrete mathematics (in press)].
2. Enatskaya N.Yu., Khakimullin Ye.R. *Stokhasticheskoe modelirovanie* [Stochastic modeling]. М.: MIEM [Moscow: Publishing House of MIEM]. 2012. 185 p.
3. Vilenkin N.Ya. *Kombinatorika* [Combinatorics]. М.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 1969. 323 p.
4. Riordan Dzh. *Vvedenie v kombinatornyy analiz* [Introduction to Combinatorial Analysis]. М.: Izdatelstvo Inostrannoy Literatury [Moscow: Foreign Literature Publishing House]. 1963. 288 p.
5. Gulden Ya., Dikson D. *Perechislitel'naya kombinatorika* [Combinatorial enumeration]. М.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 1990. 504 p.
6. Timashev A.N. *Obobshchennaya skhema razmeshcheniy v zadachakh veroyatnostnoy kombinatoriki* [Generalized allocation scheme in probabilistic combinatorics problems]. М.: Akademizdatcentr «Nauka», RAN [Moscow: Akademizdatcentr «Science», Russian Academy of Sciences]. 2011. 267 p.
7. Sachkov V.N. *Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoy matematiki* [Introduction to Combinatorial Methods of Discrete Mathematics]. М.: Izdatelstvo MTsNMO [Moscow: Publisher MTsNMO]. 2004. 384 p.
8. Sachkov V.N. *Kombinatornye metody diskretnoy matematiki* [Combinatorial Methods of Discrete Mathematics]. М.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 2004. 385 p.
9. Khol M. *Kombinatorika* [Combinatorics]. М.: Mir [Moscow: Publishing house «World»]. 1970. 424 p.
10. Kofman A. *Vvedenie v prikladnyuyu kombinatoriku* [Introduction to applied combinatorics]. М.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 1975. 480 p.
11. Mink Kh. *Permanenty, per. s angl* [Permanents. Trans. from English]. М.: Mir [Moscow: Publishing house «World»]. 1982. 214 p.
12. Kharri F. *Teoriya grafov, per. s angl* [Graph theory., Trans. from English]. М.: BINOM Laboratoriya znaniy [Moscow: Laboratory BINOM knowledge]. 2013. 324 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- ЭНАТСКАЯ НАТАЛИЯ ЮРЬЕВНА,
кандидат физико-математических наук,
доцент
E-mail: nat1943@mail.ru
- ХАКИМУЛЛИН ЕВГЕНИЙ РОБЕРТОВИЧ,
кандидат физико-математических наук,
доцент
E-mail: evgeni/hakimullin@mail.com
МИЭМ НИУ «Высшая школа экономики»
101100, Россия, Москва, Мясницкая, д. 20

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

- ENATSKAYA NATAL'YA YUR'EVNA,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor
E-mail: nat1943@mail.ru
- KHAKIMULLIN EUGENE ROBERTOVICH,
Candidate of Physical and Mathematical sciences,
Associate Professor
E-mail: evgeni/hakimullin@mail.com
MIEM NRU «Higher school of economics»
101100, Russia, Moscow, Myasnitskaya, 20