УДК 681.324.06
© Г.С. Горшков, Е.В. Никитин, Е.А. Саксонов, 2010

ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ БАЗОВОЙ СЕТИ

Горшков Г.С.- аспирант кафедры ВСиС, МИЭМ, г. Москва.
Никитин Е.В.- аспирант кафедры ВСиС, МИЭМ, г. Москва.
Саксонов Е.А – профессор кафедры ВСиС, МИЭМ, доктор технических наук, профессор, г Москва.

Предлагается новый подход к формированию структуры базовой сети телекоммуникационной системы, основанный на учете веса вершины графа, который зависит от ребер, присоединенных к вершине. Такие случаи встречаются, когда с сети используются каналы связи нескольких провайдеров. Приводится постановка задачи формирования структуры базовой сети как построения покрывающего дерева с заданной системой ограничений. Результаты могут быть полезны разработчикам и администраторам телекоммуникационных систем.

The new approach to formation of structure of a base network of the telecommunication system, based on the account of weight of top of the count which depends on the edges attached to top is offered. Such cases meet, when from a network communication channels of several providers are used. Statement of a problem of formation of structure of a base network as constructions of a spanning tree with the set system of restrictions is resulted. Results can be useful to developers and managers of telecommunication systems.

Большой класс распределенных и телекоммуникационных сетевых структур оптимально строить на основе базовых (опорных) сетей. Это дает возможность сократить общие затраты на создание высокоскоростных каналов связи, построить устойчивую сетевую структуру, к которой легко добавлять новые сегменты и учитывается специфика объекта информатизации[1].

Базовая сеть состоит из множества базовых (коммуникационных) узлов, к которым подключаются пользователи сети, соединенных скоростными каналами связи. В идеальном (простейшем) случае задача формирования структуры базовой сети может быть сформулирована как задача формирования системы связи, соединяющей все базовые узлы и имеющей минимальную стоимость при заданных параметрах и ограничениях. Стоимость сети складывается из стоимости используемых каналов связи и базовых узлов и являются, как правило, функциями от интенсивностей обрабатываемых (передаваемых) потоков данных

Задача формирования структуры базовой сети часто формулируется как задача построения минимального покрывающего дерева (spanning tree) на графе [2]. При этом вершинами графа являются базовые узлы, а ребрами каналы связи, соединяющие эти базовые узлы. В настоящее время известно большое число алгоритмов построения минимального покрывающего дерева на заданном графе [3].

Однако, в реальных случаях, задача построения базовой сети осложняется наличием нескольких альтернативных вариантов реализации, что приводит к необходимости стыковки каналов в узлах сети и возникновению зависимости стоимости узла от подключаемых к нему каналов связи. Примером может служить задача оптимального построения базовой сети региона при наличии нескольких операторов связи с различными зонами покрытия [4].

Ниже будет рассмотрено влияние этого фактора на постановку и решение задачи построения базовой сети.

В общем случае для решения задачи применяется графовая модель сети, которая сводится к следующему. Задан исходный граф $G(X,\Gamma)$, где $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}$ - множество вершин графа, соответствующее множеству базовых узлов (N – общее число базовых узлов, вершина x_i соответствует узлу номер *i*), а $\Gamma=\{(x_i,x_j)\}$, ($i,\ j=1,2,\ldots,N$) - множество ребер графа, соответствующее возможным каналам связи между базовыми узлами, задаваемое парами (x_i,x_j), где каждой паре (ребру) (x_i,x_j) соответствует канал связи между узлами (вершинами) *i* и *j*. Поскольку каналы связи являются дуплексными, то исходный граф - неориентированный.

При нескольких провайдерах связи, между отдельными базовыми узлами возможно наличие нескольких каналов связи, что соответствует нескольким ребрам, связывающим соответствующие вершины графа. Тогда множество ребер Γ можно представить как объединение непересекающихся подмножеств $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{K}\Gamma_i$, где Γ_i - множество ребер графа, соответствующих каналам связи, принадлежащим провайдеру номер *i*, K – число провайдеров. Каждое ребро, соответствующее каналу связи провайдера *i* между вершинами *m* и *n* – (x_{im},x_{in}), имеет вес $u_i((x_{im},x_{in}))>0$.

На практике весу ребра могут соответствовать стоимость аренды канала связи, затраты на оплату единицы трафика, передаваемого по каналу связи, соответствующему данному ребру, либо более сложная функция, учитывающая большее число параметров сети.

Каждая вершина графа x_j также имеет свой вес $v(x_j)$. Вес вершины может определяться, например, числом пользователей, которые подключаются к узлу, которому соответствует данная вершина. Однако, в случае подключения к узлу каналов связи нескольких провайдеров, он выполняет функции по коммутации этих каналов, что, как правило, требует дополнительных затрат. Поэтому вес вершины должен учитывать этот фактор, что в нашем случае будет выглядеть следующим образом: $v(x_j)=\sum_{i=1}^{K}v_i(x_j)$, где $v_i(x_j)$ - вес вершины *j*, связанный с обслуживанием каналов провайдера номер *i*.

Определим вес графа - $V(G(X,\Gamma))$, как суммарный вес входящих в него вершин и ребер:

$$V(G(X,\Gamma))=\sum_{j=1}^{N}v(x_j)+\sum_{i=1}^{K}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}u_i(x_{im},x_{in}). \qquad (1)$$

Задача в общем виде заключается в том, что бы для заданного исходного графа $G(X,\Gamma)$ найти $\Gamma^*\subseteq\Gamma$ такое, что подграф $R(X,\Gamma^*)$, ($R(X,\Gamma^*)\subset G(X,\Gamma),\ \Gamma^*\subset\Gamma$), содержащий все вершины графа $G(X,\Gamma)$, будет иметь минимально возможный вес:

$$V(R(X,\Gamma^*))=\min_{\Gamma^*}(R(X,\Gamma^*)) \qquad (2)$$

здесь множество $\Gamma^*=\bigcup_{i=1}^{K}\Gamma_i^*$, где $\Gamma_i^*\in\Gamma_i$ (возможен случай когда $\Gamma_i^*=\varnothing$).

При этом должны выполняться ограничения, связанные с безусловным использованием каналов связи определенных провайдеров между некоторыми узлами сети, включением в состав сети всех узлов.

Решение задачи возможно с применением известных алгоритмов построения минимального покрывающего дерева. .

Для конкретизации задачи, с учетом наличия нескольких провайдеров, используем матричное описание графа.

Пусть вес ребер провайдера *i* задается матрицей $\mathbf{U}_i = \| u_{imn} \|$, где $u_{imn} = u_i(x_m, x_n)$. Наличие каналов связи провайдера *i* между узлами сети, задается матрицей смежности исходного графа $G(X,\Gamma)$ - $\mathbf{R}_i = \| r_{mn} \|$, (*m*,*n* = 1,2,...,*N*), где $r_{mn} = 1$, если канал связи (ребро) между узлами (вершинами) *m* и *n* есть, $r_{mn} = 0$, если канала связи (ребра) между узлами (вершинами) *m* и *n* нет. Веса вершин, связанные с обслуживанием каналов связи различных провайдеров, задаются матрицей $\mathbf{V} = \| v_{ij} \|$, где $v_{ij} = v_i(x_j)$, $(i = 1,2,\ldots,K;\ j = 1,2,\ldots,N)$.

Каналы связи провайдера *i* (ребра графа из подмножества Γ^*), которые входят в состав базовой сети, определяются матрицей $\mathbf{R}_i^* = \| r_{imn}^* \|$, (*m*,*n* = 1,2,...,*N*), где $r_{imn}^* = r_{imn} = 1$, если канал связи (ребро) между узлами (вершинами) *m* и *n* входит в состав сети, $r_{imn}^* = 0$, если канала этого провайдера связи (ребра) между узлами (вершинами) *m* и *n* нет. Отметим, что матрица $\mathbf{R}_i^*$, по сути, определяет подмножество Γ_i^*. Тогда, суммарный вес ребер и вершин графа базовой сети, относящихся к провайдеру *i* будет равен:

$$V_i(X,\Gamma_i^*) = V_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_i^*) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} r_{imn}^* u_{mn} + \sum_{m=1}^{N} v_{im} \operatorname{sgn}\Big(\sum_{n=1}^{N} r_{imn}^*\Big). \qquad (3)$$

где $\operatorname{sgn}(x) = 0$, если $x \le 0$ и $\operatorname{sgn}(x) = 1$, если $x > 0$.

Суммарный вес графа базовой сети будет равен:

$$V(R(X,\Gamma^*)) = \sum_{i=1}^{K} V_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_i^*). \qquad (4)$$

Задача построения базовой сети в этом случае формулируется следующим образом.

Дано:

1) исходный граф $G(X,\Gamma)$, где множество вершин графа - $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$; множество ребер графа - $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{K} \Gamma_i$, где Γ_i - множество ребер графа, соответствующих каналам связи, принадлежащим провайдеру номер *i*.

2) матрица весов вершин исходного графа - $\mathbf{V} = \| v_{ij} \|$, где $v_{ij} = v_i(x_j)$, $(i = 1,2,\ldots,K;\ j = 1,2,\ldots,N)$.

3) множество матриц весов ребер исходного графа $-(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, .., \mathbf{U}_K)$;

4) матрицы обязательной принадлежности ребер исходного графа (каналов связи провайдеров) к графу базовой сети:

$\mathbf{R}_i^{**} = \| r_{imn}^{**} \|, (m,n = 1,2,\ldots,N; i = 1,2,..,K)$, где $r_{imn}^{**} = 1$, если канал связи провайдера *i* между узлами *m* и *n* обязательно включается в состав базовой сети и $r_{imn}^{**} = 0$, если канал связи провайдера *i* между узлами *m* и *n* не обязательно включается в состав базовой сети.

Найти: $V(R(X,\Gamma^*)) = \min\limits_{(\mathbf{R}_1^*,\ldots,\mathbf{R}_K^*)} \{\sum_{i=1}^{K} V_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_i^*)$, где

$$V_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_i^*) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} r_{imn}^* u_{mn} + \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} r_{imn}^* (v_{im} + v_{in}).$$

При **ограничениях**:

1) $R(X,\Gamma^*) \subseteq G(X,\Gamma)$ - граф $R(X,\Gamma^*)$ является подграфом графа $G(X,\Gamma)$,включающим все вершины графа $G(X,\Gamma)$;

2) $\Gamma^* \subseteq \Gamma$;

3) граф $R(X,\Gamma^{*})$ является связным ациклическим графом – деревом;

4) для всех $(m,n=1,2,\ldots,N;i=1,2,..,K)$ - $r^{*}_{imn} \geq r^{**}_{imn}$.

Отметим, что данная задача существенно отличается от известной задачи построения минимального покрывающего дерева, поскольку здесь требуется минимизировать и суммарный вес вершин, который зависит от состава входящих в покрывающее дерево ребер.

Отметим, что получаемое решение может значительно отличаться от классического, когда веса вершин не учитываются.

Пример.

На рисунке 1 приведен пример исходного графа $G(X,\Gamma)$. В данном случае N=8, K=2.

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 50 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 100 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 100 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 20 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 70 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 60 \\ 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 50 & 50 & 60 & 30 & 30 & 50 & 30 \\ 40 & 30 & 20 & 40 & 50 & 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

На рисунке ребрах указаны принадлежность провайдеру и вес ребра.

Суммарный вес исходного графа равен

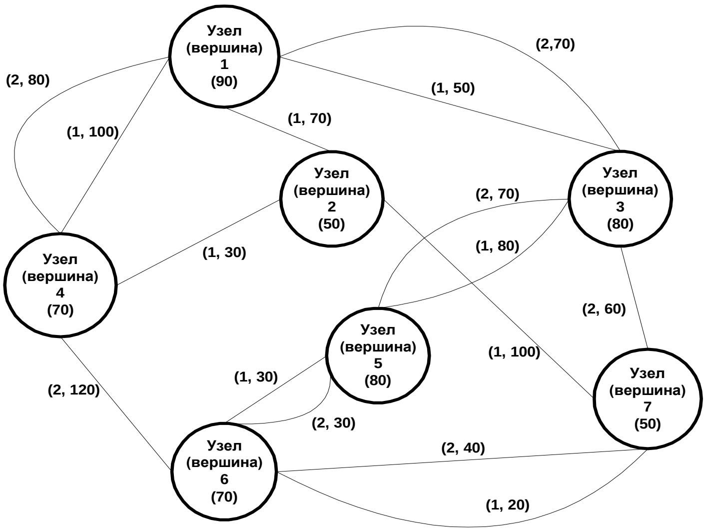

Рис. 1. Исходный граф

На рисунке 2 показан пример построения минимального покрывающего дерева для исходного графа при условии независимости весов вершин от подключаемых к ним каналов.

Заметим, что в этом случае минимальное покрывающее дерево строится при предварительном преобразовании исходного графа таким образом, чтобы любые две вершины связывало только одно ребро с минимальным весом, соответствующее самому дешевому каналу. Общий вес графа в этом случае равен $V(G(X,\Gamma^{*}))=680$.

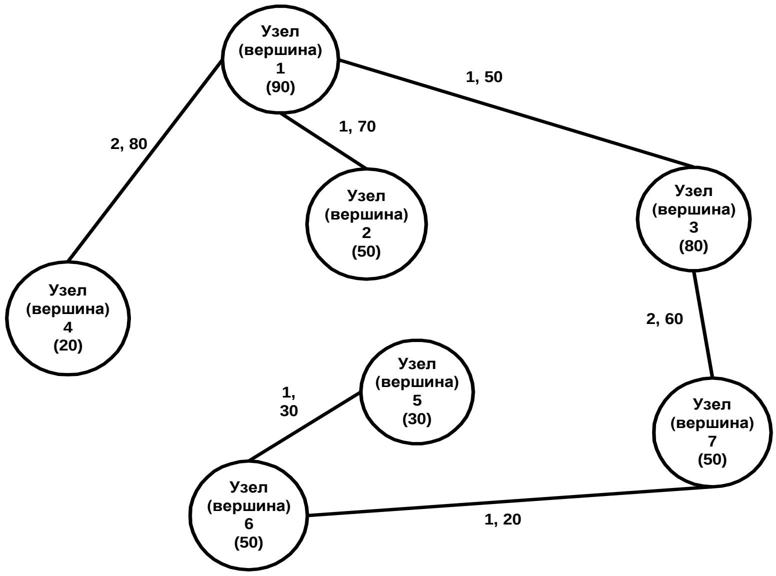

Рис. 2. Минимальное покрывающее дерево, построенное без учета весов вершин графа

На рисунке 3 приведен пример минимального покрывающего дерева, построенного с учетом весов вершин, зависящих от подключаемых соответствующим узлам каналов связи провайдеров. При построении использовался модифицированный алгоритм построения минимального покрывающего дерева, учитывающий вес ребер. Он отличается от известного [3], тем, что при построении дерева ребро выбирается с учетом весов связываемых им вершин. Общий вес графа в этом случае равен $V(G(X,\Gamma^{*}))=580$.

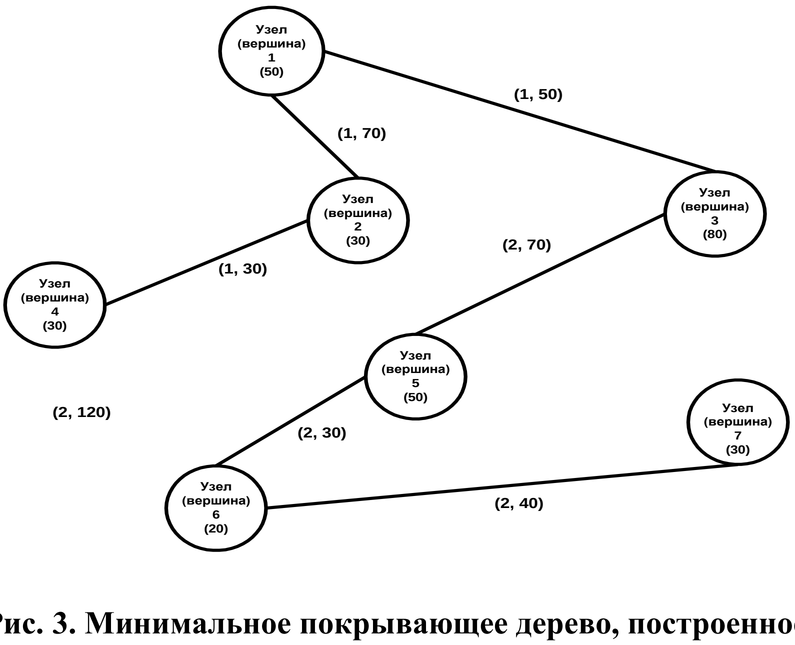

Рис. 3. Минимальное покрывающее дерево, построенное с учетом весов вершин графа

Выводы

Предложена постановка задачи и методы вычисления веса графа, когда имеется несколько провайдеров связи.

Показано, что при необходимости учета весов вершин, классические алгоритмы построения минимального покрывающего дерева не дают оптимального решения.

Литература

1. С.М. Бурков, В.А. Бертенев Постановка задачи формирования базовой сети регионального уровня // Журнал «Научно-технические ведомости СПбГТУ», № 4(82)/2009, изд-во Политехнического университета, СПб, 2009, с. 22–27.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 432с.
3. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 323 с.
4. Бурков С.М. Поэтапное формирование телекоммуникационной инфраструктуры региона в условиях ресурсных ограничений. // Качество. Инновации. Образование №5, 2009, с. 60-63.