

УДК 551.46

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК НАКАТА ДЛИННЫХ ВОЛН НА БЕРЕГ

© 2010 г. И. И. Диденкулова*, **, А. В. Сергеева*, Е. Н. Пелиновский*, С. Н. Гурбатов***

*Институт прикладной физики РАН
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: pelinovsky@gmail.com

**Институт кибернетики
12618 Эстония, Таллин, Академия ТЭЕ, 21
***Нижегородский государственный университет
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: gurb@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 16.06.2009 г., после доработки 21.01.2010 г.

Ключевые слова: накат волн на берег, нелинейная теория мелкой воды, случайное волновое поле.

Накат нерегулярных длинных морских волн на берег постоянного уклона изучается в рамках нелинейной теории мелкой воды. Эта задача решалась ранее для детерминистских волн, как периодических, так и импульсных, с помощью подхода, основанного на преобразовании Лежандра. В рамках этого подхода удается получить точное решение для смещения подвижного уреза и в случае наката нерегулярных волн. Оно используется для нахождения статистических моментов характеристик наката. Показано, что нелинейность в накатывающейся волне не влияет на моменты скорости движения уреза, но сказывается на моментах смещения подвижного уреза. В частности, случайность волнового поля ведет к повышению среднего уровня воды на берегу и к уменьшению дисперсии. Асимметрия, вычисляемая через третий момент, является положительной и растет с увеличением амплитуды. Экссесс, вычисляемый через четвертый момент, оказывается положительным при малых амплитудах и отрицательным при больших. Все это свидетельствует о преимуществе наката волн на берег по сравнению с откатом, по крайней мере, для волн небольшой амплитуды, даже если падающая волна представляла собой Гауссов стационарный процесс с нулевым средним. Вычислена вероятность обрушения волн при накате и обсуждаются пределы применимости полученных формул.

Расчеты наката морских волн на берег необходимы для оценки зоны затопления побережья и воздействия на портовые и береговые сооружения. Особенно разрушительными оказываются длинные волны (цунами, штормовые нагоны), проникающие далеко на побережье. Обзор аналитических и численных решений, описывающих характери-

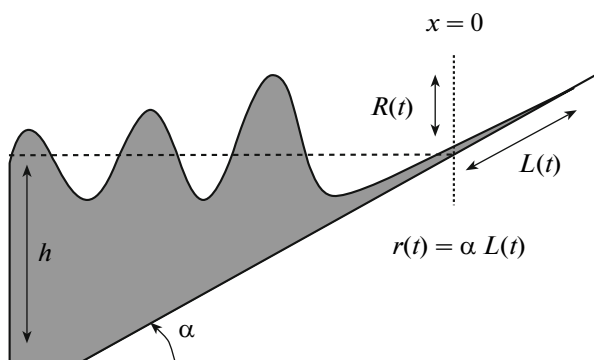
ки процесса наката, представлен в книгах [1–3]. Во всех рассмотренных случаях падающая волна представляла собой одиночную волну или строго периодическую волну, т.е. являлась детерминированной. Между тем реальные записи длинных волн и в естественных условиях, и во время цунами и штормов свидетельствуют о сложной структуре колебаний уровня моря [4–6]. Поэтому в задачах наката волн на берег приходится иметь дело с нерегулярным волнением.

Для описания процесса наката длинных волн на берег основной моделью является нелинейная теория мелкой воды. При этом строгое аналитическое решение находится только в случае берегового оттока постоянного уклона, и именно этот случай и рассматривается ниже. Наиболее важным представляется изучение динамики подвижного уреза, определяющей характер воздействия морских волн на побережье. В рамках данной теории (см., например, [1, 7]) характеристики подвижного уреза: его вертикальное смещение $r(t)$ и горизонтальная скорость $u(t)$, — определяются с помощью Римановой трансформации времени

$$u(t) = U\left(t + \frac{u}{\alpha g}\right), \quad r(t) = R\left(t + \frac{u}{\alpha g}\right) - \frac{u^2}{2g}, \quad (1)$$

решений эквивалентной линейной задачи, где $R(t)$ — вертикальное смещение уровня воды на “невозмущенном” урезе ($x = 0$), $U(t) = (\alpha)^{-1}(dR/dt)$ — горизонтальная скорость воды в точке $x = 0$, g — ускорение свободного падения, α — тангенс уклона берегового оттока (рисунок).

Эти же формулы остаются справедливыми и в случае наката нерегулярных длинных волн на берег. Для простоты будем рассматривать функции $R(t)$ и $U(t)$ как случайные стационарные процессы с Гаус-



Геометрия задачи

совой статистикой. Как видно из формул (1), распределения экстремумов подвижного уреза в нелинейной теории остаются такими же, как и в линейной теории. В частности, для узкополосного спектра амплитуда (высота) колебаний описывается распределением Релея [7].

Проблемы статистического усреднения уравнений (1), (2) связаны с тем, что поле скорости $u(t)$ связано с известной функцией $U(t)$ неявным образом, где характеристика береговой зоны (α — тангенс уклона берегового откоса) входит как параметр, причем само преобразование (1) эквивалентно неявному решению уравнения Римана [8]. Точные статистические результаты для поля скорости были получены в середине семидесятых прошлого столетия (см., например, [8, 9] и цитируемую в них литературу). Если для поля скорости Римановой волны одноточечное вероятностное распределение сохраняется, то для интеграла от поля скорости (наката $r(t)$) это уже несправедливо.

Ниже мы вычислим статистические характеристики скорости и вертикального смещения подвижного уреза в рамках нелинейной задачи, используя предположение об эргодичности процесса, когда статистическое усреднение по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по достаточно большому временному интервалу T , считая, что случайный процесс является стационарным. В частности, моменты скорости наката есть

$$\langle u^n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u^n(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U^n \left(t + \frac{u}{\alpha g} \right) dt, \quad (2)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

В интеграле (2) удобно перейти к новой переменной

$$\tau = t + \frac{u(t)}{\alpha g}, \quad dt = \frac{d\tau}{\left[1 + \frac{1}{\alpha g} \frac{du}{dt} \right]}. \quad (3)$$

Эта замена переменных фактически является переходом от Эйлеровой переменной t к Лагранжевой τ и использовалась ранее при вычислении Фурье-обра-

зов и статистических характеристик Римановых шумовых волн в нелинейной акустике [8]. Входящая сюда производная du/dt вычисляется из (1), так что интеграл (2) становится явным

$$\langle u^n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U^n(\tau) \left[1 - \frac{1}{g\alpha} \frac{dU}{d\tau} \right] d\tau. \quad (4)$$

Очевидно, что для стационарных случайных процессов вклад второго слагаемого исчезает и

$$\langle u^n \rangle = \langle U^n \rangle. \quad (5)$$

Итак, все статистические моменты скорости подвижного уреза не меняются из-за нелинейности, и, следовательно, одноточечное вероятностное распределение сохраняется. В частности, если падающая волна представляет собой нормальный (Гауссов) процесс, то скорость подвижного уреза, как уже отмечалось ранее, также описывается Гауссовым распределением.

Аналогичные преобразования могут быть использованы и для вычисления статистических моментов вертикального смещения подвижного уреза в предположении, что $R(t)$ представляет собой Гауссов случайный процесс с нулевым средним. Так, первый момент имеет вид

$$\langle r \rangle = \frac{\langle U^2 \rangle}{2g} = \frac{\sigma_U^2}{2g}, \quad (6)$$

где σ всюду обозначает среднеквадратическое отклонение соответствующей величины. Таким образом, нелинейность волнового поля в зоне наката всегда приводит к подъему в среднем уровня воды на берегу (явление set-up). Природа этого явления часто связывается с обрушением морских волн [5], однако здесь мы показываем, что даже при подходе длинных необрушенных волн в среднем вода на берегу поднимается.

Аналогично находится второй момент и дисперсия колебаний уреза, а также асимметрия λ_3 и эксцесс λ_4

$$\langle r^2 \rangle = \langle R^2 \rangle - \frac{\langle U^2 \rangle^2}{4g^2} = \langle R^2 \rangle - \langle r \rangle^2, \quad (7)$$

$$\sigma_r^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \sigma_R^2 - 2\langle r \rangle^2, \quad (8)$$

$$\lambda_3 = \frac{8\langle r \rangle^3}{(\sigma_R^2 - 2\langle r \rangle^2)^{3/2}}, \quad \lambda_4 = \frac{\langle r \rangle^2 (4\sigma_R^2 - 23\langle r \rangle^2)}{(\sigma_R^2 - 2\langle r \rangle^2)^2}. \quad (9)$$

Таким образом, нелинейность волновых процессов в зоне наката уменьшает дисперсию вертикальных колебаний уровня воды на урезе. Отличие коэффициентов асимметрии и эксцесса от нуля свидетельствует о негауссовости вертикальных колебаний подвижного уреза при накате нерегулярных волн.

В случае наката нерегулярных волн с узким спектром дисперсии вертикального смещения и горизонтальной скорости связаны между собой соотношением $\sigma_U = \omega_0 \sigma_R / \alpha$, где ω_0 – центральная частота спектра падающей волны. В результате, коэффициенты асимметрии и эксцесса выражаются через единственный безразмерный параметр, хорошо известный в теории наката детерминистских волн как параметр обрушения B_σ [1, 7, 10]

$$\lambda_3 = \frac{B_\sigma^3}{\left(1 - \frac{1}{2} B_\sigma^2\right)^{3/2}}, \quad \lambda_4 = \frac{B_\sigma^2 (16 - 23 B_\sigma^2)}{16 \left(1 - \frac{1}{2} B_\sigma^2\right)^2}, \quad (10)$$

$$B_\sigma = \frac{\omega_0^2 \sigma_R}{g \alpha^2}.$$

Коэффициент асимметрии всюду положителен и монотонно растет с ростом параметра B_σ . Эксцесс принимает положительные значения, не превышающие 0.3, при $B_\sigma < 0.6$ и убывает при $B_\sigma > 0.6$.

Следует отметить, что полученные решения справедливы только для необрушенных волн. Формулы (1) при достаточно больших амплитудах начального возмущения формально описывают многозначные решения, что физически соответствует обрушению волн. Поскольку в поле нерегулярных волн всегда присутствуют волны большой амплитуды, то полученные выше формулы должны быть несправедливы при больших значениях параметра B_σ . Одно из ограничений следует уже из приведенных выше формул, в частности, дисперсия вертикальных смещений обращается в ноль при $B_\sigma = \sqrt{2}$, что не имеет физической интерпретации. Более точно условия применимости можно получить, оценивая вероятность обрушения волн, в частности, когда случайный процесс dU/dt достигает уровня $g\alpha$. Тогда доля участков в записи, где $dU/dt > g\alpha$ (назовем эту величину вероятностью обрушения), определяется интегралом от гауссовой функции

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/B_\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi. \quad (11)$$

Из (11) следует, что вероятность обрушения растет с ростом параметра B_σ и стремится к предельному значению 0.5 (только волны с положительными значениями dU/dt могут потенциально обрушиваться). Важно подчеркнуть, что в диапазоне $B_\sigma < 0.6$ вероятность обрушения очень мала и не превышает 3%, так что эффектами обрушения при расчетах статистических моментов можно пренебречь.

Таким образом, мы показали, что вертикальные колебания подвижного уреза при накате нерегулярных длинных волн на берег не описываются Гауссовой статистикой. Асимметрия и эксцесс положи-

тельны при $B_\sigma < 0.5$, что обычно интерпретируется как увеличение вероятности появления больших волн «положительной» полярности или гребней. Эти соображения активно используются для интерпретации частоты появления волн-убийц в поле ветровых волн при его моделировании [7, 11], экстремумы характеристик наката (максимальная высота наката и глубина отката волн) совпадают в линейной и нелинейной теориях. Следовательно, высокие «положительные» волны (что означает повышение уровня воды на берегу) не будут появляться чаще, чем «отрицательные» волны. Это означает, что положительность коэффициентов асимметрии и эксцесса необходимо интерпретировать как увеличение продолжительности (во времени) стадии наката волн на берег по сравнению с продолжительностью стадии отката волны от берега. К тому же, как следует из (6), средний уровень моря также повышается при накате нерегулярных волн, что дает дополнительные аргументы в пользу увеличения продолжительности затопления побережья по сравнению со временем его осушения.

Наблюдения наката длинных волн естественного происхождения (в диапазоне периодов 10 с–20 мин) на берег проводятся давно [5, 6]. Во всех работах отмечается повышение в среднем уровня моря на берегу, как это следует из развиваемой здесь теории. Что же касается вероятностных свойств наката, то нам известна только одна работа [6], где говорится, что смещение уреза воды не описывается Гауссовой статистикой. Измеренная асимметрия равнялась 0.2, а эксцесс оказался отрицательным – 0.6. При этом говорится, что доля обрушенных волн в наблюдениях довольно высока. Как вытекает из нашей теории, асимметрия всегда положительна, а эксцесс может быть отрицательным при больших значениях параметра обрушения, что согласуется с наблюдаемыми данными.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (08-05-00069, 08-05-91850, 08-02-00631), европейским проектом “Extreme Seas”, ЕЕА грантом EMP41.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеоздат. 1989. 271 с.
2. *Yeh H., Liu P.L.-F., Synolakis C.* Long-Wave Runup. Singapore: World Sci., 1996. 403 p.
3. *Liu Ph.L.-F., Yeh H., Synolakis C.* Advanced numerical models for simulating tsunami waves and runup. Singapore: World Sci., 2008. 344 p.
4. *Левин Б.В., Носов М.А.* Физика цунами. М.: Янус-К, 2005. 360 с.
5. *Dean R.G., Walton T.L.* Wave setup // Handbook of coastal and ocean engineering. Ed. Y.C. Kim. Singapore: World Sci., 2009. P. 1–23.

6. *Huntley D.A., Guza R.T., Bowen A.J.* A universal form for shoreline run-up spectra // *J. Geophys. Research.* 1977. V. 82. № 18. P. 2577–2581.
7. *Didenkulova I., Pelinovsky E., Soomere T.* Run-up characteristics of tsunami waves of “unknown” shapes // *PAGEOPH.* 2008. V. 165. № 11/12. P. 2249–2264.
8. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. Сер. Совр. пробл. физ. М.: Наука, 1990. 216 с.
9. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
10. *Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н.* Накат длинных волн на берег: влияние формы подходящей волны // *Океанология.* 2008. Т. 48. № 1. С. 5–10.
11. *Kharif Ch., Pelinovsky E., Slunyaev A.* Rogue Waves in the Ocean. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 216 p.