

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Один из способов решить проблему повышения эффективности обучения математике в высшей и средней школе – воспользоваться современными информационными технологиями. К последним относятся интегрированные математические системы (“Математика”, “Мэйпл”, “Маткад”, “Матлаб” и др.), позволяющие проводить символьные, численные и графические расчеты на компьютере в одном сеансе работы с системой.

Влияние математических систем на содержание и методику преподавания математики осуществляется по нескольким, на первый взгляд взаимоисключающим направлениям. Системы позволяют более подробно и обстоятельно обсуждать основополагающие понятия и принципы дисциплины нежели это возможно при традиционных технологиях преподавания и в то же время наполнить ее задачами и примерами, имеющими непосредственное прикладное значение.

Изложение дисциплины приобретает большую логическую стройность и одновременно наглядность за счет использования компьютерной графики.

Электронные рабочие документы систем могут содержать текстовый и графический материал, перемежаемый выполняемыми на компьютере командами. Поскольку электронные документы легко редактировать, на их основе без труда создаются интерактивные учебные пособия по математическим и смежным дисциплинам.

Опыт показывает, что студенты быстро оценивают преимущества работы с математическими системами и активно используют их для выполнения расчетов в курсовых и лабораторных работах по естественно-научным, экономическим и техническим дисциплинам.

Разработка методик обучения математическим дисциплинам на основе информационных технологий представляется перспективной также и потому, что последние органично сопрягаются с Интернетом (системы *MatLab on Line* и *WebMathematica*), открывая возможность удаленного доступа к интерактивным обучающим материалам.

Интерактивные учебные пособия могут использоваться как на лекциях, так и на практических занятиях, принимающих форму компьютерного практикума. Лектор получает в свое распоряжение мощное средство визуализации и проведения символьных и численных расчетов, существенно изменяющее и содержание, и форму, и эстетику чтения лекций. Компьютерный практикум теряет традиционный характер обучения численным расчетам и позволяет студентам решать самые разнообразные математические задачи.

Данная книга содержит описание занятий, которые проводятся в компью-

терных классах Московского государственного института электроники и математики начиная с 1998/99 учебного года и по настоящее время. Теоретический материал лежит в основе курсов лекций, читавшихся автором в различное время в Московском государственном университете экономики, статистики и информатики (МЭСИ) и Государственном университете - Высшая школа экономики (ГУ-ВШЭ).

Поскольку основной целью автора является описание компьютерного практикума, необходимый теоретический материал излагается в книге без доказательств, хотя и с мотивировками введения того или иного математического объекта. Отметим, что в практикуме используются электронные интерактивные учебные пособия, разработанные автором и содержащие теоретический материал (в минимальном объеме), задания и компьютерные программы для системы "Математика".

Последние не включены в текст книги, так как, во-первых, автор не хотел бы выделять какую-либо конкретную интегрированную математическую систему (все они, по большому счету, эквивалентны), и, во-вторых, разработка таких программ доступна любому квалифицированному пользователю конкретной системы на основе подробного описания работы программ имеющемуся в книге.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность директору Центра современных информационных технологий и математического образования МИЭМ Г.П. Путилову, декану факультета информационных технологий МИЭМ Е.Д. Пожидаеву, заведующему кафедрой высшей математики МЭСИ В.А. Никишкину и своим коллегам Л.Н. Кечиеву, С.Р. Тумковскому, И.Н. Гердлеру за поддержку и помощь в работе.

## Часть 1

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## Раздел 1

### ЧИСЛА И ФУНКЦИИ

В математическом анализе изучаются функции одного или нескольких аргументов. Каждый аргумент принимает значения, являющиеся вещественными числами. Последние определяются с помощью более простых объектов: натуральных и рациональных чисел. С их рассмотрения мы и начинаем изложение.

## ГЛАВА 1. НАТУРАЛЬНЫЕ, ЦЕЛЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

### 1.1. Натуральные числа.

В отличие от геометрии, в которой наряду с евклидовой имеются также геометрические системы Лобачевского и Римана, в настоящее время существует только одна общепринятая теория натуральных чисел, являющаяся математической идеализацией процессов реального счета. В рассматриваемой теории принимается, что натуральные числа 1, 2 и т.д., сколь бы велики они ни были, обладают следующим свойством. Для каждого натурального числа  $k$  существует единственное *следующее* за ним натуральное число  $k + 1$ . Оно считается большим предшествующего числа.

Располагая натуральные числа последовательно одно за другим в порядке их следования, или, что то же самое, в порядке возрастания их величины, получаем бесконечный упорядоченный набор чисел

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n + 1, \dots \quad (1.1)$$

называемый *натуральным числовым рядом*.

Числовой ряд (1.1) бесконечен. В нем нельзя указать самого большого числа. Процесс увеличения чисел идет непрерывно от  $n$  к  $n + 1$  и т.д.

Все основные объекты анализа: вещественное число, предел, непрерывность, производная, дифференциал, интеграл и т.п. – определяются, опираясь на (1.1).

Любые два натуральных числа можно сложить и перемножить, получая в результате снова натуральные числа. При вычитании натуральных чисел вычитаемое не может превосходить уменьшаемое.

Для натуральных чисел определена операция деления с остатком. Разделить число  $k$  на число  $m \neq 0$  с остатком означает найти два других натуральных числа  $q$  и  $r$  таких, что выполняются соотношения

$$k = q m + r, \quad 0 \leq r < m. \quad (1.2)$$

Число  $q$  называется частным, а число  $r$  остатком. Если остаток равен 0, то деление производится *нацело*.

Пусть число  $m$  делит число  $k$  нацело, тогда  $m$  называется *делителем* числа  $k$ . Любое натуральное число  $k$  имеет по крайней мере два делителя: 1 и  $k$ . Если у числа  $k$  нет других делителей, кроме 1 и  $k$ , оно называется *простым*.

### 1.2. Целые числа.

Отрицательные целые числа были введены в математическую теорию значительно позже натуральных, так как они не возникают непосредственно в пересчете предметов. Своим появлением в математике отрицательные числа обязаны алгебре – науке об общих методах решения уравнений, связанных с арифметическими задачами.

Пополнение натуральных чисел отрицательными целыми числами делает совокупность  $Z$  целых чисел замкнутой относительно операций сложения, вычитания и умножения: для любых двух целых  $k$  и  $n$  их сумма  $k + n$ , разность  $k - n$  и произведение  $k n$  суть целые числа.

Для целых чисел, как и для натуральных, определена операция деления с остатком. Разделить целое число  $k$  на целое число  $m$  означает найти два целых числа  $q$  и  $r$  такие, что выполняются соотношения

$$k = q m + r, \quad 0 \leq |r| < |m|,$$

и, кроме того, делитель  $m$  и остаток  $r$  должны быть одного знака. Число  $q$  называется частным от деления  $k$  на  $m$ . Например,  $-8 = 2(-3) - 2$ , т.е. при делении числа  $-8$  на  $-3$  частное равно 2, а остаток равен  $-2$ .

### 1.3. Рациональные числа.

Дробями называются арифметические выражения вида  $\frac{p}{q}$ ,  $q \neq 0$ . Целое число  $p$  называется числителем, а целое число  $q$  – знаменателем дроби. Две дроби  $\frac{p}{q}$  и  $\frac{r}{s}$  называются *эквивалентными*, если выполняется равенство  $ps = qr$ . Например, дроби  $\frac{-4}{-6}$  и  $\frac{6}{9}$  эквивалентны, и обе они эквивалентны дроби  $\frac{2}{3}$ . Эквивалентные дроби называются также равными, но мы предпочитаем термин эквивалентные, так как впоследствии при введении вещественных чисел нам понадобится это более общее понятие.

Виду того, что дроби  $\frac{p}{-q}$  и  $\frac{-p}{q}$  эквивалентны, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением дробей с положительными ( $q > 0$ ) знаменателями.

Бесконечная совокупность эквивалентных друг другу дробей называется *классом эквивалентности*. Каждая дробь входит в один и только один класс эквивалентности.

**Определение.** Рациональное число есть класс эквивалентности дробей.

Любая дробь, содержащаяся в классе эквивалентности, называется *представителем класса*. Рациональное число обычно отождествляют с каким-либо представителем класса и обозначают с помощью выбранного представителя. Например, можно сказать: “рассмотрим рациональное число  $1/2$ ”. Как правило, представителем выбирают единственную несократимую дробь, содержащуюся в каждом классе.

Отождествление целых чисел  $p$  с дробями  $\frac{p}{1}$  позволяет рассматривать целые числа как рациональные.

#### 1.4. Арифметические действия с рациональными числами.

Для того, чтобы сложить два рациональных числа  $r_1$  и  $r_2$ , следует взять любую дробь  $p/q$  из класса  $r_1$  и любую дробь  $m/n$  из класса  $r_2$  и сложить их. Полученная в результате дробь принадлежит некоторому классу эквивалентности дробей  $r_3$ . Этот класс есть рациональное число, которое называется суммой рациональных чисел  $r_1$  и  $r_2$ , т.е.  $r_3 = r_1 + r_2$ .

Аналогично производятся остальные арифметические действия с рациональными числами.

Результаты арифметических операций с рациональными числами не зависят от того, как выбраны представители классов.

#### 1.5. Сравнение рациональных чисел по величине.

Дроби  $p/q$  и  $r/s$  сравниваются по величине приведением их к общему знаменателю. Из двух дробей с одинаковым положительным знаменателем больше та, у которой больше числитель.

Для того, чтобы сравнить два рациональных числа  $r_1$  и  $r_2$ , сравнивают по величине представители этих чисел. Результат сравнения не зависит от выбора представителей.

#### 1.6. Числовая ось рациональных чисел.

Направленная прямая называется *осью*. Фиксируем на оси: точку  $O$  – начало отсчета и масштабный отрезок, считающийся отрезком единичной длины. Назовем совокупность этих объектов *оснащенной осью* и обозначим ее через  $S$ . На оси  $S$  отмечаются точками рациональные числа в соответствии с приведенными ниже правилами.

Число  $0$  отмечают в точке  $O$ . Чтобы отметить целое число  $r \neq 0$ , откладывают масштабный отрезок  $r$  раз вправо, если  $r > 0$ , или  $|r|$  раз влево, если  $r < 0$ , от точки  $O$ . Число  $r$  отмечается точкой на том конце полученного отрезка, который не совпадает с  $O$ .

Пусть рациональное число  $r$  таково, что единственная несократимая дробь  $p/q$ , принадлежащая классу  $r$ , имеет не равный единице знаменатель  $q$ . Тогда, чтобы отметить рациональное число  $r$ , делят масштабный отрезок на  $q$  равных частей известным в евклидовой геометрии построением и  $q$ -ю часть откладывают  $|p|$  раз вправо ( $r > 0$ ) или влево ( $r < 0$ ) от точки  $O$ . Таким образом, все рациональные числа могут быть отмечены точками на рассматриваемой оси.

Будем называть точки, расположенные на оси  $S$  и являющиеся отметками рациональных чисел, *рациональными точками*. Обозначим через  $P_r$  отметку числа  $r$ .

**Определение.** Множество рациональных точек называется рациональной числовой осью.

На любой оси определены операции сложения и вычитания направленных отрезков. Поскольку вычитание есть сложение с противоположно направленным отрезком, ограничимся обсуждением сложения. Для получения суммы отрезков один из складываемых отрезков своим началом прикладывается к концу другого отрезка. Полученный составной отрезок называется суммой отрезков. Обозначим сумму отрезков  $AB$  и  $CD$  через  $AB \oplus CD$ .

В геометрии считается, что из двух положительно (отрицательно) направленных отрезков больше (меньше) тот, который содержит другой. Любой положительно направленный отрезок больше любого отрицательно направленного. Соответственно, из двух рациональных точек  $P_r, P_q$  больше та, которая расположена правее на числовой оси. Результат рассмотренных построений можно подытожить в виде теоремы.

**Теорема о взаимно однозначном соответствии множества рациональных чисел и рациональной числовой оси.** Между множеством рациональных чисел и рациональной числовой осью существует взаимно однозначное соответствие, такое что

- 1) сумме  $r + q$  рациональных чисел соответствует рациональная точка, расположенная на конце отрезка  $OP_r \oplus OP_q$ ,
- 2) если  $r > q$ , то точка  $P_r$  расположена правее точки  $P_q$ ,
- 3) длина отрезка  $[P_r, P_q]$  равна  $|q - r|$ .

Теорема позволяет пользоваться геометрическими понятиями при обсуждении некоторых вопросов, связанных с рациональными числами.

### 1.7. Рациональная координатная плоскость.

Рассмотрим евклидову плоскость, на которой фиксированы две взаимно перпендикулярные оснащенные оси:  $OX$  и  $OY$ . Точка  $O$  есть их общая точка. Первая ось называется осью абсцисс, а вторая осью ординат.

Наличие осей позволяет отмечать на плоскости точками упорядоченные пары  $(r, q)$  рациональных чисел. Для этого отметим на оси  $OX$  точкой  $P_r$  число  $r$ , а на оси  $OY$  точкой  $P_q$  число  $q$ . Проведем через точку  $P_r$  прямую, параллельную оси  $OY$ , а через точку  $P_q$  – прямую, параллельную оси  $OX$ . Их пересечение определяет на евклидовой плоскости единственную точку  $A$ . Числа  $r$  и  $q$  называются декартовыми координатами точки  $A$ : число  $r$  есть абсцисса, а  $q$  – ордината.

Точки на евклидовой плоскости, являющиеся отметками упорядоченных пар  $(r, q)$  рациональных чисел, образуют в совокупности рациональную координатную плоскость.

## ГЛАВА 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Изучение свойств последовательностей рациональных чисел – необходимый шаг для построения теории вещественных чисел.

### 2.1. Рациональные последовательности.

Если в натуральном числовом ряде (1.1) заменить первое число 1 на число 2, затем 2 на 4, 3 на 6 и т.д., то в результате получатся последовательно расположенные в порядке возрастания натуральные четные числа

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots \quad (2.1)$$

Заменим теперь в (1.1) число 2 на обратное к нему число  $1/2$ , число 3 на  $1/3$  и т.д. Приходим к последовательно расположенным, но уже в порядке убывания рациональным числам

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (2.2)$$

Числа, подставляемые на место чисел натурального ряда, не обязательно располагаются в порядке возрастания или убывания их величины. Например, если заменить в натуральном ряде (1.1) числа остатками от их деления на 3, которые мы обозначим через  $\text{mod}(n, 3)$ , то получится в последовательность

$$1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots, \text{mod}(n, 3), \dots \quad (2.3)$$

В ней за большим элементом 2 следует меньший элемент 0, за которым следует больший элемент 1 и т.д.

Наши действия можно описать, сказав, что в натуральном ряде (1.1) числа заменяются другими числами: число 1 заменяется каким-то числом  $a_1$ , число 2 – числом  $a_2$  и т.д. В результате вместо натурального ряда получается бесконечная последовательность рациональных чисел вида

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (2.4)$$

**Определение.** Если в натуральном ряде (1.1) заменить натуральные числа другими целыми или рациональными числами в соответствии с каким-либо правилом, то получится рациональная числовая последовательность.

Числа  $a_k$  в (2.4) называются *элементами* последовательности, а число  $k$  натурального ряда, которое заменяется числом  $a_k$ , называется *номером* элемента последовательности. Последовательность (2.4) мы будем обозначать через  $\{a_n\}$ .

Одними из наиболее известных последовательностей являются бесконечные арифметическая и геометрическая прогрессии. Их члены определяются соотношениями  $a_n = a_{n-1} + d$  для арифметической и  $b_n = b_{n-1}q$  для геометрической прогрессии, где  $d$  и  $q$  разность и знаменатель прогрессий соответственно.

Рассматриваемые соотношения задают члены прогрессий *рекуррентно*. Это означает, что для того, чтобы вычислить  $n$ -ый член прогрессии, необходимо вычислить все предшествующие при условии, что первые члены прогрессий  $a_1$  и  $b_1$  заданы. Впрочем, рассматриваемые соотношения имеют явные решения:  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  и  $b_n = b_1q^{n-1}$ .

## 2.2. Способы задания последовательностей.

Обсудим наиболее употребительные способы задания последовательностей.

*Первый способ* : задание элементов последовательности явной формулой. Например,  $a_n = n^3 + 1/n$ . Явными формулами заданы последовательности (2.1), (2.2), (2.3).

*Второй способ* : задание последовательности рекуррентными соотношениями. Так определяются арифметическая и геометрическая прогрессии.

Еще один пример: последовательность  $\{fib_n\}$  чисел Фибоначчи:

$$fib_n = fib_{n-1} + fib_{n-2}, \quad fib_1 = 1, \quad fib_2 = 1.$$

Здесь, в отличие от арифметической и геометрической прогрессий  $n$ -й член последовательности определяется с помощью двух предшествующих. Приведем несколько первых членов последовательности Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

*Третий способ* : просматривать элементы заданной последовательности  $\{a_n\}$  в порядке возрастания их номеров, извлекать из последовательности элементы в соответствии с каким-либо правилом и помещать извлеченные элементы в новую последовательность. Например, можно извлекать элементы в зависимости от того, обладают ли они некоторым дополнительным свойством, которое не присуще всем элементам исходной последовательности.

**Определение.** Последовательность  $\{b_n\}$  называется подпоследовательностью последовательности  $\{a_n\}$ , если каждый элемент  $b_k$  совпадает с каким-то элементом  $a_{n(k)}$  исходной последовательности, причем номер  $n(k)$  строго меньше номера  $n(k + 1)$ .

Ясно, что последовательность (2.1) является подпоследовательностью числового ряда (1.1), а последовательности (2.2) и (2.3) нет.

Для того чтобы привести новый пример подпоследовательности, напомним, что простым числом называется натуральное число отличное от 0 и 1, которое делится нацело только на 1 и самого себя. Определим последовательность  $\{p_n\}$  как подпоследовательность натурального ряда, состоящую из простых чисел. Приведем несколько первых членов рассматриваемой последовательности.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$$



В настоящее время не известна формула, по которой можно было бы вычислить элемент  $p_k$  последовательности простых чисел, хотя очевиден простой алгоритм его вычисления. А именно, следует перебирать числа натурального ряда и последовательно вычеркивать из него числа, обладающие тремя и более делителями.

В заключение заметим, что одна и та же последовательность может быть определена несколькими различными способами.

### 2.3. Графики последовательностей.

Элементы любой последовательности  $\{a_n\}$  можно отмечать точками рациональной координатной плоскости. Для этого элементу  $a_k$  последовательности сопоставляем упорядоченную пару рациональных чисел  $(k, a_k)$ , которую отмечаем точкой на евклидовой плоскости способом, описанным в параграфе 1.7 предыдущей главы. Множество отметок элементов последовательности называется *графиком последовательности*. Примеры графиков последовательностей будут приведены в следующем параграфе.

### 2.4. Свойства числовых последовательностей.

Познакомимся с некоторыми математическими свойствами последовательностей.

**Определение монотонных последовательностей.** *Последовательность  $\{a_n\}$  называется монотонной, если для любой пары чисел  $m$  и  $k$  таких, что  $m < k$ , выполняется одно из неравенств:*

$$\begin{aligned} a_m < a_k & \quad \text{монотонно возрастающая последовательность,} \\ a_m \leq a_k & \quad \text{неубывающая последовательность,} \\ a_m \geq a_k & \quad \text{невозрастающая последовательность.} \\ a_m > a_k & \quad \text{монотонно убывающая последовательность.} \end{aligned}$$

Проиллюстрируем данное определение примерами.

Последовательность  $\{a_n\} = \{n^2\}$  монотонно возрастающая. Действительно, справедливо тождество  $k^2 - m^2 = (k - m)(k + m)$ . Из него следует, что при  $0 < m < k$  оба сомножителя в правой части тождества положительны, следовательно,  $k^2 > m^2$ . Рисунок Рис. 1.2.1, на котором представлен график последовательности  $\{n^2\}$ , иллюстрирует свойство ее монотонности.

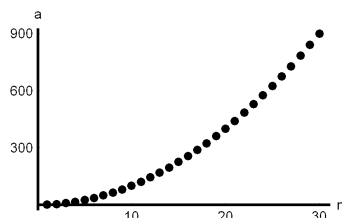
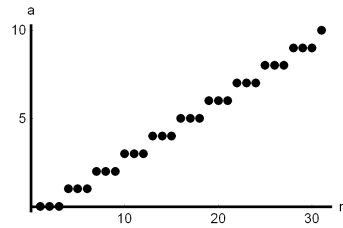


Рис.1.2.1



Последовательность  $\{b_n\} = \{\text{quotient}(n, 3)\}$  частных от деления натурального числа  $n$  на 3 (Рис. 1.2.2) является неубывающей.

Рис.1.2.2

Последовательность  $\{c_n\} = \{1/(1 + b_n)\}$  невозрастающая (Рис. 1.2.3),

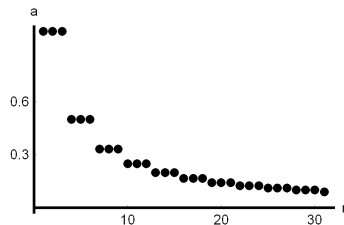


Рис.1.2.3

а последовательность  $\{d_n\} = \{1/n\}$  монотонно убывающая (Рис. 1.2.4).

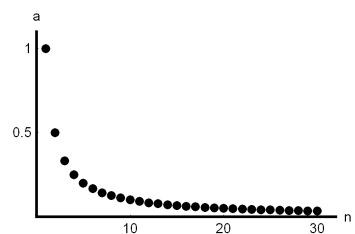


Рис.1.2.4

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется ограниченной, если существует такое натуральное число  $K$ , что для всех натуральных  $n$  выполнено неравенство  $|a_n| < K$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  называется неограниченной, если, какое бы натуральное число  $K$  мы ни выбрали, найдется хотя бы один элемент  $a_m$  последовательности такой, что  $|a_m| > K$ .

Последовательности  $\{n^2\}$  и  $\{\text{quotient}(n, 3)\}$  неограниченны, а последовательности  $\{1/(1 + \text{quotient}(n, 3))\}$  и  $\{1/n\}$  ограничены.

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется бесконечно большой, если какое бы натуральное число  $K$  мы ни взяли, найдется натуральное число  $N(K)$  такое, что для всех  $n > N(K)$  выполняется неравенство  $|a_n| > K$ .

Принимая во внимание последнее определение, можно утверждать, что арифметическая прогрессия с разностью  $d \neq 0$  и геометрическая прогрессия со знаменателем  $q$  таким, что  $|q| > 1$ , и отличным от 0 первым членом являются бесконечно большими последовательностями натуральных чисел.

## 2.5. Арифметические операции над последовательностями.

Пусть  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  две рациональные последовательности. Над элементами этих последовательностей можно производить различные арифметические операции. Рассмотрим, например, последовательность, элементами которой являются суммы  $a_n + b_n$  элементов последовательностей  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  с одинаковыми номерами. Она обозначается через  $\{a_n + b_n\}$  и называется *суммой* последовательностей  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ . Точно так же можно рассмотреть последовательности  $\{a_n - b_n\}$  и  $\{a_n b_n\}$  – *разность* и *произведение* последовательностей.

Если все члены последовательности  $\{b_n\}$  отличны от нуля, то можно рассмотреть и *частное*  $\{a_n/b_n\}$  последовательностей.

## 2.6. Бесконечно малые последовательности.

Рассмотрим последовательность  $\{\varepsilon_n\}$ , где

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n}. \quad (2.5)$$

Каждый элемент последовательности (2.5) положителен. Последовательность (2.5) монотонно убывающая.

Более того, она обладает следующим важным свойством: для любого рационального числа  $r > 0$  неравенства

$$0 < \varepsilon_k < r \quad (2.6)$$

выполняются при всех  $k > 1/r$ .

Иными словами, *какое бы положительное рациональное число  $r$  мы ни взяли, все элементы последовательности (2.5) с номерами  $k$  большими, чем  $1/r$ , становятся меньшими, чем  $r$* . Это свойство последовательности (2.5) характеризуют тем, что называют ее *бесконечно малой*.

**Определение.** Последовательность (2.5) называется *эталонной бесконечно малой последовательностью*.

Каждый следующий член последовательности  $\{\varepsilon_n\}$  расположен на более близком расстоянии от 0, чем предшествующий, но, тем не менее, это расстояние ни для одного члена последовательности не равно 0. Такое положение вещей хорошо передается словами: последовательность  $\varepsilon_n$  “стремится” к 0.

**Определение.** Последовательность рациональных чисел  $\{r_n\}$  называется *бесконечно малой*, если какой бы элемент  $\varepsilon_m$  эталонной последовательности

(2.5) мы ни взяли все элементы последовательности  $\{r_n\}$  начиная с некоторого, зависящего от  $\varepsilon_m$  номера  $N(m)$  по абсолютной величине становятся меньше  $\varepsilon_m$ :

$$|r_k| < \varepsilon_m \quad \text{для всех } k > N(m). \quad (2.7)$$

Рассмотрим, например, последовательность  $\{r_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n \operatorname{mod}(n,3)}{n} \right\}$  и докажем, что она бесконечно малая. График последовательности представлен на Рис.1.2.5. Элементы последовательности изображены на нем точками. Сплошная линия - вспомогательная. Она позволяет легче ориентироваться в порядке следования точек графика.

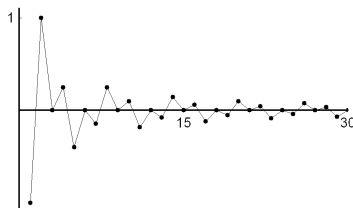


Рис.1.2.5

Рассмотрим элемент  $\varepsilon_m = 1/m$  эталонной бесконечно малой последовательности (2.5), тогда неравенство (2.7) примет вид

$$\frac{\operatorname{mod}(k,3)}{k} < \frac{1}{m}.$$

Оно, очевидно, выполняется для всех  $k > 2m$ , так как  $|\operatorname{mod}(k,3)| < 2$ . Следовательно,  $N(m) = 2m$ . Таким образом, доказано, что  $(-1)^n \operatorname{mod}(n,3)/n$  бесконечно малая последовательность.

В отличие от эталонной бесконечно малой последовательности, которая монотонно стремилась к нулю, сходимость данной последовательности имеет колеблющийся характер. Члены последовательности то больше, то меньше нуля в зависимости от четности или нечетности номера члена последовательности.

**Теорема о сумме, разности и произведении бесконечно малых последовательностей.** Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей являются также бесконечно малыми последовательностями.

**Теорема о последовательности, обратной к бесконечно малой.** Последовательность  $\{1/r_n\}$ , все члены которой являются обратными к элементам  $r_n$  бесконечно малой последовательности  $\{r_n\}$ , есть бесконечно большая последовательность.

## 2.7. Сходящиеся рациональные последовательности.

Бесконечно малые последовательности являются частным случаем сходящихся последовательностей. В принятом нами подходе сходящиеся последовательности определяются с помощью бесконечно малых.

**Определение.** Рациональное число  $a$  называется пределом последовательности  $\{r_n\}$ , если последовательность  $\{a - r_n\}$  бесконечно мала.

Последовательности, имеющие предел, называются *сходящимися последовательностями*.

Тот факт, что последовательность  $\{r_n\}$  сходящаяся и имеет пределом число  $a$  записывают в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a, \quad \text{или} \quad r_n \rightarrow a.$$

В следующем параграфе мы рассмотрим важный пример сходящейся последовательности рациональных чисел.

## 2.8. Геометрическая прогрессия.

Рассмотрим геометрическую прогрессию  $\{a_n\} = \{q^n\}$  со знаменателем  $q$ , являющимся положительным рациональным числом, меньшим единицы. Докажем, что  $\{a_n\}$  бесконечно мала последовательность, а последовательность ее сумм  $\{S_n\}$ :

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

сходится к пределу

$$S = \frac{1}{1 - q},$$

что символически записывается в виде

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1 - q}. \quad (2.8)$$

Доказательство того, что  $\{q^n\}$  бесконечно мала последовательность, опирается на следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма (неравенство Бернулли).** Пусть  $r > 0$  рациональное число,  $n$  натуральное число, тогда выполняется неравенство

$$(1 + r)^n \geq 1 + n r. \quad (2.9)$$

Число  $1/q > 1$  можно представить в виде  $1 + r$ ,  $r > 0$ . В силу неравенства Бернулли справедливо соотношение:

$$\frac{1}{q^n} = (1 + r)^n \geq 1 + n r,$$

из которого следует

$$q^n < \frac{1}{1 + n r} < \frac{1}{n r} = \frac{1}{r} \frac{1}{n}.$$

Поскольку  $\{1/n\}$  бесконечно мала последовательность, то, очевидно, и  $\{a/n\}$  бесконечно мала последовательность для любого рационального числа  $a$ . Таким образом,  $\{q^n\}$  бесконечно мала последовательность.

Рассмотрим последовательность  $\{S_n\}$  сумм первых  $n$  элементов геометрической прогрессии и докажем, что последовательность  $\{S_n\}$  сходится к пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

Рассмотрим разность

$$S - S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Так как  $\{q^n\}$  бесконечно малая последовательность, то  $\{S - S_n\}$  также бесконечно малая последовательность.

## 2.9. Рациональные числа и десятичные дроби.

Рассмотрим рациональное число  $r = p/q$  такое, что  $p < q$  и знаменатель  $q$  которой может быть представлен в виде  $q = 2^k 5^l$ . Полагая  $n = \max(k, l)$  и домножая числитель и знаменатель  $r$  на  $2^{n-k}$  или на  $5^{n-l}$  в зависимости от того, равно ли  $n$  числу  $l$  или числу  $k$ , приходим к дроби  $r_1$ , знаменатель которой равен  $10^n$ . Дробь  $r_1$  записывается в виде конечной десятичной дроби  $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ . Например,

$$\frac{7}{50} = \frac{7}{2 \cdot 5^2} = \frac{7 \cdot 2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{14}{100} = 0,14.$$

К этому же результату мы приходим, прибегая к делению “уголком” числа 7 на 50. Процесс деления закончится при этом за два шага. Однако деление уголком числа 7 на 11 никогда не закончится, но в результате будет повторяться комбинация цифр 63:

$$\frac{7}{11} = 0,63636363636 \dots \quad (2.10)$$

Дробь (2.10) является примером бесконечных периодических дробей. Бесконечная геометрическая прогрессия позволяет придать таким дробям точный смысл. А именно, бесконечную десятичную дробь в правой части формулы (2.10) можно рассматривать как сумму

$$S = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + \dots$$

членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $1/100$  и первым членом  $63/100$ . Представляя  $S$  в виде

$$S = \frac{63}{100} \left( 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots \right),$$

и пользуясь формулой (2.8), получаем в результате, что  $S = 7/11$ .

Ясно, что подобный способ понимать бесконечные периодические десятичные дроби с периодом  $k$  как сумму членов сходящейся геометрической прогрессии со знаменателем вида  $1/10^k$  носит общий характер. В школьном курсе было доказано, что любая дробь  $p/q$  может быть представлена либо как конечная, либо как бесконечная периодическая десятичная дробь. Такие дроби, как мы видим, получают строгую трактовку в теории сходящихся последовательностей рациональных чисел.

### 3. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

В этой главе рассматривается один из основных объектов математического анализа – вещественное число.

#### 3.1. Почему необходимы иррациональные числа.

Одной из причин введения в математику иррациональных чисел послужил следующий результат.

**Теорема Пифагора.** *Не существует такого рационального числа  $p/q$ , квадрат которого был бы равен 2.*

*Доказательство.* Предположим, что такое число существует, т.е. выполняется равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2. \quad (3.1)$$

Можно считать, что дробь  $p/q$  несократимая, т.е. числа  $p$  и  $q$  не имеют общих множителей. Докажем, что из (3.1) следует, что числа  $p$  и  $q$  имеют общим множителем число 2, т.е. придем к противоречию.

Соотношение (3.1) можно записать в виде

$$p^2 = 2q^2. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что  $p^2$  делится без остатка на 2, т.е. в разложении числа  $p^2$  на простые множители имеется число 2. Но в таком случае само число  $p$  имеет двойку в своем разложении на простые множители. Следовательно, мы можем написать, что  $p = 2k$ . Подставим последнее соотношение в (3.2).

$$4k^2 = 2q^2, \quad \text{или} \quad q^2 = 2k^2.$$

Из последнего соотношения следует, что  $q$  четное число. Противоречие! Ч.т.д.

Теорема Пифагора означает, в частности, что на рациональной координатной плоскости график функции  $x^2 - 2$  не пересекается с

осью абсцисс, так как отметки числа  $\sqrt{2}$  на рациональной оси абсцисс нет. Теорему Пифагора можно сформулировать и как утверждение о несоизмеримости диагонали и сторон квадрата. Несοизмеримость означает отсутствие общей меры, т.е. такого отрезка, который бы укладывался целое число раз и на стороне, и на диагонали квадрата.

Таким образом, рациональных чисел недостаточно, чтобы снабдить ими длины всех отрезков и координаты точек пересечения кривых на евклидовой плоскости. Можно сказать, что рациональная координатная плоскость не полна, и требуются новые, “иррациональные” точки, чтобы ее пополнить.

### 3.2. Последовательность измерения отрезков.

Рассмотрим оснащенную ось  $S$ , т.е. направленную прямую евклидовой плоскости с фиксированной точкой начала отсчета  $O$  и фиксированным отрезком, длина которого считается равной единице. Ранее, в параграфе 1.6 была описана процедура, с помощью которой на оси  $S$  отмечались точками рациональные числа.

Пусть некоторая точка  $A$  лежит на оси  $S$ . Если  $A$  есть отметка  $P_r$  рационального числа  $r$ , то длина отрезка  $OA$  равна  $r$ . Однако на оси  $S$  могут находиться точки, не являющиеся рациональными. Для таких точек длины отрезков  $OA$  не могут быть выражены рациональными числами. Например, отметим на оси  $S$  с помощью циркуля с раствором, равным диагонали квадрата с масштабным отрезком как стороной, точку  $B$ . Отрезок  $OB$  согласно Теореме Пифагора несоизмерим с масштабным отрезком.

Тем не менее, на практике каждому отрезку приписывается приближенная длина, выражаемая рациональным числом. В математическом анализе приближенная длина понимается в следующем смысле. Рассмотрим идеализированную, геометрическую процедуру измерения длин отрезков, являющуюся математической моделью инструментальных измерений. Она основывается на следующей аксиоме геометрии.

**Аксиома Архимеда.** *Каковы бы ни были два отрезка  $a$  и  $b$  найдется натуральное число  $n$  такое, что, откладывая  $n$  раз отрезок  $a$  от начала отрезка  $b$ , получаем отрезок, превосходящий  $b$ .*

Пусть имеется точка  $A$  вещественной оси, расположенная справа от  $O$  (см. Рис 1.3.1).



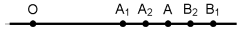


Рис. 1.3.1

Процедура измерения состоит в построении двух последовательностей отрезков  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n, \dots$  и  $OB_1, OB_2, \dots, OB_n, \dots$  с рациональными длинами таких, что, во-первых, точка  $A$  располагается между концами отрезков  $OA_n$  и  $OB_n$ , во-вторых, рациональная последовательность длин отрезков  $A_nB_n$  бесконечно малая. Длины отрезков  $OA_n$  или  $OB_n$  порождают все более точные значения длины отрезка  $OA$  с недостатком или с избытком.

Один из способов построения таких последовательностей отрезков состоит в следующем. Пусть масштабный отрезок, отложенный  $n_1$  раз, приводит к отрезку  $OA_1$  меньшему  $OA$ , а отложенный  $m_1 = n_1 + 1$  раз дает отрезок  $OB_1$  больший  $OA$ .

Разделим масштабный отрезок на 10 частей и будем откладывать 10-ю часть масштабного отрезка на отрезке  $A_1A$  от точки  $A_1$ . Пусть 10-я часть масштабного отрезка, отложенная  $n_2$  раза, порождает отрезок  $A_1A_2$  меньший  $A_1A$ , а отложенная  $m_2 = n_2 + 1$  раз дает отрезок  $A_1B_2$ , превосходящий  $A_1A$ . Разделим 10-ую часть масштабного отрезка вновь на 10 частей и повторим процедуру измерения с той же частью масштабного отрезка для отрезка  $A_2A$  и т.д. Процесс может оборваться на каком-то шаге, если  $A$  - рациональная точка, имеющая своей координатой конечную десятичную дробь, или продолжаться непрерывно.

Если описанный процесс не прерывается, то он приводит к двум последовательностям отрезков  $OA_1, OA_2, OA_3, \dots$  и  $OB_1, OB_2, OB_3, \dots$ , между концами которых располагается конец  $A$  измеряемого отрезка. В первой последовательности отрезки возрастают, а во второй убывают.

Длины рассматриваемых отрезков порождают последовательности рациональных чисел  $a_1 = n_1, a_2 = n_1 + n_2/10, a_3 = n_1 + n_2/10 + n_3/10^2, \dots$  и  $b_1 = m_1, b_2 = n_1 + m_2/10, b_3 = n_1 + n_2/10 + m_3/10^2, \dots$  такие, что последовательность  $\{a_n\}$  монотонно возрастает,  $\{b_n\}$  монотонно убывает, а разность последовательностей  $\{b_n - a_n\} = \{1/10^{n-1}\}$

бесконечно малая.

Последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  рассматриваются как все более точные, но все же приближенные значения длины отрезка  $OA$  или координаты точки  $A$ . Элементы последовательности  $\{a_n\}$  образуют последовательность приближенных значений длины отрезка  $OA$  с недостатком, а элементы последовательности  $\{b_n\}$  с избытком. С очевидными изменениями рассмотренный метод применим для отрицательно направленных отрезков.

### 3.3. Число Пифагора $\sqrt{2}$ .

Прежде, чем дать общее определение иррациональных чисел, рассмотрим несколько примеров. Начнем с числа, обозначаемого как  $\sqrt{2}$ , и дадим его определение с помощью пары рациональных последовательностей. Идея определения подсказана процедурой измерения отрезков, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Построим две последовательности рациональных чисел  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  такие, что последовательности  $\{a_n^2\}$  и  $\{b_n^2\}$  сходятся к числу 2. Для этого положим  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 2$ . Справедливы неравенства  $a_1^2 < 2 < b_1^2$ .

Рассмотрим таблицу, в первой строке которой расположены числа от 1 до 2 с шагом 0.1, а во второй строке квадраты этих чисел.

1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25	2.56	2.89	3.24	3.61	4

Выберем два соседних числа в первой строке таблицы такие, что квадрат первого меньше, а квадрат второго больше двух. В данном случае это будут числа 1.4 и 1.5. Положим  $a_2 = 1.4$ ,  $b_2 = 1.5$ . Имеем неравенства  $a_1^2 < a_2^2 < 2 < b_2^2 < b_1^2$ .

Для построения  $a_3$  и  $b_3$  рассмотрим таблицу квадратов чисел от 1.4 до 1.5 с интервалом 0.01

1.4	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45
1.96	1.9881	2.0164	2.0449	2.0736	2.1025
1.46	1.47	1.48	1.49	1.5	
2.1316	2.1609	2.1904	2.2201	2.25	

Мы видим, что  $1.41^2 < 2 < 1.42^2$ . Положив  $a_3 = 1.41$ ,  $b_3 = 1.42$ , придем к неравенствам  $a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < 2 < b_3^2 < b_2^2 < b_1^2$ .

Далее рассмотрим числа от 1.41 до 1.42 с интервалом 0.001 и выберем два соседних из них по тому же критерию. Продолжая описанный процесс построения, получим две последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  со следующими свойствами.

- 1) Последовательность  $\{a_n\}$  монотонно возрастает, а последовательность  $\{b_n\}$  монотонно убывает.
- 2) Для всех номеров  $i, j$  справедливы неравенства  $a_i < b_j$ .
- 3)  $b_n - a_n = (0.1)^{n-1}$ .
- 4) Рациональные последовательности  $\{a_n^2\}$  и  $\{b_n^2\}$  сходятся к 2.
- 5) Последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  не сходятся ни к какому рациональному пределу.

Теорема Пифагора и свойства 4) и 5) означают, что иррациональное число, обозначаемое как  $\sqrt{2}$ , естественно рассматривать как пару последовательностей  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  рациональных чисел. Принято говорить, что элементы последовательности  $\{a_n\}$  дают приближенные значения для  $\sqrt{2}$  “с недостатком”, а элементы последовательности  $\{b_n\}$  “с избытком”.

Подчеркнем, что  $\sqrt{2}$  рассматривается нами *не как предел последовательностей  $\{a_n\}$  или  $\{b_n\}$ , а как обозначение, или общее имя, этой пары рациональных последовательностей.*

### 3.4. Число $e$ – основание натуральных логарифмов.

Определим иррациональное число, которое называется основанием натуральных логарифмов и обозначается через  $e$ . Оно, как мы увидим впоследствии, играет выдающуюся роль в теории и приложениях математического анализа. Рассмотрим две рациональные последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ , элементы которых задаются формулами:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

На рисунке Рис.1.3.2 представлены первые 20 элементов последовательностей  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ .

Точки графика первой последовательности располагаются на нижней сплошной линии, а точки графика второй - на верхней. Рисунок демонстрирует, что рассматриваемые элементы последовательностей удовлетворяют неравенствам  $a_i < b_j$ . Кроме того, последовательность  $\{a_n\}$  монотонно возрастает, а  $\{b_n\}$  монотонно убывает.

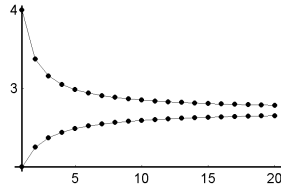


Рис. 1.3.2

Расстояние между элементами двух последовательностей с одинаковыми номерами стремится к нулю.

**Теорема о свойствах последовательностей (3.3).** *Последовательность  $\{a_n\}$  монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3. Последовательность  $\{b_n\}$  монотонно убывает.*

*Разность последовательностей  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  является бесконечно малой последовательностью. Выполняется неравенство*

$$b_n - a_n < \frac{3}{n}. \quad (3.4)$$

Л. Эйлеру принадлежит следующая теорема.

**Теорема Эйлера.** *Последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  (3.3) не имеют рациональных пределов.*

Теорема Эйлера и предшествующая ей теорема показывают, что последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  (3.3) обладают в точности теми же свойствами, что и аналогичные последовательности предыдущего параграфа, которые мы ввели при рассмотрении числа  $\sqrt{2}$ . Это позволяет нам трактовать пару последовательностей (3.3) как иррациональное число. Его обозначают через  $e$ . Логарифмы по основанию  $e$  называются “натуральными” логарифмами. Говорят, что последовательность  $\{a_n\}$  представляет число  $e$  с недостатком, а  $\{b_n\}$  с избытком.

Из неравенства (3.4) следует, что разность элементов последовательностей с номером три миллиона не превосходит одной миллионной. Вычисляя представления этих элементов в виде десятичных

дробей, можно увидеть, что целые части и первые пять цифр дробной части у них одинаковы.

Сохраняя по шесть цифр дробной части, получаем следующий результат:  $a_{3000000} = 2.7182814$ ,  $b_{3000000} = 2.7182823$ . Разность этих чисел равна  $9 \times 10^{-7}$ . Следовательно, приближенно с пятью верными знаками после запятой число  $e = 2.71828$ .

### 3.5. Число $\pi$ .

Иррациональность числа  $\pi$  была доказана в 1761 году немецким математиком Ламбертом. Для того, чтобы дать определение этого числа, рассмотрим предложенную Грегори и Лейбницем последовательность  $\{c_n\}$  рациональных чисел

$$c_n = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right).$$

Рисунок Рис. 1.3.3 демонстрирует колеблющийся характер графика последовательности. Члены с четными номерами образуют монотонно возрастающую подпоследовательность  $\{a_n\}$  последовательности  $\{c_n\}$ , а с нечетными номерами - монотонно убывающую подпоследовательность  $\{b_n\}$ .

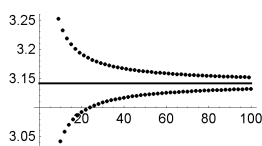


Рис. 1.3.3

Рассмотрим подробнее подпоследовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ :

$$a_1 = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} \right), \quad a_2 = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right), \dots,$$

$$a_n = 4 \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1} \right), \dots$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= 4, & b_2 &= 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right), \dots, \\
b_n &= 4 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \left( -\frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1} \right), \dots
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Их элементы удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$a_{n+1} = a_n + 4 \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right), \quad b_{n+1} = b_n - 4 \left( \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} \right)$$

Поскольку  $4n+1 < 4n+3$  и  $4n-1 < 4n+1$  числа в скобках в правых частях рекуррентных соотношений положительные. Следовательно, последовательность  $\{a_n\}$  монотонно возрастает, а последовательность  $\{b_n\}$  монотонно убывает.

Для разности элементов последовательностей с одинаковыми номерами справедлива формула

$$b_n - a_n = \frac{4}{4n-1}, \tag{3.6}$$

поэтому  $b_n - a_n$  — бесконечно малая последовательность. Если взять  $n = 10^4 + 1$ , то  $b_n - a_n < 10^{-4}$ .

Пара последовательностей  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  обладает теми же свойствами, какие имели аналогичные последовательности, построенные нами для определения чисел  $\sqrt{2}$  и  $e$  в предыдущих параграфах. Поэтому будем рассматривать число  $\pi$  как пару последовательностей (3.5).

Вычисляя на компьютере элементы  $b_n$ ,  $a_n$  с номером  $n = 10^6 + 1$ , получаем приближенные значения числа  $\pi$  с недостатком 3.14159215359, с избытком 3.141593153589. Разность между ними равна  $0.99999 \times 10^{-7}$  в соответствии с равенством (3.6).

### 3.6. Вещественные числа.

Основываясь на рассмотренных выше примерах, дадим общее определение вещественного числа. Для этого заметим, что числа  $\sqrt{2}$ ,  $e$ ,  $\pi$  были нами ассоциированы с конкретными парами последовательностей. Однако внимательное рассмотрение принципов построения этих последовательностей выявляет определенный произвол, допущенный при их определении.

Так, например, вводя последовательности для числа  $\sqrt{2}$ , мы могли вместо деления отрезка между точками  $a_n$ ,  $b_n$  на 10 частей предпринять деление на 100 частей, или на 2 части, или на 5 частей и т.д.

В случае числа  $e$  можно было бы рассмотреть последовательности

$$\tilde{a}_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}, \quad \tilde{b}_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2+1}$$

и т.д. В связи с этим дадим следующее определение.

**Определение.** *Две рациональные последовательности называются эквивалентными, если их разность бесконечно малая последовательность.*

В определениях чисел  $\sqrt{2}$ ,  $e$ ,  $\pi$  вместо последовательностей  $\{a_n\}$  можно использовать любые эквивалентные им неубывающие последовательности, а вместо последовательностей  $\{b_n\}$  любые эквивалентные им невозрастающие последовательности.

**Определение.** *Вещественным числом  $\alpha$  называется класс эквивалентности пар  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  рациональных последовательностей таких, что*

- 1) *последовательность  $\{a_n\}$  неубывающая, а последовательность  $\{b_n\}$  невозрастающая,*
- 2) *каждый элемент  $a_k$  последовательности  $\{a_n\}$  меньше или равен любому элементу  $b_m$  последовательности  $\{b_n\}$ , т.е. для любых  $k, m$  справедливо неравенство  $a_k \leq b_m$ ,*
- 3) *разность  $\{b_n - a_n\}$  есть бесконечно малая последовательность.*

В класс эквивалентности  $\alpha$  входит каждая пара  $(\{\tilde{a}_n\}, \{\tilde{b}_n\})$  рациональных последовательностей, обладающих свойствами 1) - 3), такая, что  $\{a_n\}$  эквивалентна  $\{\tilde{a}_n\}$ , а  $\{b_n\}$  эквивалентна  $\{\tilde{b}_n\}$ . Любая пара  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  из класса эквивалентности  $\alpha$  называется *представителем* вещественного числа  $\alpha$ .

Пары  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  последовательностей, удовлетворяющих свойствам 1) - 3), будем называть *архимедовыми* парами рациональных последовательностей.

Заметим, что если мы рассмотрим *стационарную* последовательность  $\{x_n\}$ , т.е. последовательность, все элементы которой равны некоторому рациональному числу  $r$ , то пара  $(\{x_n\}, \{x_n\})$  будет архимедовой. Вещественное число  $\alpha$ , представителем которого является рассматриваемая пара, можно отождествить с рациональным числом  $r$ .

В частности, число 0 отождествляется с классом эквивалентности, представителем которого служит пара  $(\{u_n\}, \{v_n\})$  стационарных последовательностей таких, что  $u_n = v_n = 0$  для всех  $n$ . Все другие архимедовы пары  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  из класса 0 таковы, что и последовательность  $\{a_n\}$ , и последовательность  $\{b_n\}$  суть бесконечно малые монотонные последовательности.

### 3.7. Сравнение вещественных чисел с рациональными.

Для двух различных рациональных чисел  $r_1$  и  $r_2$  справедливо, что либо  $r_1 > r_2$ , либо  $r_1 < r_2$ .

В этом параграфе мы обсудим метод сравнения по величине вещественных и рациональных чисел. Пусть  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  есть представитель вещественного числа  $\alpha$ , а  $r$  – рациональное число.

**Определение.** Если последовательность  $\{a_n\}$  архимедовой пары  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  обладает тем свойством, что  $a_k > r$  для какого-то  $k$ , то вещественное число  $\alpha > r$ .

Заметим, что если какое-то  $a_k > r$ , то для всех  $n > k$  также выполняются неравенства  $a_n > r$ .

Нетрудно доказать корректность данного определения. А именно, установить, что если  $(\{\tilde{a}_n\}, \{\tilde{b}_n\})$  другой представитель числа  $\alpha$ , то существует номер  $m$  такой, что  $\tilde{a}_m > r$ .

**Определение.** Если последовательность  $\{b_n\}$  архимедовой пары  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  обладает тем свойством, что  $b_k < r$  для какого-то  $k$ , то вещественное число  $\alpha < r$ .

Из данных определений следует, что каков бы ни был представитель  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  числа  $\alpha$ , выполняются неравенства

$$a_k \leq \alpha \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

**Теорема о сравнимости вещественных и рациональных чисел.** Для любого вещественного числа  $\alpha \neq r$  справедливо, что либо  $\alpha > r$ , либо  $\alpha < r$ .

### 3.8. Сравнение вещественных чисел.

Пусть  $\alpha, \beta$  два вещественных числа.

**Определение.** Если существует такое рациональное число  $r$ , что  $\alpha < r$  и  $r < \beta$ , то  $\alpha < \beta$ .



**Теорема о сравнимости любых двух вещественных чисел.**  
 Пусть  $\alpha, \beta$  два различных вещественных числа. Тогда либо  $\alpha > \beta$ ,  
 либо  $\alpha < \beta$ .

### 3.9. Десятичное представление вещественных чисел.

Архимедова пара  $(\{a_n\}, \{b_n\})$ , представляющая число  $\sqrt{2}$ , которая была построена в параграфе 3.3, удовлетворяла соотношению  $b_n - a_n = 1/10^{n-1}$ . Архимедовы пары для чисел  $e$  и  $\pi$  этим свойством не обладали. В этом параграфе мы установим, что для любого вещественного числа  $\alpha$  можно указать архимедову пару, аналогичную архимедовой паре числа  $\sqrt{2}$ .

Каждому рациональному числу  $r$  можно поставить в соответствие два целых числа. Число  $F(r)$ , называемое *полом* (floor) для числа  $r$ , определяется как наибольшее целое число такое, что  $F(r) \leq r$ . Число  $C(r)$ , называемое *потолком* (ceiling) для числа  $r$ , определяется как наименьшее целое число такое, что  $r < C(r)$ . Для рациональных чисел  $r = p/q$  пол и потолок вычисляются при помощи деления с остатком целого числа  $p$  на целое  $q$ . А именно, предположим без ограничения общности, что  $q > 0$ , тогда  $p = kq + r$ , где целое число  $k$  - частное, а целое число  $r$  такое, что  $0 \leq r < q$  - остаток от деления. Поэтому

$$\frac{p}{q} = k + \frac{r}{q}.$$

Отсюда следует, что  $F(r) = k$ ,  $C(r) = k + 1$ .

Существование пола и потолка у иррациональных чисел следует из неравенств (3.7). Действительно, неравенства (3.7) влекут соотношения

$$F(a_k) \leq \alpha \leq C(b_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

и для того, чтобы вычислить  $F(\alpha)$ , следует сравнить с  $\alpha$  конечное число целых чисел, заключающихся между  $F(a_k)$  и  $C(b_k)$ .

**Теорема о десятичном представлении вещественных чисел.** Пусть  $\alpha$  есть иррациональное вещественное число. Тогда в классе  $\alpha$  существует архимедова последовательность  $(\{u_n\}, \{v_n\})$ , где

$$u_n = \frac{F(10^{n-1}\alpha)}{10^{n-1}}, \quad v_n = \frac{C(10^{n-1}\alpha)}{10^{n-1}}, \quad (3.8)$$

такая, что  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  суть последовательности конечных десятичных дробей со следующими свойствами:

- 1) Выполняются соотношения  $v_n - u_n = 1/10^{n-1}$ .

2) Последовательность  $\{u_n\}$  неубывающая, а последовательность  $\{v_n\}$  невозрастающая.

3) Для каждого  $k$  выполняются неравенства  $u_k < \alpha < v_k$ .

Вычислим, например, первые три элемента последовательностей, образующих десятичное представление числа  $e$ . Начнем с вычисления элементов  $u_1, v_1$ . В силу неравенства (3.4) разность  $b_4 - a_4 < 1$ . Имеем

$$a_4 = \frac{625}{256} = 2\frac{113}{256}, \quad b_4 = \frac{3125}{1024} = 3\frac{53}{1024}.$$

Так как  $F(a_4) = 2$ , а  $C(b_4) = 4$ , неясно, будут ли  $u_1 = 2, v_1 = 3$  или  $u_1 = 3, v_1 = 4$ . Поэтому вычислим еще несколько элементов последовательностей  $\{a_n\}, \{b_n\}$ . Например,

$$a_5 = \frac{7776}{3125} = 2\frac{1526}{3125}, \quad b_5 = \frac{46656}{15625} = 2\frac{15406}{15625}.$$

Поскольку  $F(a_5) = 2$ , а  $C(b_5) = 3$ , становится очевидным, что  $u_1 = 2, v_1 = 3$ .

Начиная с элементов  $a_{31}, b_{31}$  разность  $10(b_n - a_n) < 1$ . Вычислим

$$10 a_{31} = 26.757, \quad 10 b_{31} = 27.6201.$$

Поскольку дроби, являющиеся точными значениями чисел  $10 a_{31}, 10 b_{31}$ , весьма громоздки, мы привели округленные десятичные представления этих дробей.

Видно, что между рассматриваемыми элементами лежит число 27, поэтому следует продолжить вычисления элементов  $a_n, b_n$  до тех пор, пока неравенство  $10 a_n > 27$  или неравенство  $10 b_n < 27$  не станет выполняться. Оказывается,  $10 a_{74} > 27$ , поэтому  $u_2 = 2.7, v_2 = 2.8$ .

Продолжая вычисления, получим, что  $100 a_{301} = 271.378, 100 b_{301} = 272.28$ , а  $100 a_{795} = 271.657, 100 b_{795} = 271.999$ . Следовательно,  $u_3 = 2.71, v_3 = 2.72$  и т.д.

### 3.10. Сложение вещественных чисел.

Пусть  $\alpha, \beta$  два вещественных числа, а  $(\{a_n\}, \{b_n\}), (\{c_n\}, \{d_n\})$  какие-либо их представители.

**Определение.** Суммой  $\alpha + \beta$  чисел  $\alpha$  и  $\beta$  называется вещественное число, одним из представителей которого является пара  $(\{a_n + c_n\}, \{b_n + d_n\})$ .

Заметим, что, если рассматривать 0 как вещественное число, т.е. как класс эквивалентности архимедовых пар бесконечно малых последовательностей, то в силу данного определения сумма  $\alpha + 0 = \alpha$ .

### 3.11. Вычитание вещественных чисел.

Вычитание определяется как сложение с противоположным числом.

**Определение.** Числом противоположным к числу  $\alpha$  называется вещественное число  $\varkappa$ , представителем которого является пара  $(\{-b_n\}, \{-a_n\})$ , если  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  представитель  $\alpha$ .

Из данного определения и определения сложения вещественных чисел следует, что  $\alpha + \varkappa = 0$ , так как  $\{a_n - b_n\}$  и  $\{b_n - a_n\}$  бесконечно малые последовательности. Естественно поэтому обозначить число  $\varkappa$  через  $-\alpha$ .

**Определение.** Разность  $\alpha - \beta$  вещественных чисел  $\alpha, \beta$  есть сумма числа  $\alpha$  и числа  $-\beta$ , противоположного числу  $\beta$ :

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

**Определение.** Модулем (абсолютным значением)  $|\alpha|$  вещественного числа  $\alpha$  называется само число  $\alpha$ , если оно неотрицательно:  $\alpha \geq 0$ , или число  $-\alpha$  противоположное  $\alpha$ , если  $\alpha < 0$ .

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{если } \alpha < 0 \end{cases}$$

### 3.12. Произведение вещественных чисел.

Определим сначала произведение положительных вещественных чисел. Очевидно, что для положительного числа  $\alpha$  всегда можно выбрать такого представителя  $(\{a_n\}, \{b_n\})$ , что все элементы  $a_n > 0$ .

**Определение.** Произведением положительных вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  называется вещественное число такое, что его представителем является архимедова пара  $(\{a_n c_n\}, \{b_n d_n\})$ , где  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  представитель числа  $\alpha$ , а  $(\{c_n\}, \{d_n\})$  представитель числа  $\beta$ .

Рассмотрим случай, когда сомножитель  $\alpha > 0$ , а сомножитель  $\beta < 0$ . Положим по определению

$$\alpha \beta = \alpha(-|\beta|) = -(\alpha |\beta|).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае произведение  $\alpha \beta$  есть вещественное число противоположное произведению положительных вещественных чисел  $\alpha$  и  $|\beta|$ .

В случае, когда оба сомножителя отрицательны, положим

$$\alpha \beta = |\alpha| |\beta|.$$

### 3.13. Деление вещественных чисел.

Операция деления вводится на основе операции умножения и использует понятие обратного числа.

**Определение.** *Вещественное число  $x$  называется обратным к вещественному числу  $\alpha$ , если произведение  $\alpha x = 1$ .*

Докажем существование обратного числа у любого отличного от нуля вещественного числа  $\alpha$ . Рассмотрим случай  $\alpha > 0$ , что влечет существование рационального числа  $r > 0$  такого, что  $\alpha > r$ . Пусть  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  представитель числа  $\alpha$ , тогда архимедова пара  $(\{1/b_n\}, \{1/a_n\})$  есть представитель числа  $x$ .

Обратное к  $\alpha$  число обозначается через  $\alpha^{-1}$  или через  $1/\alpha$ . Для  $\alpha < 0$  обратное число, очевидно, равно  $-|\alpha|^{-1}$ .

**Определение.** *Для того, чтобы поделить вещественное число  $\alpha$  на отличное от нуля вещественное число  $\beta$ , следует умножить  $\alpha$  на обратное к  $\beta$  число  $\beta^{-1}$ .*

*Операция деления на 0 не определена.*

### 3.14. Последовательности вещественных чисел.

Глава 2 книги была посвящена рассмотрению последовательностей рациональных чисел. Поскольку с вещественными числами, как мы показали выше, можно производить все арифметические операции и сравнивать вещественные числа по величине, определения последовательности вещественных чисел, монотонных, ограниченных, неограниченных, бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей вещественных чисел ничем не отличаются от соответствующих определений для последовательностей рациональных чисел, и мы их повторять не будем.

В настоящем разделе мы будем рассматривать только свойства сходящихся последовательностей, поэтому для удобства читателя приведем определение сходящейся последовательности вещественных чисел.

**Определение.** Вещественное число  $\gamma$  называется пределом последовательности  $\{\alpha_n\}$ , если последовательность  $\{\gamma - \alpha_n\}$  бесконечно мала.

**Теорема о свойствах сходящихся последовательностей.** Сходящаяся последовательность может иметь только один предел.

Сходящаяся последовательность ограничена.

**Теорема о пределах сходящихся последовательностей.** Пусть  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$  сходящиеся к пределам  $\gamma$  и  $\delta \neq 0$  вещественные последовательности. Тогда предел суммы  $\{\alpha_n + \beta_n\}$  последовательностей равен сумме  $\gamma + \delta$  пределов, предел разности  $\{\alpha_n - \beta_n\}$  последовательностей равен разности  $\gamma - \delta$  пределов, предел произведения  $\{\alpha_n \beta_n\}$  последовательностей равен произведению  $\gamma \delta$  пределов и предел частного  $\{\alpha_n/\beta_n\}$  последовательностей равен частному  $\gamma/\delta$  пределов.

### 3.15. Полнота множества вещественных чисел.

Вещественные иррациональные числа были введены с помощью последовательностей более простых по своей природе рациональных чисел. Однако уже в античности для получения приближенных значений иррациональных чисел использовались архимедовы пары  $(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$  последовательностей иррациональных чисел.

Архимед, вычисляя приближенное значение числа  $\pi$ , рассматривал последовательности полупериметров правильных вписанных в единичную окружность и описанных около нее многоугольников. Первыми членами последовательностей были полупериметры  $\alpha_1 = 3\sqrt{3}/2$  и  $\beta_1 = 3\sqrt{3}$  правильных треугольников. Далее число сторон удваивалось, т.е. рассматривались правильные шестиугольники, затем двенадцатиугольники и т.д. Таким образом,

$$\alpha_n = 3 \times 2^{n-1} \sin \left( \frac{180^\circ}{3 \times 2^{n-1}} \right), \quad \beta_n = 3 \times 2^{n-1} \operatorname{tg} \left( \frac{180^\circ}{3 \times 2^{n-1}} \right).$$

Элементы рассматриваемых последовательностей удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \sqrt{\frac{2\beta_n}{\alpha_n + \beta_n}}, \quad \beta_{n+1} = 2 \frac{\alpha_n \beta_n}{\alpha_n + \beta_n},$$

из которых Архимед находил приближенные рациональные значения элементов последовательностей, исходя из значений  $\alpha_1, \beta_1$ .

Вычисляя элементы  $\alpha_6, \beta_6$ , т.е. полупериметры правильных 96-угольников, Архимед получил следующую систему неравенств

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Среднее арифметическое входящих в последнюю систему неравенств дробей приводит к значению  $\pi = 3.14185$  (мы привели первые шесть цифр бесконечной десятичной дроби), относительная погрешность которого меньше, чем 0.01%.

В принципе, архимедовы пары последовательностей  $(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$  вещественных чисел представляют собой новый математический объект, и можно было бы ожидать, что они приведут к новому типу чисел. Однако гениальная интуиция Архимеда подсказала ему, что вещественные последовательности каждой архимедовой пары имеют общий предел – вещественное число.

**Теорема о полноте множества вещественных чисел.** Пусть  $(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$  архимедова пара вещественных последовательностей, тогда существует такое вещественное число  $\gamma$ , что

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n.$$

Множество рациональных чисел было пополнено вещественными числами – архимедовыми парами рациональных последовательностей. Множество вещественных чисел непополняемо архимедовыми парами вещественных последовательностей. Это свойство множества вещественных чисел называется его *полнотой*.

### 3.16. Вещественная числовая ось.

Рациональные числа отмечаются на оси рациональными точками так, как это описано в разделе 1.6 первой главы. Алгоритм построения рациональной точки опирается на постулаты и теоремы евклидовой геометрии и содержит конечное число шагов. Метод построения отметок иррациональных точек требует расширения списка аксиом евклидовой геометрии и содержит в общем случае бесконечное число шагов.

Для того, чтобы отметить иррациональное число  $\alpha$ , рассмотрим его десятичное представление, т.е. последовательности  $u_n$  и  $v_n$  конечных десятичных дробей (3.8). Поскольку элементы последовательностей рациональные числа, то они могут быть отмечены на

оси рациональными точками, которые мы будем обозначать через  $A_n$  и  $B_n$  соответственно (Рис.1.3.1).

Длина отрезка  $A_n B_n$  равна  $1/10^{n-1}$ . Отрезок  $A_n B_n$  содержит отрезки  $A_k B_k$  при  $k > n$ . Таким образом, рассматриваемые отрезки образуют вложенную систему отрезков, длины которых стремятся к нулю. Следующая аксиома присоединена к аксиомам евклидовой геометрии Г. Кантором.

**Аксиома Кантора.** *Всякая система вложенных отрезков прямой, длины которых стремятся к нулю, обладает тем свойством, что на прямую можно поместить единственную точку, которая принадлежит всем отрезкам.*

Возвращаясь к иррациональному числу  $\alpha$ , заметим, что Аксиома Кантора гарантирует существование единственной точки, которая принадлежит всем вложенным отрезкам  $A_n B_n$ . Этой точкой  $P_\alpha$  и отмечается число  $\alpha$  на оси (на рисунке Рис. 1.3.1 точка  $P_\alpha$  отмечена как точка  $A$ ).

На оснащенную ось  $S$  можно поместить точку, которая не будет иметь рациональную координату, т.е. не будет рациональной точкой. Однако любая точка, помещенная на ось  $S$ , может быть снабжена координатой, являющейся вещественным числом. Для этого используется теоретическая процедура измерения длин отрезков, описанная в разделе 3.2.

**Определение.** *Совокупность всех точек на оснащенной оси  $S$  называется вещественной числовой осью.*

Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между множеством  $R$  вещественных чисел и множеством направленных отрезков вещественной оси, имеющих начало в точке  $O$ .

Это соответствие обладает следующим свойством. Если обозначить через  $OP_\alpha$  отрезок, отвечающий вещественному числу  $\alpha$ , а через  $OP_\alpha \oplus OP_\beta$  отрезок числовой оси, полученный прикладыванием конца  $O$  отрезка  $OP_\beta$  к концу  $P_\alpha$  отрезка  $OP_\alpha$ , то будут справедливы утверждения:

- 1) если  $\alpha > \beta$ , то точка  $P_\alpha$  расположена правее точки  $P_\beta$ ,
- 2) величина отрезка  $OP_\alpha \oplus OP_\beta$  равна  $\alpha + \beta$ ,
- 3) длина отрезка  $[P_\alpha, P_\beta]$  равна  $|\beta - \alpha|$ .

**3.17. Непрерывность и полнота вещественной числовой оси.**

Поскольку множество вещественных чисел обладает свойством полноты и поскольку установлено взаимно однозначное соответствие между вещественными числами и точками на вещественной числовой оси, то и сама вещественная числовая ось *полна*.

Свойство *полноты* заключается в том, что последовательности  $P_{\alpha_n}, P_{\beta_n}$  концов стягивающейся системы вложенных отрезков сходятся к некоторой точке  $P_\gamma$  на вещественной оси.

Свойство *непрерывности* вещественной числовой оси состоит в том, что процесс дробления отрезков оси может происходить непрерывно (бесконечно), порождая на каждом шаге снова отрезки. Здесь отрезком  $[P_a, P_b]$  вещественной числовой оси называют совокупность ее точек  $P_\alpha$ , координаты  $\alpha$  которых удовлетворяют неравенствам  $a \leq \alpha \leq b$ .

Так как свойства непрерывности и полноты вещественной оси установлены с помощью Аксиомы Кантора, то последнюю часто называют *аксиомой непрерывности и полноты* вещественной числовой оси.

### 3.18. Фундаментальные последовательности вещественных чисел.

Вещественные числа были определены в параграфе 3.6 с помощью архимедовых пар рациональных последовательностей. Этот способ наряду с его наглядностью дает также метод нахождения приближенных рациональных значений вещественных чисел.

Однако в теоретических вопросах, связанных, например, с обсуждением непрерывности функций, более удобен другой способ определения вещественных чисел и иная формулировка аксиомы непрерывности и полноты вещественной оси. В новом методе используются *фундаментальные последовательности*.

**Определение.** Последовательность  $\{\alpha_n\}$  вещественных чисел называется *фундаментальной*, если, какой бы элемент  $\varepsilon_m = 1/m$  эталонной бесконечно малой последовательности мы ни взяли, найдется такое натуральное число  $N(m)$ , что выполняются неравенства:

$$|\alpha_l - \alpha_k| < \frac{1}{m} \quad \text{при } l, k > N(m). \quad (3.9)$$

Обратимся к рисунку Рис.1.3.4 с тем, чтобы выяснить наглядный смысл только что данного определения.

Точки на рисунке соответствуют точкам графика некоторой фундаментальной последовательности. Самая верхняя и самая нижняя



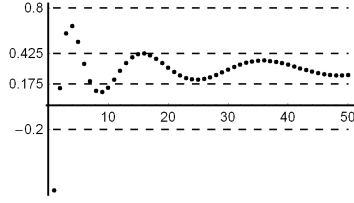


Рис. 1.3.4

пунктирные линии находятся друг от друга на расстоянии 1. Они отвечают выбору  $\varepsilon_1 = 1$ . Видно, что, начиная со второго номера, элементы последовательности располагаются между этими линиями. Следовательно, расстояние между элементами последовательности с номерами большими  $N(1) = 1$  меньше, чем  $\varepsilon_1$ .

Две внутренние пунктирные линии отстоят друг от друга на расстоянии  $1/4$  и отвечают выбору  $\varepsilon_4 = 1/4$ . Рисунок демонстрирует, что все элементы последовательности, начиная с номера 17, располагаются между двумя внутренними пунктирными линиями. Это означает, что расстояние между любыми двумя элементами последовательности с номерами большими  $N(4) = 16$  меньше, чем  $\varepsilon_4$ .

Можно также сказать, что геометрический смысл неравенств (3.9) заключается в том, что при  $l, k > N(m)$  точки  $P_{r_l}, P_{r_k}$  рациональной числовой оси лежат внутри некоторого отрезка длины  $\varepsilon_m$ .

Дадим новое определение вещественного числа, опирающееся на понятие фундаментальной последовательности.

**Определение.** *Вещественное число есть класс эквивалентности фундаментальных рациональных последовательностей.*

Назовем *фундаментальной* последовательность  $\{P_{\alpha_n}\}$  точек вещественной оси, если числовая последовательность  $\{\alpha_n\}$  фундаментальная. Следующая аксиома позволяет отмечать вещественные числа в смысле данного в этом параграфе определения точками на оснащенной оси. Заметим, что справедливость Аксиомы Кантора не предполагается.

**Аксиома непрерывности и полноты вещественной оси.**  
*Для любой фундаментальной последовательности  $\{P_{\alpha_n}\}$  точек ве-*

вещественной оси можно указать единственную точку  $P_\gamma$ , к которой  $\{P_{\alpha_n}\}$  сходится.

Используя Аксиому, мы отмечаем вещественное число  $\gamma$ , являющееся классом эквивалентности фундаментальной рациональной последовательности  $\{r_n\}$ , точкой  $P_\gamma$ , о которой идет речь в Аксиоме.

Эквивалентность двух определений вещественных чисел устанавливается на основе следующего утверждения.

**Теорема о фундаментальных последовательностях вещественных чисел.** По любой фундаментальной последовательности  $\{\alpha_n\}$  вещественных чисел можно построить архимедову пару последовательностей  $(\{a_n\}, \{b_n\})$ . Последовательность  $\{\alpha_n\}$  сходится к вещественному числу  $\gamma$ , одним из представителей которого является пара  $(\{a_n\}, \{b_n\})$ .

Любая архимедова пара  $(\{a_n\}, \{b_n\})$  состоит из фундаментальных последовательностей.

**Следствие 1.** Определения рационального числа как класса эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел и как класса эквивалентности архимедовых пар равносильны.

**Следствие 2.** Аксиома Кантора и Аксиома непрерывности и полноты вещественной оси эквивалентны: каждая из них может быть выведена из другой.

## 4. ФУНКЦИИ ВЕЩЕСТВЕННОГО АРГУМЕНТА. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ.

В этой главе изучается один из основных объектов математического анализа: функции вещественного аргумента.

### 4.1. Функции вещественного аргумента.

Начнем изложение с введения основных понятий.

**Определение.** На множестве  $\mathbb{R}$  вещественных чисел задана функция  $f(x)$ , если существует правило, по которому каждому числу  $x \in \mathbb{R}$  поставлено в соответствие вещественное число  $y = f(x)$ .

Символ  $f$  называется *заголовком*, или именем, функции. Не существует формальных ограничений на то, каким должно быть упомянутое в определении правило соответствия. Требуется лишь, чтобы корректные математические рассуждения не приводили к противоречиям, если они применяются к функции  $f(x)$ .

Правило соответствия может быть задано математической формулой:  $f(x) = x^2 + x + 1$ . Оно может быть описано словами, т.е. дано вербально. Например, функция Дирихле  $\delta(x)$  определяется так: она равна единице, если  $x$  рациональное число, и равна нулю, если  $x$  иррационально.

Значения функции можно находить, решая какое-либо уравнение. Однако эти примеры далеко не исчерпывают всех способов задания функций.

Функции могут быть определены не для всех вещественных чисел. Например, нельзя найти значение функции  $1/x$  для  $x = 0$ . Множество вещественных чисел, для каждого из которых функция  $f(x)$  определена, называется *областью определения*  $D(f)$  функции  $f(x)$ .

Важную роль играют следующие области определения.

**Определение.** Отрезком  $[a, b]$ , где  $a$  и  $b$  вещественные числа такие, что  $a < b$ , называется множество вещественных чисел  $\alpha$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq \alpha \leq b$ .

Если вместо нестрогих неравенств выбрать строгие:  $a < \alpha < b$ , то они определяют множество  $(a, b)$  вещественных чисел, называемое *интервалом*.

Если же только одно неравенство нестрогое, а другое строгое, то приходим к *полуинтервалам*  $[a, b)$  или  $(a, b]$ .

Для интервала  $(a, b)$  и полуинтервала  $(a, b]$  возможно, что  $a = -\infty$ , а для интервала  $(a, b)$  и полуинтервала  $[a, b)$  не исключен случай  $b = +\infty$ .

В дальнейшем мы ограничимся изучением функций, области определения которых являются объединением в конечном числе отрезков, интервалов или полуинтервалов.

Множество вещественных чисел  $y$ , для которых найдется хотя бы одно число  $x \in D(f)$  такое что  $y = f(x)$ , называется *областью значений* функции  $f(x)$  и обозначается через  $R(f)$ .

## 4.2. Графики функций.

При изучении свойств функций важную роль играют их графики.

**Определение.** Множество всех упорядоченных пар  $(x, f(x))$  вещественных чисел таких, что  $x \in D(f)$ , называется *графиком* функции  $f(x)$ .

Каждую упорядоченную пару  $(x, f(x))$  можно отметить точкой  $M$  на вещественной координатной плоскости  $R^2$ . Абсцисса  $M$  равна  $x$ , а ордината  $f(x)$ . Отсюда следует, что график функции может быть определен как совокупность точек вещественной координатной плоскости, являющихся отметками упорядоченных пар вещественных чисел  $(x, f(x))$ .

В школьном курсе изучались *основные элементарные функции*. Так называют степенные, показательные, тригонометрические функции и функции обратные к ним. Графики этих функций фактически отождествлялись с плавными линиями на плоскости, полученными из кинематических соображений. Это, в частности, относится к параболе (траектория материальной точки в поле тяжести) и к тригонометрическим функциям (проекция траектории точки, участвующей в круговом движении).

Однако если строго следовать определению, графики функций следует рисовать скорее с помощью точек, т.е. отрывать карандаш от бумаги, нанося очередную точку, а не проводить какую-либо линию.

Чтобы проиллюстрировать эту мысль, рассмотрим эскиз графика функции Римана  $\rho(x)$  (рис.1.4.1). Для иррациональных  $x$  она принимает нулевое значение, а для рациональных  $x = p/q$  равна  $1/q$ :

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число} \\ \frac{1}{q}, & \text{если } x = \frac{p}{q}. \end{cases}$$

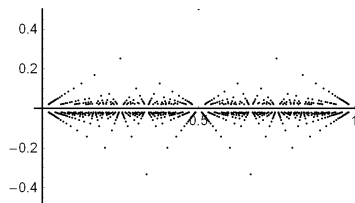


Рис.1.4.1

Рисунок 1.4.1 получен с помощью компьютера, который вычислил 1225 точек графика. Ясно, что все точки графика функции Римана невозможно отобразить, сколь бы мощным ни был компьютер. На рисунке содержатся точки  $(x, \rho(x))$  графика, для которых рациональные  $x$  имеют знаменатели, не превосходящие пятидесяти. Поэтому виден зазор возле оси абсцисс, не заполненный точками графика.

### 4.3. Непрерывные функции вещественного аргумента.

Решения многих важных проблем математического анализа опираются на свойства непрерывных функций вещественного аргумента.

В основе понятия непрерывности функций лежат логически предшествующие ему понятия непрерывности и полноты вещественной оси. Согласно Аксиоме непрерывности и полноты (раздел 3.18 главы 3) всякая фундаментальная последовательность точек на вещественной числовой оси сходится к точке, лежащей на оси. Графики непрерывных функций наследуют свойства непрерывности и полноты вещественной числовой оси.

Обсудим подробнее последнее утверждение. Для этого введем понятие фундаментальной последовательности точек на координатной плоскости  $R^2$ . Назовем *евклидовым* традиционное расстояние между точками на плоскости. А именно, если  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  две точки на вещественной плоскости, то расстояние  $\rho(A, B)$  между ними равно

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

**Определение.** Последовательность  $\{A_n\}$  точек на координатной плоскости называется *фундаментальной*, если для любого элемента  $\varepsilon_m = 1/m$  эталонной бесконечно малой последовательности найдется натуральное число  $N(m)$  такое, что при  $l, k > N(m)$  выполняется неравенство  $\rho(A_l, A_k) < \varepsilon_m$ .

Вещественная координатная плоскость  $R^2$ , как и вещественная числовая ось, обладает свойством непрерывности.

**Теорема о непрерывности координатной плоскости.** *Всякая фундаментальная последовательность точек на  $R^2$  сходится к некоторой точке на координатной плоскости.*

Рассмотрим функции, областями определения которых являются либо вся вещественная ось  $R$ , либо ее отрезки. Такие области определения обладают свойствами непрерывности и полноты.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной на области определения*  $D(f) = R$  или  $D(f) = [a, b]$ , если для всякой фундаментальной последовательности  $\{\alpha_n\}$ , элементы которой принадлежат  $D(f)$ , последовательность  $\{A_n(\alpha_n, f(\alpha_n))\}$  точек графика функции  $f(x)$  также является фундаментальной.

Возможно, непрерывные функции следовало бы назвать полными, но исторически закрепился первый термин.

**Теорема о полноте и непрерывности графика непрерывной функции.** Любая фундаментальная последовательность точек графика непрерывной функции сходится к точке графика.

Графики непрерывных функций, кроме свойств непрерывности и полноты, наследуют также и другое свойство вещественной оси: любой отрезок оси имеет равную нулю площадь. Ниже при обсуждении понятия определенного интеграла (глава 1 раздела 3) мы докажем, что график заданной на некотором отрезке непрерывной функции можно заключить внутри множества прямоугольников сколь угодно малой суммарной площади.

Данное нами определение непрерывной функции является на самом деле поточечным. Дело в том, что фундаментальная последовательность  $\{\alpha_n\}$ ,  $\alpha_n \in D(f)$  сходится к некоторой точке  $\alpha \in R$ . Если  $\alpha \in D(f)$ , то у нас появляется возможность дать определение непрерывности функции  $f(x)$  в фиксированной точке  $\alpha$  ее области определения.

Такой подход представляется более гибким, так как существуют функции непрерывные в одних точках своей области определения и не обладающие свойством непрерывности в других точках.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x = \alpha$  своей области определения  $D(f)$ , если для любой сходящейся к числу  $\alpha$  последовательности  $\{\alpha_n\}$ , все элементы которой принадлежат  $D(f)$ , последовательность  $\{f(\alpha_n)\}$  значений функции сходится к значению  $f(\alpha)$  функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ :

$$f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n). \quad (4.1)$$

Данное определение называется определением непрерывности с помощью последовательностей, или определением по Гейне.

Основные элементарные функции математического анализа либо монотонны (степенные функции  $x^{2k+1}$  с нечетными показателями и обратные к ним, показательные функции и обратные к ним, обратные тригонометрические функции), либо их область определения разбивается на участки монотонности (степенные функции  $x^{2k}$  с четными показателями, тригонометрические функции). Для монотонных функций данное выше общее определение может быть сформулировано следующим образом.

**Определение.** Неубывающая функция  $f(x)$  вещественного аргумента называется непрерывной в точке  $x = \alpha$  своей области определения, если для любой архимедовой пары  $(\{\alpha_n\}, \{\beta_n\})$  вещественных последовательностей, представляющих число  $\alpha$  и такой, что  $\alpha_n \in D(f)$ ,  $\beta_n \in D(f)$ , пара последовательностей  $(\{f(\alpha_n)\}, \{f(\beta_n)\})$  является архимедовой парой вещественных последовательностей и представляет число  $f(\alpha)$ .

Для невозрастающей функции пара  $(\{f(a_n)\}, \{f(b_n)\})$  в определении заменяется парой  $(\{f(b_n)\}, \{f(a_n)\})$ .

Данное определение можно понимать в том смысле, что для приближенного, но все более точного вычисления значения  $f(\alpha)$  монотонной и непрерывной в точке  $\alpha$  функции можно использовать ее значения  $f(\alpha_n)$  или  $f(\beta_n)$  на элементах архимедовых пар вещественных последовательностей, представляющих число

$\alpha$ . При этом получаются оценки  $f(\alpha_n) \leq f(\alpha) \leq f(\beta_n)$  или  $f(\beta_n) \leq f(\alpha) \leq f(\alpha_n)$  для погрешности вычислений.

#### 4.4. Теорема о промежуточных значениях для непрерывных функций.

Теорема, которая обсуждается в этом параграфе, имеет простой и наглядный геометрический смысл. Рассмотрим Рис.1.4.2, который содержит эскиз графика некоторой функции  $f(x)$  вещественного аргумента, заданной на сегменте  $[a, b]$ .

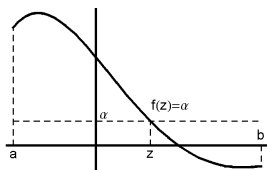


Рис. 1.4.2

На левом конце сегмента функция принимает некоторое значение  $f(a)$ , на правом – значение  $f(b)$ , и эти значения не совпадают. На рисунке также проведена пунктирная горизонтальная линия  $y = \alpha$ , где  $\alpha$  вещественное число, удовлетворяющее неравенствам  $f(a) > \alpha > f(b)$ . Число  $\alpha$  можно было бы назвать *промежуточным значением* функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ , если бы было установлено, что существует такое число  $z \in [a, b]$ , что  $\alpha = f(z)$ .

На рисунке график функции и пунктирная линия пересекаются, и если принять это за математическое утверждение, то абсцисса точки пересечения является значением  $z$  аргумента  $x$ , для которого  $f(z) = \alpha$ . Ввиду того, что число  $\alpha$  выбрано произвольно, можно утверждать, что рассматриваемая функция  $f(x)$  принимает на сегменте  $[a, b]$  все свои промежуточные значения.

Однако наглядность рисунка объясняется тем, что мы интуитивно за график функции приняли сплошную линию, а не множество точек координатной плоскости, как это следует из определения графика. Поэтому необходимо доказательство существования точки пересечения, опирающееся на свойства вещественных чисел и непрерывных функций.

В теореме, которую мы сформулируем, речь пойдет о непрерывной функции вещественного аргумента, заданной на некотором отрезке  $[a, b]$ .

**Теорема о промежуточных значениях.** Пусть функция вещественного аргумента  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Пусть для определенности  $f(a) > f(b)$ , тогда для любого числа  $\alpha$ , удовлетворяющего неравенству  $f(a) > \alpha > f(b)$ , найдется по крайней мере одна точка  $z \in [a, b]$  такая, что  $\alpha = f(z)$ .

Предположим, что в условиях теоремы о промежуточных значениях содержится дополнительное требование, что значения функции  $f(x)$  на концах сегмента имеют разные знаки. Тогда число 0 является промежуточным числом между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Значит, как следствие, получаем следующее утверждение, которое ввиду его важности в теории и приложениях математического анализа сформулируем в виде отдельной теоремы.

**Теорема об обращении непрерывной функции в нуль.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на сегменте  $[a, b]$  и на концах этого сегмента принимает значения разных знаков. Тогда на сегменте  $[a, b]$  найдется по крайней мере одна точка  $z$ , в которой функция обращается в нуль:  $f(z) = 0$ .

#### 4.5. Непрерывность обратных функций.

Сформулируем достаточные условия, при которых функции обратные к непрерывным сами являются непрерывными.

**Теорема о непрерывности обратной функции.** Пусть  $f(x)$  есть непрерывная монотонно возрастающая функция вещественного аргумента, областью значения  $R(f)$  которой является либо некоторый сегмент  $[a, b]$ , либо интервал  $(a, b)$ , либо полуинтервалы  $[a, b)$  или  $(a, b]$  (в последних трех случаях один из символов  $a, b$  или оба могут принимать значения  $\pm\infty$ ), тогда обратная к  $f(x)$  функция является непрерывной и монотонно возрастающей на  $R(f)$ .

**4.6. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции.** Теорему настоящего параграфа можно понимать как утверждение об одном свойстве непрерывных функций, которое на языке математического анализа формализует интуитивно понимаемое свойство плавности изменения непрерывных функций.

Назовем  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $\alpha$  интервал  $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ .

**Теорема.** Пусть непрерывная в точке  $\alpha$  функция  $f(x)$  удовлетворяет в ней неравенству  $f(\alpha) > 0$ , тогда существует  $\delta$ -окрестность  $A_\delta$  точки  $\alpha$  такая, что для всех  $x \in A_\delta$  справедливо неравенство  $f(x) > 0$ .

Очевидно, что аналогичное утверждение имеет место в случае  $f(\alpha) < 0$ .

#### 4.7. Ограниченность непрерывной функции на отрезке.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется ограниченной сверху (снизу), если для всех  $x$  из области определения  $f(x)$  выполняется неравенство  $f(x) < M$  ( $f(x) > m$ ).

Функция  $f(x)$  называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу одновременно:  $|f(x)| < K$ .

В определении  $M, m$  и  $K$  вещественные числа.

**Первая теорема Вейерштрасса.** Пусть  $f(x)$  непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция, тогда она ограничена на этом отрезке.

#### 4.8. Наибольшие и наименьшие значения непрерывных функций.



Одной из важнейших задач математического анализа является задача об отыскании таких значений аргумента, при которых функция принимает свои наибольшие или наименьшие значения.

**Определение.** Функция  $f(x)$  принимает в точке  $a$  своей области определения наибольшее (наименьшее) значение, если для всех  $x$  из области определения выполняется неравенство  $f(a) \geq f(x)$  ( $f(a) \leq f(x)$ ).

Мы знаем, что если задан конечный набор чисел, то в этом наборе всегда имеются наибольшее и наименьшее числа. Эта ситуация, вообще говоря, не имеет места для множеств с бесконечным числом элементов.

Для отрезка  $[a, b]$  очевидно, что  $a$  есть его наименьшее, а  $b$  наибольшее число. Пусть  $f(x)$  произвольная функция, а  $A$  некоторый сегмент. Обозначим через  $f(A)$  множество значений функции  $f(x)$  на сегменте  $A$ . В приведенной ниже теореме фактически утверждается, что множество  $f(A)$  есть также сегмент.

**Вторая теорема Вейерштрасса.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , тогда на  $[a, b]$  существует такая точка  $\alpha$ , в которой  $f(x)$  принимает наибольшее на этом отрезке значение, и существует точка  $\beta$ , в которой функция принимает наименьшее на отрезке значение.

#### 4.9. Алгебра непрерывных функций.

Над непрерывными функциями можно производить операции сложения, вычитания, умножения и деления, а также операцию суперпозиции. При дополнительных предположениях, сформулированных в приведенной ниже теореме, результатом будет также непрерывная функция. Это позволяет говорить об алгебре непрерывных функций.

**Теорема об алгебре непрерывных функций.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $\alpha$  функции, тогда их сумма  $f(x) + g(x)$ , разность  $f(x) - g(x)$ , произведение  $f(x)g(x)$  непрерывны в точке  $\alpha$ . При дополнительном условии, что  $g(\alpha) \neq 0$ , частное этих функций  $f(x)/g(x)$  также непрерывная в точке  $\alpha$  функция.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $\alpha$  и принимает в ней значение  $\beta = f(\alpha)$ . Пусть далее функция  $g(x)$  непрерывна в точке  $\beta$ , тогда суперпозиция  $g(f(x))$  непрерывна в точке  $\alpha$ .

#### 4.10. Равномерная непрерывность.

В дальнейшем при изучении понятий определенного интеграла и функциональных рядов нам понадобится такое свойство непрерывных функций, называемое *равномерная непрерывность*, которое очень трудно сформулировать на языке последовательностей. Так как равномерная непрерывность представляет собой более сильное свойство непрерывности, чем обычная непрерывность в точке, мы вынуждены сформулировать свойство непрерывности функции в точке по-новому. Для удобства читателя приведем прежнее определение непрерывности функции в точке. Оно называется непрерывностью по Гейне по имени немецкого математика, следуя которому это свойство формулируют.

**Определение 1. Непрерывность по Гейне.** Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $\alpha$ , если для любой последовательности  $\{\alpha_n\}$ , сходящейся к  $\alpha$ , последовательность  $\{f(\alpha_n)\}$  значений этой функции сходится к  $f(\alpha)$ .

Ниже дано новое определение непрерывности. Оно называется свойством непрерывности по Коши.

**Определение 2. Непрерывность по Коши.** Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $\alpha$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая  $\delta$ -окрестность  $A_\delta$  точки  $\alpha$ , что  $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$  для всех  $x \in A_\delta$ , т.е. для всех  $x$  таких, что  $|x - \alpha| < \delta$ .

Окрестность  $A_\delta$ , о которой говорится в определении, или, что то же самое, число  $\delta$ , зависит, вообще говоря, и от  $\varepsilon$ , и от точки  $\alpha$ .

**Теорема об эквивалентности определений непрерывности по Гейне и Коши.** Определения непрерывности функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

Рассмотрим теперь некоторое подмножество  $A$  из области определения функции  $f(x)$ . Такое подмножество может быть отрезком  $[a, b]$ , или интервалом  $(a, b)$ , или полуинтервалом  $[a, b)$  и т.п. Если на множестве  $A$  число  $\delta(\varepsilon, a)$  на самом деле не зависит от точки  $a$ , то мы приходим к новому свойству непрерывности функций.

**Определение.** Если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что при  $|x - y| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  каковы бы ни были точки  $x$  и  $y$ , принадлежащие подмножеству  $A$ , функция  $f(x)$  называется равномерно непрерывной на множестве  $A$ .

Оказывается, что если подмножество  $A$  есть отрезок, то понятия непрерывности в точках отрезка и равномерной непрерывности совпадают.

**Теорема Кантора.** Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна в любой точке отрезка  $[a, b]$ , то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

## 5. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИЙ

Точки разрыва функции могут быть определены как точки, в которых функция не является непрерывной. Однако это по существу правильное определение недостаточно конструктивно в том смысле, что не позволяет производить классификацию точек разрыва по их свойствам. Кроме того, рассматриваемое определение предполагает, что точки разрыва принадлежат области определения функции. Полезно дать более общее определение точек разрыва, основанное на понятии предела функции.

### 5.1. Предел функции.

Дадим определение точки сгущения множества. Пусть  $A$  есть некоторое множество вещественных чисел.

**Определение.** Число  $\alpha$  называется точкой сгущения множества  $A$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\alpha$  имеется хотя бы одно число из множества  $A$  отличное от  $\alpha$ .

В качестве примера рассмотрим полуинтервал  $A = [0, 1)$ . Любое число этого полуинтервала является точкой сгущения множества  $A$ . Кроме того, число 1, не принадлежащее полуинтервалу  $[0, 1)$ , также является точкой сгущения множества  $A$ . Других точек сгущения у рассматриваемого полуинтервала нет.

Очевидно, что если число  $\alpha$  является точкой сгущения множества  $A$ , то существует хотя бы одна последовательность не совпадающих с  $\alpha$  точек множества  $A$ , сходящаяся к  $\alpha$ .

**Определение.** Пусть  $\alpha$  точка сгущения области определения  $D(f)$  функции  $f(x)$ . Число  $\beta$  называется предельным значением (пределом) функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ , если для любой последовательности  $\{\alpha_n\}$ , сходящейся к  $\alpha$ , последовательность  $\{f(\alpha_n)\}$  значений функции сходится к  $\beta$ .

Если число  $\beta$  является предельным значением функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ , то это записывается в виде  $\beta = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ .

Используя понятие предела функции, можно следующим образом переформулировать определение непрерывности функции в точке и дать определение точки разрыва.

**Определение.** Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $\alpha$  своей области определения, если предел  $f(x)$  в точке  $\alpha$  равен  $f(\alpha)$ .

Если предела функции в точке  $\alpha$  не существует или он существует, но не совпадает с  $f(\alpha)$ , то говорят, что функция  $f(x)$  терпит разрыв в точке  $\alpha$ .

Более мощным инструментом изучения точек разрыва функций по сравнению с понятием предела функции являются понятия левого и правого предела функции в точке.

**Определение.** Число  $\beta$  называется левым (правым) предельным значением (пределом) функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ , если для любой сходящейся к  $\alpha$  последовательности  $\{\alpha_n\}$  чисел из области определения функции, которые строго меньше (больше), чем  $\alpha$ , последовательность  $\{f(\alpha_n)\}$  значений функции сходится к  $\beta$ .

Для левого предела функции пользуются обозначением  $\lim_{x \rightarrow \alpha-0} f(x)$ , или обозначением  $f(\alpha-0)$ , а для правого предела обозначением  $\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x)$ , или  $f(\alpha+0)$ .

**Теорема о существовании предела функции.** Необходимым и достаточным условием существования предела функции в точке  $\alpha$  является существование как правого, так и левого пределов функции в этой точке и их совпадение.

## 5.2. Устранимые разрывы. Доопределение функции по непрерывности.

Простейшими точками разрыва функций являются устранимые разрывы.

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет в точке  $\alpha$  устранимый разрыв, если предельное значение  $\beta = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$  рассматриваемой функции в точке  $\alpha$  существует, но в точке  $\alpha$  функция или не определена, или ее значение  $f(\alpha)$  не совпадает с предельным значением  $\beta$ .

Устранимые разрывы появляются, например, тогда, когда функция определена математической формулой, не имеющей прямого смысла в отдельных точках.

**Второй замечательный предел.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad (5.1)$$

Формулой (5.1) функция  $f(x)$  определена для всех вещественных чисел за исключением 0. Покажем, что в точке 0 существует предельное значение рассматриваемой функции. Более того, справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (5.2)$$

Соотношение (5.2) называется *вторым замечательным пределом*.

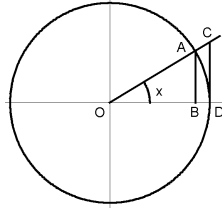


Рис.1.5.1

Для того, чтобы доказать (5.2) обратимся к Рис.1.5.1.

Предположим, что  $0 < x < \pi/2$ . Рассматривая прямоугольные треугольники  $OAB$ ,  $OCD$  с острым углом при вершине  $O$  равным  $x$  и криволинейный треугольник  $OAD$ , одной стороной которого является дуга окружности, приходим к неравенствам

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (5.3)$$

Разделив все члены неравенств (5.3) на положительное число  $\sin x$ , получаем неравенства

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (5.4)$$

Система неравенств (5.4) эквивалентна системе

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

или системе

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x. \quad (5.5)$$

Рассмотрим теперь произвольную последовательность  $\{\alpha_n\}$ , сходящуюся к нулю, все элементы которой положительны. В силу непрерывности функции  $\cos x$  и в силу того, что  $\cos 0 = 1$ , непосредственно из неравенств (5.5) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} = 1. \quad (5.6)$$

Равенство (5.6) означает, что правый предел рассматриваемой функции существует и равен 1. Аналогично доказывается существование и равенство 1 левого предела. Таким образом, функция (5.1) имеет в точке 0 устранимый разрыв.

Если функция не определена в точке устранимого разрыва, то точку устранимого разрыва можно превратить в точку непрерывности, если доопределить функцию в точке разрыва, положив ее значение в рассматриваемой точке равным пределу функции. Можно также переопределить значение функции в точке разрыва, если она в ней определена, но ее значение не совпадает с пределом функции. Этот метод устранения точки разрыва называется *доопределением функции по непрерывности*.

### 5.3. Разрывы первого рода.

Перейдем к изучению других типов точек разрыва функций.

**Определение.** Точка  $\alpha$  сгущения области определения функции  $f(x)$  называется *точкой разрыва первого рода*, если функция  $f(x)$  имеет в ней конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы:

$$f(\alpha - 0) \neq f(\alpha + 0).$$

Функция  $\operatorname{sgn} x = x/|x|$ , принимающая значение 1 при  $x > 0$ , значение  $-1$  при  $x < 0$  и не определенная при  $x = 0$ , доставляет пример функции, имеющей разрыв первого рода в точке  $x = 0$  (см. Рис.1.5.2).

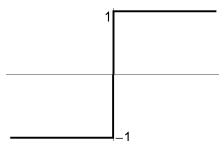


Рис.1.5.2

Как бы мы ни доопределяли значение функции  $\operatorname{sgn} x$  в нуле, мы не приходим к непрерывной в точке 0 функции.

В приложениях математического анализа с помощью разрывов первого рода моделируются, например, изменения физических величин, происходящие за времена, пренебрежимо малые по сравнению с характерными временами изучаемых процессов (импульсы). Возможно также моделирование изменений, сосредоточенных на расстояниях много меньших характерных (ударные волны).

**Радиосигналы.** Радиолокационная станция посылает сигналы в виде последовательности импульсов. Примем продолжительность сигнала  $T_c$  равной

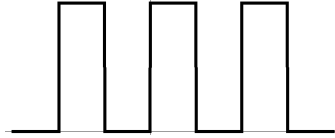


Рис.1.5.3

длительности паузы между сигналами  $T_p = \pi$ . Тогда функция  $\sin t / |\sin t| + 1$  вполне может описывать изменение сигнала во времени (см. Рис.1.5.3).

Одно из устройств радиолокационной станции генерирует “пилообразные” сигналы. Зависимость интенсивности сигнала от времени может задаваться формулой  $t - \text{Floor}[t]$ , где функция  $\text{Floor}[t]$  имеет значением наибольшее целое число меньше или равное  $t$ . Эскиз графика рассматриваемой функции представлен на Рис.1.5.4.

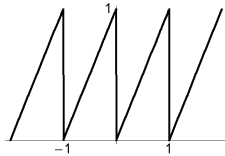


Рис.1.5.4

Обе рассмотренные функции имеют разрывы первого рода.

#### 5.4. Разрывы второго рода.

Последними в нашей классификации разрывов функций являются разрывы второго рода.

**Определение.** Точка  $\alpha$  называется точкой разрыва второго рода функции  $f(x)$ , если в этой точке не существует хотя бы одного, левого или правого, пределов этой функции.

Классическим примером функции, имеющей разрыв второго рода, является функция  $\sin(1/x)$ . Эта функция не определена и не имеет ни левого, ни пра-

вого пределов в точке  $x = 0$ . В самом деле, рассмотрим две последовательности  $a_n = 1/(n\pi)$  и  $b_n = 2/((4n + 1)\pi)$  положительных чисел, сходящиеся к нулю. Справедливы равенства  $\sin(1/a_n) = 0$  и  $\sin(1/b_n) = 1$ . Следовательно, у рассматриваемой функции нет предела справа. Взяв последовательности  $-a_n$  и  $-b_n$ , убедимся в отсутствии предела слева. Интуитивное впечатление о поведении изучаемой функции в окрестности нуля можно получить, рассматривая эскиз ее графика на Рис.1.5.5.

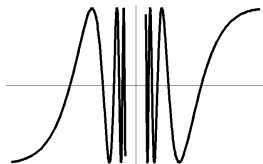


Рис.1.5.5

Разрыв функции обусловлен наличием бесконечного числа колебаний в любой  $\varepsilon$ -окрестности нуля. Разумеется, ни на каком эскизе графика невозможно нарисовать бесконечное множество колебаний функции, поэтому на рисунке показана лишь часть таких колебаний.

Разрыв второго рода имеет место также тогда, когда одно или оба предельных значения функции бесконечны. Утверждение, что, скажем, левый предел бесконечен, означает следующее. Для любой последовательности  $\alpha_n$ , сходящейся к точке сгущения  $\alpha$ , все члены которой меньше  $\alpha$ , последовательность  $f(\alpha_n)$  бесконечно большая.

Рассмотрим, например, дробно рациональную функцию

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{10x + 1}. \quad (5.7)$$

Точка  $\alpha = -0.1$  не принадлежит области определения функции  $g(x)$ , но является точкой сгущения ее области определения  $(-\infty, -0.1) \cup (-0.1, +\infty)$ . Рассмотрим произвольную последовательность  $a_n$ , все элементы которой больше  $-0.1$ , сходящуюся к  $\alpha$ . Для рассматриваемой последовательности справедливо неравенство  $10a_n + 1 > 0$ .

Для достаточно больших  $n$  выполняется неравенство  $a_n < 1$ , поэтому  $a_n^3 - 1 < 0$  и

$$\frac{a_n^3 - 1}{10a_n + 1} < 0. \quad (5.8)$$



Многочлен второй степени  $x^3 - 1$  непрерывен в точке  $\alpha$ , поэтому последовательность  $a_n^3 - 1$  сходится к  $-1.001$ , а обратная к ней последовательность  $(a_n^3 - 1)^{-1}$  сходится к  $(-1.001)^{-1}$ .

Сходящаяся последовательность  $(a_n^3 - 1)^{-1}$  ограничена. Следовательно, последовательность  $(a_n^3 - 1)^{-1}(10a_n + 1)$  по Теореме о бесконечно малых последовательностях параграфа 3.3 главы 3 бесконечно малая. Следовательно, обратная к ней последовательность (5.8) бесконечно большая. Все ее члены для достаточно больших  $n$  отрицательны. Таким образом, для рассматриваемых последовательностей последовательность (5.8) стремится к  $-\infty$ .

Аналогично доказывается, что предел слева функции  $g(x)$  в точке  $\alpha = -0,1$  равен  $+\infty$ .

### 5.5. Функция Дирихле.

Как мы знаем, вещественные числа бывают рациональными и иррациональными. Такое разделение множества вещественных чисел на два непересекающихся класса позволяет определять функции вещественного аргумента с весьма необычными свойствами.

Рассмотрим знаменитую функцию Дирихле

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное число} \end{cases} \quad (5.9)$$

Здесь мы встречаемся с корректно определенной функцией, но ее определение неконструктивно в том смысле, что для того, чтобы найти значение  $\delta(x)$  для конкретного значения аргумента, нужно уметь определять, рационально или иррационально заданное число. Общего метода установления рациональности или иррациональности вещественных чисел нет. Мы знаем, что корни любой натуральной степени из простых чисел суть иррациональные числа, поэтому легко вычисляем, например, что  $\delta(\sqrt{3}) = 0$ . Число  $\pi$  иррациональное число, поэтому  $\delta(\pi) = 0$ . Но как вычислить  $\delta(\pi\sqrt{3})$ ?

Тем не менее, не вычисляя  $\delta(x)$ , можно сделать утверждение: *функция Дирихле имеет разрыв второго рода во всех точках*. В самом деле, если  $\{\alpha_n\}$  сходящаяся к точке сгущения  $\alpha$  последовательность рациональных чисел, то последовательность  $\delta(\alpha_n)$  сходится к 1, а если  $\{\alpha_n\}$  состоит из иррациональных чисел, то  $\delta(\alpha_n)$  сходится к нулю. Следовательно, в любой вещественной точке функция Дирихле не имеет ни левого, ни правого пределов.

## 6. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ 1

В этой главе содержатся описания лабораторных работ по материалу первого раздела книги.

### Лабораторная работа 1. Изучение натуральных и целочисленных последовательностей.

В лабораторной работе используется наглядное изображение числовых последовательностей с помощью их графиков с целью изучения свойств последовательностей. Свойства последовательностей обсуждаются в главе 2 Раздела 1 книги.

Для анализа последовательностей используется команда **GraphSequence**, созданная на основе команды **ListPlot** системы “Математика”.

Рассматриваемая команда **GraphSequence[SequenceFormula[sequence], IndexRange[var, varmin, varmax]]** строит график последовательности **sequence**. Последовательность задается либо с помощью формулы для общего члена последовательности, либо рекуррентно.

Во втором аргументе команды указываются имя **var** переменной, принимающей натуральные значения и являющейся аргументом выражения **sequence**. Например, **var** может принимать значения  $n$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $j$  и т.д. Вторым **varmin** и третий **varmax** элементы суть минимальное и максимальное значения переменной **var**, для которых строится график последовательности.

Команда **GraphSequence** может иметь опциональный, т.е. не обязательно указываемый аргумент **Bounds[u, v]**. Если этот аргумент задан последним в списке аргументов команды **GraphSequence**, то на рисунке появятся две пунктирные прямые линии, параллельные оси абсцисс. Одна линия имеет уравнение  $y = u$ , другая – уравнение  $y = v$ . Такие линии бывают полезны при изучении свойств последовательностей.

Если первый аргумент команды имеет вид **Sequences[sequence1, sequence2]**, то команда **GraphSequence** строит графики сразу двух последовательностей на одном рисунке. Это позволяет визуально сравнивать последовательности.

С методической точки зрения важно подчеркнуть, что изучение конечных отрезков последовательностей позволяет лишь выдвинуть гипотезы относительно поведения последовательности. Эти гипотезы нуждаются в теоретическом доказательстве или опровержении с помощью традиционных математических средств.

Поэтому выполнение лабораторной работы состоит из двух частей. Первая часть экспериментальная, в которой на основе изучения графиков конечных

отрезков последовательностей выдвигаются гипотезы о свойствах последовательностей. Во второй, теоретической части высказанные гипотезы строго доказываются.

### Задания.

Исследовать свойства следующих последовательностей.

1)  $a_n = 2 + 3(n - 1)$  – арифметическая прогрессия с первым членом 2 и разностью 3.

2)  $S_n = \frac{1+3n}{2} n$  – сумма первых  $n$  членов прогрессии первого задания. Сравните скорости роста прогрессии и ее сумм.

3)  $a_n = 2 * 3^{n-1}$  – геометрическая прогрессия с первым членом 2 и знаменателем 3.

4)  $S_n = 3^{n-1} - 1$  – сумма членов прогрессии предыдущего задания. Сравните скорость роста прогрессии и ее сумм.

5)  $a_n = \mathbf{GCD}[n, 6]$ , где  $\mathbf{GCD}[n, m]$  команда пакета “Математика”, вычисляющая наибольший общий делитель чисел  $n$  и  $m$ .

6)  $a_n = n^2 \mathbf{Mod}[n, 5]$ , где  $\mathbf{Mod}[n, m]$  команда пакета “Математика”, вычисляющая остаток от деления  $n$  на  $m$ .

7)  $a_n = \mathbf{Prime}[n]$ , где  $\mathbf{Prime}[n]$  команда пакета “Математика”, вычисляющее  $n$ -е по счету в порядке возрастания простое число.

### Образец выполнения лабораторной работы.

**Задание.** Изучить свойства последовательности

$$a_n = \mathbf{LCM}[n, 8],$$

где  $\mathbf{LCM}[n, m]$  команда пакета “Математика”, вычисляющая наименьшее общее кратное чисел  $n$  и  $m$ .

**Выполнение.** Изобразим в виде точек натуральной координатной плоскости первые пятьдесят элементов графика изучаемой последовательности. Для этого выполняем команду

`GraphSequence[SequenceFormula[LCM[n, 8]], IndexRange[n, 1, 50]];`

После выполнения команды получаем рисунок Рис.1.6.1.

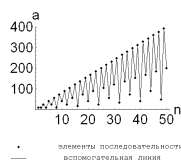


Рис. 1.6.1

На рисунке содержится совокупность точек, которыми отмечены элементы графика изучаемой последовательности. Они соединены вспомогательной тонкой линией, помогающей определить, какая точка графика следует за какой в порядке возрастания номера члена последовательности.

Точки графика расположены на четырех прямых. Самая верхняя прямая отвечает элементам последовательности, чей номер  $n$  не делится на 2, поэтому для таких номеров  $\text{LCM}[n, 8] = 8n$ . Под ней расположена прямая, где номер элемента последовательности делится на два, но не делится на четыре. Для этих номеров  $\text{LCM}[n, 8] = 4n$ . На самой нижней прямой лежат точки графика, отвечающие элементам последовательности, чей номер делится на 8, и, следовательно,  $\text{LCM}[n, 8] = n$ .

Визуальное изучение графика последовательности позволяет высказать гипотезу, что последовательность бесконечно большая. Для подкрепления этой гипотезы проведем, например, линии  $y = 0$  и  $y = 50$  и увеличим число членов последовательности до 100 с тем, чтобы убедиться, что все члены рассматриваемой последовательности с достаточно большими номерами располагаются выше пунктирной линии  $y = 50$  (см. Рис. 1.6.2), т.е. для соответствующих элементов последовательности выполняется неравенство  $a_k > 50$ .

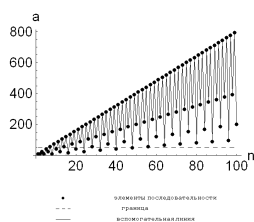


Рис. 1.6.2

Подтвердить гипотезу о том, что последовательность бесконечно большая, позволяет также выполнение команды

**GraphSequence[Sequences[LCM[n, 8], n], IndexRange[n, 1, 50]]**

строющей графики сразу двух последовательностей и вычисляющей рисунок Рис.1.6.3.

Видно, что все точки графика последовательности расположены выше точек графика бесконечно большой последовательности  $b_n = n$ .

Докажем, что рассматриваемая последовательность бесконечно большая. Доказательство основывается на неравенстве  $\text{НОК}(n, 8) \geq n$ . Отсюда получаем, что, каково бы ни было натуральное число  $K$ , неравенство  $\text{НОК}(n, 8) \geq K$  выполняется при  $n \geq K$ .

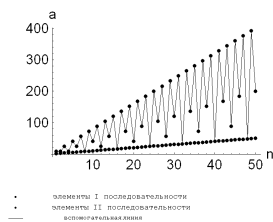


Рис. 1.6.3

## Лабораторная работа 2. Исследование рациональных последовательностей.

В настоящей лабораторной работе, как и в предыдущей, для изучения свойств последовательностей используется их визуализация. Последняя осуществляется с помощью описанной в лабораторной работе 1 команды **GraphSequence**.

### Задания.

Исследовать свойства следующих последовательностей.

- |  |                          |
|--|--------------------------|
| 1) $\frac{(-1)^n}{2n+1}$               | 6) $\frac{n^2}{2^n}$     |
| 2) $\frac{(-1)^n n}{2n+1}$             | 7) $\frac{3^n + 1}{3^n}$ |
| 3) $\frac{3n^2 + 1}{5n^2 - 1}$         | 8) $\frac{10^n}{n^n}$    |
| 4) $\frac{(-1)^n n^2}{n^3 + 2n^2 - 1}$ | 9) $\frac{10^k}{k!}$     |
| 5) $\frac{(-1)^n}{2^n}$                | 10) $\frac{k!}{k^k}$     |

### Образец выполнения лабораторной работы.

**Задание.** Исследовать свойства последовательности

$$a_n = \frac{2^n}{n!}.$$

**Выполнение.** Составим представление о характере последовательности, нарисовав график отрезка последовательности.

$$\text{GraphSequence} \left[ \text{SequenceFormula} \left[ \frac{2^n}{n!} \right], \text{IndexRange} [n, 1, 50] \right]$$

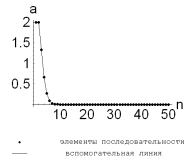


Рис.1.6.4

В результате выполнения команды получаем график Рис. 1.6.4.

График показывает, что, начиная со второго элемента, последовательность, монотонно убывает, оставаясь положительной. Более того, видно, что начиная с шестого элемента последовательности все элементы последовательности с большими номерами становятся меньше 0.1. Чтобы подтвердить наше наблюдение, выполним команду

**GraphSequence** [ **SequenceFormula**[ $\frac{2^n}{n!}$ ], **IndexRange**[ n, 6, 50], **Bounds**[0, 0.1] ]

и получим рисунок 1.6.5.

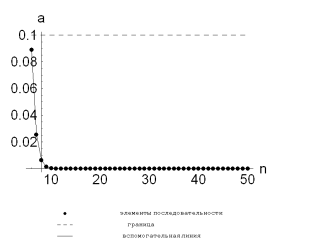


Рис.1.6.5

Из рисунка следует, что начиная с восьмого элемента все члены последовательности становятся меньшими одной сотой. Высказываем гипотезу, что рассматриваемая последовательность бесконечно малая.

Докажем справедливость высказанной гипотезы. Для этого заметим, что элементы рассматриваемой последовательности удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n.$$

Отсюда следует, что

$$a_{n+1} < \frac{2}{3} a_n, \quad \text{при } n \geq 2$$

Из последнего неравенства получаем оценку

$$a_n \leq 2 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-2}.$$

Таким образом, положительная последовательность  $a_n$  меньше убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $2/3$ . Поскольку геометрическая прогрессия со знаменателем меньшим единицы есть бесконечно малая последовательность, то и последовательность  $a_n$  бесконечно малая.

### Лабораторная работа 3. Радикалы.

В заданиях лабораторной работы требуется вычислить радикалы из натуральных чисел с заданной точностью. Метод вычисления подробно объясняется в главе 3 настоящего раздела на примере иррационального числа  $\sqrt{2}$ . Он состоит в построении отрезков двух последовательностей  $a_n, b_n$  конечных десятичных дробей, которые образуют десятичное представление иррационального числа.

Вычисления опираются на способность системы “Математика” проводить абсолютно точные вычисления, т.е. вычисления без округлений, с рациональными числами. Так, результатом возведения числа  $2/3$  в двадцатую степень в “Математике” будет рациональное число  $1048576/3486784401$ . Его конвертирование в десятичную дробь возможно с любым числом значащих цифр и осуществляется с помощью команды **N**. Например, выполнение команды

$$\mathbf{N} \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{20}, 17 \right]$$

имеет результатом число 0.00030072865982171749, имеющее семнадцать верных значащих цифр после запятой.

В работе используется команда **Radical[radical, Approximations[a, b]]**, где **radical** есть корень какой-либо степени, десятичное представление которого нужно найти, **a, b** приближения с недостатком или с избытком соответственно. Результатом выполнения команды является таблица  $k$ -х степеней чисел (для корня  $k$ -ой степени) от числа  $a$  до числа  $b$  с шагом  $(b - a)/10$ . Эта таблица и используется для нахождения приближенных значений радикалов с заданной точностью.

#### Задания.

Вычислить с погрешностью, не превосходящей  $10^{-7}$ , следующие радикалы.

- |    |               |    |                |
|----|---------------|----|----------------|
| 1) | $\sqrt[3]{3}$ | 4) | $\sqrt[3]{10}$ |
| 2) | $\sqrt[5]{5}$ | 5) | $\sqrt[8]{9}$  |
| 3) | $\sqrt[7]{7}$ |    |                |

### Образец выполнения лабораторной работы.

**Задание.** Вычислить с погрешностью, не превосходящей  $10^{-6}$ , радикал  $\sqrt[5]{10}$ .

**Выполнение.** Поскольку  $1^5 = 1$ , а  $2^5 = 32$  первые члены последовательностей  $a_n$  и  $b_n$  для искомого радикала равны 1 и 2 соответственно. Для нахождения вторых членов последовательностей выполняем команду

**Radical**[ $\sqrt[5]{10}$ , **Approximations**[1, 2]],

которая порождает на экране компьютера следующую таблицу

1.	1.
1.1	1.61051
1.2	2.48832
1.3	3.71293
1.4	5.37824
1.5	7.59375
1.6	10.48576
1.7	14.19857
1.8	18.89568
1.9	24.76099
2.	32.

Таблица показывает, что  $1.5^5 < 10 < 1.6^5$ , поэтому с погрешностью, не превосходящей 0.1, число 1.5 дает значение  $\sqrt[5]{10}$  с недостатком, а число 1.6 с избытком. Далее выполняем команду

**Radical**[ $\sqrt[5]{10}$ , **Approximations**[1.5, 1.6]],

с результатом в виде таблицы

1.5	7.59375
1.51	7.850272575
1.52	8.113681203
1.53	8.384113599
1.54	8.661709302
1.55	8.946609688
1.56	9.238957978
1.57	9.538899265
1.58	9.846580477
1.59	10.16215048
1.6	10.48576



Из таблицы следует, что  $1.58 < \sqrt[5]{10} < 1.59$ . Погрешность вычисления меньше, чем 0.01. Применяя команду **Radical** еще четыре раза, в результате последнего вычисления

$$\mathbf{Radical}[\sqrt[5]{10}, \mathbf{Approximations}[1.58489, 1.5849]],$$

находим, что ответом на поставленную задачу будет неравенство  $1.584893 < \sqrt[5]{10} < 1.584894$ .

#### **Лабораторная работа 4. Арифметические операции с вещественными числами.**

В задачах данной лабораторной работы требуется построить несколько первых элементов последовательностей  $u_n$ ,  $v_n$  десятичных дробей, образующих десятичные представления результатов арифметических операций с вещественными иррациональными числами. Теоретический материал для заданий содержится в параграфах 3.4, 3.5, 3.9 - 3.13 главы 3.

##### **Задания.**

Вычислить первые пять элементов десятичных представлений следующих иррациональных вещественных чисел.

- 1)  $\frac{1}{e^2}$ , 2)  $\frac{1}{e^3}$ , 3)  $\pi$  4)  $\pi^2$  5)  $\frac{1}{\pi}$ , 6)  $\frac{1}{\pi^2}$  7)  $\pi + e$ , 8)  $\pi - e$ , 9)  $\pi e$ , 10)  $\frac{\pi}{e}$ .

**Указание.** При вычислениях использовать следующие канонические пары рациональных последовательностей, представляющих числа  $e$  и  $\pi$ .

Для числа  $e$  последовательности

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (6.1)$$

Для числа  $\pi$  – последовательности

$$c_n = 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1}\right), \quad d_n = 4 + 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k-1}\right).$$

Для разности последовательностей  $b_n$  и  $a_n$  справедливы неравенства  $0 < b_n - a_n < 3/n$ , а разность  $d_n - c_n = 4/(4n-1)$ .

##### **Образец выполнения лабораторной работы.**

**Задание.** Вычислить элементы  $u_1, \dots, u_5, v_1, \dots, v_5$  последовательностей  $u_n, v_n$ , входящих в десятичное представление числа  $1/e = e^{-1}$ .

**Выполнение.** Введем последовательности (6.1) в компьютер, выполняя команду

$$\mathbf{a[n_]} := \left(1 + \frac{1}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}; \quad \mathbf{b[n_]} := \left(1 + \frac{1}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}+1}$$

Число  $1/e$  представляет каноническая пара последовательностей  $(1/b_n, 1/a_n)$ . Для разности этих последовательностей справедливо неравенство

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - a_n}{b_n a_n} < \frac{3}{4n}, \quad (6.2)$$

так как в силу неравенства (3.4)  $b_n - a_n < 3/n$ , и, кроме того,  $a_n > 2$ ,  $b_n > 2$ .

Элементы последовательностей  $u_n, v_n$  вычисляются с помощью формул (3.8) главы 3:

$$u_n = \frac{F(10^{n-1} e^{-1})}{10^{n-1}}, \quad v_n = \frac{C(10^{n-1} e^{-1})}{10^{n-1}},$$

где  $F(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$  пол и потолок для вещественного числа  $\alpha$ .

Для вычисления элемента  $u_1$  требуется найти  $F(e^{-1})$ . Для этого нужно найти такие элементы  $b[n]$  и  $a[n]$ , чтобы разность  $1/a_n - 1/b_n$  была бы меньше единицы и между  $1/b_n$  и  $1/a_n$  не содержалось бы целого числа.

В силу неравенства (6.2) расстояние между всеми элементами  $1/b_n$  и  $1/a_n$  меньше единицы. Поэтому вычисляем  $1/a_1$  и  $1/b_1$ , выполняя команду

$$\left\{ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b[1]}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a[1]}} \right\}$$

с результатом

$$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$$

Между числами  $1/4$  и  $1/2$  нет целого числа, поэтому  $F(e^{-1}) = 0$ ,  $C(e^{-1}) = 1$ , и первые элементы десятичного представления числа  $e^{-1}$  равны  $u_1 = 0$ ,  $v_1 = 1$ . Таким образом, выполняются неравенства  $0 < 1/e < 1$ .

Чтобы найти вторые элементы  $u_2$  и  $v_2$ , т.е. найти  $F(10 e^{-1})$ , принимаем во внимание, что при  $n > 30/4$ , т.е. при  $n \geq 8$ , выполнено неравенство  $10/a_n - 10/b_n < 1$ . Вычисляем поэтому

$$\left\{ \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{b[8]}}, \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{a[8]}} \right\}$$

с результатом

$$\left\{ \frac{1342177280}{387429489}, \frac{167772160}{43046721} \right\}$$

Величину полученных дробей трудно оценить, поэтому прибегаем к десятичному представлению этих дробей (с округлением)

$$\left\{ \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{b[8]}}, \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{a[8]}} \right\} // \mathbf{N}$$

$$\{3.46439, 3.89744\}$$

Между этими числами нет целого, поэтому  $F(10 e^{-1}) = 3$ . Следовательно,  $u_2 = 0.3$ ,  $v_2 = 0.4$  и  $0.3 < e^{-1} < 0.4$ .

Для вычисления  $F(100 e^{-1})$  находим  $100/b_{76}$  и  $100/a_{76}$ , так как при  $n > 300/4 = 75$  выполняется неравенство  $100/a_n - 100/b_n < 1$ .

$$\left\{ \frac{100}{b[76]}, \frac{100}{a[76]} \right\}$$

что дает в результате

$$\{36.5478, 37.0287\}$$

Между полученными числами лежит целое число 37, поэтому неясно, превзойдут ли элементы последовательности  $1/a_n$  это число 37 (тогда  $F(100 e^{-1}) = 37$ ) или же элементы последовательности  $1/b_n$  станут меньше, чем 37 (тогда  $F(100 e^{-1}) = 36$ ). Увеличиваем поэтому номер  $n$  и для  $n = 90$  получаем

$$\left\{ \frac{100}{b[90]}, \frac{100}{a[90]} \right\}$$

$$\{36.5849, 36.9914\}$$

Это означает, что  $F(100 e^{-1}) = 36$ , поэтому  $u_3 = 0.36$ ,  $v_3 = 0.37$ ,  $0.36 < e^{-1} < 0.37$ .

Для получения элементов  $u_4$ ,  $v_4$  приходится вычислить

$$\left\{ \frac{1000}{b[1550]}, \frac{1000}{a[1550]} \right\}$$

что дает в результате

$$\{367.761, 367.998\}$$

Это означает, что  $u_4 = 0.367$ ,  $v_4 = 0.368$ ,  $0.367 < e^{-1} < 0.368$ .

Для получения элементов  $u_5$ ,  $v_5$  вычисляем

$$\left\{ \frac{10000}{b[10000]}, \frac{10000}{a[10000]} \right\}$$

что приводит к значениям

$$\{3678.61, 3678.98\}$$

Поэтому  $u_5 = 0.3678$ ,  $v_5 = 0.3679$ ,  $0.3678 < e^{-1} < 0.3679$ .

### **Лабораторная работа 5. Изучение вещественных последовательностей.**

Содержание этой лабораторной работы аналогично содержанию лабораторных работ, посвященных исследованию целочисленных и рациональных последовательностей. Используется команда **GraphSequence**. Поэтому мы приводим здесь только задания.

**Задания.** Исследовать свойства следующих последовательностей.

1)  $n \sin \frac{n \pi}{3}$

2)  $2^{-n} \cos n \pi$

3)  $\frac{\sin \frac{(2n-1) \pi}{2}}{n}$

4)  $\sqrt[n]{n}$

5)  $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

6)  $\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$

7)  $\frac{3n + 1}{\sqrt{3n^2 + 1}}$

8)  $n(n - \sqrt{n^2 - 1})$

9)  $\frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$

10)  $\sqrt{n} + \frac{10}{n}$

### Лабораторная работа 6. Непрерывность функций. Точки разрыва.

Для изучения непрерывности и точек разрыва функций используется команда **FunctionLimit**[ функция, интервал, последовательность, номера членов последовательности], которая позволяет понять принцип исследования непрерывности функции с помощью последовательностей точек ее графика. Аргументами команды являются. 1) Функция, заданная средствами языка пакета "Математика". 2) Интервал, содержащий точку  $a$ , в которой изучается непрерывность. 3) Последовательность, сходящаяся к точке  $a$ , а также 4) отрезок этой последовательности.

Результатом выполнения команды **FunctionLimit** будет рисунок, на котором фиолетовыми точками на оси абсцисс будут отмечены элементы последовательности, а синими точками - точки графика функции, отвечающие элементам последовательности. Изучение графиков позволяет высказывать гипотезы о непрерывности или о наличии разрыва функции в изучаемой точке.

### Задания

С помощью команды **FunctionLimit** исследуйте пределы и непрерывность в точке  $x = 0$  следующих функций, заданных на интервале  $(0, 1)$ , за исключе-

нием, быть может, точки  $x = 0$ .

- 1)  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$
- 2)  $x|x| + 1$  (в “Математике” модуль числа  $x$  записывается как `Abs[x]`)
- 3)  $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$
- 4)  $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$  (в “Математике” функция `arctg` записывается как `ArcTan`)
- 5)  $-x + \operatorname{arctg}(10^4 x)$
- 6)  $\frac{1 - \cos x}{1 - \cos 2x}$
- 7)  $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$
- 8)  $\frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{3x+1}}{6x}$
- 9)  $\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{1+x}}$
- 10)  $x \operatorname{ctg} x$  (в “Математике” функция `ctg` записывается как `Cot`)

### Образец выполнения лабораторной работы.

**Задание.** Определим функцию  $f(x)$  соотношениями

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{-\sqrt{-10^5 x + 4} \sqrt{-10^5 x} + 10^5 x}{2} + 2 \quad \text{при } x \leq 0, \\
 f(x) &= \frac{\sqrt{10^5 x + 4} \sqrt{10^5 x} - 10^5 x}{2} + 2 \quad \text{при } x > 0
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Исследовать непрерывность этой функции в точке  $x = 0$ .

**Выполнение.** Прежде всего зададим функцию  $f(x)$  для “Математики”, выполнив команду

$$\mathbf{f[x_]} := \mathbf{If[x \le 0, \frac{-\sqrt{-10^5 x + 4} \sqrt{-10^5 x} - 10^5 x}{2} + 2, \frac{\sqrt{10^5 x + 4} \sqrt{10^5 x} - 10^5 x}{2} + 2]}$$

Выберем последовательность, сходящуюся к точке  $x = 0$ . Например, рассмотрим последовательность  $(-1)^n/n^2$ . После выполнения команды

$$\mathbf{FunctionLimit \left[ \mathbf{Function[f[x]], Interval[x, -0.1, 0.1], Sequence \left[ \frac{(-1)^n}{n^2} \right], \right.} \\
 \left. \mathbf{IndexRange[n, 2, 20]} \right]}$$

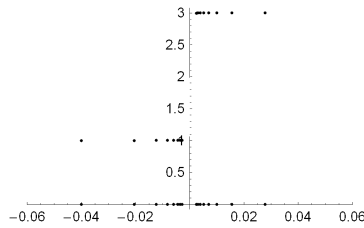


Рис.1.6.6

получаем рисунок Рис.1.6.6.

На полученном рисунке три серии точек. Точками на оси абсцисс отмечены элементы последовательности. Над ними находятся точки графика функции. Можно было бы сделать вывод о том, что предел функции слева равен 1, а справа 3, т.е. рассматриваемая функция терпит разрыв второго рода в точке  $x = 0$ .

Однако рассмотрим большее число элементов последовательности, например, 200.

$$\text{FunctionLimit} \left[ \text{Function}[f[x]], \text{Interval}[x, -0.1, 0.1], \text{Sequence} \left[ \frac{(-1)^n}{n^2} \right], \right. \\ \left. \text{IndexRange}[n, 2, 200] \right]$$

получаем рисунок Рис.1.6.7

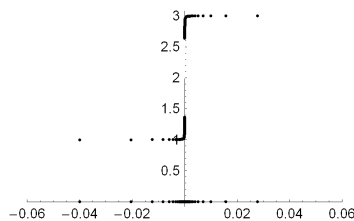


Рис.1.6.7

На полученном рисунке ясно видно, что последовательности точек графика слева и справа стремятся к одному пределу - двойке.

Для подкрепления гипотезы следует рассмотреть другие отрезки последовательности, номера элементов в которых больше, чем исследованные номера. Можно также рассмотреть последовательность  $c_n = (-1)^n/n^3$  или  $d_n =$

$(-1)^n/2^n$ , которые быстрее, чем ранее рассмотренная последовательность, сходятся к 0.

Высказанную гипотезу нетрудно доказать. Действительно, предел функции  $(\sqrt{-10^5 x + 4} \sqrt{-10^5 x + 10^5 x})$  в нуле слева равен нулю, поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0$ . Аналогичное замечание справедливо относительно предела справа функции  $(\sqrt{10^5 x - 4} \sqrt{10^5 x - 10^5 x})$  в точке  $x = 0$ .

Пределы функции  $f(x)$  в точке  $x = 0$  слева и справа и значение функции в нуле, вычисленное по формуле (6.3), совпадают. Следовательно, функция  $f(x)$  непрерывна в нуле.

### **Лабораторная работа 7. Применение метода бисекций для нахождения координат точек пересечения кривых на плоскости.**

В простейшем случае кривые на плоскости являются графиками функций. Пусть  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  две такие кривые. Абсциссы их точек пересечения являются корнями уравнения  $f(x) = g(x)$ . Если ввести функцию  $F(x) = f(x) - g(x)$ , то абсциссы точек пересечения будут корнями уравнения

$$F(x) = 0 \tag{6.4}$$

В лабораторной работе для нахождения приближенных значений корней уравнения (6.4) используется метод бисекций. Опишем его.

Пусть  $\alpha$  корень уравнения (6.4), т.е. выполняется равенство  $F(\alpha) = 0$ . Предположим, что существует отрезок  $[a, b]$  оси абсцисс, содержащий точку  $\alpha$ , такой, что функция  $F(x)$  непрерывна на этом отрезке и является либо монотонно убывающей, либо монотонно возрастающей. Это означает, в частности, что других корней функции  $F(x)$  на отрезке  $[a, b]$  нет.

Приведенный ниже алгоритм бисекций порождает две вещественные последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  со следующими свойствами:

- 1) Последовательность  $\{a_n\}$  неубывающая, а последовательность  $\{b_n\}$  невозрастающая.
- 2) Для любых номеров  $i, j$  выполняется неравенство  $a_i < b_j$ .
- 3) Разность  $b_n - a_n = 1/2^{n-1}$ , т.е.  $\{b_n - a_n\}$  бесконечно малая последовательность.
- 4) Последовательности  $F(a_n), F(b_n)$  бесконечно малые.

Таким образом, метод бисекций порождает последовательности  $\{a_n\}, \{b_n\}$  такие, что пара  $(a_n, b_n)$  для монотонно возрастающих функций  $F(x)$  либо пара  $(b_n, a_n)$  для монотонно убывающих функций представляет вещественное число  $\alpha$  – корень уравнения (1). Или, что то же самое, последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  сходятся к  $\alpha$ .

#### **Алгоритм бисекций.**

Зададим погрешность  $\varepsilon$  вычисления корня.

*Первый шаг.* Положим  $a_1 = a, b_1 = b$ .

*Второй шаг.* Рассмотрим точку  $c = (a + b)/2$  – середину отрезка  $[a, b]$ . Если знак числа  $F(c)$  совпадает со знаком числа  $F(a)$ , то положим  $a_2 = c, b_2 = b_1 = b$ . Если же знаки  $F(c)$  и  $F(a)$  противоположны, то положим  $a_2 = a_1 = a, b_2 = c$ . (На втором шаге отрезок, на котором находится корень, уменьшился вдвое по сравнению с первоначальным).

*Общий ((k + 1)-й) шаг.* Рассмотрим точку  $c_k = (a_k + b_k)/2$  – середину отрезка  $[a_k, b_k]$ . Если знак числа  $F(c_k)$  совпадает со знаком числа  $F(a_k)$ , то положим  $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k$ . Если же знаки  $F(c_k)$  и  $F(a_k)$  противоположны, то положим  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k$ . (Отрезок  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$  вдвое меньше отрезка  $[a_k, b_k]$ ).

Для элементов построенных последовательностей справедливы неравенства  $a_k \leq \alpha \leq b_k$ , т.е.  $a_k$  и  $b_k$  дают приближенные значения корня  $\alpha$  с недостатком или с избытком с погрешностью, не превосходящей  $1/2^{k-1}$ .

Общий шаг повторяется, пока выполняется неравенство  $(b - a)/2^k > \varepsilon$ .

Кривые на плоскости могут быть заданы неявными уравнениями вида  $\phi(x, y) = 0$ . Поэтому, если одна или обе кривых на плоскости задаются неявно, то уравнения  $\phi(x, y) = 0$  следует разрешить относительно  $y$ , получая одну или несколько функций  $y = f(x)$ , которые задают различные ветви одной кривой  $\phi(x, y) = 0$ .

Например, единичная окружность с центром в начале координат задается уравнением  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Разрешая его относительно  $y$ , получаем две функции  $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$  и  $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ , графики которых суть верхняя и нижняя части окружности.

### Задания.

1) Найти абсциссу точки пересечения *астроиды*  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$  и *восьмерки*  $y^2 = x^2 - x^4$ , расположенную в первом квадранте и отличную от точки  $A(1, 0)$ .

2) Найти абсциссу точки пересечения *астроиды*  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$  и *циссоиды*  $y^2 = x^3/(2 - x)$ , расположенную в первом квадранте.

3) Найти абсциссу точки пересечения *астроиды*  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$  и *жемчужины*  $y^2 = x^3(1 - x)$ , расположенную в первом квадранте.

4) Найти абсциссу точки пересечения *восьмерки*  $y^2 = x^2 - x^4$  и *циссоиды*  $y^2 = x^3/(2 - x)$ , расположенную в первом квадранте.

5) Найти абсциссу точки пересечения *восьмерки*  $y^2 = x^2 - x^4$  и *жемчужины*  $y^2 = 3x^3(1 - x)$ , расположенную в первом квадранте.

### Образец выполнения задания.

**Задание.** Найти абсциссу точки пересечения *астроиды*  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$  и *жемчужины*  $y^2 = x^3(1 - x)$ , расположенной в первом квадранте.

**Выполнение.** Нарисуем заданные кривые. Из уравнения *астроиды* следует, что для точек *астроиды* выполняются неравенства  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ , а для точек *жемчужины*  $0 \leq x \leq 1$ .

Воспользуемся командой системы “Математика” называемой **ImplicitPlot**. Она не является непосредственно доступной с момента запуска “Математики” и подгружается специальной командой

<< **Graphics‘ImplicitPlot‘**

Для удобства дальнейших вычислений присваиваем символам *astroid* и *perl* значения уравнений соответствующих кривых.

**astroid** =  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$ ;    **perl** =  $y^2 = x^3(1 - x)$ ;



Далее выполняем графическое вычисление.

`ImplicitPlot[{astroid, perl}, {x, -1, 1}]`

и получаем рисунок 1.6.8.

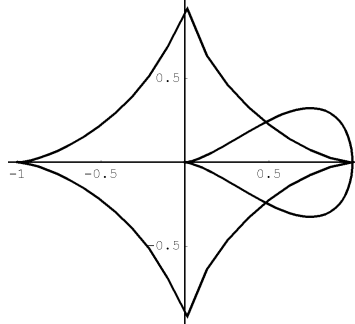


Рис.1.6.8

Видно, что приближенно абсцисса точки пересечения равна 0.5. Уточним ее значение.

Из уравнений астроида и жемчужины находим уравнения их верхних частей. Для этого в случае астроида прибегаем к команде **Solve** системы “Математика”.

`y/.Solve[astroid, y]`

$\{ \{-\sqrt{1-x^2-3(x^2)^{1/3}+3(x^2)^{2/3}}\}, \{\sqrt{1-x^2-3(x^2)^{1/3}+3(x^2)^{2/3}}\} \}$

и выбираем второе решение  $y = \sqrt{1-x^2-3(x^2)^{1/3}+3(x^2)^{2/3}}$ . Для жемчужины соответствующее вычисление имеет вид

`y/.Solve[perl, y]`

$\{ \{-\sqrt{x^3-x^4}\}, \{\sqrt{x^3-x^4}\} \}$

Как и в случае астроида берем второе решение  $y = \sqrt{x^3-x^4}$ .

Выполним команду

$$F[x_] = \sqrt{1-x^2-3(x^2)^{1/3}+3(x^2)^{2/3}} - \sqrt{x^3-x^4}$$

определяющую функцию, нулем которой является абсцисса точки пересечения. Знак подчеркивания в соответствии с синтаксисом системы “Математика” означает, что символ  $x$  рассматривается как переменная.

Затем прибегаем к специально написанной команде **BisectionMethod**, задавая ее последним аргументом погрешность вычислений  $\varepsilon = 0.01$ .

`BisectionMethod[F[x], {astroid, perl}, {x, 0, 1}, 0.01]`

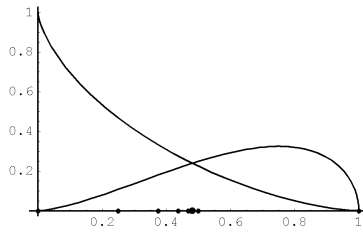


Рис.1.6.9

Результатом вычислений является рисунок 1.6.9, содержащий части астроида и жемчужины в первом квадранте,

и таблица сегментов, которым принадлежит корень.

- {0, 1}
- {0, 0.5}
- {0.25, 0.5}
- {0.375, 0.5}
- {0.4375, 0.5}
- {0.46875, 0.5}
- {0.46875, 0.484375}
- {0.476563, 0.484375}
- {0.480469, 0.484375}
- {0.480469, 0.482422}
- {0.480469, 0.481445}

На экране компьютера точки оси абсцисс окрашены в разные цвета: правые концы вложенных отрезков окрашены в красный цвет, левые - в синий. Разность координат правого и левого концов последнего отрезка меньше 0.001. Всего выполнено десять делений исходного отрезка, что приводит к отрезку в  $2^{10} = 1024$  меньшему, чем исходный отрезок  $[0, 1]$ .

## РАЗДЕЛ 2

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Дифференциальное исчисление представляет собой совокупность методов и средств исследования функций с помощью производных и дифференциалов. Производная формализует понятие скорости изменения функции. Дифференциалом приближенно заменяют рассматриваемую функцию одного аргумента в окрестности фиксированной точки линейной функцией. Каждое из этих понятий может быть взято за основное, а другое выведено из него. Однако для функций от нескольких аргументов понятие дифференциала имеет более фундаментальный характер, чем понятие производной.

#### 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

##### 1.1. Определение производной.

Рассмотрим функцию  $f(x)$  вещественного аргумента и точку  $\alpha$  из ее области определения. Назовем *приращением* функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  функцию

$$\Delta_{\alpha} f(x) = f(x) - f(\alpha). \quad (1.1)$$

Уточним, что заголовком приращения функции является весь состоящий из трех частей символ  $\Delta_{\alpha} f$ .

Для функции  $x$  приращение  $x - \alpha$  обозначается через  $\Delta_{\alpha} x$ . Функцию  $\Delta_{\alpha} x$  называют также *приращением аргумента* функции в точке  $\alpha$ .

**Определение.** *Разностным отношением функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  называется функция, определяемая как отношение приращения функции к приращению аргумента:*

$$\frac{\Delta_{\alpha} f(x)}{\Delta_{\alpha} x} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}. \quad (1.2)$$

Разностное отношение определено формулой (1.2) во всех точках области определения функции  $f(x)$  за исключением точки  $\alpha$ . Следовательно,  $\alpha$  является точкой сгущения области определения разностного отношения. Ввиду этого корректно следующее определение.

**Определение.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  называется предельное значение разностного отношения в точке  $\alpha$ , если оно существует.

Для обозначения производной обычно используются два символа:

$$\frac{df(\alpha)}{dx}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} \quad (\text{обозначения по Лейбницу}),$$

а также

$$f'(\alpha), \quad \text{или} \quad y' \quad (\text{обозначения по Лагранжу}).$$

В параграфе 5.1 Раздела 1 кроме предельного значения функции были введены понятия левого и правого пределов. Воспользовавшись последними, можно определить понятия *левой и правой производной* функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  как левого и правого пределов разностного отношения (1.2).

Производную можно понимать как скорость изменения функции в точке. Понятие скорости возникло в механике в качестве одной из характеристик движения. Для простейшего равномерного и прямолинейного движения исчерпывающий характер имеет понятие средней скорости, определяемой как отношение пройденного пути к затраченному на преодоление этого пути времени. Средняя скорость такого движения не зависит от того, в какой момент измеряется средняя скорость, и от величины отрезка времени.

Для описания движений с переменной скоростью используется мгновенная скорость. К этому понятию можно подойти следующим образом. Рассматривая движение с переменной скоростью, естественно считать, что средняя скорость на пути,ходимом за некоторый промежуток времени  $[t_1, t_2]$ , может быть отнесена к любому моменту времени  $t_0$ , принадлежащему промежутку. Если требуется вычислить мгновенную скорость в момент времени  $t_0$ , то ее естественно считать как предел средней скорости на промежутке  $[t_1, t_2]$ , содержащим  $t_0$ , при стремлении длины этого промежутка к нулю. Кроме того, следует потребовать, чтобы предел не зависел от способа стягивания длины промежутка к нулю. Исходя из этих соображений, дадим следующее определение.

**Определение.** Пусть  $a_n$  есть произвольная неубывающая последовательность, а  $b_n$  произвольная невозрастающая последовательность, сходящаяся к  $\alpha$ . Мгновенной скоростью изменения функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  называется предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$$

при условии, что он существует и не зависит от выбора последовательностей  $a_n$  и  $b_n$ .

С формальной точки зрения производная не может считаться мгновенной скоростью, так как по определению производной при ее вычислении ограничиваются промежутками, для которых точка, в которой находится производная, обязательно является то левым, то правым концом стягиваемых промежутков

в зависимости от того, больше или меньше  $\alpha$  элемент последовательности  $a_n$ , сходящейся к  $\alpha$ . Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

**Теорема о мгновенной скорости.** Пусть функция  $f(x)$  имеет производную  $f'(\alpha)$  в точке  $\alpha$ , тогда существует мгновенная скорость изменения функции в точке  $\alpha$ , и она равна  $f'(\alpha)$ .

В заключение параграфа отметим, что вычисление производной называют дифференцированием функции.

### 1.2. Существование производной и непрерывность.

В предыдущем параграфе не предполагалось, что функция, производная которой вычислялась в точке  $\alpha$ , непрерывна в этой точке. Оказывается, существование производной влечет непрерывность.

**Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.** Пусть функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $\alpha$ , тогда она непрерывна в этой точке.

Утверждение, обратное утверждению теоремы, не имеет места. Оказывается, существуют непрерывные во всех вещественных точках функции, не имеющие производной ни в одной точке.

### 1.3. Производная степенной функции с натуральным показателем.

Для степенной функции  $x^k$  с натуральным показателем  $k > 1$  разностное отношение (1.2) выглядит следующим образом:

$$\frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha} = x^{k-1} + x^{k-2}\alpha + \dots + \alpha^{k-1}. \quad (1.3)$$

При выводе соотношения (1.3) мы воспользовались алгебраическим тождеством:

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1}).$$

Правая часть равенства (1.3) представляет собой элементарную функцию — многочлен и поэтому является непрерывной функцией. Ее предел в точке  $\alpha$  равен ее значению  $k\alpha^{k-1}$ . Последний результат получен подстановкой  $\alpha$  вместо  $x$  в правую часть равенства (1.3). При такой подстановке все слагаемые одинаковы и равны  $\alpha^{k-1}$ , а их число равно  $k$ . Таким образом, производная степенной функции  $x^k$  с натуральным показателем  $k > 1$  равна:

$$\frac{d x^k}{d x} = k x^{k-1}. \quad (1.4)$$

При  $k = 1$  числитель и знаменатель разностного отношения (1.2) одинаковы, поэтому оно тождественно равно 1. Следовательно, производная линейной функции  $x$  равна 1, что формально совпадает со значением правой части равенства (1.4) при  $k = 1$ . Поэтому равенство (1.4) справедливо и при  $k = 1$ . При

$k = 0$ , т.е. в случае постоянной функции, в числителе разностного отношения (1.2) тождественный нуль, и производная, тем самым, равна нулю, что снова совпадает со значением правой части (1.4) при  $k = 0$ . Итак, нами доказана теорема.

**Теорема о производной степенной функции.** *Производная степенной функции  $x^k$  для натуральных показателей  $k$  равна  $kx^{k-1}$ .*

Для того, чтобы вычислить производную степенной функции для рациональных и иррациональных значений показателя, а также производные других элементарных функций, полезны некоторые общие результаты о вычислении производных функций, получаемых с помощью арифметических операций суммирования, вычитания, умножения, деления и операции суперпозиции.

#### 1.4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного.

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в точке  $\alpha$ . Рассмотрим функции равные сумме  $f(x)+g(x)$ , разности  $f(x)-g(x)$ , произведению  $f(x)g(x)$  и частному  $f(x)/g(x)$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$ .

**Теорема о производных суммы, разности, произведения и частного функций.** *Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в точке  $\alpha$ , тогда их сумма, разность и произведение имеют производные в точке  $\alpha$ . При дополнительном предположении  $g(\alpha) \neq 0$  частное рассматриваемых функций также имеет производную в точке  $\alpha$ . Для соответствующих производных справедливы следующие равенства*

$$\frac{d(f(\alpha) + g(\alpha))}{dx} = \frac{df(\alpha)}{dx} + \frac{dg(\alpha)}{dx}. \quad (1.5)$$

$$\frac{d(f(\alpha) - g(\alpha))}{dx} = \frac{df(\alpha)}{dx} - \frac{dg(\alpha)}{dx}. \quad (1.6)$$

$$\frac{d(f(\alpha)g(\alpha))}{dx} = f(\alpha)\frac{dg(\alpha)}{dx} + g(\alpha)\frac{df(\alpha)}{dx}. \quad (1.7)$$

$$\frac{d\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}}{dx} = \frac{f'(\alpha)g(\alpha) - g'(\alpha)f(\alpha)}{g^2(\alpha)}. \quad (1.8)$$

**Следствие.** *Для производной степенной функции  $x^k$  с отрицательным целым показателем при  $x \neq 0$  справедлива формула (1.4).*

#### 1.5. Правило дифференцирования обратной функции.

Предположим, что в некоторой окрестности точки  $\alpha$  функция  $f(x)$  монотонно убывает или монотонно возрастает. Отсюда, как мы знаем, следует существование у  $f(x)$  обратной функции  $f^{(-1)}(y)$ , определенной в некоторой окрестности точки  $f(\alpha)$ . Предположим далее, что в рассматриваемой окрестности функция  $f(x)$  непрерывна. Тогда по Теореме о непрерывности обратной

функции параграфа 4.6 главы 4 Раздела 1 обратная функция также непрерывна.

**Теорема о производной обратной функции.** Пусть функция  $f(x)$  имеет производную  $f'(\alpha)$  в точке  $\alpha$ , отличную от нуля ( $f'(\alpha) \neq 0$ ), и непрерывна в некоторой окрестности точки  $\alpha$ . Тогда обратная функция  $f^{(-1)}(y)$  имеет производную в точке  $\beta = f(\alpha)$ , равную  $1/f'(\alpha)$ .

**Следствие.** Для производной степенной функции  $x^k$ , для  $k = 1/q$ , где  $q$  – натуральное число, справедлива формула (1.4).

### 1.6. Правило дифференцирования суперпозиции.

Предположим, что функция  $F(x)$  получена путем суперпозиции функций  $f(x)$  и  $g(x)$ :  $F(x) = f(g(x))$ .

**Теорема о производной суперпозиции функций.** Пусть функция  $g(x)$  имеет производную в точке  $\alpha$ , а функция  $f(x)$  – в точке  $\beta = g(\alpha)$ , тогда функция  $F(x)$  имеет производную в точке  $\alpha$  равную  $f'(g(\alpha))g'(\alpha)$ .

**Следствие.** Производная степенной функции  $x^k$  для рационального показателя  $k = p/q$  дается соотношением (1.4).

### 1.7. Производные показательной и логарифмической функций.

Рассмотрим показательную функцию  $10^x$  с основанием 10. Прежде, чем найти формулу для производной этой функции в произвольной точке  $\alpha$ , вычислим производную в нуле. Для этого нужно найти предел разностного отношения

$$\frac{10^{x_n} - 1}{x_n} \quad (1.9)$$

для любой бесконечно малой последовательности  $x_n$ . Преобразуем разностное отношение (1.9) следующим образом. Обозначим бесконечно малую последовательность  $10^{x_n} - 1$  через  $y_n$ . Тогда

$$\frac{10^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{y_n}{\lg(1 + y_n)} = \frac{1}{\lg(1 + y_n)^{1/y_n}}. \quad (1.10)$$

В силу непрерывности логарифмической функции вычисление предела разностного отношения (1.10) свелось к доказательству существования и вычислению предела последовательности

$$(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}},$$

т.е. к нахождению предельного значения функции

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

в точке  $x = 0$ .

**Теорема о пределе функции  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  в точке  $x=0$ .** Предел функции  $f(x)$  в точке  $x=0$  существует и равен основанию натуральных логарифмов числу  $e$ .

Из теоремы и равенств (1.9), (1.10) следует, что производная функции  $10^x$  в точке 0 существует и равна  $1/\lg e = \ln 10$ .

Пусть  $\alpha \neq 0$ , тогда разностное отношение (1.2) для функции  $10^x$  можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{10^x - 10^\alpha}{x - \alpha} = 10^\alpha \frac{10^{x-\alpha} - 1}{x - \alpha},$$

откуда следует, что

$$\frac{d10^x}{dx} = \frac{10^x}{\lg e}. \quad (1.11)$$

Для любого положительного основания  $a$  показательная функция  $a^x$  определяется с помощью соотношения

$$a^x = 10^{x \lg a}. \quad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) и свойств логарифмической функции следует утверждение.

**Теорема о производной показательной функции.** Производная показательной функции  $a^x$  дается соотношениями

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \ln a. \quad (1.13)$$

В (1.13) через  $\ln a$  обозначен *натуральный логарифм* основания  $a$ , т.е. логарифм числа  $a$  по основанию  $e$ .

Из (1.13) следует, что наиболее простой вид имеет производная от показательной функции с основанием равным числу  $e$ :

$$\frac{de^x}{dx} = e^x. \quad (1.14)$$

Поскольку логарифмическая функция  $\log_a x$  является обратной функцией к показательной функции  $a^x$ , то на основании Теоремы о производной обратной функции и формулы (1.14) получаем следующие выражения для производной логарифмической функции

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}. \quad (1.15)$$

## 1.8. Производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций.



Начнем с вычисления производной от тригонометрической функции  $\sin x$ . Для разностного отношения (1.2) этой функции в точке  $\alpha$  справедливы соотношения:

$$\frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha} = \frac{2 \cos \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2}}{x - \alpha} = \cos \frac{x + \alpha}{2} \frac{\sin \frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}. \quad (1.16)$$

Вычисляя предел функции, стоящей в крайней правой позиции в соотношениях (1.16), заметим, что функция  $\cos((x + \alpha)/2)$  непрерывна как функция аргумента  $x$ , поэтому ее предел в точке  $\alpha$  равен  $\cos \alpha$ . Предел второго сомножителя есть не что иное как *второй замечательный предел*, рассмотренный в главе 5 первого раздела книги. Поскольку предел произведения равен произведению пределов, то из (1.16) следует:

$$\frac{d \sin \alpha}{dx} = \cos \alpha. \quad (1.17)$$

Для того, чтобы вычислить производную функции  $\cos x$ , воспользуемся тождеством

$$\cos x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right), \quad (1.18)$$

которое является представлением функции  $\cos x$  в виде суперпозиции  $\sin x$  и линейной функции  $\pi/2 - x$ . Воспользовавшись Теоремой о производной разности функций, получаем из (1.17), (1.18):

$$\frac{d \cos \alpha}{dx} = -\sin \alpha. \quad (1.19)$$

В качестве следствий из Теоремы о производной частных функций и формул (1.17), (1.19), получаем следующие выражения для производных тригонометрических функций тангенс и котангенс:

$$\frac{d \operatorname{tg}(\alpha)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad (1.20)$$

$$\frac{d \operatorname{ctg}(\alpha)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 \alpha} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha), \quad (1.21)$$

Формула (1.20) справедлива для всех  $\alpha \neq \pi/2 + \pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ , а формула (1.21) для всех значений  $\alpha$ , кроме  $\alpha = \pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ .

С помощью Теоремы о производной обратной функции получаем следующее выражение для производной функции  $\arcsin x$ :

$$\arcsin'(\alpha) = \frac{1}{\sin' \beta} = \frac{1}{\cos \beta},$$

где  $\beta = \arcsin \alpha$ . Выражая  $\cos \beta$  через  $\sin \beta = \alpha$  и подставляя полученное выражение в предыдущую формулу, получаем в результате:

$$\arcsin'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Для других обратных тригонометрических функций вычисления аналогичны, а результаты будут приведены в следующем параграфе.

### 1.9. Сводная таблица производных основных элементарных функций.

Для удобства читателя сделаем сводку полученных в предыдущем параграфе формул для производных. В таблице производных через  $c$  обозначена функция, тождественно принимающая постоянное значение  $c$ .

	$f(x)$	$f'(x)$
1.	$c'$	0,
2.	$(x^\alpha)'$	$\alpha x^{\alpha-1}$
3.	$(a^x)'$	$a^x \ln a$
4.	$(\log_a x)'$	$\frac{1}{x \ln a}$ , в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5.	$(\sin x)'$	$\cos x$
6.	$(\cos x)'$	$-\sin x$
7.	$(\operatorname{tg} x)'$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
8.	$(\operatorname{ctg} x)'$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
9.	$(\arcsin x)'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10.	$(\arccos x)'$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.	$(\operatorname{arctg} x)'$	$\frac{1}{1+x^2}$
12.	$(\operatorname{arcctg} x)'$	$-\frac{1}{1+x^2}$

### 1.10. Производные высших порядков.

Если функция  $f(x)$  имеет производную  $f'(x)$  во всех точках некоторого интервала  $(a, b)$ , то можно поставить вопрос о существовании производной функции  $f'(x)$  в точках интервала  $(a, b)$ .

**Определение.** Если функция  $f'(x)$  имеет производную в некоторой точке  $\alpha \in (a, b)$ , то эта производная называется второй производной функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  и обозначается через  $f''(\alpha)$ .

Аналогично определяется третья производная как производная второй производной и т.д. Обычно  $n$ -ю производную функции  $f(x)$  обозначают одним из двух способов:

$$f^{(n)}(x), \quad \text{либо} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Воспользовавшись первым обозначением, можно записать следующее рекурсивное определение:

$$f^{(n)}(x) = \left( f^{(n-1)}(x) \right)' . \quad (1.22)$$

В случае, когда функция  $f(x)$  задает закон изменения пути, пройденного телом за время  $x$ , первая производная  $f'(x)$  понимается как мгновенная скорость тела, а вторая производная  $f''(x)$  как его ускорение в момент времени  $x$ .

Воспользовавшись определением (1.22) и таблицей производных основных элементарных функций, можно получить следующие общие формулы:

$$\begin{aligned} (x^\alpha)^{(k)} &= \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1) x^{\alpha - k}, \\ (x^n)^{(k)} &= 0, \quad \text{если } n \text{ натуральное число и } k > n, \\ (a^x)^{(k)} &= a^x (\ln a)^k, \\ (\sin x)^{(k)} &= \sin \left( x + k \frac{\pi}{2} \right), \quad (\cos x)^{(k)} = \cos \left( x + k \frac{\pi}{2} \right), \\ (\ln(x))^{(k)} &= \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}. \end{aligned}$$

### 1.11. Дифференцирование параметрически заданных функций.

До сих пор мы пользовались следующим определением функции. Функция считалась заданной, если был известен закон, по которому каждому вещественному числу  $x$  из некоторого множества (интервала, отрезка и т.п.) ставилось в соответствие вещественное число  $y$ . Встречаются случаи так называемого *параметрического* задания функции, когда переменные  $x$  и  $y$  являются значениями функций некоторого аргумента  $t$ :

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (a, b). \quad (1.23)$$

Переменную  $t$  принято называть *параметром*. Функции  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  будем считать заданными на некотором интервале  $(a, b)$ .

Предположим, что функция  $\phi(t)$  имеет обратную функцию  $\phi^{(-1)}(x)$ , определенную на всей области значений  $R(\phi)$  функции  $\phi(t)$ . Тогда переменная  $y$  является функцией

$$f(x) = \psi(\phi^{(-1)}(x)) \quad (1.24)$$

переменной  $x$ , заданной параметрически соотношениями (1.23) на  $R(\phi)$ .

**Теорема о производной параметрически заданной функции.** Пусть функции  $\phi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют производные  $\phi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  в некоторой окрестности точки  $\tau \in (a, b)$ . Пусть в точке  $\tau$  выполнено неравенство  $\phi'(\tau) \neq 0$ , тогда производная параметрически заданной функции  $f(x)$  (1.24) в точке  $\alpha = \phi(\tau)$  вычисляется по формуле

$$f'(\alpha) = \left. \frac{\psi'(\tau)}{\phi'(\tau)} \right|_{\tau = \phi^{(-1)}(\alpha)}. \quad (1.25)$$

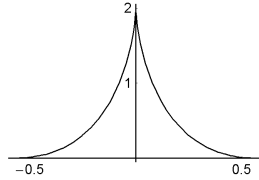


Рис. 2.1.1

Рассмотрим в качестве примера функцию, параметрически заданную соотношениями

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 + \cos(2t), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ее график представлен на Рис. 2.1.1.

Функция  $\phi(t) = t - \sin t$  на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$  имеет обратную, так как она монотонно возрастает на этом интервале. В самом деле, пусть  $t_1 = t_2 + \Delta$ ,  $\Delta > 0$ , тогда

$$t_1 - t_2 - (\sin t_1 - \sin t_2) = 2 \left( \frac{\Delta}{2} - \sin \left( \frac{\Delta}{2} \right) \cos \left( t_2 + \frac{\Delta}{2} \right) \right) > 0.$$

Последнее неравенство имеет место в силу того, что  $x > \sin x$  при  $x > 0$ , и, тем более,  $x > \cos \alpha \sin x$  при  $x > 0$  и любом  $\alpha$ .

Производная  $\phi'(t) = 1 - \cos t \neq 0$  при всех  $t \neq 0$  в рассматриваемом интервале, а в точке  $t = 0$  обращается в нуль. Поэтому для вычисления производной параметрически заданной функции  $f(x) = \cos(\phi^{(-1)}(x))$  для  $x \neq 0$  можно воспользоваться формулой (1.25):

$$f'(x) = - \frac{2 \sin(2t)}{1 - \cos t} \Big|_{t=\phi^{(-1)}(x)}.$$

Предел функции  $-2 \sin(2t)/(1 - \cos t)$  в точке  $t = 0$  слева равен  $+\infty$ , а справа  $-\infty$ . Этот факт находит свое отражение на Рис. 2.1.1 в виде “заострения” графика функции  $f(x)$  при  $x = 0$ .

Рассмотрим вопрос о вычислении второй производной параметрически заданной функции и высших производных. Нетрудно видеть, что производная параметрически заданной функции может быть задана параметрически с помощью соотношений

$$x = \phi(t), \quad y = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Поэтому ее производная вычисляется по формуле

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{(\psi'(t)/\phi'(t))'}{\phi'(t)} \Big|_{t=\phi^{(-1)}(x)} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{\phi'(t)^3} \Big|_{t=\phi^{(-1)}(x)}$$

По аналогичному принципу вычисляются производные высших порядков.

## 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

Эта глава содержит несколько классических теорем математического анализа. Они позволяют связать важные для теории и приложений свойства функций со свойствами их производных.

### 2.1. Условия локальной монотонности функций.

Пусть вещественное число  $\alpha$  принадлежит области определения функции  $f(x)$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  возрастает в точке  $\alpha$ , если найдется такая  $\delta$ -окрестность  $A_\delta$  точки  $\alpha$ , в которой выполняются неравенства  $f(x) < f(\alpha)$  при  $x < \alpha$  и  $f(x) > f(\alpha)$  при  $x > \alpha$ .

Функция  $f(x)$  убывает в точке  $\alpha$ , если найдется такая  $\delta$ -окрестность  $A_\delta$  точки  $\alpha$ , в которой выполняются неравенства  $f(x) > f(\alpha)$  при  $x < \alpha$  и  $f(x) < f(\alpha)$  при  $x > \alpha$ .

Сформулируем достаточное условие возрастания функции в точке  $\alpha$ .

**Теорема о локальной монотонности.** Пусть функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $\alpha$  и выполнено неравенство  $f'(\alpha) > 0$ , тогда  $f(x)$  возрастает в точке  $\alpha$ .

Пусть функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $\alpha$ , и выполнено неравенство  $f'(\alpha) < 0$ , тогда  $f(x)$  убывает в точке  $\alpha$ .

### 2.2. Локальный экстремум и теорема Ролля о нуле производной.

Пусть, как и в предыдущем параграфе, точка  $\alpha$  принадлежит области определения функции  $f(x)$ . Больше того, предположим, что существует окрестность  $A_\delta$  точки  $\alpha$ , целиком принадлежащая этой области.

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет в точке  $\alpha$  локальный максимум, если в некоторой  $\delta$ -окрестности  $A_\delta$  точки  $\alpha$  выполняется неравенство  $f(x) \leq f(\alpha)$ .

Функция  $f(x)$  имеет в точке  $\alpha$  локальный минимум, если в некоторой  $\delta$ -окрестности  $A_\delta$  точки  $\alpha$  выполняется неравенство  $f(x) \geq f(\alpha)$ .

О точках локального максимума и локального минимума говорят как о точках локального экстремума. Следующая теорема дает необходимое условие локального экстремума.

**Теорема Ферма.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $\alpha$  и имеет в ней локальный экстремум, тогда  $f'(\alpha) = 0$ .

Чрезвычайно важной в теоретических вопросах оказывается следующая простая теорема.

**Теорема Ролля.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема во всех внутренних точках отрезка. Пусть, далее, значения функции на концах отрезка совпадают:  $f(a) = f(b)$ . Тогда найдется такая точка  $\alpha$ , отличная от точек  $a$  и  $b$ , что значение производной в этой точке равно нулю:  $f'(\alpha) = 0$ .

### 2.3. Формула конечных приращений Лагранжа.

Непосредственным следствием Теоремы Ролля является следующее утверждение.

**Теорема Лагранжа.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка. Тогда найдется точка  $\alpha$ , расположенная внутри отрезка, такая что справедлива формула

$$f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b - a). \quad (2.2)$$

Формулу (2.2) называют формулой конечных приращений, так как выражение в правой части формулы (2.2) равно приращению функции при любом значении расстояния  $|b - a|$  между точками  $b$  и  $a$ .

Рассмотрим некоторые полезные следствия Теоремы Лагранжа. Непосредственно из Теоремы вытекает утверждение.

**Следствие 1.** Если производная функции тождественно равна нулю, то эта функция постоянна.

**Следствие 2.** Для того, чтобы дифференцируемая на интервале  $(a, b)$  функция  $f(x)$  не убывала на некотором интервале  $(a, b)$ , необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этого интервала производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$  была неотрицательна. Для невозрастания функции необходимо и достаточно, чтобы производная была неположительной.

**Следствие 3.** Для того, чтобы дифференцируемая на интервале  $(a, b)$  функция возрастала (убывала) на этом интервале, достаточно, чтобы ее производная была всюду на интервале положительной (отрицательной).

Заметим, что положительность или отрицательность производной во всех точках интервала не является необходимым условием возрастания, соответственно, убывания функции на интервале. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть функцию  $x^3$  на интервале  $(-1, 1)$ , которая всюду возрастает, но имеет равную нулю производную в точке 0.

### 2.4. Обобщенная формула Коши конечных приращений.

Формулу Лагранжа (2.2) обобщает следующая формула (2.3) Коши, в которой участвуют две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ .

**Теорема Коши.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы во всех внутренних точках этого отрезка, причем производная  $g'(x)$  не равна нулю ни в одной из этих внутренних точек. Тогда

внутри отрезка  $[a, b]$  найдется точка  $\alpha$  такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad (2.3)$$

### 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

В этой главе рассматривается величина отклонений графика функции от касательных к графику и от графиков специально подобранных многочленов второй и более высоких степеней.

#### 3.1. Бесконечно малые функции и их сравнение.

Понятие бесконечно малой последовательности было введено в параграфе 2.6 главы 2 Раздела 1. Определим соответствующее понятие для функций.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно малой в точке  $\alpha$ , если ее предел в рассматриваемой точке равен 0.

В данном определении ничего не говорится про значение функции в точке  $\alpha$ , поэтому, вообще говоря, эта точка может не принадлежать области определения функции, а являться точкой сгущения области определения. Поэтому часто говорят, что функция бесконечно малая не в точке  $\alpha$ , а при *стремлении* аргумента  $x$  к точке  $\alpha$ . Тот факт, что функция  $f(x)$  является бесконечно малой в точке  $\alpha$ , записывают в виде  $f(x) = o(1)$  (произносится: “о-малое от единицы”) при  $x \rightarrow \alpha$ :

$$f(x) = o(1), \quad \text{при } x \rightarrow \alpha, \quad \text{если } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0.$$

Из Теоремы о пределах суммы и произведения последовательностей и Теоремы о бесконечно малых последовательностях Раздела 1 непосредственно выводится следующее утверждение.

**Теорема о сумме, разности и произведении бесконечно малых функций.** Сумма, разность и произведение любого конечного числа бесконечно малых в точке  $\alpha$  функций также являются бесконечно малыми в этой точке. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой функцией.

Бесконечно малые в одной и той же точке функции можно сравнивать между собой, выясняя, какая из двух функций является более малой.

**Определение.** Бесконечно малая функция  $f(x)$  является бесконечно малой более высокого порядка в точке  $\alpha$ , чем бесконечно малая функция  $g(x)$ , если



отношение  $f(x)/g(x)$  также является бесконечно малой в точке  $\alpha$ :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (3.1)$$

Если же предел отношения существует (и, тем самым, он конечен):

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = a \neq 0, \quad (3.2)$$

то говорят, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$  одного порядка малости в точке  $\alpha$ . При  $a = 1$  бесконечно малые называются эквивалентными.

Если имеет место соотношение (3.1), то этот факт записывают также в виде соотношения

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \alpha,$$

и говорят, что  $f(x)$  есть “о-малое” от  $g(x)$  в точке  $\alpha$ . Аналогично, соотношение (3.2) записывают в виде

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{при } x \rightarrow \alpha,$$

где символ  $O$  произносят как “О-большое”.

Бесконечно малые функции  $x - \alpha$ ,  $(x - \alpha)^2$ ,  $\dots$ ,  $(x - \alpha)^n$ ,  $\dots$  часто используются как эталонные для сравнения, и если имеет место соотношение  $f(x) = O((x - \alpha)^k)$ , то говорят, что  $f(x)$  имеет порядок малости  $k$  в точке  $\alpha$ .

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

можно понимать как утверждение о том, что функции  $\sin x$  и  $x$  являются эквивалентными бесконечно малыми в точке 0.

### 3.2. Касательная к графику функции. Дифференциал функции.

Линейные функции являются простейшими функциями математического анализа. Поэтому естественно желание сравнить поведение изучаемой произвольной функции  $f(x)$  в окрестности фиксированной точки  $\alpha$  с поведением линейных функций  $l(x) = kx + m$  и выяснить, можно ли приближенно заменить функцию  $f(x)$  линейной функцией в какой-либо окрестности точки  $\alpha$ .

Геометрический подход к решению этой задачи состоит в том, чтобы определить понятие касательной к графику функции в заданной точке. В геометрии были даны определение и способ построения с помощью циркуля и линейки касательной к окружности. И определение, и способ построения использовали свойства и геометрические объекты, специфические в своей совокупности только для окружности. Определение касательной к графику произвольной функции требует идей и методов математического анализа.

**Определение.** Касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $(\alpha, f(\alpha))$  называется прямая, являющаяся графиком такой линейной функции  $l(x) = kx + t$ , что, во-первых, значения функций  $f(x)$  и  $l(x)$  в точке  $\alpha$  совпадают:

$$f(\alpha) = k\alpha + t, \quad (3.3)$$

и, во-вторых, приращение  $\Delta_\alpha f(x) = f(x) - f(\alpha)$  функции  $f(x)$  и приращение  $k(x - \alpha)$  линейной функции  $l(x)$  совпадают в точке  $\alpha$  с точностью  $o(x - \alpha)$ :

$$\Delta_\alpha f(x) \equiv f(x) - f(\alpha) = k(x - \alpha) + \phi(x), \quad \text{где } \phi(x) = o(x - \alpha). \quad (3.4)$$

Неформально, данное определение можно перефразировать, сказав, что касательная — это прямая, наименее уклоняющаяся по сравнению с другими прямыми от графика функции вблизи от точки касания  $(\alpha, f(\alpha))$ .

Исследуем вопрос о существовании и единственности касательной. Предположим, что существует производная функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ . По определению производной

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f'(\alpha) \right) = 0,$$

или, иначе,

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - f'(\alpha) = \psi(x),$$

где  $\psi(x)$  бесконечно малая в точке  $\alpha$  функция. Отсюда

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) + (x - \alpha)\psi(x). \quad (3.5)$$

Обозначая  $(x - \alpha)\psi(x)$  через  $\phi(x)$ , получаем, что  $\phi(x) = o(x - \alpha)$ , и равенство (3.5) означает, что касательная к графику функции в точке  $\alpha$  существует, являясь графиком функции

$$l(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$$

Обратно, предположим, что какая-то касательная существует. Рассмотрим следующее из (3.4) соотношение

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = k + \frac{\phi(x)}{x - \alpha} \quad (3.6)$$

Докажем, что предел при  $x \rightarrow \alpha$  разностного отношения в левой части (3.6) существует. Действительно, предел правой части равенства (3.6) существует и равен  $k$  в силу того, что  $\phi(x) = o(x - \alpha)$ . Поэтому предел левой части существует и равен  $k$ .

Таким образом, для всех касательных  $k = f'(\alpha)$ . Из формулы (3.3) следует тогда, что  $t = f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha$ .

Итак, нами доказана теорема.

**Теорема о касательной к графику.** Если существует касательная к графику функции  $f(x)$  в точке  $(\alpha, f(\alpha))$ , то существует производная  $f'(\alpha)$ . Обратно, если в точке  $\alpha$  существует производная  $f'(\alpha)$ , то существует и касательная. В случае существования касательной, она единственна и является графиком линейной функции  $f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ .

Первое слагаемое  $f'(\alpha)(x - \alpha)$  в определении  $l(x)$  дает приращение линейной функции, отвечающее приращению  $x - \alpha$  аргумента. В силу соотношения (3.6) приращение функции  $l(x)$  равно приращению функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  с точностью  $o(x - \alpha)$ . Слагаемое  $f'(\alpha)(x - \alpha)$  называют *дифференциалом* функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ . Такое определение выглядит как излишне техническое, формульное, поэтому мы предпочитаем дать другое определение.

**Определение.** Дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  называется линейная бесконечно малая в точке  $\alpha$  функция, эквивалентная при  $f'(\alpha) \neq 0$  в этой точке приращению  $\Delta_\alpha f(x) = f(x) - f(\alpha)$  функции  $f(x)$ . При  $f'(\alpha) = 0$  дифференциал функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  равен постоянной функции тождественно равной 0.

Приращение  $\Delta_\alpha x = x - \alpha$  аргумента будем обозначать через  $d_\alpha x$ , а приращение линейной функции  $l(x)$ , т.е. дифференциал функции  $f(x)$ , обозначают через  $d_\alpha f(x)$ . Таким образом,  $d_\alpha f(x) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ , и формулу (3.6) можно переписать в виде

$$\Delta_\alpha f(x) = d_\alpha f(x) + o(x - \alpha), \quad \text{или} \quad \Delta_\alpha f(x) = d_\alpha f(x) + o(d_\alpha x). \quad (3.7)$$

Если указание точки  $\alpha$  несущественно, то дифференциалы обозначаются через  $df(x)$  и  $dx$ .

Символам  $dx$ ,  $df$  можно придать следующий смысл. Введем на координатной плоскости  $XOY$  новую систему координат. Начало координат поместим в точку  $(\alpha, f(\alpha))$ , лежащую на графике функции  $f(x)$ . Новую ось абсцисс направим параллельно старой оси абсцисс, а новую ось ординат параллельно старой оси ординат. Новую абсциссу  $x - \alpha$  будем обозначать через  $dx$ , а новую ординату  $y - f(\alpha)$  через  $dy$ . В новой системе координат уравнение касательной примет вид  $dy = f'(\alpha)dx$ .

Сказанное иллюстрируется рисунком (Рис. 2.3.1), на котором пунктирной линией начерчена касательная к графику функции  $f(x)$  в точке  $\alpha = 0.3$ , длина левого вертикального отрезка от оси  $dx$  до касательной равна  $df$ , а длина правого вертикального отрезка от оси  $dx$  до графика функции равна  $\Delta_\alpha f$ . Оба отрезка относятся к одной точке, но для удобства восприятия нарисованы параллельно на некотором расстоянии друг от друга.

### 3.3. Применение дифференциала для приближенных вычислений.

Формула (3.7) является теоретической основой применения дифференциала для приближенных вычислений. Ее обычно понимают в том смысле, что дифференциал  $df$  есть *главная*, т.е. наибольшая по величине, или основная часть приращения  $\Delta_\alpha f$  функции. Если при вычислении приращения ограничиться

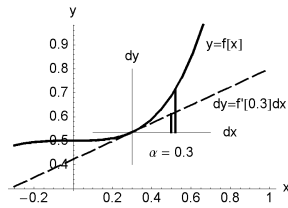


Рис. 2.3.1

вычислением дифференциала, то это и значит выполнить приближенное вычисление приращения.

Оценку погрешности, возникающей при замене приращения дифференциалом, по формуле (3.7) оценить нельзя, так как неизвестно, как ведет себя бесконечно малая функция  $\phi(x)$ , обозначенная в (3.7) через  $o(dx)$ , при стремлении аргумента  $x$  к  $\alpha$ . В частности, неизвестно, какое значение она принимает в конкретной точке  $a$ , лежащей вблизи от  $\alpha$ , такой, что именно в ней мы хотим вычислить значение функции. Оно, в принципе, может и превосходить или быть равным значению дифференциала.

Формула (3.7) говорит только о том, что  $\phi(x)$  есть бесконечно малая более высокого порядка, чем  $dx$  при стремлении точки  $a$  к  $\alpha$ . Поэтому величину погрешности оценивают не теоретически и до применения дифференциала, а практически и после его применения по косвенным признакам. Например, если результаты теоретических расчетов, выполненных с помощью дифференциала, совпадают с практическими результатами, то это оправдывает его применение.

В некоторых простых случаях все же можно и теоретически оценить погрешность приближенного вычисления. Пусть, например, требуется приближенно вычислить  $1001^3$ . Очевидно, что в данном случае речь идет о степенной функции  $f(x) = x^3$ , значение которой надо вычислить приближенно в точке  $a = 1001$ . Значение рассматриваемой функции легко вычислить в точке  $\alpha = 1000$ . Оно равно  $10^9$ , т.е. одному миллиарду. Вычисляем дифференциал функции  $x^3$  в точке  $\alpha = 10^3$ :

$$d_{10^3} f(x) = 3x^2 \Big|_{x=10^3} d_{10^3} x = 3 \cdot 10^6 d_{10^3} x,$$

В рассматриваемом случае  $d_{10^3} x = x - 10^3$ , поэтому  $d_{10^3} 1 = 1$ , следовательно, приближенно

$$1001^3 = 10^9 + d_{10^3} f(1001) = 10^9 + 3 \cdot 10^6 = 1003000000.$$

Теперь вычислим результат точно по алгебраической формуле

$$(\alpha + dx)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 dx + 3\alpha dx^2 + dx^3.$$

Если в нее подставить  $\alpha = 10^6$ ,  $dx = 1$ , то в результате получается число 1003003001, отличающееся от приближенного результата на 3001. Отброшенное в процессе приближенных вычислений число 3001 составляет примерно 0,1% от значения дифференциала. Много это или мало, решает вычисляющий.

Приведем таблицу дифференциалов основных элементарных функций.

$f(x)$	$d_\alpha f(x)$	$f(x)$	$d_\alpha f(x)$
$c$	0	$\sin x$	$\cos \alpha d_\alpha x$
$x^a$	$a \alpha^{a-1} d_\alpha x$	$\cos x$	$-\sin \alpha d_\alpha x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{\alpha^2} d_\alpha x$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{d_\alpha x}{\cos^2 \alpha}$
$\sqrt{x}$	$\frac{d_\alpha x}{2\sqrt{\alpha}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{d_\alpha x}{\sin^2 \alpha}$
$a^x$	$a^\alpha \ln a d_\alpha x$	$\arcsin x$	$\frac{d_\alpha x}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$
$e^x$	$e^\alpha d_\alpha x$	$\arccos x$	$-\frac{d_\alpha x}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$
$\log_a x$	$\frac{d_\alpha x}{\alpha \ln a}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{d_\alpha x}{1 + \alpha^2}$
$\ln x$	$\frac{d_\alpha x}{\alpha}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{d_\alpha x}{1 + \alpha^2}$

Кроме того, из правил вычисления производных функций, получаемых с помощью арифметических операций и суперпозицией, следуют полезные в приложениях свойства дифференциала:

$$\begin{aligned} d(cf) &= c df, & c - \text{константа} \\ d(f \pm g) &= df \pm dg \\ d(fg) &= f dg + g df \\ d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{df}{g} - \frac{f dg}{g^2} \\ d(f(g)) &= f'(g) dg \end{aligned}$$

### 3.4. Правило Лопиталья.

С помощью дифференциала удастся существенно упростить процесс раскрытия неопределенностей. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  две бесконечно малые в точке

$\alpha$  функции. При сравнении порядка их малости и в других случаях приходится вычислять

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (3.8)$$

Его вычисление называют раскрытием неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ . Вычисление предела (3.8) часто удается существенно упростить, если воспользоваться следующей теоремой.

**Правило Лопиталья (основное).** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  являются непрерывными и бесконечно малыми в точке  $\alpha$  и пусть существуют производные  $f'(\alpha)$  и  $g'(\alpha)$ , причем  $g'(\alpha) \neq 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}. \quad (3.9)$$

Однократного применения Правила Лопиталья бывает недостаточно для раскрытия неопределенности, что случается, если  $f'(\alpha) = g'(\alpha) = 0$ . В такой ситуации при некоторых условиях, накладываемых на функции  $f(x)$ ,  $g(x)$ , возможно повторное применение Правила Лопиталья, правда, в обобщенной форме.

**Правило Лопиталья (обобщенное).** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  являются непрерывными и бесконечно малыми в точке  $\alpha$ , а в некоторой окрестности  $A_\delta$  точки  $\alpha$ , за исключением, быть может, самой точки  $\alpha$ , существуют производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (3.10)$$

при условии, что предел отношения производных в правой части равенства (3.10) существует.

Если предел отношения производных в (3.11) есть снова неопределенность  $0/0$ , и производные удовлетворяют условиям только что доказанной теоремы, обобщенное правило Лопиталья можно применить еще раз и получить формулу

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Такой прием можно повторять несколько раз.

### 3.5. Многочлен Тейлора.

К понятию дифференциала функции мы пришли, решая задачу о приближении функции в окрестности заданной точки  $\alpha$  с помощью линейной функции. Графиком линейной функции является касательная к графику функции в точке

$\alpha$ . Можно поставить задачу о более точном приближении функции в окрестности  $\alpha$  с помощью многочленов второй, третьей и т.д. степеней. Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(x - \alpha)^2 + \dots + a_n(x - \alpha)^n \quad (3.11)$$

с неопределенными пока числовыми коэффициентами  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

**Определение.** Многочлен (3.11) называется *многочленом Тейлора  $n$ -го порядка функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$* , если разность  $f(x) - P_n(x)$  является в точке  $\alpha$  бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем функция  $(x - \alpha)^n$ , т.е. выполняется равенство

$$f(x) - P_n(x) = o((x - \alpha)^n). \quad (3.12)$$

Существование многочлена Тейлора накладывает определенные ограничения на поведение функции  $f(x)$  в окрестности точки  $\alpha$ , поэтому далеко не все функции имеют многочлены Тейлора.

Предположим, что равенство (3.12) выполнено. Обсудим вопрос о вычислении коэффициентов  $a_i, i = 0, 1, \dots, n$  многочлена (3.11). Прежде всего, устремив в (3.12)  $x$  к  $\alpha$  и учитывая, что предел правой части (3.12) равен 0, получаем равенство

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x).$$

Для непрерывной в точке  $\alpha$  функции, коэффициент  $a_0$  многочлена Тейлора выражается формулой

$$a_0 = f(\alpha). \quad (3.13)$$

Будем предполагать, что рассматриваемая функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $\alpha$ .

Разделив обе части равенства (3.12) на  $x - \alpha$  и подставив в (3.12) равенство (3.13), приходим к соотношению

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - a_1 - a_2(x - \alpha) - \dots - a_n(x - \alpha)^{n-1} = o((x - \alpha)^{n-1}). \quad (3.14)$$

Правая часть равенства (3.14) имеет предел равный 0 при  $x \rightarrow \alpha$ . Следовательно, существует и предел левой части, также равный 0, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - a_1 = 0.$$

Отсюда получаем, что у функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  существует первая производная, и

$$a_1 = f'(\alpha). \quad (3.15)$$

Таким образом, слагаемое  $a_1(x - \alpha)$  в многочлене Тейлора (3.11) есть не что иное, как дифференциал функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ .

С учетом (3.13) и (3.15) равенство (3.12) можно привести к виду

$$f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x - \alpha) = a_2(x - \alpha)^2 + \dots + a_n(x - \alpha)^n + o((x - \alpha)^n). \quad (3.16)$$

Разделив (3.16) на  $(x - \alpha)^2$  и переходя к пределу при  $x \rightarrow \alpha$ , получаем равенство

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x - \alpha)}{(x - \alpha)^2}. \quad (3.17)$$

Для коэффициента  $a_2$  можно получить выражение, не содержащее первой производной  $f'(\alpha)$ . Для этого обозначим разность  $x - \alpha$  через  $h$  и перепишем равенство (3.16), используя переменную  $h$ :

$$f(\alpha + h) - f(\alpha) - f'(\alpha)h = a_2h^2 + \dots + a_nh^n + o(h^n). \quad (3.18)$$

Поскольку  $h$  произвольно, то справедливо также и соотношение

$$f(\alpha - h) - f(\alpha) + f'(\alpha)h = a_2h^2 + \dots + (-1)^n a_nh^n + o(h^n). \quad (3.19)$$

Сложим (3.18) и (3.19), разделим полученное выражение на  $h^2$  и устремим  $h \rightarrow 0$ . В результате получим соотношение

$$a_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - 2f(\alpha) + f(\alpha - h)}{h^2}. \quad (3.20)$$

Зная коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , можно получить последовательно выражения для всех остальных коэффициентов многочлена Тейлора. Обозначим через  $p_k(x)$ ,  $k \leq n$ , многочлены  $k$ -ой степени, равные сумме первых  $k + 1$  слагаемых многочлена Тейлора (3.11). Тогда из (3.12) получаем формулы

$$a_{k+1} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - p_k(x)}{(x - \alpha)^{k+1}}. \quad (3.21)$$

Подытожим наши рассуждения в виде следующего утверждения.

**Теорема о многочлене Тейлора.** Пусть для непрерывной в точке  $\alpha$  функции  $f(x)$  существует многочлен Тейлора (3.14), тогда его коэффициенты задаются формулами (3.13), (3.15), (3.17), (3.20), (3.21).

Существование первой производной  $f'(\alpha)$ , или существование дифференциала  $d_\alpha f(x)$ , являются необходимыми условиями существования многочлена Тейлора степени  $n \geq 2$  функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ .

Сформулируем теперь удобные в приложениях достаточные условия существования многочлена Тейлора.

**Теорема о достаточных условиях существования многочлена Тейлора.** Пусть функция  $f(x)$  имеет в некоторой  $\delta$ -окрестности  $A_\delta$  точки  $\alpha$  производные до  $n$ -го порядка включительно, причем  $n$ -я производная  $f^{(n)}(x)$



непрерывна в точке  $\alpha$ . Тогда в рассматриваемой точке существует многочлен Тейлора  $n$ -го порядка. Его коэффициенты задаются формулами

$$a_0 = f(\alpha), \quad a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.22)$$

**Определение.** График многочлена Тейлора  $P_n(x)$  функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$  называется параболой  $n$ -го порядка, имеющей касание  $n$ -го порядка с графиком функции в рассматриваемой точке.

### 3.6. Формула Тейлора.

Формулу (3.12) называют формулой Тейлора с остаточным членом, записанным в форме Пеано. Гораздо большее значение в теоретических и прикладных вопросах имеют другие формы остаточного члена.

**Определение.** Остаточным членом многочлена Тейлора называют разность

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x), \quad (3.23)$$

где  $P_n(x)$  многочлен Тейлора  $n$ -го порядка функции  $f(x)$ . По определению многочлена Тейлора для остаточного члена  $R_{n+1}(x)$  справедливо соотношение  $R_{n+1}(x) = o((x - \alpha)^n)$ .

**Теорема Тейлора.** Пусть в некоторой окрестности точки  $\alpha$  функция  $f(x)$  имеет производную  $n+1$ -го порядка и пусть  $x$  принадлежит этой окрестности. Тогда между точками  $\alpha$  и  $x$  существует точка  $\eta$  такая, что справедлива формула

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x - \alpha)^{n+1}. \quad (3.24)$$

Соотношение (3.24) называют формулой для остаточного члена в форме Лагранжа, а соотношение

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} (x - \alpha)^{n+1} \quad (3.25)$$

формулой Тейлора.

### 3.7. Формулы Тейлора для некоторых элементарных функций.

В этом разделе мы рассмотрим приближение функций многочленами Тейлора в окрестности точки  $x = 0$ . Формула Тейлора в этом случае называется формулой Маклорена.

**Пример 1.** Пусть  $f(x) = e^x$ , тогда  $k$ -я производная этой функции также равна  $e^x$ . Значения самой функции и всех ее производных в точке  $x = 0$  равны 1, поэтому формула Маклорена для функции  $e^x$  в соответствии с (3.25) имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad (3.26)$$

где  $0 < \theta < 1$  – некоторое число, обеспечивающее неравенство  $0 < |\theta x| < |x|$  в согласии с формулой для остаточного члена (3.24).

**Пример 2.** Пусть  $f(x) = \sin x$ . Для производных от рассматриваемой функции справедлива формула  $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\pi/2)$ , а для их значений в нуле – формула

$$f^{(k)}(0) = \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при четном } k \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{при нечетном } k \end{cases}$$

Таким образом, формула Маклорена для функции  $\sin x$  имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (3.27)$$

**Пример 3.** Для функции  $f(x) = \cos x$  формула для  $k$ -ой производной выглядит следующим образом  $f^{(k)}(x) = \cos(x + k\pi/2)$ , поэтому

$$f^{(k)}(0) = \cos \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } k \\ (-1)^{\frac{k}{2}} & \text{при четном } k \end{cases}$$

Следовательно, формула Маклорена для функции косинус имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{x^{2n}}{2n!} \cos(\theta x + n\pi). \quad (3.28)$$

**Пример 4.** Пусть  $f(x) = (1+x)^a$ , где  $a$  – вещественное число. Справедлива следующая формула для  $k$ -ой производной функции  $(1+x)^a$ :

$$f^{(k)}(x) = a(a-1)\dots(a-k+1)(1+x)^{a-k},$$

поэтому формула Маклорена рассматриваемой функции имеет вид

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + \frac{a(a-1)\dots(a-n)(1+\theta x)^{a-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (3.29)$$

В частности, для функции  $\sqrt{1+x}$  получаем следующую формулу Маклорена

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{2^n n!} x^n + (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2^{n+1} (n+1)! (1+\theta x)^{n+1/2}} x^{n+1}. \quad (3.30)$$

**Пример 5.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \ln(1+x)$ , для производных которой справедлива формула

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Воспользовавшись последней, приходим к формуле Маклорена

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \quad (3.31)$$

**Пример 6.** В качестве последнего примера получим формулу Маклорена для обратной тригонометрической функции  $\operatorname{arctg} x$ . Для  $k$ -ой производной этой функции справедлива формула

$$f^{(k)}(x) = (k-1)! (\cos(\operatorname{arctg} x))^k \sin k(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}). \quad (3.32)$$

Из (3.32) следует, что

$$f^{(k)}(0) = (k-1)! \sin \frac{k\pi}{2} \quad (3.33)$$

Таким образом, формула Маклорена для функции  $\operatorname{arctg} x$  содержит только нечетные степени аргумента  $x$  и имеет вид

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1} \sin((2n+1)(\operatorname{arctg}(\theta x) + \frac{\pi}{2}))}{(2n+1)(1+\theta^2 x^2)^{n+1/2}}. \quad (3.34)$$

### 3.8. Раскрытие неопределенностей.

Основное и обобщенное правила Лопиталья относились к раскрытию неопределенностей вида  $0/0$ , возникающих при вычислении пределов отношений  $f(x)/g(x)$  при  $x$ , стремящихся к конечному числу  $\alpha$ . Пусть теперь эта неопределенность возникает при стремлении аргумента  $x$  к  $+\infty$  или  $-\infty$ .

**Теорема о раскрытии неопределенностей.** Пусть выполнены следующие условия. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в промежутке  $[a, +\infty)$ . Пределы рассматриваемых функции при  $x \rightarrow +\infty$  равны  $0$ . В рассматриваемом промежутке существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , причем производная  $g'(x) \neq 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (3.35)$$

если предел в правой части формулы (3.35) существует.

**Пример 7.** Рассмотрим функции  $f(x) = \pi/2 - \operatorname{arctg} x$ ,  $g(x) = 1/x$  и сравним их поведение при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Таким образом функции  $\pi/2 - \operatorname{arctg} x$  и  $1/x$  эквивалентные бесконечно малые функции при  $x \rightarrow +\infty$ . Результат вычисления рассматриваемого предела можно также записать в виде:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Перейдем к рассмотрению неопределенностей вида  $\infty/\infty$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой в точке  $\alpha$ , если для любой последовательности  $a_n$ , сходящейся к  $\alpha$ , последовательность  $f(a_n)$  также бесконечно большая, причем все члены последовательности  $f(a_n)$ , начиная с некоторого номера, одного знака. Если они положительны, то пишут  $f(x) \rightarrow +\infty$ , а если отрицательны, то  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Аналогичное определение бесконечно большой функции можно дать и при стремлении ее аргумента к  $+\infty$  или  $-\infty$ . Часто бесконечности определенного знака возникают при рассмотрении односторонних пределов  $x \rightarrow \alpha + 0$  или  $x \rightarrow \alpha - 0$ .

**Теорема об односторонних пределах в неопределенностях.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в промежутке  $(\alpha, \beta]$  и являются бесконечно большими при  $x \rightarrow \alpha + 0$ . Пусть в рассматриваемом промежутке существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  и  $g'(x) \neq 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \alpha + 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha + 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (3.36)$$

если предел в правой части формулы (3.36) существует.

**Пример 8.** Сравним поведение тригонометрической функции  $\operatorname{tg} x$  и функции  $1/(x - \pi/2)$  при  $x \rightarrow \pi/2$ . Для этого вычислим предел

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{x - \pi/2}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-(\pi/2 - x)^2}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-(\pi/2 - x)^2}{\sin^2(\pi/2 - x)} = -1.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\pi/2 - x} + o\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-1}\right).$$

**Пример 9.** Сравним поведение функции  $\ln x$  и функции  $x^a$ ,  $a > 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Вычисляем предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a x^a} = 0.$$

Следовательно, функция  $\ln x$  при  $x \rightarrow +\infty$  растет медленнее любой степенной функции  $x^a$  с положительным показателем степени  $a$ .

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ.

Рисунки графиков функций служат прекрасным средством для изучения особенностей поведения функций, которые часто остаются скрытыми от исследователя в формульном или вербальном описании функций. В этой главе мы познакомимся с основными приемами построения графиков дифференцируемых в каждой точке своей области определения функций, основанных на результатах предыдущих глав настоящего раздела.

### 4.1. Участки монотонности, локальные экстремумы.

Основываясь на формуле конечных приращений Лагранжа параграфа 2.3 настоящего раздела, можно сформулировать следующие условия *возрастания*, а также *убывания* и *неубывания* (*невозрастания*) функции на некотором интервале  $(a, b)$ .

**Признаки монотонности.** *Для того, чтобы дифференцируемая на интервале  $(a, b)$  функция возрастала (убывала) на этом интервале достаточно, чтобы первая производная функции была всюду на интервале положительной (отрицательной).*

*Для того, чтобы дифференцируемая на интервале  $(a, b)$  функция не убывала (не возрастала) на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы первая производная функции была всюду на интервале неотрицательной (неположительной).*

В самом деле, каковы бы ни были две точки  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\beta > \alpha$  из интервала  $(a, b)$ , по формуле конечных приращений Лагранжа справедливо соотношение

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)(\beta - \alpha),$$

из которого немедленно следует справедливость сформулированных признаков.

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ . Производная этой функции  $f'(x) = x(3x - 4)$ . Она положительна на интервалах  $(-\infty, 0)$  и  $(3/4, +\infty)$ , поэтому на этих интервалах функция возрастает. На интервале  $(0, 3/4)$ , где производная отрицательная, функция убывает.

В точках 0 и 3/4 производная рассматриваемой функции обращается в нуль. Из Теоремы Ферма следует, что обращение в нуль производной в некоторой точке  $\alpha$  является необходимым условием того, что функция имеет в точке  $\alpha$  локальный экстремум, т.е. либо локальный минимум, либо локальный максимум. Поскольку в точке 0 возрастание функции сменяется убыванием, точка 0

является локальным максимумом функции. Точка  $3/4$  является точкой локального минимума, так как в ней убывание функции сменяется ее возрастанием.

На Рис. 2.4.1 представлены графики функции  $x^3 - 2x^2 + 2$  (сплошная линия) и ее производной (пунктирная линия).

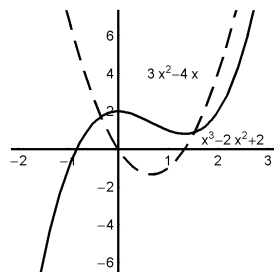


Рис.2.4.1

Представляется целесообразным наряду с необходимым условием иметь и достаточные условия локального экстремума функции.

**Определение.** Точка  $\alpha$ , в которой первая производная функции обращается в нуль, называется критической точкой функции.

Одно из достаточных условий экстремума представляет, в сущности, комбинацию необходимого условия с исследованием знака первой производной в окрестности критической точки.

**Первое достаточное условие локального экстремума.** Пусть точка  $\alpha$  является критической точкой дифференцируемой в некоторой окрестности рассматриваемой точки функции  $f(x)$ . Тогда, если слева от точки  $\alpha$  производная положительна, справа – отрицательна, то критическая точка  $\alpha$  является точкой локального максимума.

Если же слева от критической точки  $\alpha$  производная отрицательна, а справа положительна, то  $\alpha$  есть точка локального минимума.

Другое достаточное условие локального экстремума основано на исследовании первых трех членов формулы Тейлора в окрестности критической точки.

**Второе достаточное условие локального экстремума.** Пусть  $\alpha$  критическая точка дифференцируемой в некоторой окрестности точки  $\alpha$  функции  $f(x)$  и пусть в этой точке  $\alpha$  рассматриваемой функции существует вторая производная  $f''(\alpha)$ . Тогда, если  $f''(\alpha) < 0$ , то критическая точка  $\alpha$  является точкой локального максимума, а если  $f''(\alpha) > 0$ , то  $\alpha$  есть точка локального минимума.

Возвращаясь к примеру функции  $x^3 - 2x^2 + 2$ , эскиз графика которой представлен на Рис. 2.4.1, замечаем, что ее вторая производная  $6x - 2$  отрицательна в критической точке  $\alpha_1 = 0$  и положительна в критической точке  $\alpha_2 = 3/4$ .

Помимо точек, в которых существует и равна нулю первая производная функции  $f(x)$  локальные экстремумы могут находиться в точках, где первая производная не существует. Поскольку такие случаи не редкость, рассмотрим их подробнее. Оказывается, первое достаточное условие экстремума в слегка измененной форме может оказаться полезным при рассмотрении таких точек.

**Теорема о достаточном условии экстремума в точке, где нет производной.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $\alpha$  и у нее всюду в некоторой окрестности  $A_\delta$  этой точки, но за исключением самой точки  $\alpha$ , существует первая производная. Тогда, если в  $A_\delta$  производная  $f'(x)$  положительна (отрицательна) слева от  $\alpha$  и отрицательна (положительна) справа от  $\alpha$ , то в точке  $\alpha$  функция  $f(x)$  имеет локальный максимум (минимум).

Второе достаточное условие экстремума не позволяет сделать определенного заключения о характере критической точки  $\alpha$  функции  $f(x)$ , если в этой точке вторая производная обращается в нуль:  $f''(\alpha) = 0$ . Если в точке  $\alpha$  у рассматриваемой функции существуют производные более высокого порядка, то их можно привлечь для разрешения вопроса о наличии или отсутствии локального экстремума в критической точке.

**Теорема о достаточных условиях экстремума в терминах производных.** Пусть в критической точке  $\alpha$  у функции  $f(x)$  существуют производные до порядка  $n \geq 3$ , причем выполняются соотношения

$$f'(\alpha) = 0, \quad f''(\alpha) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n)}(\alpha) \neq 0. \quad (4.1)$$

Тогда, если  $n$  - четное число, то критическая точка  $\alpha$  является точкой локального экстремума. Точнее, при  $f^{(n)}(\alpha) < 0$  в точке  $\alpha$  локальный максимум, а при  $f^{(n)}(\alpha) > 0$  точка  $\alpha$  есть точка локального минимума.

Если же  $n$  нечетное число, то в точке  $\alpha$  нет локального экстремума.

**Пример 1.** Воспользуемся последней теоремой для исследования критических точек функций  $g(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$  и  $h(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ . Для функции  $g(x)$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x - e^{-x} - 2 \sin x, & g'(0) &= 0, \\ g''(x) &= e^x + e^{-x} - 2 \cos x, & g''(0) &= 0, \\ g^{(3)}(x) &= e^x - e^{-x} + 2 \sin x, & g^{(3)}(0) &= 0, \\ g^{(4)}(x) &= e^x + e^{-x} + 2 \cos x, & g^{(4)}(0) &= 4. \end{aligned}$$

Соотношения показывают, что  $\alpha = 0$  есть критическая точка функции  $g(x)$ , являющаяся точкой локального минимума.

Для функции  $h(x)$  соответствующие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^x + e^{-x} - 2, & h'(0) &= 0, \\ h''(x) &= e^x - e^{-x}, & h''(0) &= 0, \\ h^{(3)}(x) &= e^x - e^{-x}, & h^{(3)}(0) &= 2. \end{aligned}$$

Следовательно, критическая точка  $\alpha = 0$  функции  $h(x)$  не является точкой локального экстремума.

#### 4.2. Направление выпуклости.

Наряду с участками монотонности важную информацию о графике функции несут области выпуклости функции вверх и вниз. Будем предполагать, что рассматриваемые нами в этом параграфе функции имеют в окрестностях рассматриваемых точек непрерывную вторую производную. Пусть  $\alpha$  некоторая точка из области определения функции  $f(x)$ . Исследуем, по какую сторону от касательной (выше или ниже) лежит в некоторой окрестности точки  $\alpha$  график функции. Для этого определим знак разности функции  $f(x)$  и линейной функции  $l(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ , графиком которой является касательная.

$$f(x) - l(x) = f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x - \alpha) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\eta)(x - \alpha)^2}{2!}. \quad (4.2)$$

В формуле (4.2) мы воспользовались остаточным членом формулы Тейлора (3.25) в форме Лагранжа, где  $\eta$  некоторая точка между точками  $x$  и  $\alpha$ .

**Теорема о выпуклости графика функции.** Пусть в точке  $\alpha$  выполнено неравенство  $f''(\alpha) > 0$ , тогда в некоторой окрестности точки  $\alpha$  график функции  $f(x)$  расположен над касательной к графику функции в рассматриваемой точке. При  $f''(\alpha) < 0$  в некоторой окрестности точки  $\alpha$  график функции расположен ниже касательной.

**Определение.** Говорят, что на некотором интервале график функции  $f(x)$  обращен выпуклостью вниз (вверх), если он расположен выше (ниже) касательных к графику функции в каждой точке  $\alpha$  интервала.

**Определение.** Точка  $\alpha$  называется точкой перегиба графика функции  $f(x)$ , если в этой точке направление выпуклости графика изменяется на противоположное.

Из Теоремы о достаточных условиях экстремума в терминах производных следует, что необходимым условием того, что точка  $\alpha$  является точкой перегиба, является обращение в нуль в точке  $\alpha$  второй производной функции  $f''(\alpha) = 0$ .

**Теорема о достаточных условиях для точки перегиба.** Пусть в точке  $\alpha$  функция  $f(x)$  имеет третью производную и выполняются соотношения

$$f''(\alpha) = 0, \quad f^{(3)}(\alpha) \neq 0,$$

тогда точка  $\alpha$  является точкой перегиба графика функции  $f(x)$ . Возвращаясь к функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ , рассмотренной в начале параграфа 4.1, находим, что ее вторая производная  $6x - 4$  обращается в нуль в точке  $x = 2/3$ . Третья производная этой функции постоянна и равна 6. Поэтому точка  $x = 2/3$  есть точка перегиба функции  $f(x)$ . Рисунок Рис. 2.4.1 иллюстрирует характер изменения графика функции в точке перегиба.

#### 4.3. Асимптоты графика функции.



Помимо прямых, являющихся касательными к графику функции в различных точках, существенную роль играют прямые, называемые асимптотами графика.

**Определение.** Прямая  $x = \alpha$  называется вертикальной асимптотой графика функции  $f(x)$ , если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x), \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha-0} f(x)$$

равен  $+\infty$  или  $-\infty$ .

Вертикальной асимптотой  $x = 0$  обладают графики всех степенных функций  $x^{-n}$  с натуральными  $n$ . У тригонометрической функции  $\operatorname{tg} x$  бесконечное число вертикальных асимптот  $x = (2n + 1)\pi/2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**Определение.** Прямая  $y = \alpha$  называется горизонтальной асимптотой графика функции  $f(x)$ , если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \alpha) = 0$$

У функции  $\operatorname{arctg} x$  горизонтальной асимптотой при  $x \rightarrow +\infty$  является прямая  $x = \pi/2$ , а при  $x \rightarrow -\infty$  — прямая  $x = -\pi/2$ .

**Определение.** Прямая  $y = kx + m$ ,  $k \neq 0$  называется наклонной асимптотой графика функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если выполнены соотношения

$$f(x) = kx + m + \phi(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0. \quad (4.3)$$

Аналогично определяется наклонная асимптота при  $x \rightarrow -\infty$ .

**Теорема 4.7.** Для того, чтобы график функции  $f(x)$  имел наклонную асимптоту  $y = kx + m$  при  $x \rightarrow +\infty$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два равенства

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = m. \quad (4.4)$$

**Пример 2.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 5}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что прямая  $x = -5/2$  является вертикальной асимптотой графика функции (4.5). Вычисляя пределы функции

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 + 1}{x(2x + 5)}$$

при  $x \rightarrow \pm\infty$ , получаем, что они равны  $1/2$ . Пределы функции

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{2 - 5x}{2(2x + 5)}$$

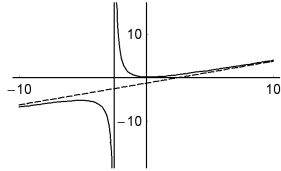


Рис.2.4.2

при  $x \rightarrow \pm\infty$  равны  $-5/4$ . Таким образом и при  $x \rightarrow -\infty$ , и при  $x \rightarrow +\infty$  функция (4.5) имеет одну и ту же наклонную асимптоту  $y = x/2 - 5/4$ . График рассматриваемой функции представлен на Рис. 2.4.2.

На рисунке наклонная асимптота представлена пунктирной линией, а вертикальная асимптота – сплошной.

В заключение заметим, что необходимыми и достаточными являются два условия (4.4) в совокупности. Так функция  $f(x) = x + \ln x$  удовлетворяет первому условию (4.4), но не удовлетворяет второму, и поэтому не имеет наклонных асимптот.

## 5. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ 2

В этой главе будут приведены описания лабораторных работ по материалу второго раздела книги.

### **Лабораторная работа 1. Тренажер символьного дифференцирования.**

Цель работы: выработка навыков использования правил дифференцирования для вычисления производных от элементарных функций. Для проведения лабораторной работы может использоваться Записная книжка Step-By-Step-Differentiation, содержащаяся в разделе NotebookDemos системы “Математика”. Русифицированные и переработанные с целью более точного отображения применяемых правил дифференцирования версии команд WalkD и RunD этой Записной книжки используются в данной лабораторной работе. Они носят названия StepD и SilentD. Первым аргументом этих команд являются элементарные функции, которые могут содержать символьные параметры. Вторым аргументом - имя переменной, по которой производится дифференцирование.

**Пример.** Вычислим производную по переменной  $x$  от функции  $x\sqrt{a^2 - x^2} + \arcsin x$ . Выполняем команду

$$\text{StepD} \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + \text{ArcSin}[x], x \right]$$

и получаем на экране компьютера следующую последовательность сообщений.

Дифференцируем функцию  $x\sqrt{a^2-x^2} + \text{ArcSin}[x]$  по переменной  $x$

$$(x\sqrt{a^2-x^2} + \text{ArcSin}[x])'$$

применяем правило дифференцирования суммы

$$(x\sqrt{a^2-x^2})' + (\text{ArcSin}[x])'$$

применяем правило дифференцирования функции арксинус

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + (x\sqrt{a^2-x^2})'$$

применяем правило дифференцирования произведения

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2}x' + x(\sqrt{a^2-x^2})'$$

применяем правило дифференцирования независимой переменной

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} + x(\sqrt{a^2-x^2})'$$

применяем правило дифференцирования сложной функции вида  $f[x]^a$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} + \frac{x(a^2-x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

применяем правило дифференцирования суммы

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} + \frac{x(a^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x(-x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

применяем правило дифференцирования постоянной

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} + \frac{x(-x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

применяем правило дифференцирования произведения функции и постоянной

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x(x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

применяем правило дифференцирования степенной функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{a^2-x^2} + \sqrt{a^2-x^2}$$

Если вместо команды **StepD** использовать команду **SilentD**, то получим такой же результат, но названия правил дифференцирования будут заменяться на знаки вопроса. Студент должен сам назвать эти правила.

## Лабораторная работа 2. Дифференциал функции.

Лабораторная работа посвящена изучению соотношения (3.7) главы 3 настоящего раздела между дифференциалом и приращением функции

$$\Delta_\alpha f(x) = d_\alpha f(x) + o(x - \alpha), \quad (5.1)$$

где  $\Delta_\alpha f(x) = f(x) - f(\alpha)$  приращение,  $d_\alpha f(x) = f'(\alpha)(x - \alpha)$  дифференциал функции  $f(x)$  в точке  $\alpha$ .

Смысл, в том числе и наглядный, последнего соотношения между приращением функции и ее дифференциалом можно успешно демонстрировать с помощью “Математики”. Для этого используется функция **Differential**, имеющая результатом своего выполнения кадры мультипликационного фильма.

Команда **Differential[Function[function], Interval[x, b, c], Initialdx[dx], Point[α], Frames[n]]** имеет пять аргументов: исследуемую функцию **function**, интервал **(b, c)**, на котором рисуются график функции и касательная к нему, начальное значение дифференциала независимой переменной **dx**, точку **α**, в которой вычисляются приращение и дифференциал функции, а также число **n** кадров мультипликации. На  $(k + 1)$ -ом кадре мультфильма значение дифференциала в  $(n - k)/n$  раз меньше исходного.

**Пример.** Рассмотрим тригонометрическую функцию косинус от аргумента  $\sqrt{x}$ , т.е. функцию  $\cos(\sqrt{x})$  на отрезке  $[0, 2.5]$ . Фиксируем точку  $\alpha$  равной  $\pi^2/9$ . Пусть начальное значение приращения независимой переменной  $dx$  равно 0.7. Сделаем пять кадров мультипликации. Нашему выбору аргументов соответствует команда:

**Differential[Function[Cos[√x]], Interval[x, 0, 2.5], Initialdx[0.7],  
Point[π<sup>2</sup>/9], Frames[5]]**

В результате ее выполнения получаем на экране компьютера пять кадров мультфильма, на которых синяя линия есть график функции  $\cos \sqrt{x}$ , белая прямая - график дифференциала рассматриваемой функции в точке  $x = \pi^2/9$ , зеленый отрезок - текущий  $dx$ , красный вертикальный отрезок - приращение  $\Delta_\alpha y$ , а сиреневый - дифференциал  $dy$ . Над рисунком видны соответствующие численные значения  $dx$  и относительной ошибки вычисления функции с помощью дифференциала в процентах:

$$\text{относительная ошибка} = \left| \frac{\Delta_\alpha y - d_\alpha y}{0.5 + \Delta_\alpha y} \right|$$

От кадра к кадру  $dx$  уменьшается на на  $1/5$  исходного значения. Выберем два первых кадра мультфильма (Рис.2.5.1 и Рис.2.5.2).

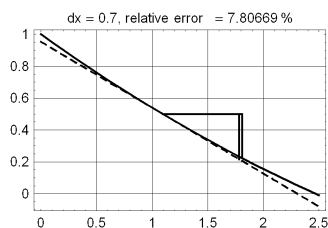


Рис. 2.5.1

Рисунок 2.5.1 демонстрирует графическое соотношение между касательной и графиком функции. При начальном  $dx = 0.7$  относительная ошибка замены приращения функции ее дифференциалом равна 7.8%.

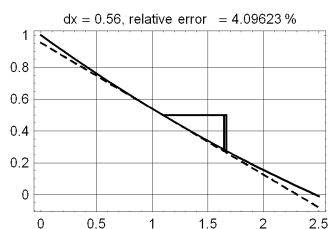


Рис. 2.5.2

Второй кадр мультфильма (Рис.2.5.2) показывает, что при уменьшении приращения аргумента на 0.14 относительная ошибка принимает значение 4.1%.

Для того, чтобы с помощью команды **Differential** исследовать соотношение между приращением и дифференциалом функций, полезно производить предварительную настройку параметров этой команды. Точку, в которой вычисляется дифференциал, полезно помещать в середину интервала, на котором рисуется картинка. Начальное значение дифференциала независимой переменной следует выбирать так, чтобы точки  $\alpha + d_\alpha x$ ,  $f(\alpha) + \Delta_\alpha(f)(x)$ ,  $f(\alpha) + d_\alpha(f)(x)$  не выходили за пределы рисунка. Для этого можно начинать с создания мультфильма, состоящего из одного кадра, т.е. положить последний аргумент команды равным 1.

#### Указания к выполнению работы.

В заданиях, приведенных ниже, требуется изучить относительную погрешность замены приращения заданной функции ее дифференциалом, вычисленным для  $\alpha = 0$ , в точках заданного интервала.

Для этого с помощью команды **Differential** следует выполнить пять кадров мультфильма.

Для каждого кадра с помощью графика функции и касательной вычислить (с “графической” точностью) значения функции в точке  $x_k = \alpha + d_\alpha(x_k)$ , где  $d_\alpha(x_k)$  значение дифференциала независимой переменной на данном кадре.

С целью вычисления значений функции по графикам помещают указатель мыши в любую точку внутри исследуемого кадра и щелкают левой кнопкой мыши. Указатель мыши приобретает форму креста. Затем нажимают клавишу **Ctrl**, и в левом нижнем углу окошка электронного документа “Математики”, в котором выполняется лабораторная работа, появляются координаты точки, находящейся в центре креста.

Подводят крест к точке на графике функции над точкой  $x_k$  и записывают на листе бумаги значение функции  $y_k = f(x_k)$ . Затем подводят крест к точке касательной и записывают приближенное значение функции  $Y_k$ , полученное с помощью дифференциала. Вычисляют величину  $100 |(y_k - Y_k)/y_k|$ , равную относительной ошибке вычисления значения функции с помощью дифференциала и сравнивают ее с относительной ошибкой, приведенной на кадре. Разница не должна превышать одну десятую от относительной ошибки.

Если расхождения значительны, что, как правило, происходит на третьем, четвертом и пятом кадрах мультфильма, то проводят численные расчеты, вычисляя значения  $y_k$  и  $Y_k$  с помощью пакета “Математика” и убеждаясь в полном совпадении вычисленных относительных ошибок и ошибок, приведенных в каждом кадре.

### Задания.

- 1) Функция  $\sqrt{1+x}$  на интервале  $(-1, 1)$ ,  $dx = 0.9$ .
- 2) Функция  $e^x$  на интервале  $(-1, 1)$ ,  $dx = -0.9$ .
- 3) Функция  $\ln(1+x)$  на интервале  $(-1/2, 1/2)$ ,  $dx = 1/3$ .
- 4) Функция  $\sin x$  на интервале  $(-\pi/4, \pi/4)$ ,  $dx = -\pi/5$ .
- 5) Функция  $\cos x$  на интервале  $(-\pi/4, \pi/4)$ ,  $dx = \pi/5$ .
- 6) Функция  $\operatorname{tg} x$  на интервале  $(\pi/4, \pi/4)$ ,  $dx = -\pi/5$ .

### Образец выполнения задания.

**Задание.** Функция  $\sqrt{1+\sin x}$  на интервале  $(-\pi/4, \pi/4)$ ,  $dx = \pi/5$ .

**Выполнение.** Выполняем команду

`Differential[Function[ $\sqrt{1+\operatorname{Sin}[x]}$ ], Interval[x,  $-\pi/4, \pi/4$ ], Initialdx[ $\pi/5$ ], Point[0], Frames[5]]`

и получаем пять кадров мультфильма. Начинаем “графические” вычисления для первого кадра. Способом, приведенным в Указаниях к Лабораторной работе, находим, что  $y_1 = 1.27$ ,  $Y_1 = 1.32$ . Вычисляем относительную ошибку с помощью “Математики”, выполняя команду

$$100 \operatorname{Abs} \left[ \frac{1.27 - 1.32}{1.27} \right]$$

с результатом 3.93701. На кадре мультфильма значение относительной ошибки 4.42227. Совпадение удовлетворительное.

Для третьего и последующих кадров мультфильма проводим вычисления по формулам. Находим производную заданной функции в точке  $\alpha = 0$ :

$$(\sqrt{1+\sin x})'|_{x=0} = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, дифференциал рассматриваемой функции, вычисленный в точке  $\alpha = 0$ , равен  $x/2$ .

Выбираем начальное значение дифференциала независимой переменной равным  $\pi/5$ , тогда приближенные значения функции в точках  $x_k = (10-k)\pi/50$ ,

$k = 0, 1, \dots, 9$ , которые соответствуют кадрам мультфильма, нужно вычислять по формуле

$$f(x_k) = 1 + \frac{(10 - k)\pi}{100}, \quad k = 0, 1, \dots, 9.$$

С помощью системы “Математика” вычисляем список приближенных значений функции. Для этого выполняем команду

$$\mathbf{data1} = \mathbf{Table} \left[ 1 + \frac{(10 - \mathbf{k})\pi}{100}, \{\mathbf{k}, 0, 9\} \right] // \mathbf{N}$$

и получаем список

$$\{1.31416, 1.28274, 1.25133, 1.21991, 1.1885, \\ 1.15708, 1.12566, 1.09425, 1.06283, 1.03142\}$$

Затем вычисляем список значений функции  $\sqrt{1 + \sin x}$  в тех же точках.

$$\mathbf{data2} = \mathbf{Table} \left[ \sqrt{1 + \mathbf{Sin} \left[ \frac{(10 - \mathbf{k})\pi}{100} \right]}, \{\mathbf{k}, 0, 9\} \right] // \mathbf{N}$$

$$\{1.26007, 1.23928, 1.21727, 1.19406, 1.16967, \\ 1.14412, 1.11745, 1.08967, 1.06082, 1.03092\}$$

Затем, пользуясь тем, что в “Математике” списки складываются, вычитаются, умножаются и делятся поэлементно, вычисляем абсолютные ошибки в каждой точке

$$\mathbf{data3} = \mathbf{Abs}[\mathbf{data2} - \mathbf{data1}]$$

$$\{0.0540858, 0.0434585, 0.0340544, 0.0258515, 0.018827, \\ 0.0129568, 0.00821577, 0.0045775, 0.00201461, 0.000498607\}$$

Разделив список **data3** на список **data2** и умножив результат на 100 %, получаем список относительных погрешностей

$$\mathbf{data4} = \frac{\mathbf{data3}}{\mathbf{data2}} 100 \% "$$

$$\{4.29227\%, 3.50674\%, 2.79759\%, 2.16501\%, 1.6096\%, \\ 1.13247\%, 0.735226\%, 0.420081\%, 0.189911\%, 0.0483654\%\}$$

Сравнивая полученные значения со значениями относительных ошибок на кадрах мультфильма, убеждаемся в их полном совпадении.

### Лабораторная работа 3. Формула Тейлора.



Лабораторная работа посвящена применению многочленов Тейлора  $P_n(x)$  для приближенных вычислений значений функций. Для оценки погрешности приближенных вычислений следует пользоваться остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) \equiv f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} |x - \alpha|,$$

где  $\zeta$  некоторая точка из промежутка  $(x, \alpha)$ . Из последней формулы получается следующая оценка для абсолютной ошибки  $|R_{n+1}(x)|$  вычисления

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{\max(|f^{(n+1)}(y)|)}{(n+1)!} |x - \alpha| \quad (5.2)$$

где максимум модуля  $(n+1)$ -ой производной вычисляется по всем  $y$  из промежутка  $(\alpha, x)$ .

Формула (5.2) дает оценку сверху для абсолютной погрешности  $|R_{n+1}(x)|$  вычисления функции с помощью многочлена Тейлора. Теоретически, относительная погрешность равна

$$\left| \frac{R_{n+1}(x)}{f(x)} \right| = \frac{|R_{n+1}(x)|}{|f(x)|} \quad (5.3)$$

Однако в практических вычислениях функцию  $|f(x)|$  в знаменателе (5.3) заменяют функцией  $|P_n(x)|$ , если  $|P_n(x)| \leq |f(x)|$ . Если же  $|P_n(x)| > |f(x)|$ , то выражение  $|f(x)|$  заменяют выражением  $|P_n(x) - \delta|$ , где  $\delta$  абсолютная погрешность, или на  $|P_n(x) + \delta|$  в зависимости от того какое из неравенств  $|P_n(x) - \delta| \leq |f(x)|$  или  $|P_n(x) + \delta| \leq |f(x)|$  имеет место.

Для изучения вопросов, связанных с применением формулы Тейлора в приближенных вычислениях, средствами языка программирования “Математика” создается команда **TaylorPlot[функция, интервал, точка, порядок многочлена Тейлора]**. Выполнение команды порождает на экране компьютера рисунок, на котором в синий цвет окрашен график функции в выбранном пользователем интервале, а в красный цвет окрашен график многочлена Тейлора. На графике функции отмечается черная точка, в окрестности проекции которой на ось абсцисс изучается многочлен Тейлора. Кроме того, команда вычисляет сам многочлен Тейлора. Его можно использовать в ходе дальнейших вычислений.

**Пример.** Изучим характер и погрешность аппроксимации функции  $\cos(x + x^2)$  в окрестности точки  $x = 0.7$  многочленами Тейлора первого и второго порядков. Начинаем с многочлена первой степени, т.е., фактически, с дифференциала. Для этого выполняем команду

```
TaylorPlot[Function[Cos[x + x2]], Interval[x, -π, π ],
Point[0.7], Degree[1 ]]
```

и получаем рисунок 2.5.3, а также первые два члена разложения рассматриваемой функции по формуле Тейлора

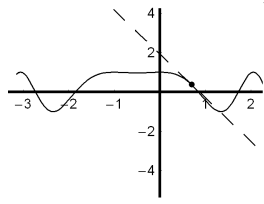


Рис.2.5.3

$$\text{Cos}[x + x^2] = 0.37166 - 2.22809(-0.7 + x) + o(-0.7 + x)$$

Рисунок позволяет сделать предположение, что многочлен Тейлора первого порядка достаточно хорошо приближает функцию на отрезке  $[0.5, 1.5]$ . Чтобы оценить погрешность численно, нарисуем график модуля разности функции и ее многочлена Тейлора первого порядка. С этой целью пользуемся графической командой **Plot** пакета “Математика”:

$$\text{Plot}[\text{Abs}[\text{Cos}[x + x^2] - 0.37166 - 2.22809(-0.7 + x)], \{x, 0.5, 1.5\}]$$

получая рисунок Рис.2.5.4

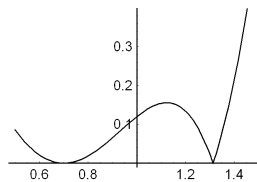


Рис.2.5.4

Видно, что абсолютная ошибка ведет себя как парабола второго порядка в окрестности точки  $x = 0.7$ . Абсолютная ошибка меньше 0.1 на интервале  $(0.5, 0.9)$ . Кроме того, замечаем, что абсолютная ошибка мала и в окрестности точки  $x = 1.3$ , где график функции и касательная пересекаются. Однако абсолютная ошибка в окрестности точки  $x = 1.3$  ведет себя как линейная, а не квадратичная функция.

Приближим теперь рассматриваемую функцию многочленом Тейлора второго порядка. Выполним команду

$$\text{TaylorPlot}[\text{Function}[\text{Cos}[x + x^2]], \text{Interval}[x, -\pi, \pi],$$

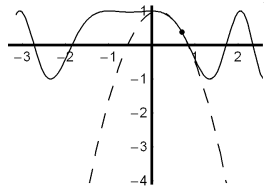


Рис.2.5.5

**Point[0.7], Degree[2]**

После ее выполнения получаем результат в виде рисунка Рис.2.5.5 и формулы

$$\text{Cos}[x + x^2] = 0.37166 - 2.22809(-0.7 + x) - 1.99875(-0.7 + x)^2 + o((-0.7 + x)^2)$$

Рисунок показывает, что абсолютная ошибка достаточно мала на интервале (0, 1.1). Нарисуем график абсолютной ошибки квадратичного приближения (Рис.2.5.6).

**Plot[Abs[Cos[x + x<sup>2</sup>] - 0.37166 - 2.22809(-0.7 + x) - 1.99875(-0.7 + x)<sup>2</sup>], {x, 0.5, 1.5}]**

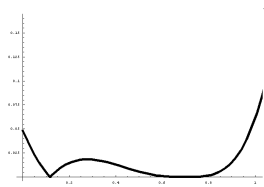


Рис.2.5.6

Видно, что на ранее рассмотренном интервале (0.5, 0.9) абсолютная ошибка не превосходит 0.025, т.е. она вчетверо меньше абсолютной ошибки приближения многочленом первого порядка. Кроме того, абсолютная ошибка не превосходит 0.1 на более широком интервале (0, 1).

**Задания**

1) Для каких значений аргумента в окрестности точки  $c = \pi/3$  тригонометрическую функцию  $\cos x$  можно приближенно вычислять с помощью дифференциала этой функции, вычисленного в этой точке, с относительной погрешностью, не превосходящей 1%?

2) Для каких значений аргумента в окрестности точки  $c = \pi/3$  тригонометрическую функцию  $\cos x$  можно приближенно вычислять с помощью многочлена Тейлора второго порядка этой функции, вычисленного в точке  $c$ , с относительной погрешностью, не превосходящей 0.1%?

3) Для каких значений аргумента в окрестности точки  $c = \pi/4$  функцию  $x \operatorname{tg} x$  можно приближенно вычислять с помощью дифференциала этой функции, вычисленного в этой точке, с относительной погрешностью, не превосходящей 1%?

4) Многочлен Тейлора какого порядка функции  $\ln(1+x)$  следует использовать, чтобы найти приближенное значение  $\ln(1.1)$  с относительной погрешностью, не превосходящей 0.5%?

5) Многочлен Тейлора какого порядка функции  $\operatorname{arctg} x$  следует использовать, чтобы найти приближенное значение  $\operatorname{arctg} 0.2$  с относительной погрешностью, не превосходящей 0.1%?

#### Образец выполнения заданий.

**Задание.** Для каких значений аргумента  $x$  в окрестности точки  $\alpha = \pi/6$  функцию  $x \sin x$  можно приближенно вычислять с помощью дифференциала этой функции, вычисленного в точке  $\alpha$ , с относительной погрешностью, не превосходящей 1%?

**Решение.** Вычислять приближенно значения функции  $f(x)$  с помощью ее дифференциала, определенного в точке  $x = \alpha$ , означает, что при вычислении вместо функции используется многочлен Тейлора первого порядка  $P_1(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$ . Дифференциалом является второе слагаемое в последней формуле.

Воспользуемся командой **TaylorPlot**, чтобы найти многочлен Тейлора первого порядка функции  $x \sin x$  в точке  $x = \pi/6$ .

```
TaylorPlot[Function[x Sin[x]], Interval[x, 0,  $\frac{\pi}{2}$ ],
           Point[ $\frac{\pi}{6}$ ], Degree[1]]
```

После выполнения команды получаем рисунок, который мы не будем воспроизводить, так как он аналогичен рисунку 2.5.3, и многочлен Тейлора, стоящий в правой части следующей формулы, появляющейся на экране компьютера вслед за рисунком:

$$x \operatorname{Sin}[x] = \frac{\pi}{12} + \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \right) \left( -\frac{\pi}{6} + x \right) + o \left( -\frac{\pi}{6} + x \right)$$

Вводим многочлен  $P_1(x)$  в компьютер в виде

$$P[x_-, 1] := \frac{\pi}{12} + \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \right) \left( -\frac{\pi}{6} + x \right)$$

Для нахождения окрестности точки  $\pi/6$ , в которой относительная ошибка приближенного вычисления не превосходит 1%, находим сначала оценку для абсолютной погрешности вычислений

$$|R_2(x)| \leq \frac{\max |f''(y)|}{2} \left| x - \frac{\pi}{6} \right|,$$

т.е. фактически максимум второй производной.

Вычисляем вторую производную исследуемой функции

$$\mathbf{deriv2} = \mathbf{D}[\mathbf{x} * \mathbf{Sin}[\mathbf{x}], \mathbf{x}, \mathbf{x}]$$

$$2 \mathit{Cos}[x] - x \mathit{Sin}[x]$$

и находим ее точки локального экстремума. Для этого вычисляем производную от второй производной

$$\mathbf{deriv3} = \mathbf{D}[\mathbf{deriv2}, \mathbf{x}]$$

$$-x \mathit{Cos}[x] - 3 \mathit{Sin}[x]$$

и находим точки, где она обращается в нуль. С этой целью используем команду **FindRoot** системы “Математика”.

$$\mathbf{x}/.\mathbf{FindRoot}[\mathbf{deriv3} == \mathbf{0}, \{\mathbf{x}, \mathbf{0}, \pi/2\}]$$

0

Полученный результат означает, что внутри отрезка  $[0, \pi/2]$  у второй производной нет локальных экстремумов. Следовательно, максимальные значения принимаются второй производной на концах отрезка. Вычисляем их.

$$\{\mathbf{deriv2}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}\}, \mathbf{deriv2}/.\{\mathbf{x} \rightarrow \pi/2\}\}$$

$$\{2, -\pi/2\}$$

Таким образом максимальное значение модуля второй производной равно двум. Таким образом, абсолютная ошибка вычисления значений функции  $x * \mathit{Sin}[x]$  в точках отрезка  $[0, \pi/2]$  с помощью ее дифференциала, найденного в точке  $\pi/6$ , не превосходит  $(x - \pi/6)^2$ .

Положим

$$\mathbf{abserror} := (\mathbf{x} - \pi/6)^2$$

Из рисунка, полученного после выполнения команды **TaylorPlot**, видно, что на всем отрезке  $[0, \pi/2]$  график функции расположен ниже касательной, т.е. выполняется неравенство  $|P_1(x)| \leq |f(x)|$ . Поэтому полагаем относительную ошибку равной

$$\mathbf{relerror} := \mathbf{Abs} \left[ \frac{\mathbf{abserror}}{\mathbf{P}[\mathbf{x}, \mathbf{1}]} \right]$$

Команда системы “Математика” **InequalitySolve** позволяет найти решение неравенства  $\mathbf{relerror} \leq 0.01$ .

<< Algebra'InequalitySolve'

InequalitySolve[releror ≤ 0.01, x]//N

0.249018 ≤ x ≤ 0.249018 || 0.476978 ≤ x ≤ 0.579754

Мы видим, что на отрезке  $[0.476978, 0.579754]$ , которому принадлежит точка  $\pi/6$ , приближенно равная 0.523599, относительная ошибка не превосходит 0.01, т.е. 1%. Задача решена.

Система “Математика” позволяет визуально убедиться в правильности проделанных вычислений. Для этого рисуем график теоретической относительной ошибки

$$\left| \frac{\text{abserror}}{x * \text{Sin}[x]} \right|$$

на отрезке  $[0.45, 0.6]$ , содержащем найденный нами отрезок, и горизонтальную линию  $y = 0.01$ .

Plot[{Abs  $\left[ \frac{\text{abserror}}{x \text{Sin}[x]} \right]$ , 0.01}, {x, 0.45, 0.6}]

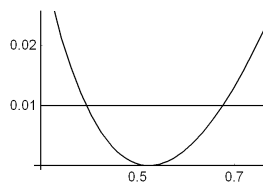


Рис.2.5.7

На полученном рисунке 2.5.7 представлены график относительной ошибки, возникающей при замене функции  $x \sin x$  ее многочленом Тейлора первого порядка и горизонтальная прямая  $y = 0.01$ . Следует найти абсциссы точек пересечения графика относительной ошибки и прямой.

Для этого помещают указатель мыши в любую точку внутри поля рисунка и щелкают левой кнопкой мыши. Указатель приобретает форму креста. Нажимают клавишу **Ctrl**, в левом нижнем углу рабочего документа, в котором выполняются вычисления, появляются координаты перекрестия. Подводят перекрестие к точкам пересечения прямой и графика относительной ошибки и находят значения абсцисс этих точек.

Их приближенные значения равны 0.469 и 0.592. Следовательно, вычислять значения функции  $x * \sin x$  с помощью дифференциала этой функции, найденного в точке  $\pi/6$ , с относительной погрешностью, не превосходящей 1%, можно на более широком, чем найденный нами отрезок  $[0.476978, 0.579754]$ , отрезке  $[0.469, 0.676]$ , содержащем точку  $\pi/6$ .

## РАЗДЕЛ 3

### ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ ОДНОГО АРГУМЕНТА

И дифференциальное, и интегральное исчисления основаны на бесконечных (непрерывных) процессах. Нахождение производной опирается на процесс бесконечного измельчения, или деления отрезков. Вычисление интеграла использует процесс бесконечного суммирования. Противоположности сходятся. В математическом анализе это составляет содержание Основной теоремы интегрального исчисления.

#### 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**1.1. Площадь круга.** В качестве введения в проблему интегрирования рассмотрим современную версию того, как античные греческие математики (Антифон и другие) решали задачу вычисления площади круга. В круг вписывался квадрат и около круга описывался квадрат. Площадь круга  $S$ , очевидно, больше площади  $s_4$  вписанного и меньше площади  $S_4$  описанного квадрата:  $s_4 < S < S_4$  ( см. Рис. 3.1.1).

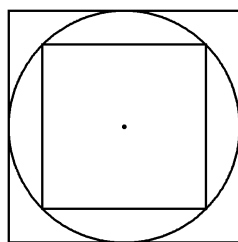


Рис. 3.1.1

Затем каждая сторона вписанного квадрата рассматривалась как основание равнобедренного треугольника, третья вершина которого лежала на окружности. Стороны этих равнобедренных треугольников образуют правильный

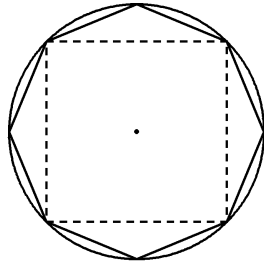


Рис. 3.1.2

вписанный восьмиугольник. Площадь восьмиугольника больше площади вписанного квадрата, но меньше площади круга  $s_4 < s_8 < S$  (Рис. 3.1.2)

Аналогичный прием удвоения числа сторон осуществлялся над описанным квадратом, приводя к правильному описанному восьмиугольнику, площадь которого  $S_8$  меньше площади описанного квадрата, но больше площади круга  $S < S_8 < S_4$  (Рис. 3.1.3).

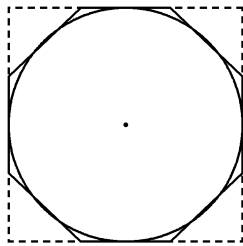


Рис. 3.1.3

Затем происходил переход от правильных восьмиугольников к правильным шестнадцатиугольникам и т.д. Тем самым, порождались две монотонные последовательности: возрастающая  $s_{2^n}$  площадей вписанных правильных многоугольников и убывающая  $S_{2^n}$  площадей правильных описанных многоугольников с числом сторон  $2^n$ . При любом  $n$  выполняются неравенства  $s_{2^n} < S < S_{2^n}$ .

Для нахождения площадей вписанных и описанных многоугольников их разбивали на треугольники. Основаниями треугольников являются стороны мно-



гоугольников, а вершинами – центр круга. Площадь каждого вписанного треугольника по теореме синусов равна  $1/2 R^2 \sin(2\pi/2^n)$ , а треугольника описанного многоугольника равна  $R^2 \operatorname{tg}(\pi/2^n)$ , где  $R$  радиус круга. Следовательно,

$$s_{2^n} = 2^n \frac{R^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{2^n}\right), \quad S_{2^n} = 2^n R^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Вычислим предел последовательности  $s_{2^n}$ . Используя второй замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow 0}(\sin x/x) = 1$ , получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \frac{R^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \sin\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)\right) = \frac{R^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)}{\frac{2\pi}{2^n}}\right) = \pi R^2$$

В силу эквивалентности бесконечно малых в нуле функций  $\sin x$  и  $\operatorname{tg} x$ , такой же предел имеет последовательность  $S_{2^n}$ . Следовательно, площадь круга  $S = \pi R^2$ .

Заметим, что при вычислениях площадей  $s_{2^n}$  и  $S_{2^n}$  мы фактически суммировали  $2^n$  площадей треугольников разбиения, т.е. в пределе при  $n \rightarrow \infty$  происходило суммирование бесконечного числа бесконечно малых площадей. Это – центральная идея интегрального исчисления.

**1.2. Площадь криволинейной трапеции.** Пусть на некотором конечном отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная положительная функция  $f(x)$ . *Криволинейной трапецией* называется геометрическая фигура на координатной плоскости, ограниченная снизу осью абсцисс, сверху – графиком функции  $f(x)$ , а слева и справа вертикальными отрезками  $[a, f(a)]$ ,  $[b, f(b)]$ .

Для вычисления площади криволинейной трапеции воспользуемся основной идеей предыдущего параграфа. Трапецию будем заключать между последовательными геометрическими фигурами, площади которых мы можем легко вычислять. Разности площадей фигур последовательности, одна из которых содержится в трапеции, а другая содержит трапецию, должна быть бесконечно малой последовательностью. Тогда площадью криволинейной трапеции естественно считать общий предел площадей последовательностей фигур.

Для реализации описанной выше идеи разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных отрезков  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ,  $\alpha_0 = a$ ,  $\alpha_n = b$ . На каждом отрезке разбиения непрерывная функция  $f(x)$  по Второй теореме Вейерштрасса (параграф 4.8 главы 4 раздела 1) принимает свои минимальное  $m_i$  и максимальное значения  $M_i$ . На каждом отрезке разбиения построим два прямоугольника. Каждый из них имеет отрезок разбиения своим нижним основанием. У одного из прямоугольников (меньшего) боковые стороны равны  $m_i$ , у другого (большого) боковые стороны имеют длину  $M_i$ . Если объединить все меньшие прямоугольники в одну фигуру, то она будет целиком содержаться в криволинейной трапеции (Рис. 3.1.4).

Соответственно, фигура, составленная из больших прямоугольников, будет содержать трапецию (Рис. 3.1.5).

Площадь вписанной ступенчатой фигуры равна

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i, \quad (1.1)$$

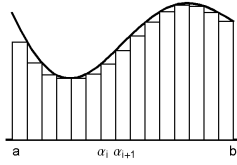


Рис. 3.1.4

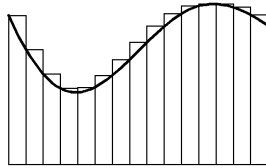


Рис. 3.1.5

а описанной фигуры равна

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i, \quad (1.2)$$

где  $\Delta x_i = (b-a)/n$  длина отрезков разбиения. Выполняются неравенства

$$s_n < S < S_n,$$

где  $S$  – площадь криволинейной трапеции. Кроме того, разность площадей вписанной и описанной фигур можно представить в виде

$$S_n - s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i). \quad (1.3)$$

На следующем шаге каждый из отрезков разбиения  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  делим точкой  $\beta_i$  пополам, и получаем всего  $2n$  отрезков нового разбиения.

Убедимся в том, что  $s_{2n} \geq s_n$  и  $S_{2n} \leq S_n$ , т.е. что последовательность площадей вписанных фигур неубывающая, а последовательность площадей описанных фигур невозрастающая. В самом деле, если  $m_i$  минимальное значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , а  $m_i^{(1)}$ ,  $m_i^{(2)}$  минимальные значения на

меньших отрезках  $[\alpha_i, \beta_i]$  и  $[\beta_i, \alpha_{i+1}]$ , то, очевидно,  $m_i^{(1)} \geq m_i$  и  $m_i^{(2)} \geq m_i$ . Отсюда,

$$m_i \frac{b-a}{n} = m_i \frac{b-a}{2n} + m_i \frac{b-a}{2n} \leq m_i^{(1)} \frac{b-a}{2n} + m_i^{(2)} \frac{b-a}{2n}. \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что

$$s_{2n} = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (m_i^{(1)} + m_i^{(2)}) \geq s_n.$$

Аналогично доказывается, что  $S_{2n} \leq S_n$ .

Докажем, что разность площадей  $S_n - s_n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольное число. По Теореме Кантора (параграф 4.10 главы 4 раздела 1) всякая непрерывная на отрезке функция  $f(x)$  равномерно непрерывна. Это означает, что найдется такое  $n$ , что на каждом отрезке разбиения  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  длиной  $(b-a)/n$  будет выполняться неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$  для любых  $x, y$  из этого отрезка. Следовательно, будут также выполняться неравенства  $|M_i - m_i| < \varepsilon/(b-a)$ , а, значит, и неравенство

$$|S_n - s_n| = \frac{b-a}{n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |M_i - m_i| \leq \frac{b-a}{n} \frac{n\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Таким образом,  $s_n$  и  $S_n$  суть неубывающая и невозрастающая последовательности, разность между которыми есть бесконечно малая последовательность. Следовательно, они образуют архимедову пару  $(s_n, S_n)$  вещественных последовательностей и определяют согласно Теореме о полноте множества вещественных чисел некоторое вещественное число  $S$ . Последнее принимается в качестве площади криволинейной трапеции.

**1.3. Определение интеграла по Дарбу.** Результат предыдущего параграфа нуждается в обобщении. Дело в том, что хотя понятие определенного интеграла возникло из задач вычисления площадей и объемов, его приложения далеко не исчерпываются геометрией. Во-первых, мы откажемся от требования, чтобы функция была положительной. Во-вторых, будем допускать разбиения отрезка  $[a, b]$  на неравные отрезки.

Пусть на конечном отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Рассмотрим разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  на меньшие отрезки точками разбиения

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{k-1} < \alpha_k = b. \quad (1.5)$$

Наибольшую длину  $\lambda_T$  отрезков  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  назовем *диаметром разбиения*.

На каждом отрезке разбиения обозначим через  $m_i$  минимальное, а через  $M_i$  максимальное значения функции  $f(x)$ . Для заданной функции  $f(x)$  составим *нижнюю сумму Дарбу*  $s_T$  и *верхнюю сумму Дарбу*  $S_T$  рассматриваемого разбиения:

$$s_T = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta x_i, \quad S_T = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \Delta x_i, \quad (1.6)$$

где  $\Delta x_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ . Верхние и нижние суммы Дарбу обладают следующими свойствами:

1) Для любого разбиения  $T$  нижняя сумма Дарбу меньше или равна верхней:  $s_T \leq S_T$ .

2) Если разбиение  $T_2$  получается из разбиения  $T_1$  добавлением нескольких точек к уже существующим, то нижняя сумма Дарбу не убывает ( $s_{T_1} \leq s_{T_2}$ ), а верхняя сумма не возрастает ( $S_{T_1} \geq S_{T_2}$ ).

3) Для любых разбиений  $T_1$  и  $T_2$  выполняется неравенство

$$s_{T_1} \leq S_{T_2}.$$

Первые два свойства непосредственно следуют из определений минимального и максимального значений. Докажем третье.

По разбиениям  $T_1$  и  $T_2$  составим новое разбиение  $T$ , точками которого будут как точки первого, так и второго разбиений. Из свойств 1) и 2) следуют неравенства

$$s_{T_1} \leq s_T \leq S_T \leq S_{T_2},$$

обосновывающие свойство 3).

Обозначим через  $T_0$  “тривиальное” разбиение отрезка  $[a, b]$ , т.е.  $T_0 = [a, b]$ . Рассмотрим последовательность  $T_n$  разбиений такую, что каждое разбиение  $T_{n+1}$  получается из разбиения  $T_n$  добавлением новых точек разбиения к уже существующим. При этом последовательность  $\lambda_n$  диаметров разбиений стремится к 0. Впредь, если не оговорено противное, под последовательностью разбиений  $T_n$  мы всегда будем понимать последовательность с только что описанными свойствами.

**Определение.** Если для любой последовательности разбиений  $T_n$  последовательности  $s_n$  и  $S_n$  стремятся к одному и тому же одинаковому для всех последовательностей  $T_n$  пределу  $S$ , то этот предел называется определенным интегралом в смысле Дарбу функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$ .

Функция  $f(x)$ , для которой существует определенный интеграл, называется интегрируемой на отрезке  $[a, b]$ . Определенный интеграл функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$  обозначается через

$$\int_a^b f(x) dx.$$

В вырожденном случае отрезка  $[a, a]$  положим

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Кроме того, положим, что

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Заметим, что аргумент функции одной вещественной переменной можно обозначать различными символами. И в этом смысле  $f(x) \equiv f(y) \equiv f(t) \equiv \dots$ . Аналогично,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

**Теорема о существовании определенного интеграла от непрерывной на отрезке функции.** Любая непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  интегрируема на этом отрезке.

**Следствие.** График непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции имеет нулевую площадь.

В самом деле, график непрерывной функции на отрезке располагается между двумя ступенчатыми фигурами. Одна целиком содержится в криволинейной трапеции и имеет площадь равную нижней сумме Дарбу. Другая ступенчатая фигура, площадью равная верхней сумме Дарбу, целиком заключает в себе криволинейную трапецию. Разность площадей фигур при измельчении разбиения стремится к нулю. Таким образом, график непрерывной функции содержится внутри геометрической фигуры сколь угодно малой площади. Это и составляет утверждение следствия.

**Пример 1.** Найдем с погрешностью, не превосходящей 1%, площадь параболического полусегмента, т.е. площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции  $\sqrt{x}$  на отрезке  $[0, 1]$ . Начнем с разбиения  $T_1$  отрезка  $[0, 1]$  на десять равных частей. Поскольку график функции  $\sqrt{x}$  монотонно возрастающий, то минимальные значения на отрезках разбиения принимаются в левых концах, а максимальные – в правых концах (Рис. 3.1.6)

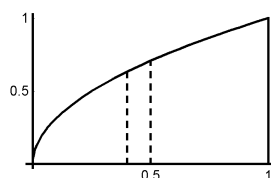


Рис. 3.1.6

С помощью компьютера или калькулятора легко получить, что суммы Дарбу принимают (после округлений) значения:

$$s_{T_1} = 0.1 \sum_{k=0}^9 \sqrt{0.1 k} = 0.611, \quad S_{T_1} = 0.1 \sum_{k=1}^{10} \sqrt{0.1 k} = 0.711.$$

Относительная погрешность вычисления не превосходит  $(S_{T_1} - s_{T_1})/s_{T_1} = 0.16$ , или 16%. Ввиду большого значения погрешности, новое разбиение  $T_2$  построим, разбив каждый прежний отрезок разбиения на десять частей. Приходим к результату:

$$s_{T_2} = 0.01 \sum_{k=0}^{99} \sqrt{0.01 k} = 0.661, \quad S_{T_2} = 0.01 \sum_{k=1}^{100} \sqrt{0.01 k} = 0.671,$$

относительная погрешность которого не превосходит 1.5%. Поэтому новое разбиение  $T_3$  получаем, разделив отрезки разбиения  $T_2$  пополам:

$$s_{T_3} = 0.005 \sum_{k=0}^{199} \sqrt{0.005 k} = 0.664, \quad S_{T_3} = 0.005 \sum_{k=1}^{200} \sqrt{0.005 k} = 0.669.$$

Относительная погрешность этого результата не превосходит 0.75%. Таким образом, вычисляемая площадь заключена между 0.664 и 0.669:

$$0.664 \leq \int_0^1 \sqrt{x} dx \leq 0.669.$$

Как мы увидим ниже, точное значение площади равно  $2/3$ .

**1.4. Определение интеграла по Риману.** Существует другой подход к определению интеграла. В его основу положены римановы суммы. При этом не предполагается, что интегрируемые функции непрерывны на отрезке интегрирования.

В Примере 1, находя приближенное значение интеграла от функции  $\sqrt{x}$  по отрезку  $[0, 1]$ , мы воспользовались монотонностью функции  $\sqrt{x}$ . В силу монотонности минимальное значение функции на каждом отрезке разбиения принимается на левом конце, а максимальное значение на правом конце отрезка. Если же функция не монотонна, отыскание минимальных и максимальных значений на отрезках разбиения представляет собой самостоятельную и довольно непростую задачу. В связи с этим представляет и теоретический, и вычислительный интерес следующая конструкция.

Вновь рассмотрим произвольное разбиение  $T$  (1.5) отрезка интегрирования  $[a, b]$ . На каждом отрезке фиксируем некоторую точку  $\xi_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ . Назовем такое разбиение *пунктированным*.

**Определение.** Римановой суммой функции  $f(x)$ , порожденной пунктированным разбиением  $T$ , называется конечная сумма

$$\sigma_T = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i). \quad (1.7)$$

**Определение.** Если для любой последовательности  $T_n$  пунктированных разбиений отрезка  $[a, b]$  такой, что  $\lambda_n \rightarrow 0$ , последовательности Римановых сумм сходятся к одному и тому же пределу  $I$ , то последний называется определенным интегралом по Риману функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$

В дальнейшем под определенным интегралом будет всегда пониматься интеграл в смысле Римана. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема о совпадении интегралов по Риману и Дарбу.** *Если на отрезке  $[a, b]$  существует определенный интеграл функции  $f(x)$  в смысле Дарбу, то существует и определенный интеграл в смысле Римана и они совпадают.*

С помощью Римановых сумм легко доказать интегрируемость некоторых разрывных функций.

**Теорема об интегрируемости функции, имеющей точку устранимого разрыва.** *Пусть функция  $f(x)$  непрерывна во всех точках отрезка  $[a, b]$  за исключением внутренней точки  $c$ , где она имеет устранимый разрыв. Тогда  $f(x)$  интегрируема по Риману на отрезке  $[a, b]$ .*

**1.5. Аддитивность определенного интеграла.** Интуитивно очевидное утверждение, что общая площадь двух неперекрывающихся геометрических фигур равна сумме их площадей, имеет аналогию в теории интеграла.

**Теорема об аддитивности определенного интеграла.** *Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезках  $[a, c]$ ,  $[c, b]$ , где  $c$  внутренняя точка отрезка  $[a, b]$ , и ограничена на отрезке  $[a, b]$ , тогда она интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и для интегралов по этим отрезкам справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Графической иллюстрацией утверждения теоремы служит Рис. 3.1.7.

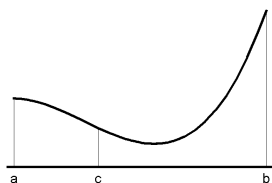


Рис. 3.1.7

**1.6. Теорема о среднем.** С геометрической точки зрения обсуждаемая в этом параграфе теорема гласит, что криволинейная трапеция равновелика некоторому прямоугольнику с тем же основанием, что и у трапеции, и высотой, заключенной между максимумом и минимумом интегрируемой функции.

**Теорема о среднем.** *Если функция  $f(x)$  непрерывна, то на отрезке  $[a, b]$  найдется такая точка  $c \in [a, b]$ , что выполнено равенство*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Число  $f(c)$  называется *средним значением* функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

**1.7. Линейность определенного интеграла.** Определяя интеграл с помощью римановых сумм, легко обосновать важное свойство линейности определенного интеграла.

**Теорема о свойстве линейности определенного интеграла.** Пусть  $\alpha, \beta$  произвольные вещественные числа, а функции  $f(x), g(x)$  интегрируемы по отрезку  $[a, b]$ . Тогда функция  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и справедливо соотношение

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (1.8)$$

**1.8. Формула Ньютона-Лейбница.** Вычисление определенного интеграла с помощью римановых (1.7) сумм или нижних и верхних сумм Дарбу (1.6) можно охарактеризовать как суммирование бесконечно большого числа бесконечно малых величин. Последнее обстоятельство прокладывает путь дифференциальному исчислению в исчисление интегральное, предоставляя очень мощное средство вычисления определенных интегралов.

Рассмотрим интегрируемую на отрезке  $[a, b]$  функцию  $f(x)$ , пунктированное разбиение  $T$  (1.5) и риманову сумму (1.7)

$$\sigma_T = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i). \quad (1.7)$$

Предположим, что на отрезке  $[a, b]$  существует такая дифференцируемая функция  $F(x)$ , что в каждой точке этого отрезка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (1.9)$$

Любая функция  $F(x)$ , удовлетворяющая (1.9), называется *первообразной* для функции  $f(x)$ .

Для каждого  $i$  справедливы равенства  $F'(\xi_i) = f(\xi_i)$ , поэтому риманову сумму (1.7) можно записать в виде

$$\sigma_T = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i). \quad (1.10)$$

Выберем в качестве точек  $\xi_i$  те точки отрезков  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , которые фигурируют в формулах конечных приращений Лагранжа для первообразной функции  $F(x)$ :

$$F(\alpha_{i+1}) - F(\alpha_i) = F'(\xi_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

Тогда риманова сумма (1.10) примет вид

$$\sigma_T = \sum_{i=0}^{k-1} (F(\alpha_{i+1}) - F(\alpha_i)) = F(b) - F(a), \quad (1.11)$$



так как промежуточные члены сокращаются.

Теперь рассмотрим последовательность  $T_n$  пунктированных разбиений, диаметры которых стремятся к нулю, и для каждого такого разбиения будем выбирать точки  $\xi_i$ , в которых вычисляется значение функции  $f(x)$ , исходя из формулы Лагранжа. Так как, по нашему предположению функция  $f(x)$  интегрируема, то последовательность  $\sigma_n$  римановых сумм для рассматриваемых разбиений стремится к интегралу от функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$ . Но для каждого разбиения выполняется равенство (1.11), поэтому

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (1.12)$$

Соотношение (1.12) называется *формулой Ньютона-Лейбница*. Итак, нами доказано следующее утверждение.

**Основная теорема интегрального исчисления.** Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и имеет на этом отрезке первообразную  $F(x)$ , тогда справедливо равенство (1.12).

Возвращаясь к задаче об определении параболического полусегмента, рассмотренной в Примере 1, мы можем утверждать, что площадь параболического полусегмента равна  $\frac{2}{3}$ , так как

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} 1^{3/2} - \frac{2}{3} 0^{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Действительно, функция  $F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$  удовлетворяет равенству  $F'(x) = \sqrt{x}$ , т.е. является первообразной подинтегральной функции. Далее пользуемся формулой Ньютона-Лейбница.

**1.9. Первообразные основных элементарных функций.** Рассмотрим задачу о нахождении для данной непрерывной функции  $f(x)$  ее первообразных, т.е. таких функций  $F(x)$ , что выполняется равенство (1.9):

$$F'(x) = f(x). \quad (1.9)$$

Будем предполагать, что соотношение (1.9) справедливо на некотором интервале  $(a, b)$ , один или оба конца которого могут быть бесконечными. Вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница диктует необходимость разработки способа нахождения первообразных. Идея этого метода состоит в том, чтобы рассматривать вычисление первообразных как действие, обратное к дифференцированию.

Установим сначала справедливость утверждения, описывающего совокупность первообразных для функции  $f(x)$ .

**Теорема о первообразных.** Пусть функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  являются первообразными функции  $f(x)$ , тогда функция  $F_1(x) - F_2(x)$  постоянна на интервале  $(a, b)$ . Обратно, если  $F(x)$  первообразная функции  $f(x)$ , то и  $F(x) + C$ , где  $C$  константа, также первообразная функции  $f(x)$ .

**Определение.** Совокупность всех первообразных функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается через

$$\int f(x) dx. \quad (1.13)$$

Часто вместо того, чтобы сказать, что у функции существует первообразная, говорят, что существует неопределенный интеграл (1.13).

Очевидно, что любая функция  $f(x)$  является первообразной для своей производной  $f'(x)$ . Этот факт записывают в виде:

$$\int f'(x) dx = f(x) + C. \quad (1.14)$$

Операция дифференцирования обладает свойством линейности:

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x),$$

где  $\alpha, \beta$  числа. Отсюда следует, что если у функций  $f(x)$  и  $g(x)$  существуют первообразные  $F(x), G(x)$ , то и функция  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  имеет первообразную равную  $\alpha F(x) + \beta G(x)$ :

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx. \quad (1.15)$$

Формула (1.15) выражает свойство *линейности* неопределенного интеграла.

Вернемся к проблеме отыскания первообразных основных элементарных функций. В параграфе 1.9 главы 2 Раздела 2 приведена таблица производных основных элементарных функций. В ней два столбца. В первом находятся функции, а во втором их производные. Эту таблицу можно прочитать по-иному. А именно, можно по заданным во втором столбце производным найти функции, чьими производными они являются, т.е. первообразные. Следовательно, из таблицы производных можно получить таблицу неопределенных интегралов.

$$\begin{array}{ll} \int 0 dx = C & \int 1 dx = x + C \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C & \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1 \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & \int e^x dx = e^x + C \\ \int \sin x dx = -\cos x + C & \int \cos x dx = \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C & \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C \end{array}$$

Пользуясь Таблицей и свойством линейности (1.15) неопределенного интеграла, можно находить неопределенные интегралы от функций  $\alpha f(x)$  и  $\alpha f(x) + \beta g(x)$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$  основные элементарные функции. Например,

$$\int (2 \sin x + 3x) dx = 2 \int \sin x dx + 3 \int x dx = -2 \cos x + \frac{3x^2}{2} + C.$$

В Главе 2 настоящего раздела мы познакомимся с некоторыми приемами, позволяющими существенно расширить класс элементарных функций, неопределенные интегралы от которых можно находить в явном виде.

**1.10. Интеграл с переменным верхним пределом.** В ряде вопросов анализа возникает необходимость рассматривать определенные интегралы по отрезкам вида  $[a, x]$ . Так возникают интегралы с переменным верхним пределом.

Рассмотрим непрерывную на отрезке  $[a, b]$  функцию  $f(x)$ . Она интегрируема на всем отрезке  $[a, b]$  и на любом отрезке, содержащемся в  $[a, b]$ . Рассмотрим отрезок  $[a, x]$ ,  $x \in [a, b]$ , у которого не фиксирован правый конец, и интеграл  $\int_a^x f(x) dx$ . Последний будем записывать в виде  $\int_a^x f(t) dt$  с тем, чтобы избежать неясностей. Интеграл с переменным верхним пределом является некоторой функцией от аргумента  $x$ . Обозначим ее  $F(x)$ :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1.16)$$

**Теорема о существовании неопределенного интеграла от непрерывной функции.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $F(x)$ , определенная формулой (1.16), дифференцируема в любой внутренней точке отрезка  $[a, b]$ , и выполняется соотношение

$$F'(x) = f(x).$$

Последняя теорема применительно к вопросу о нахождении первообразной заданной функции гарантирует, что любая непрерывная на конечном отрезке  $[a, b]$  функция имеет первообразную.

## 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенный интеграл появился в предыдущей главе как полезное средство вычисления определенных интегралов. Однако этим не исчерпывается его значение в математическом анализе. Упомянем, например, применение неопределенного интеграла для нахождения общих решений дифференциальных уравнений первого порядка. В настоящей главе мы обсудим некоторые простейшие методы вычисления неопределенных интегралов.

**2.1. Метод подстановки.** Пусть  $F(x)$  есть первообразная функции  $f(x)$  на некотором интервале  $(a, b)$ , а  $\phi(t)$  некоторая дифференцируемая функция, которая определена на интервале  $(\alpha, \beta)$  и имеет  $(a, b)$  областью своих значений. Рассмотрим суперпозицию  $G(t) = F(\phi(t))$ . Вычисляя производную сложной функции  $F(\phi(t))$ , получим следующее соотношение

$$G'(t) = F'(\phi(t)) \phi'(t) = f(\phi(t)) \phi'(t). \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что  $G(t)$  есть первообразная для  $f(\phi(t)) \phi'(t)$  на интервале  $(\alpha, \beta)$ .

Обратим наше рассуждение и предположим, что мы нашли в явном виде первообразную  $G(t)$  функции  $f(\phi(t)) \phi'(t)$  на интервале  $(\alpha, \beta)$ . Сделаем дополнительное предположение, что  $\phi(t)$  имеет обратную дифференцируемую функцию  $\phi^{(-1)}(x)$ , и рассмотрим функцию  $F(x) = G(\phi^{(-1)}(x))$ . Вычислим производную функции  $F(x)$ :

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(\phi^{(-1)}(x)) (\phi^{(-1)})'(x) = G'(\phi^{(-1)}(x)) \frac{1}{\phi'(\phi^{(-1)}(x))} = \\ &= f(\phi(\phi^{(-1)}(x))) \phi'(\phi^{(-1)}(x)) \frac{1}{\phi'(\phi^{(-1)}(x))} = f(x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

При выводе соотношений (2.2) мы воспользовались тождеством  $\phi(\phi^{(-1)}(x)) = x$  и формулой

$$\left(\phi^{(-1)}(x)\right)' = \frac{1}{\phi'(\phi^{(-1)}(x))}$$

для производной от обратной функции. Таким образом,  $F(x)$  есть первообразная для  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ .

Наши рассуждения являются доказательством следующего утверждения.

**Теорема о подстановке.** Пусть функция  $F(x)$  есть первообразная для  $f(x)$ , тогда  $G(t) = F(\phi(t))$  является первообразной для  $f(\phi(t)) \phi'(t)$  при условии, что  $\phi(t)$  дифференцируема.

Пусть  $\phi(t)$  дифференцируемая функция, имеющая обратную, тогда если  $G(t)$  есть первообразная функции  $f(\phi(t))\phi'(t)$ , функция  $F(x) = G(\phi^{-1}(x))$  является первообразной для  $f(x)$ .

Утверждения теоремы можно записать в виде формул:

$$\int f(x) dx \Big|_{x=\phi(t)} = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt, \quad (2.3)$$

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \Big|_{t=\phi^{-1}(x)} = \int f(x) dx. \quad (2.4)$$

Формулы (2.3), (2.4) служат оправданием обозначения (1.15) для неопределенного интеграла. Действительно, абсолютно формально введенный в (1.15) символ  $f(x) dx$  приобретает операциональный смысл. Он подсказывает, что при подстановке  $x = \phi(t)$  следует изменить и аргумент  $x$  функции  $f(x)$ , и дифференциал  $dx$ . А именно, поскольку  $x$  из независимого аргумента превратился в функцию аргумента  $t$ , то его дифференциал в точке  $t$  равен  $dx = \phi'(t) dt$ .

**Пример 1.** Пусть требуется вычислить интеграл  $\int \cos(2x) dx$ , не являющийся табличным. Мы знаем, что интеграл  $\int \cos x dx$  табличный. Он равен  $\sin x + C$ . Поэтому сделаем замену  $x = t/2$ , и функция  $\cos 2x$  преобразуется в  $\cos t$ . Воспользуемся формулой (2.3):

$$\int \cos 2x dx \Big|_{x=t/2} = \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{\sin t}{2} + C.$$

Для вычисления исходного интеграла нужно вернуться к аргументу  $x$ , т.е. сделать обратную замену  $t = 2x$ :

$$\int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

**Пример 2.** Вычислим интеграл  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ . Подынтегральная функция  $\sqrt{1-x^2}$  определена на отрезке  $[-1, 1]$ , поэтому первообразная вычисляется на любом интервале, содержащемся в этом отрезке. Сделаем замену  $x = \sin t$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ , после которой радикал  $\sqrt{1-x^2}$  преобразуется в  $\cos t$ , а  $dx$  в  $\cos t dt$ :

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \Big|_{x=\sin t} = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

После обратной замены приходим к результату

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C \right) \Big|_{t=\arcsin x} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C,$$

так как справедливы соотношения  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ ,  $\sin(\arcsin x) = x$  и  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ .

Формулу (2.4) иногда трактуют как “метод подведения под дифференциал” в том смысле, что произведение  $\phi'(t) dt$  можно понимать как  $d\phi(t)$ , т.е. как дифференциал функции  $\phi(t)$ . Вычислим интеграл  $\int \operatorname{tg} x dx$ :

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{d(-\cos x)}{\cos x} = - \int \frac{dt}{t} \Big|_{t=\cos x} = -(\ln(|t|) + C) \Big|_{t=\cos x} = -\ln(|\cos x|) + C.$$

Аналогично находится интеграл от функции  $\operatorname{ctg} x$ .

**2.2. Метод интегрирования по частям.** Рассматриваемый метод основан на формуле Лейбница для производной от произведения двух функций:

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x). \quad (2.5)$$

Допустим, что нужно вычислить неопределенный интеграл  $\int \phi(x) dx$ . Представим функцию  $\phi(x)$  в виде произведения  $u(x)w(x)$  таким образом, чтобы функция  $w(x)$  имела бы табличную или легко вычисляемую первообразную  $v(x)$  и функция  $v(x)u'(x)$  также имела бы легко вычисляемую первообразную. Из формулы (2.5) непосредственно следует следующая формула для неопределенных интегралов

$$\int \phi(x) dx = \int u(x)w(x) dx = \int u(x)v'(x) dx = \int ((u(x)v(x))' - v(x)u'(x)) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) называется “формулой интегрирования по частям”.

Выразительным примером применения метода интегрирования по частям является вычисление интеграла от функции  $\ln x$ .

$$\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

В примере функция  $\phi(x) = \ln x$ ,  $u(x) = \phi(x)$ ,  $w(x) = 1$ , поэтому  $v(x) = x$  и  $u'(x) = 1/x$ . Встречаются случаи, когда метод интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

**Пример 3.** Вычислим интеграл  $\int x^2 e^x dx$ . Положим  $u(x) = x^2$ ,  $w(x) = e^x$ , тогда  $v(x) = e^x$  и

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Для вычисления интеграла в правой части формулы примем, что  $u(x) = x$ ,  $w(x) = e^x$ , тогда

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Окончательно получаем:

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл  $\int e^x \cos x dx$ . Положим на первом этапе  $u(x) = \cos x$ ,  $v(x) = e^x$ :

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x dx - \int e^x \cos x dx.$$

Из полученной формулы следует, что

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

**2.3. Интегрирование рациональных функций.** Рассмотрим рациональную функцию

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (2.7)$$

где  $P(x)$  и  $Q(x)$  многочлены по переменной  $x$ , причем степень многочлена  $Q(x)$  не меньше единицы. Дробь  $R(x)$  называется *правильной*, если степень многочлена  $Q(x)$  в знаменателе строго больше степени многочлена  $P(x)$  в числителе. В противном случае дробь называется *неправильной*. Интегрирование неправильных дробей начинают с выделения их целой части. Для этого выполняют деление многочлена  $P(x)$  на многочлен  $Q(x)$  с остатком, т.е. находят многочлен  $q(x)$  и многочлен  $r(x)$ , степень которого меньше степени многочлена  $Q(x)$ , такие что выполняется тождество

$$P(x) = q(x) Q(x) + r(x), \quad \text{степень } r(x) < \text{степени } Q(x). \quad (2.8)$$

Многочлен  $q(x)$  называется частным, а  $r(x)$  остатком от деления  $P(x)$  на  $Q(x)$ . Деление с остатком выполняют по известному из курса алгебры приему “деления уголком”.

Из (2.8) следует, что неопределенный интеграл от рациональной функции  $R(x)$  в рассматриваемом случае может быть представлен в виде

$$\int R(x) dx = \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx, \quad (2.9)$$

где дробь  $r(x)/Q(x)$  правильная. Интеграл от многочлена есть линейная комбинация табличных интегралов от степенных функций, поэтому нужно рассмотреть методы интегрирования правильных дробей.

Начнем с интегрирования *простых дробей*. Так называют дроби вида

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad n > 2, \quad (2.10)$$

где  $n$  натуральное число, а квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$  не имеет вещественных корней, т.е. его дискриминант  $p^2 - 4q < 0$ .

Интегралы от первых двух дробей находятся с помощью подстановки  $x = t + a$ .

$$\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{A}{t} dt \Big|_{t=x-a} = A \ln |x-a| + C. \quad (2.11)$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \int \frac{A}{t^n} dt \Big|_{t=x-a} = -\frac{A}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C. \quad (2.12)$$

Для интегрирования третьей и четвертой дроби в (2.10) выделим в многочлене второй степени  $x^2 + px + q$  полный квадрат, т.е. запишем этот многочлен в виде  $(x + p/2)^2 + q - p^2/4$ . Так как квадратный трехчлен не имеет вещественных корней, то выполняется неравенство  $q - p^2/4 > 0$ . Обозначим последнее число через  $\alpha^2$ . Затем в интегралах от рассматриваемых дробей сделаем подстановку  $x = t - p/2$ . Вычислим интеграл от третьей дроби:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mt + N - Mp/2}{t^2 + \alpha^2} dt \Big|_{t=x+p/2} = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + \alpha^2} \Big|_{t=x+p/2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \alpha^2} \Big|_{t=x+p/2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + \alpha^2) \Big|_{t=x+p/2} + \frac{1}{\alpha} \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \Big|_{t=x+p/2} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Интеграл от четвертой дроби в (2.10) после рассмотренных выше преобразований приводится к виду

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{M}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2 + \alpha^2)^n} \Big|_{t=x+p/2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + \alpha^2)^n} \Big|_{t=x+p/2}$$

Первый интеграл в правой части вычисляется с помощью подстановки  $t^2 + \alpha^2 = z$ :

$$\int \frac{2t dt}{(t^2 + \alpha^2)^n} = -\frac{1}{(n-1)(t^2 + \alpha^2)^{n-1}} + C,$$

а применение метода интегрирования по частям ко второму интегралу приводит к рекуррентному соотношению для этого интеграла. Действительно, обозначим этот интеграл через  $I_n$ :

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + \alpha^2)^n}.$$

Положим  $u(t) = (t^2 + \alpha^2)^{-n}$ ,  $v(t) = t$  и придем к соотношению

$$I_n = \frac{t}{(t^2 + \alpha^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2 + \alpha^2)^{n+1}} dt = \frac{t}{(t^2 + \alpha^2)^n} + 2n I_n - 2n \alpha^2 I_{n+1}.$$



Второе равенство в последнем соотношении получается, если в числителе интеграла сделать тождественное преобразование  $t^2 = t^2 + \alpha^2 - \alpha^2$  и разбить интеграл на два слагаемых. Для интеграла  $I_n$  получается рекуррентное соотношение

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n\alpha^2} \frac{t}{(t^2 + \alpha^2)^n} + \frac{2n-1}{2n\alpha^2} I_n. \quad (2.14)$$

При  $n = 1$  рассматриваемый интеграл уже вычислен:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha},$$

поэтому

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx = -\frac{M}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) I_n|_{t=x+p/2} + C. \quad (2.15)$$

**Пример 4.** Найдем интеграл  $I_2 = \int 1/(x^2 + 1)^2 dx$ . Воспользуемся рекуррентным соотношением (2.14), которое в нашем случае имеет вид

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} I_1,$$

и получим в результате

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Вернемся к интегрированию произвольных правильных дробей (2.7). Воспользуемся для этого без доказательства следующими алгебраическими результатами.

1) *Каждый многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение множителей вида  $x - \alpha$  и  $x^2 + px + q$ , где  $\alpha$  вещественный корень многочлена, а квадратный трехчлен не имеет вещественных корней. В частности,*

$$Q(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \dots \quad (2.16)$$

где  $a_0$  коэффициент при старшей степени многочлена  $Q(x)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2$  и т.д. вещественные корни многочлена,  $k_1, k_2, \dots, m_1, m_2, \dots$  натуральные числа такие, что сумма показателей  $k_1 + \dots + m_1 + \dots$  равна степени многочлена.

2) *Опираясь на формулу (2.16), каждую правильную дробь можно разложить в сумму простых дробей (2.10) следующего вида:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{M_{m_1-1} x + N_{m_1-1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots \quad (2.17)$$

Коэффициенты  $A_1, \dots, M_1, N_1, \dots$  в числителях простых дробей определяют следующим образом. Приводят дроби в правой части (2.17) к общему знаменателю и приравнивают получившийся числитель к  $P(x)$ . Затем в полученном тождестве приравнивают коэффициенты при каждой степени переменной  $x$ . Получается линейная система уравнений для коэффициентов, решая которую получают численные значения коэффициентов.

**Пример 5.** Проинтегрируем рациональную функцию

$$R(x) = \frac{1}{(x+2)^2(x^2+1)}.$$

Разложим ее на простые дроби с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{1}{(x+2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}. \quad (2.18)$$

Приводя дробь в правой части полученного разложения к общему знаменателю и приравнявая результат исходной дроби, получим соотношение:

$$\frac{1}{(x+2)^2(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + B(x+2)(x^2+1) + (Mx+N)(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2+1)}.$$

Затем приравняем числители дробей, а в числителях коэффициенты при одинаковых степенях переменной  $x$ . Приходим к системе линейных уравнений:

$$B + M = 0, \quad A + 2B + 4M + N = 0, \quad B + 4M + 4N = 0, \quad A + 2B + 4N = 1.$$

Система имеет единственное решение:

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{4}{25}, \quad M = -\frac{4}{25}, \quad N = \frac{3}{25}.$$

Подставляя полученные значения для коэффициентов в (2.17), приходим к тождеству

$$R(x) = \frac{1}{5(x+2)^2} + \frac{4}{25(x+2)} + \frac{-4x+3}{25(x^2+1)}.$$

Интеграл от каждой простой дроби в полученном разложении мы умеем вычислять, поэтому получается следующий окончательный результат:

$$\int \frac{1}{(x+2)^2(x^2+1)} dx = -\frac{1}{5(x+2)} + \frac{4}{25} \ln|x+2| + \frac{3}{25} \operatorname{arctg} x - \frac{2}{25} \ln(1+x^2) + C.$$

**2.4. Интегрирование простейших выражений, содержащих радикалы.** Пусть  $R(x, y)$  рациональная функция двух аргументов:

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  многочлены от двух переменных. Например,  $P(x, y) = x + y^2$ ,  $Q(x, y) = xy$ . Рассмотрим неопределенный интеграл

$$\int R \left( x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \right) dx. \quad (2.19)$$

Интеграл (2.19) приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}. \quad (2.20)$$

Действительно, возводя обе части равенства (2.20) в  $m$ -ю степень, можно выразить  $x$  через  $t$ :

$$\begin{aligned} x = \phi(t) &= \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}, \\ \phi'(t) &= \frac{m t^{m-1} (\alpha \delta - \gamma \beta)}{(\alpha - \gamma t^m)^2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из формул (2.21) следует, что

$$R \left( x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \right) \Big|_{x=\phi(t)} = R(\phi(t), t)$$

есть рациональная функция аргумента  $t$ , поэтому и  $R(\phi(t), t) \phi'(t)$  рациональная функция. В силу вышеизложенного, справедливо равенство

$$\int R \left( x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \right) dx = \int R(\phi(t), t) \phi'(t) dt \Big|_{t=\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}}. \quad (2.22)$$

**Пример 6.** Вычислим интеграл

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x-1}.$$

По формулам (2.21) получаем

$$\phi(t) = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}, \quad \phi'(t) = -\frac{6t^2}{(t^3 - 1)^2}.$$

Поэтому вычисление интеграла с радикалом сводится к вычислению интеграла от рациональной функции

$$\begin{aligned} \int \frac{3t^3}{1-t^3} dt &= \int \left( -3 - \frac{1}{t-1} + \frac{2+t}{t^2+t+1} \right) dt = \\ &= -3t + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + \ln \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t-1|} + C. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для получения окончательного результата остается в формулу (2.23) подставить

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Рассмотрим далее неопределенные интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a \neq 0. \quad (2.24)$$

Если квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет вещественные корни, то он может быть записан в виде произведения  $a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ . Отсюда следует тождество

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x - \alpha_1| \sqrt{a \frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}},$$

и интеграл (2.24) приводится к виду (2.19). Поэтому будем считать, что дискриминант квадратного трехчлена  $D = b^2 - 4ac < 0$ . Кроме того, имеет смысл рассматривать случай  $a > 0$ , так как в противном случае радикал не имеет смысла в вещественной области.

Интеграл (2.24) приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой Эйлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x, \quad (2.25)$$

где  $t$  новая переменная интегрирования. Из (2.25) следует, что

$$\begin{aligned} x &= \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t}, & \sqrt{ax^2 + bx + c} &= t - \sqrt{a}x = \frac{bt + \sqrt{a}(c + t^2)}{b + 2\sqrt{a}t}, \\ dx &= \frac{2(\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c)}{(b + 2\sqrt{a}t)^2} dt, \end{aligned}$$

поэтому интеграл (2.24) после замены сводится к интегралу от рациональной функции.

**Пример 7.** Вычислим интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}. \quad (2.26)$$

После подстановки Эйлера  $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$  получаем, что

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad dx = \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2}, \quad \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{(2t+1)^2}{t(2+t)(t^2+t+1)}.$$

Следовательно, интеграл (2.26) сводится к интегралу

$$\int \frac{2dt}{t(t+2)} = \ln|t| - \ln|t+2| + C.$$

Откуда получаем

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+x+1}| - \ln|2+x + \sqrt{x^2+x+1}| + C.$$

**2.5. Интегрирование тригонометрических выражений.** Рассмотрим неопределенные интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad (2.27)$$

где  $R(x, y)$  рациональная функция. Такие интегралы могут быть вычислены одним из ранее изученных методов подстановки или интегрирования по частям. Универсальной подстановкой, с помощью которой интеграл (2.27) сводится к интегралу от рациональной функции, является подстановка

$$x = 2 \operatorname{arctg} t. \quad (2.28)$$

Функция  $\phi(t) = 2 \operatorname{arctg} t$  определена на всей вещественной оси, и ее область значений есть интервал  $(-\pi, \pi)$ . Поэтому интервал, на котором с помощью подстановки (2.28) вычисляется интеграл (2.27), должен содержаться в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Из (2.28) следует, что

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}. \quad (2.29)$$

Таким образом, тригонометрические функции  $\sin x$ ,  $\cos x$  являются рациональными функциями переменной  $t$ , поэтому после подстановки (2.28) интеграл (2.27) переходит в интеграл от рациональной функции.

Как мы отмечали, вычисленный интеграл определен на интервале  $(-\pi, \pi)$ , но в силу периодичности с периодом  $2\pi$  функций  $\sin x$  и  $\cos x$ , а, значит, и функции  $R(\sin x, \cos x)$ , вычисленные первообразные будут также первообразными на любом интервале, полученном из  $(-\pi, \pi)$  сдвигом кратным  $2\pi$  влево или вправо. Однако, нельзя полагать, что таким путем можно найти первообразную на интервале длиной, большей  $2\pi$ . Рассмотрим поучительный пример.

**Пример 8.** Вычислим интеграл

$$\int \frac{1}{2 + \cos x} dx.$$

Пользуясь формулами (2.29), приходим к результату

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} \Big|_{x=2 \operatorname{arctg} t} = \int \frac{2 dt}{3 + t^2} = \frac{2 \operatorname{arctg}(t/\sqrt{3})}{\sqrt{3}} + C.$$

Выполняя обратную подстановку, получаем окончательный ответ

$$\int \frac{1}{2 + \cos x} dx = \frac{2 \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} (x/2) / \sqrt{3})}{\sqrt{3}} + C. \quad (2.30)$$

В нашем примере подынтегральная функция определена на всей вещественной оси, поэтому естественно возникает вопрос о вычислении ее первообразной, определенной на всей оси. С помощью подстановки (2.28) можно найти только локальные первообразные (2.30), т.е. равенство (2.30) справедливо лишь на интервалах вида  $((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$ . Как показывает исследование функции в правой части равенства (2.30), она терпит разрыв первого рода в точках  $x_k = (2k + 1)\pi$  (см. Рис. 3.2.1), поэтому не может считаться производной на любом интервале, содержащем эти точки.

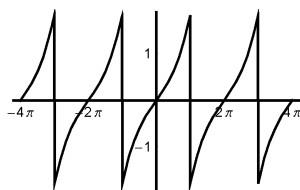


Рис. 3.2.1

Можно ли найти первообразную рассматриваемой функции, скажем, на интервале  $(-2\pi, 2\pi)$ ? Да, если вместо подстановки (2.28) воспользоваться подстановкой

$$x = 4 \operatorname{arctg} t. \quad (2.31)$$

После этой подстановки подынтегральное выражение примет вид

$$\frac{4(1+t^2)}{3t^4 - 2t^2 + 3}. \quad (2.32)$$

Многочлен четвертой степени, стоящий в знаменателе, может быть разложен на квадратичные множители

$$3t^4 - 2t^2 + 3 = 3(t^2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 1)(t^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 1),$$

а правильная дробь (2.31) следующим образом представима в виде суммы простых дробей

$$\frac{4(1+t^2)}{3t^4 - 2t^2 + 3} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{t^2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 1} + \frac{1}{t^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 1} \right)$$

Вычисляя интегралы от простых дробей и осуществляя обратную к (2.31) подстановку  $t = \operatorname{tg}(x/4)$ , приходим к формуле

$$\int \frac{1}{2 + \cos x} dx = \frac{2 \operatorname{arctg} \left( \frac{3 \operatorname{tg}(x/4) + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} \right)}{\sqrt{3}} + \frac{2 \operatorname{arctg} \left( \frac{3 \operatorname{tg}(x/4) - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} \right)}{\sqrt{3}} + C. \quad (2.32)$$

По графику (Рис. 3.2.2) функции, стоящей в правой части формулы (2.32) видно, что рассматриваемая функция является первообразной на интервале  $(-2\pi, 2\pi)$ .

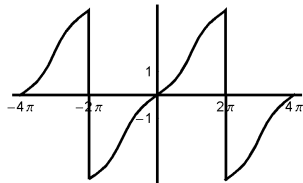


Рис. 3.2.2

На рисунке Рис. 3.2.3 представлены графики первообразных (2.30) и (2.32), первая из которых нарисована пунктирной линией.

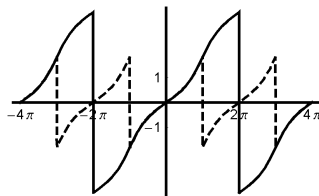


Рис. 3.2.3

### 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Начало интегральному исчислению положили работы Архимеда (287-212 г.г. до н.э.), вычислившего площади эллипса, параболического сегмента, сферы, конуса и некоторых других фигур. В своих вычислениях Архимед использовал приемы, близкие по духу к ставшим впоследствии классическими методам вычисления определенных интегралов. Таким образом, интегральное исчисление возникло и длительное время развивалось как геометрическая дисциплина.

В настоящей главе мы рассмотрим приложения определенных интегралов для вычисления геометрических, механических и экономических величин.

**3.1. Длина дуги графика функции.** Рассмотрим функцию  $f(x)$ , заданную на некотором отрезке  $[a, b]$ . Наша цель - определить понятие длины кривой, на которой расположены точки графика функции, а также получить формулу для ее вычисления. За основу рассуждений примем восходящее к античности определение длины окружности как общего предела периметров правильных вписанных в окружность и описанных около нее многоугольников при стремлении числа их сторон к бесконечности.

Допустим, что рассматриваемая кривая выпукла, и, для определенности, положим, что она выпукла вверх. Наиболее простое достаточное условие для этого: существование второй производной функции  $f(x)$ , удовлетворяющей неравенству  $f''(x) < 0$ . Будем считать, что функция  $f(x)$  удовлетворяет рассматриваемому требованию.

Пусть  $T$  некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ :

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = b. \quad (3.1)$$

По разбиению  $T$  построим две ломаные линии  $\gamma$  и  $\Gamma$  (см. Рис. 3.3.1).

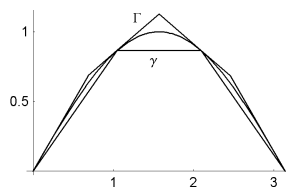


Рис. 3.3.1



Первая ломаная состоит из отрезков хорд, соединяющих точки  $(\alpha_i, f(\alpha_i))$  графика. Ломаная  $\gamma$  играет роль вписанного в окружность правильного многоугольника. Вторая ломаная  $\Gamma$  состоит из отрезков касательных, проведенных к графику функции в тех же точках  $(\alpha_i, f(\alpha_i))$ . Ломаная  $\Gamma$  – аналог правильного описанного многоугольника.

Для длин  $l(\gamma)$  и  $l(\Gamma)$  справедливо неравенство

$$l(\gamma) < l(\Gamma),$$

основанное на утверждении, что сумма длин двух сторон треугольника больше длины третьей стороны. Если к разбиению (1) добавить новые точки, то, очевидно, что длина вписанной ломаной возрастет, а описанной – уменьшится.

Рассматривая длину хорды как функцию аргумента  $\alpha_{i+1}$  при фиксированной точке  $\alpha_i$ , и применяя формулу Тейлора в точке  $\alpha_i$  с остаточным членом в форме Лагранжа, можно получить, что для длины хорды справедливо соотношение

$$\sqrt{1 + f'(\alpha_i)^2}(\alpha_{i+1} - \alpha_i) + \frac{f'(\xi_i)f''(\xi_i)}{2\sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)^2, \quad (3.2)$$

где точка  $\xi_i$  удовлетворяет неравенствам  $\alpha_i < \xi_i < \alpha_{i+1}$ .

Второе слагаемое в формуле (3.2) имеет более высокий порядок малости, чем первое, поэтому приближенно длина дуги хорды равна

$$\sqrt{1 + f'(\alpha_i)^2}(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

Такое же выражение можно получить и для отрезка касательной.

Обозначим через  $\lambda$  диаметр разбиения (1), т.е. длину наибольшего отрезка разбиения  $T$ .

**Теорема о пределе ломаных.** Пусть функция  $f(x)$  дважды дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и ее вторая производная на этом отрезке ограничена и сохраняет знак, тогда для последовательности разбиений  $T_k$  таких, что разбиение  $T_{k+1}$  получается из  $T_k$  добавлением новых точек разбиения, и таких, что диаметры  $\lambda_k$  разбиений стремятся к нулю, длины ломаных  $\gamma_k$  и  $\Gamma_k$  имеют общий предел при  $k \rightarrow \infty$  равный

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (3.3)$$

Поскольку последовательность  $l(\Gamma_k)$  монотонно убывает при переходе от разбиения  $T_k$  к разбиению  $T_{k+1}$ , а последовательность  $l(\gamma_k)$  монотонно возрастает, то отсюда вытекает естественность следующего определения.

**Определение.** Пусть выполняются условия теоремы о пределе ломаных, тогда интеграл

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (3.4)$$

называется длиной графика функции  $f(x)$  при условии его выпуклости вверх или вниз.

Если график функции можно разбить на конечное число выпуклых участков, то длиной графика следует назвать сумму их длин. Ввиду свойства аддитивности определенного интеграла, длина всего графика будет также выражаться формулой (3.4).

Выше было сделано предположение о существовании второй производной функции  $f(x)$  и сохранении ее знака на отрезке  $[a, b]$ . Знакопостоянство второй производной гарантировало свойство выпуклости графика функции. Оказывается, выпуклость графика имеет место при более слабом требовании на функцию  $f(x)$ . Достаточно, чтобы у функции  $f(x)$  существовала первая производная и эта производная возрастала или убывала на отрезке  $[a, b]$ . Рассматриваемое требование достаточно также для справедливости утверждения о существовании общего предела (3.3) вписанной и описанной ломаных.

Воспользуемся данным выше определением длины дуги и в качестве примера вычислим длину астроида (Рис. 3.3.3).

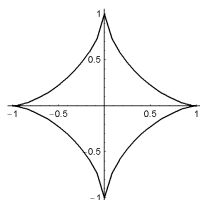


Рис. 3.3.3

Астроида задается уравнением

$$\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2} = 1,$$

поэтому она симметрична и относительно оси  $OX$ , и относительно оси  $OY$ . Следовательно, достаточно найти длину четверти астроида в первом квадранте. Она задается уравнением

$$y = f(x), \quad \text{где} \quad f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}.$$

Откуда

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{1 - x^{2/3}}}{x^{1/3}}, \quad \sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{1}{x^{1/3}},$$

$$l = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

В результате получаем, что длина астроида равна 6.

**3.2. Длина дуги кривой.** В параграфе 1.11 главы 1 Раздела 2 мы ввели понятие параметрически заданной функции. Напомним, что соотношения

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b] \quad (3.5)$$

задают функцию  $f(x)$  аргумента  $x$ , если из первого из соотношений (3.5) можно найти параметр  $t$  как обратную к  $\phi(t)$  функцию  $\phi^{(-1)}(x)$  аргумента  $x$ . Тогда  $f(x) = \psi(\phi^{(-1)}(x))$  есть параметрически заданная соотношениями (3.5) функция.

Обобщением понятия параметрически заданной функции является понятие плоской кривой. Поскольку нашей целью является определение понятия длины кривой, будем в дальнейшем предполагать, что функции  $\phi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют непрерывные первые производные. Кроме того, как и почти всюду в интегральном исчислении, будем считать, что они заданы на отрезке  $[a, b]$ . Производные рассматриваемых функций в точках  $a$  и  $b$  понимаются как правые и соответственно левые производные.

Допустим, что на отрезке  $[a, b]$  функция  $\phi'(t)$  имеет конечное число нулей  $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < b$  являющихся внутренними точками отрезка. Тогда исходный отрезок  $[a, b]$  может быть представлен как объединение пересекающихся лишь в концевых точках отрезков  $[a, \alpha_1]$ ,  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ,  $[\alpha_n, b]$ . На каждом из этих отрезков функция  $\phi(t)$  монотонна и дифференцируема и поэтому имеет обратную дифференцируемую функцию. Следовательно, на каждом отрезке разбиения соотношения (3.5) определяют параметрически заданную дифференцируемую функцию  $f_i(x)$ .

**Определение.** *Плоской кривой  $\gamma$ , задаваемой соотношениями (3.5), называется множество точек  $(\phi(t), \psi(t))$ ,  $t \in [a, b]$  вещественной координатной плоскости.*

*Длиной кривой  $\gamma$  называется сумма длин графиков функций  $f_i(x)$ .*

Найдем длину графика параметрически заданной функции  $f_i(x)$ . В соответствии с формулой (3.4) она равна

$$l_i = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + f_i'(x)^2} dx \right|, \quad (3.6)$$

где  $x_i = \phi(\alpha_i)$ ,  $x_{i+1} = \phi(\alpha_{i+1})$ . Модуль учитывает то обстоятельство, что может выполняться неравенство  $x_{i+1} < x_i$ , если функция  $\phi(t)$  монотонно убывает на отрезке  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ .

Вычисляя производную параметрически заданной функции по формуле (1.36) главы 1 Раздела 2, преобразуем интеграл в правой части формулы (3.6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + f_i'(x)^2} dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + \left( \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \right)^2} \Bigg|_{t=\phi_i^{(-1)}(x)} dx = \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}}{|\phi'(t)|} \Bigg|_{t=\phi_i^{(-1)}(x)} dx = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \frac{\phi'(t) dt}{|\phi'(t)|}. \end{aligned}$$

Последнюю формулу можно понимать следующим образом. Если функция  $\phi(t)$  монотонно возрастает на отрезке  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , тогда  $\phi'(t) > 0$ ,  $x_i < x_{i+1}$ , и выполняется равенство

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + f'_i(x)^2} dx = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt > 0.$$

Если же на отрезке  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  функция  $\phi(t)$  монотонно убывает, тогда  $\phi'(t) < 0$ ,  $x_i > x_{i+1}$  и

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + f'_i(x)^2} dx = - \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt < 0.$$

Поэтому

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + f'_i(x)^2} dx \right| = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

Последние соотношения дают обоснование следующей формулы для длины плоской кривой  $\gamma$ , задаваемой соотношениями (3.5)

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt. \quad (3.7)$$

**Пример.** Найдем длину кривой, задаваемой соотношениями

$$x = 2 \cos t + \cos(2t), \quad y = 2 \sin t - \sin(2t), \quad t \in [-\pi, \pi]. \quad (3.8)$$

Кривая (3.8) называется *трикаспоида* и принадлежит семейству *гипоциклоид*. Эскиз кривой содержится на Рис. 3.3.5.

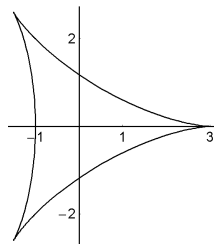


Рис. 3.3.4

Вычисляя выражение  $\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2$  получаем следующий результат:

$$\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 = 16 \left( \sin \frac{3t}{2} \right)^2$$

Следовательно, для длины трикаспойды справедлив следующий результат

$$l = \int_{-\pi}^{-2\pi/3} \sin \frac{3t}{2} dt - \int_{-2\pi/3}^0 \sin \frac{3t}{2} dt + \int_0^{2\pi/3} \sin \frac{3t}{2} dt - \int_{2\pi/3}^{\pi} \sin \frac{3t}{2} dt = 16.$$

**3.3. Площади плоских криволинейных фигур.** В параграфе 1.2 Главы 1 настоящего раздела мы ввели понятие площади криволинейной трапеции и получили формулу в виде определенного интеграла для ее вычисления. Более общей плоской геометрической фигурой, площадь которой легко вычисляется с помощью определенного интеграла, является фигура, заключенная между графиками двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$  такими, что  $f(x) \leq g(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , и либо между вертикальными линиями  $x = a$ ,  $x = b$ , либо между точками пересечения графиков функций.

Рассмотрим, например, фигуру, расположенную над полукубической параболой  $3y^3 = x^2$  внутри окружности  $x^2 + y^2 = 4$  (см. Рис. 3.3.5).

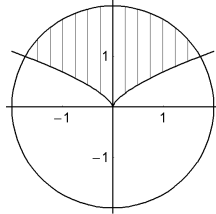


Рис. 3.3.5

Абсциссы точек пересечения параболы и окружности равны  $-\sqrt{3}$  и  $\sqrt{3}$ , поэтому площадь заштрихованной на Рис. 3.3.5 фигуры равна

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left( \sqrt{4-x^2} - \frac{x^{2/3}}{3^{1/3}} \right) dx = \left( \frac{1}{2} x \sqrt{4-x^2} - 2 \arcsin \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{3}{5} \frac{x^{5/3}}{3^{1/3}} \right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

**3.4. Объемы тел вращения.** Геометрические приложения определенного интеграла не исчерпываются вычислениями длин плоских кривых и площадей плоских фигур. С его помощью можно вычислять объемы некоторых пространственных тел. К таковым относятся тела, возникающие при вращении плоских кривых вокруг осей  $OX$  или  $OY$ .

Пусть плоская кривая  $\gamma$  является графиком функции  $f(x)$ , заданной на конечном отрезке  $[a, b]$ . Относительно функции  $f(x)$  будем предполагать, что

она неотрицательна и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Если кривую  $\gamma$  вращать вокруг оси  $OX$  при угле поворота изменяющимся от 0 до  $2\pi$ , то результатом вращения будет некоторая поверхность  $\Gamma$ , называемая *поверхностью вращения* (см. Рис. 3.3.6). Геометрическое тело  $B$ , заключенное внутри поверхности вращения и плоскостей  $x = a, x = b$ , называется *телом вращения*.

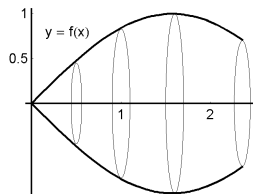


Рис. 3.3.6

Понятие *объема* тела вращения определяется следующим образом. Рассмотрим разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = b. \quad (3.1)$$

и совокупность соприкасающихся основаниями цилиндров  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , оси которых совпадают с осью  $OX$ . Цилиндр  $c_i$  имеет высоту  $\alpha_i - \alpha_{i-1}$ , его левое основание пересекает ось  $OX$  в точке  $\alpha_{i-1}$ , а правое – в точке  $\alpha_i$ . Радиус основания  $r_i$  равен минимальному значению функции  $f(x)$  на отрезке  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ . На Рис. 3.3.7 представлены два прямоугольника, вращением которых получаются два соседних вписанных в тело вращения цилиндров.

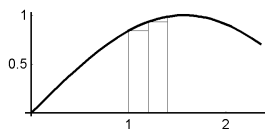


Рис. 3.3.7

Рассматриваемые соприкасающиеся цилиндры в совокупности образуют ступенчатое тело  $c_T$ , целиком содержащееся внутри тела вращения  $B$ . Объем каждого цилиндра равен  $\pi r_i^2(\alpha_i - \alpha_{i-1})$ , а всего цилиндрического ступенчатого тела  $c_T$ :

$$v_T = \pi \sum_{i=1}^n r_i^2 (\alpha_i - \alpha_{i-1}), \quad r_i = \min\{f(x), x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]\}. \quad (3.9)$$

Если на отрезках разбиения построить прямоугольники с высотами  $R_i$  равными максимальным значениям функции  $f(x)$  на отрезках  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , то приходим к цилиндрическому ступенчатому телу  $C_T$ , содержащему внутри себя тело вращения  $B$ . Объем последнего тела равен

$$V_T = \pi \sum_{i=1}^n R_i^2 (\alpha_i - \alpha_{i-1}), \quad R_i = \max\{f(x), x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]\}. \quad (3.10)$$

Величины  $v_T$  и  $V_T$  представляют собой нижнюю и верхнюю сумму Дарбу, порожденные разбиением  $T$ , для функции  $\pi f(x)^2$ . В силу сделанного нами предположения о непрерывности функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  верхние и нижние суммы Дарбу имеют общий предел при измельчении разбиений  $T$  путем добавления новых точек разбиения равный

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx. \quad (3.11)$$

**Определение.** Объем тела вращения  $B$  есть общий предел объемов вписанных в тело вращения и описанных вокруг тела вращения цилиндрических ступенчатых тел  $C_T$  и  $C_T$  при измельчении разбиений  $T$  отрезка  $[a, b]$ .

Определенный таким образом объем численно равен интегралу (3.11).

**Пример.** Пусть эллипс  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  с полуосями равными  $a$  и  $b$  вращается вокруг оси  $OX$ . Получаемое тело вращения  $B$  называется эллипсоидом вращения. Вычислим его объем. В рассматриваемом случае функция  $f(x) = b \sqrt{1 - x^2/a^2}$  определена на отрезке  $[-a, a]$ , поэтому по формуле (3.11)

$$V_B = \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

## 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятие определенного интеграла опирается на пределы конечных сумм Дарбу или Римана. Если промежуток интегрирования бесконечен или функция на конечном отрезке интегрирования неограниченна, интегральные суммы не имеют смысла. Однако и в ряде подобных ситуаций можно придать смысл понятию определенного интеграла. Для этого вновь прибегают к предельному переходу, определяя понятие несобственных интегралов.

**4.1. Несобственные интегралы (неограниченный промежуток).** В настоящем параграфе мы рассмотрим случаи, когда один или оба конца промежутка интегрирования бесконечны. Начнем со случая промежутка  $[a, +\infty)$ .

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на любом конечном отрезке  $[a, b]$ ,  $b > a$ , т.е. на полуинтервале  $[a, +\infty)$  определена функция

$$I(x) = \int_a^x f(y) dy. \quad (4.1)$$

Если функция  $I(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow +\infty$ , то этот предел называется несобственным интегралом функции  $f(x)$  по полубесконечному промежутку  $[a, +\infty)$  и обозначают через

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(y) dy. \quad (4.2)$$

Символ (4.2) часто употребляется до выяснения существования предела у функции  $I(x)$ . Если предел существует, то говорят, что интеграл (4.2) *сходится*. В противном случае он *расходится*.

Рассмотрим в качестве примера

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx. \quad (4.3)$$

В данном случае

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{1+y^2} dy = \operatorname{arctg} x.$$

Предел  $I(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , очевидно, равен  $\pi/2$ , поэтому интеграл (4.3) сходится, и справедливо равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$



Интеграл по полубесконечному промежутку  $(-\infty, a]$  в предположении, что функция  $f(x)$  интегрируема на любом конечном отрезке  $[b, a]$ ,  $b < a$ , определяется как предел при  $x \rightarrow -\infty$  функции

$$J(x) = \int_x^a f(y) dy$$

и обозначается через

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(y) dy.$$

Несобственный интеграл от функции  $f(x)$  по бесконечному промежутку  $(-\infty, +\infty)$  в предположении, что функция  $f(x)$  интегрируема на любом конечном отрезке, определяется следующим образом. Фиксируется произвольная точка  $c$  и рассматриваются интегралы

$$\int_{-\infty}^c f(x) dx, \quad \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Если оба эти интеграла сходятся, то, по определению, сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx. \quad (4.4)$$

В силу аддитивности определенного интеграла и в силу сделанных предположений о функции  $f(x)$  значение интеграла (4.4) не зависит от выбора точки  $c$ , участвовавшей в определении.

**Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.** Для сходимости несобственного интеграла (4.2) необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  можно было указать такое  $B(\varepsilon) > a$ , что для любых  $x_1 > B$ ,  $x_2 > B$  справедливо неравенство

$$|I(x_1) - I(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(y) dy \right| < \varepsilon. \quad (4.5)$$

Как следствие Критерия Коши получаем следующее утверждение.

**Теорема сравнения.** Пусть при  $a \leq x$  выполнено неравенство

$$|f(x)| \leq g(x), \quad (4.6)$$

где  $f(x)$ ,  $g(x)$  некоторые функции. Тогда из сходимости несобственного интеграла  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  следует сходимость несобственного интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Чтобы получить один из наиболее часто встречающихся достаточных признаков сходимости несобственных интегралов, рассмотрим интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \quad \alpha \neq 1 \quad (4.7)$$

Очевидно, что

$$I(x) = \int_a^x \frac{1}{y^\alpha} dy = \frac{1}{-\alpha + 1} y^{-\alpha+1} \Big|_a^x = \frac{1}{-\alpha + 1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{-\alpha + 1} \frac{1}{a^{\alpha-1}}. \quad (4.8)$$

Из (4.8) следует, что при  $x \rightarrow +\infty$  функция  $I(x)$  имеет конечный предел, если  $\alpha > 1$ . Отсюда и из Теоремы сравнения следует утверждение.

**Следствие.** Пусть  $|f(x)| \leq 1/x^\alpha$ , тогда несобственный интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится при  $\alpha > 1$ .

Анализ формулы (4.8) показывает также, что функция  $I(x)$  бесконечно большая при  $\alpha < 1$ . При  $\alpha = 1$  интеграл (4.7) также расходится, так как

$$\int_a^x \frac{1}{y} dy = \ln |x| - \ln |a|.$$

Эти простые замечания имеют следствием следующую теорему.

**Теорема о несобственном интеграле от степенной функции.** Пусть функция  $f(x)$  на полуинтервале  $[a, +\infty)$  удовлетворяет неравенству  $f(x) > c/x^\alpha$ , в котором  $c > 0$ ,  $\alpha < 1$ , тогда интеграл (4.2) расходится.

**4.2. Несобственные интегралы (неограниченные функции).** Рассмотрим функцию  $f(x)$  определенную на полуинтервале  $[a, b)$ , неограниченную на нем, но ограниченную и интегрируемую на любом отрезке  $[a, b - \delta]$ ,  $\delta > 0$ , содержащемся в  $[a, b)$ . Точка  $b$  называется *особой точкой* функции  $f(x)$ . При сделанных предположениях на интервале  $(0, b - a)$  определена функция

$$I(\delta) = \int_a^{b-\delta} f(x) dx. \quad (4.9)$$

**Определение.** Если у функции  $I(\delta)$  (4.9) существует правый предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} I(\delta), \quad (4.10)$$

то этот предел называют *несобственным интегралом от неограниченной функции  $f(x)$*  и обозначают его

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} I(\delta). \quad (4.11)$$

Если предел (4.10) существует, то говорят, что несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится. В противном случае, говорят, что он *расходится*.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию  $f(x) = 1/(b-x)^\alpha$ , определенную на полуинтервале  $[a, b)$ ,  $b > a$ . Функция  $I(\delta)$  (4.9) легко вычисляется

$$I(\delta) = \int_a^{b-\delta} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} -\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^{b-\delta} = \frac{(b-a)^{1-\alpha} - \delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha \neq 1 \\ -\ln(b-x) \Big|_a^{b-\delta} = \ln(b-a) - \ln \delta, & \text{если } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует, что функция  $I(\delta)$  в рассматриваемом случае имеет правый предел при  $\delta \rightarrow 0$  только при  $\alpha < 1$ . Таким образом, несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$$

сходится при  $\alpha < 1$  и расходится при  $\alpha \geq 1$ .

Приведем без доказательства следующую теорему.

**Теорема сравнения.** Пусть существует такое  $\alpha < 1$ , что при  $x \rightarrow b$  слева выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^\alpha f(x) = 0,$$

т.е.  $f(x)$  растет медленнее при  $x \rightarrow b$ , чем  $1/(b-x)^\alpha$ , тогда интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится.

Если же

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{1}{f(x)(b-x)^\alpha} = 0,$$

т.е.  $f(x)$  растет быстрее при  $x \rightarrow b$ , чем  $1/(b-x)^\alpha$ ,  $\alpha < 1$ , тогда интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  расходится.

До сих пор мы рассматривали случай, когда особая точка неограниченной функции  $f(x)$  располагалась на правом конце отрезка  $[a, b]$ . Легко переформулировать все данные выше определения и результаты на случай особой точки на левом конце отрезка интегрирования.

**Пример 3.** Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 x^\mu \ln x dx. \quad (4.13)$$

При  $\mu > 0$  подынтегральная функция ограничена, и интеграл (4.13) существует в собственном смысле. Выясним, при каких  $\mu < 0$  интеграл (4.13) сходится. Особая точка 0 находится на левом конце отрезка интегрирования.

Пусть  $\alpha < 1$ , рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^\alpha x^\mu \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{\alpha+\mu} \ln x.$$

Этот предел равен 0 при  $\alpha + \mu > 0$ , т.е. при  $-\mu = |\mu| < \alpha < 1$ . Таким образом, интеграл (4.13) сходится при отрицательных  $\mu$  при дополнительном условии  $|\mu| < 1$ .

## 5. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ 3

В этой главе будут приведены описания лабораторных работ по материалу третьего раздела книги.

### Лабораторная работа 1. Определенный интеграл. Вычисление интегральных сумм Римана.

В лабораторной работе используются программы **RiemanSum**, **LowerDarbouxSum** и **UpperDarbouxSum**, предназначенные для вычисления интегральных сумм Римана и Дарбу для разбиений отрезка интегрирования на равные части.

Синтаксис первой команды: **RiemanSum[функция, отрезок, опции]**. Если опциональные аргументы не заданы, то команда **RiemanSum[функция, отрезок]** вычисляет интегральную сумму Римана функции, являющейся первым аргументом команды, по отрезку - второму аргументу команды. Число отрезков разбиения по умолчанию равно 16. Точки, в которых вычисляются значения функции в римановой сумме, по умолчанию выбираются на левых концах отрезков разбиения.

В результате вычисления команды **RiemanSum[функция, отрезок]** на экране компьютера появляются рисунок графика функции на отрезке вместе с прямоугольниками, площади которых входят в риманову сумму, а также сумма площадей прямоугольников. В качестве примера рассмотрим команду

**RiemanSum [Function[x<sup>2</sup> Cos[x]], Segment[x, 0, π/2]]**

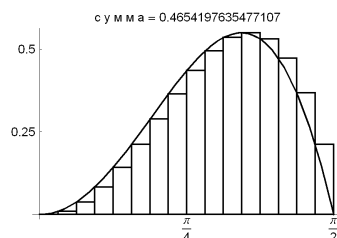


Рис.3.5.1

На рисунке Рис. 3.5.1 представлены шестнадцать прямоугольников суммарной площадью равной приблизительно 0.465.

Команда **RiemanSum** допускает задание трех опциональных аргументов. Опция `FunctionValues` позволяет задать выбор точек, в которых вычисляются значения интегрируемой функции на отрезках разбиения. Возможны значения: `FunctionValues → Center`, `FunctionValues → Right`, `FunctionValues → Random`. В первом случае выбираются точки в серединах отрезков разбиения, во втором случае - на правых концах отрезков, в третьем - точки на отрезках выбираются случайно. Опция `Subdivisions → n` задает число  $n$  отрезков разбиения.

Выполнение команды

```
RiemanSum[Function[ $\frac{\text{Sin}[x]}{x}$ ], Segment[x, 0.01, 10],
           FunctionValues → Center, Subdivisions → 20]
```

порождает следующий рисунок Рис. 3.5.2

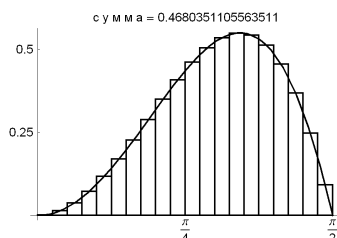


Рис.3.5.2

Значение интегральной суммы Римана, полученное в результате вычисления равно 0.468.

Еще одним опциональным аргументом команды **RiemanSum** является `Rectangles`. Задание `Rectangles → False`, блокирующее появление прямоугольников на экране, полезно, если число отрезков разбиения велико, так что на рисунке прямоугольники сливаются и становятся неразличимыми. В этом случае основная цель выполнения команды - вычисление римановой суммы.

Синтаксис команд **LowerDarbouxSum** и **UpperDarbouxSum** аналогичен синтаксису команды **RiemanSum**.

В задачах лабораторной работы требуется вычислить определенные интегралы с заданной точностью  $\varepsilon$  с помощью команды **RiemanSum**. Точность  $\varepsilon$  вычисления означает, что точное  $I_m$  и приближенные  $I_{np}$  значения интеграла удовлетворяют неравенству

$$|I_m - I_{np}| < \varepsilon.$$

Поскольку при заданном разбиении отрезка любая риманова сумма заключена между нижней и верхней суммами Дарбу, точность вычисления приближенных значений определенного интеграла оценивается через разность сумм Дарбу.

### Задания.

В задачах лабораторной работы требуется провести вычисления римановых сумм со случайным выбором точек, в которых вычисляются значения функции, и с выбором точек в серединах отрезков разбиения. Следует сравнить число отрезков разбиения в первом и втором случаях. Точность вычисления интегралов с помощью римановых сумм следует обосновать вычислением нижних и верхних сумм Дарбу.

1) Применяя формулу Ньютона-Лейбница, легко получить, что

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \operatorname{arctg} 1 = \pi.$$

С помощью римановых сумм найти значение числа  $\pi$  с абсолютной погрешностью, не превосходящей  $10^{-4}$ .

2) Вычислить интеграл

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$$

т.е., фактически, натуральный логарифм числа 2, с абсолютной погрешностью, не превосходящей  $10^{-4}$ , с помощью римановых сумм.

3) Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$$

с абсолютной погрешностью, не превосходящей  $10^{-4}$ , с помощью римановых сумм. Рассматриваемый интеграл называется *полным эллиптическим интегралом второго рода*.

4) Вычислить интеграл

$$\int_0^{0.75} \frac{x}{1+x^5} dx$$

с погрешностью, не превосходящей  $10^{-4}$ , с помощью римановых сумм.

5) Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{3 + \cos 2x} dx$$

с погрешностью, не превосходящей  $10^{-4}$ , с помощью римановых сумм.

### Указания к выполнению лабораторной работы.

Стандартная стратегия приближенных вычислений определенных интегралов состоит в следующем. Начинают с вычисления интегральной суммы Римана для какого-то числа отрезков разбиения. В лабораторной работе для

этого используют команду **RiemanSum** с числом отрезков разбиения равным, по умолчанию, 16.

Затем удваивают число отрезков разбиения с помощью опционального аргумента **Subdivisions**  $\rightarrow$  32 и сравнивают между собой полученные римановы суммы. Если разность римановых сумм больше заданного  $\varepsilon$ , то удваивают число отрезков разбиения и т.д. до тех пор, пока разность последнего и предпоследнего вычислений не станет меньше  $\varepsilon$ . Результат последнего вычисления принимают равным приближенному значению интеграла.

В лабораторной работе предусмотрен второй этап: подтверждение полученной точности с помощью интегральных сумм Дарбу. Для этого переходят к еще более мелкому разбиению, число отрезков в котором, скажем, в сто раз больше, чем в использованном в последнем вычислении интегральной суммы Римана.

Удваивая, если необходимо, число отрезков разбиения, добиваются того, что разности верхней и нижней суммы Дарбу становятся меньше, чем погрешность  $\varepsilon$ . Если вычисленная ранее сумма Римана находится между суммами Дарбу, то она принимается за приближенное значение интеграла в пределах заданной погрешности. Если нет, то вычисления римановых сумм продолжают.

### **Образец выполнения лабораторной работы.**

**Задание.** Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx$$

с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0.0001.

**Выполнение.** Начнем вычисления римановых сумм, выбирая случайно точки, в которых вычисляется функция, на отрезках разбиения. Выполняем команду

```
RiemanSum[Function[ $\sqrt{1+x^3}$ ], Segment[x, 0, 1], FunctionValues  $\rightarrow$  Random]
```

Получаем после округления значение римановой суммы равное 1.111357. Удваиваем число отрезков разбиения:

```
RiemanSum[Function[ $\sqrt{1+x^3}$ ], Segment[x, 0.01, 10 ],  
FunctionValues  $\rightarrow$  Random, Subdivisions  $\rightarrow$  32]
```

Теперь округленный результат равен 1.110008. Для числа отрезков разбиения 64 и 128 результаты суть 1.1115, 1.11153. Они отличаются меньше, чем на 0.0001, поэтому можно принять за приближенное значение интеграла число 1.11153.

Отметим, что при повторении читателем проведенных вычислений он получит значения римановых сумм отличные от приведенных выше. Это объясняется случайностью выбора точек вычисления функции.

Воспользуемся теперь выбором точек вычисления функции в серединах отрезков разбиения. После выполнения команды

```
RiemanSum [Function[ $\sqrt{1+x^3}$ , {x, 0, 1}], FunctionValues  $\rightarrow$  Center]
```

получаем значение интегральной суммы Римана равное 1.11275. После команды

```
RiemanSum[Function[ $\sqrt{1+x^3}$ ], Segment[x, 0.01, 10],  
FunctionValues  $\rightarrow$  Center, Subdivisions  $\rightarrow$  32]
```

получаем значение 1.1114. Еще раз удваиваем число отрезков разбиения и получаем результат 1.11144. Поскольку оба результата разнятся на 0.00004, что меньше заданного  $\varepsilon = 0.0001$ , принимаем последний результат за приближенное значение интеграла с заданной точностью. Таким образом,  $I_{np} = 1.11144$ .

Результаты вычислений с помощью случайного выбора точек на отрезках и с помощью выбора точек в серединах отрезков отличаются ровно на погрешность вычисления. Какое же из них точнее?

Для того, чтобы решить этот вопрос, вычисляем суммы Дарбу.

```
LowerDarbouxSum[Function[ $\sqrt{1+x^3}$ ], Segment[x, 0.01, 10],  
Rectangles  $\rightarrow$  False, Subdivisions  $\rightarrow$  3200]
```

и

```
UpperDarbouxSum[Function[ $\sqrt{1+x^3}$ ], Segment x, 0.01, 10],  
Rectangles  $\rightarrow$  False, Subdivisions  $\rightarrow$  3200]
```

Разность между верхней 1.11151 и нижней 1.11138 суммами Дарбу равна 0.00013, что больше требуемой погрешности вычислений. Выполняем поэтому те же команды для числа разбиений 6400. В результате получаем, что нижняя сумма Дарбу равна 1.11142, а верхняя 1.11148. Разность между ними 0.00006, что меньше погрешности  $\varepsilon = 0.0001$ .

Кроме того, выполняются неравенства  $1.11138 < 1.11144 < 1.11151$ . Следовательно, полученное нами приближенное значение 1.11144 с выбором точек разбиения в серединах отрезков разбиения можно принять за приближенное значение интеграла с требуемой точностью.

## Лабораторная работа 2. Вычисление площадей плоских фигур.

В работе вычисляются площади геометрических фигур, которые можно рассматривать как дополнения одной криволинейной трапеции до другой или же как объединения конечного числа таких фигур. Площадь фигуры, ограниченной снизу графиком функции  $g(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , слева и справа вертикальными прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , сверху графиком функции  $f(x)$ , равна интегралу

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



В задачах лабораторной работы границы фигур, площади которых требуется найти, задаются неявно с помощью уравнений вида  $F(x, y) = 0$ .

Команда `ImplicitPlot[F[x, y] == 0, {x, a, b}]` позволяет нарисовать неявно заданные кривые, а команда `ImplicitPlot[{F[x, y] == 0, G[x, y] == 0}, {x, a, b}]` рисует сразу две такие кривые.

Интегралы, встречающиеся в задачах, вычисляются точно или приближенно с помощью системы “Математика”.

### Задания.

1) Найти площадь фигуры, заключенной между полукубической параболой  $5y^3 = x^2$  и окружностью  $x^2 + y^2 = 4$  и расположенной над параболой.

2) Найти площадь фигуры, заключенной внутри *восьмерки*  $x^4 = x^2 - y^2$ .

3) Найти площадь фигуры, заключенной между *восьмеркой*  $16x^4 - 16x^2 = y^2$  и *локоном Аньези*  $y(1 + x^2) = 1$  и расположенной ниже локона Аньези и выше *восьмерки*.

4) Найти площадь фигуры, заключенной между *жемчужиной*  $y^2 = x^3(1 - x)$  и полукубической параболой  $8y^2 = x^3$

5) Найти площадь фигуры, заключенной внутри петли *строфоиды*  $y^2(1 + x) = x^2(1 - x)$ .

### Образец выполнения заданий.

**Задание.** Найти площадь той фигуры, заключенной между астроидой

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} = 1$$

и параболой

$$y^2 = x^4$$

которая содержит отрезки оси  $OY$ .

**Выполнение.** Из уравнения астроиды следует, что для точек астроиды координата  $x$  заключена между  $-1$  и  $1$ . Поэтому, чтобы наглядно представить фигуру, площадь которой следует найти, выполняем команду

```
ImplicitPlot[{ $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} == 1, y^2 = x^4$ }, {x, -1, 1},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.01], Hue[0]},
  {Thickness[0.01], Hue[0.7]}}
```

в которой третий аргумент команды задает стилистические характеристики кривых. Обе они имеют относительную толщину 0.01, астроида на экране компьютера рисуется красным, а параболы синим цветом. В результате выполнения команды получаем рисунок 3.5.3.

Из рисунка становится ясным, что речь идет о фигуре, состоящей из двух частей. Одна из них располагается вверх от синей линии (параболы) и вниз от красной (астроиды). Она похожа на наконечник копья. Вторая часть симметрична первой относительно оси абсцисс. Поэтому достаточно найти площадь верхней части фигуры и удвоить ее.

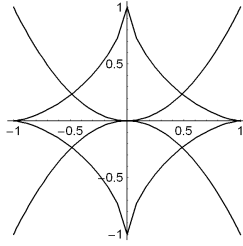


Рис.3.5.3

Для нахождения площади требуется вычислить абсциссы двух точек пересечения астроида и параболы над осью абсцисс. В принципе их можно вычислить точно с помощью команды **Solve** системы “Математика”. Однако абсциссы выражаются с помощью очень сложных формул, содержащих радикалы, поэтому найдем абсциссы точек пересечения приближенно. Выполняем команду

$$\mathbf{x} /. \mathbf{NSolve}[\{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} == 1, y^2 = x^4\}, \mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

и получаем следующий результат.

$$\{0.400475 + 0.531154 i, 0.400475 - 0.531154 i, -0.400475 + 0.531154 i, \\ -0.400475 - 0.531154 i, 0.485868, -0.485868, -0.400475 + 0.531154 i, \\ -0.400475 - 0.531154 i, 0.400475 + 0.531154 i, -0.400475 - 0.531154 i, \\ -0.485868, 0.485868\}$$

В ответе содержатся комплексные числа, имеющие в своей записи символ мнимой единицы  $i$ . Вещественные корни суть  $-0.485868$  и  $0.485868$ . Они и являются абсциссами точек пересечения.

Верхняя часть астроида является графиком функции  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  находится из уравнения астроида с помощью команды

$$\mathbf{y} /. \mathbf{Solve}[\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2} == 1, \mathbf{y}] \\ \left\{ -\sqrt{1 - x^2 - 3(x^2)^{1/3} + 3(x^2)^{2/3}}, \sqrt{1 - x^2 - 3(x^2)^{1/3} + 3(x^2)^{2/3}} \right\}$$

Следует выбрать второй (положительный) ответ.

Для нахождения половины искомой площади вычисляем интеграл

$$\int_{-0.485868}^{0.485868} \left( \sqrt{1 - x^2 - 3(x^2)^{1/3} + 3(x^2)^{2/3}} - x^2 \right) dx$$

$$0.420453 + 0. i$$

Это означает, что искомая площадь приближенно равна 0.840906. Мы оставляем в стороне обсуждение погрешности вычисления.

### Лабораторная работа 3. Тренажер вычисления неопределенных интегралов.

Способность системы “Математика” проводить символьные вычисления позволяет создавать в нем программы (команды), облегчающие выработку навыков вычисления неопределенных интегралов. Рассмотрим основные приемы нахождения неопределенных интегралов.

*Метод подстановки.* Команда **Substitution**[интеграл, подстановка] имеет результатом невычисленный интеграл, полученный из исходного после подстановки. Подстановка задается в виде  $\phi[x] \rightarrow t$ , где  $x$  переменная интегрирования исходного интеграла, а  $t$  – новая переменная интегрирования. Например, выполнение команды

$$\text{Substitution} \left[ \int x \sqrt{x-5} dx, \sqrt{x-5} \rightarrow t \right]$$

приводит к результату

$$\text{Ответ:} \quad \int 2t \sqrt{t^2(5+t^2)} dt$$

Пользователь должен принять решение, привела ли подстановка, которую он сделал, к табличному интегралу, интегралу, легко приводящемуся к табличному, или же подстановка бесполезна.

*Интегрирование по частям.* Для изучения метода интегрирования по частям используется команда

$$\text{ByParts} \left[ \int f[x] dx, x, g[x] dx \rightarrow d v[x], h[x] \rightarrow u[x] \right]$$

Она преобразует интеграл  $\int f[x] dx$ , подынтегральная функция в котором представлена в виде произведения  $g[x] h[x]$ , в выражение  $u[x] v[x] - \int v[x] u'[x] dx$

Рассмотрим, например, интеграл  $\int x \cos x dx$ . В подынтегральном выражении  $\cos x dx$  имеет легко вычисляемую первообразную  $\sin x + C$ , поэтому положим  $\cos x dx$  равным дифференциалу  $dv[x]$ . После этого не остается ничего другого, кроме как положить  $u[x]$  равной  $x$ . Для того, чтобы убедиться в правильности рассуждений, выполняем команду

$$\text{ByParts} \left[ \int x \text{Cos}[x] dx, \text{Cos}[x] \rightarrow d v[x], x \rightarrow u[x] \right]$$

получая на экране после ее выполнения сообщение

$$\text{Ответ:} \quad \int x \text{Cos}[x] dx = x \text{Sin}[x] - \int \text{Sin}[x] dx$$

*Интегрирование рациональных функций.* При интегрировании рациональных выражений большая часть времени уходит на разложение подинтегральной функции на простые дроби. Поскольку выделение целой части неправильной дроби и разложение правильной дроби на простые являются чисто алгебраическими задачами, не относящимися непосредственно к понятию неопределенного интеграла, то можно автоматизировать процесс нахождения простых дробей.

Это выполняется с помощью команды **SimpleFraction**[fraction, var]. Ее первым аргументом является рациональная функция вида  $P(var)/Q(var)$ , где  $P(var)$ ,  $Q(var)$  многочлены переменной  $var$ . Указание второго аргумента команды **SimpleFraction** обязательно, так как многочлены  $P$  и  $Q$  могут содержать параметры.

Представление квадратного трехчлена в виде полного квадрата достигается путем применения команды **FullSquare**[poly, var], где  $poly$  квадратный трехчлен от переменной  $var$ .

**Пример.** Найдем интеграл от рационального выражения

$$\frac{x^4}{x^3 + 1}$$

Для этого выполняем команду

$$\text{SimpleFractions} \left[ \frac{x^4}{x^3 + 1}, x \right]$$

и получаем результат

$$x + \frac{1}{3(1+x)} + \frac{-1-x}{3(1-x+x^2)}$$

Интегралы от первых двух слагаемых табличные. Для вычисления интеграла от третьей дроби представляем ее знаменатель в виде полного квадрата.

$$\text{FullSquare}[1 - x + x^2, x]$$

$$\frac{3}{4} + \left( -\frac{1}{2} + x \right)^2$$

и делаем в интеграле от третьей дроби подстановку  $x - 1/2 \rightarrow t$ .

$$\text{Substitution} \left[ \int \frac{-1-x}{3(1-x+x^2)} dx, x - \frac{1}{2} \rightarrow t \right]$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{6+4t}{9+12t^2} dt$$

Мы видим, что задача сводится к вычислению интегралов от дробей  $2/(3+4t^2)$  и  $4t/(9+12t^2)$ . Первый интеграл вычисляется с помощью подстановки

$$\text{Substitution} \left[ \int \frac{2}{3+4t^2}, \frac{2}{\sqrt{3}} t \rightarrow z \right]$$

Ответ:  $\int \frac{1}{\sqrt{3}(1+z^2)} dz$

Интеграл от второй дроби вычисляется также с помощью подстановки

**Substitution**  $\left[ \int \frac{4t}{9+12t^2} dt, \frac{4}{3}t^2 \rightarrow z \right]$

Ответ:  $\int \frac{1}{6(6+z)} dz$

собирая вместе полученные результаты, приходим к ответу

$$\int \frac{x^4}{x^3+1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \text{Log}[|x+1|] - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ArcTan} \left[ \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] - \frac{1}{6} \text{Log} \left[ \left| 1 + \frac{4}{3} \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \right| \right]$$

## РАЗДЕЛ 4

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

В теории функций одного аргумента приходилось рассматривать функции, зависящие от параметров. Например, при исследовании свойств непрерывности и дифференцируемости квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  по переменной  $x$  он трактовался как функция одного аргумента  $x$  при фиксированных значениях параметров  $p$  и  $q$ . Однако в теоретических и прикладных задачах возникают функции, свойства которых необходимо исследовать, принимая во внимание всю совокупность их аргументов, включая параметры.

Математические свойства функций нескольких аргументов нельзя исчерпать, фиксируя значения всех аргументов, кроме одного, и изучая получившиеся таким способом функции одного аргумента.

#### 1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ.

##### 1.1. Вещественное числовое пространство.

Начнем с рассмотрения функций от двух аргументов. Простейшие арифметические операции: сложение, умножение, возведение в степень и т.п. естественным образом порождают функции двух аргументов  $f(x, y) = x + y$ ,  $g(x, y) = xy$ ,  $h(x, y) = x^y$ . Если для первых двух функций порядок аргументов несуществен, и  $f(x, y) = f(y, x)$ ,  $g(x, y) = g(y, x)$ , то для *показательно-степенной* функции  $h(x, y)$  порядок аргументов имеет значение:  $h(x, y) = x^y \neq y^x = h(y, x)$ . Последнее обстоятельство является не исключением, а правилом, и аргументы функций от двух переменных следует рассматривать как *упорядоченные пары*  $(x, y)$  двух вещественных чисел  $x$  и  $y$ .

Упорядоченные пары  $(\alpha_1, \alpha_2)$  вещественных чисел можно отождествить с точками вещественной координатной плоскости  $R^2$ . Мы будем пользоваться для такого отождествления прямоугольной декартовой системой координат на  $R^2$  с осями  $OX$  (абсцисс) и  $OY$  (ординат).

Упорядоченная пара  $(\alpha_1, \alpha_2)$  отождествляется с точкой плоскости, являющейся концом вектора с началом в точке  $O$  и проекциями  $\alpha_1$  на ось абсцисс и  $\alpha_2$  на ось ординат. Имея в виду рассматриваемое отождествление, мы будем обозначать функции двух аргументов  $f(x, y)$  также и через  $f(M)$ , где  $M$  “переменная точка” координатной плоскости.

Одним из основных понятий математического анализа является понятие предельного перехода. В случае функций одного аргумента оно опирается на

понятие расстояния  $\rho(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$  между двумя вещественными числами  $\alpha$  и  $\beta$ . Отождествление упорядоченной пары вещественных чисел с точкой вещественной координатной плоскости  $R^2$  подсказывает, что можно воспользоваться понятием расстояние между точками плоскости для того, чтобы определить понятие предельного перехода при одновременном изменении аргументов функции  $f(x, y)$ .

Наряду с традиционным евклидовым расстоянием

$$\rho_e(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1.1)$$

между точками плоскости  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  мы будем пользоваться также “манхэттенским” расстоянием

$$\rho_{mh}(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad (1.2)$$

и расстоянием

$$\rho_{max}(A, B) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|). \quad (1.3)$$

Расстояние (1.2) получило название манхэттенского по следующей причине. Манхэттен – это район Нью-Йорка, улицы которого идут либо с Запада на Восток, либо с Юга на Север. Для водителя кратчайшее расстояние между перекрестками есть просто сумма расстояний которое в совокупности ему нужно проехать вдоль улиц, скажем, с Севера на Юг и с Востока на Запад.

Если за расстояние между точками плоскости принимается евклидово расстояние, то геометрическим местом точек равноудаленных от некоторой фиксированной точки  $A$  на расстояние  $\varepsilon$  является окружность с центром в точке  $A$  и радиусом  $\varepsilon$ .

Если принять манхэттенское расстояние, то геометрическое место точек удаленных от  $A$  на расстояние  $\varepsilon$  есть квадрат с центром в точке  $A$ , с диагоналями длины  $2\varepsilon$ , ориентированными параллельно координатным осям.

При выборе в качестве расстояния (1.3) соответствующим геометрическим местом точек будет квадрат со сторонами  $2\varepsilon$  параллельными координатным осям.

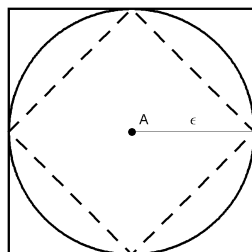


Рис. 4.1.1

На рисунке Рис. 4.1.1 пунктирный квадрат отвечает манхэттенскому расстоянию, а внешний квадрат расстоянию (1.3).

**Определение.** Назовем  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $A$  совокупность точек координатной плоскости, расстояния которых до точки  $A$  меньше  $\varepsilon$ .

Будем обозначать через  $\rho$  без индекса любое из расстояний (1.1), (1.2), (1.3). Легко видеть, что рассматриваемые расстояния обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} \rho(A, B) &\geq 0, \\ \rho(A, B) &= 0, \quad \text{тогда и только тогда, когда } A = B, \\ \rho(A, B) &\leq \rho(A, C) + \rho(C, B) \quad (\text{неравенство треугольника}) \end{aligned}$$

где  $C$  произвольная точка плоскости. В приводимом ниже определении формализуется понятие предельного перехода.

**Определение.** Последовательность  $\{A_n\}$  точек плоскости называется сходящейся к точке  $A$ , если расстояния  $\rho(A, A_n)$  образуют бесконечно малую числовую последовательность.

На первый взгляд может показаться, что возможна такая ситуация, когда некоторая последовательность является сходящейся при одном выборе расстояния и не сходится при выборе другого расстояния. Однако это не так.

**Теорема об эквивалентности расстояний.** Расстояния (1.1) – (1.3) эквивалентны в том смысле, что если какая-либо последовательность точек  $\{A_n\}$  сходится при одном выборе расстояния на плоскости, то она сходится при любом другом выборе.

Введенные выше понятия и определения естественным образом обобщаются на случай функций трех и более аргументов. Упорядоченные тройки  $(\alpha, \beta, \gamma)$  трех вещественных чисел, служащие аргументами функций от трех переменных, отождествляются с точками трехмерного вещественного пространства  $R^3$  с помощью трехмерной декартовой системы координат с осями  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ . Определение сходящейся последовательности точек пространства  $R^n$  является буквальным повторением определения для случая двух аргументов.

## 1.2. Подмножества вещественного числового пространства $R^n$ .

Для функций от одного аргумента мы рассматривали следующие множества точек, на которых они были определены. Это отрезок  $[a, b]$  и интервал  $(a, b)$ , определяемые как множества вещественных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$  в первом случае и  $a < x < b$  во втором. Рассматривались также полуинтервалы  $[a, b)$  и  $(a, b]$ . Последние три вида подмножеств могли быть бесконечными или полубесконечными.

Для  $n$ -мерного вещественного пространства  $R^n$  аналогами рассматривавшихся выше множеств являются параллелепипеды и сферы. Открытый параллелепипед  $P(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$  содержит точки  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad \dots, \quad a_n < x_n < b_n. \quad (1.4)$$



Если в (1.4) все неравенства нестрогие, то получается *замкнутый параллелепипед*  $\bar{P}(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n)$ .

*Открытый шар*  $D(B, r)$  с центром в точке  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$  радиуса  $r$  определяется как множество точек  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\rho_e(A, B) = \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + \dots + (x_n - b_n)^2} < r \quad (1.5)$$

Для *замкнутого шара*  $\bar{D}(B, r)$  строгое неравенство в (1.5) заменяется на нестрогое.

Определим понятия открытости и замкнутости для произвольных подмножеств  $M$  пространства  $R^n$ .

**Определение.** Точка  $A \in M$  называется *внутренней точкой* множества  $M$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$ , каждая точка в которой принадлежит  $M$ .

Точка  $A \in M$  называется *изолированной точкой* множества  $M$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$ , в которой нет других, кроме  $A$ , точек множества  $M$ .

Точка  $A$  называется *внешней точкой* для множества  $M$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, не содержащая ни одной точки множества  $M$ .

Все точки открытого параллелепипеда (1.4) или открытого шара (1.5) являются внутренними точками этих множеств.

**Определение.** Множество  $M$ , все точки которого внутренние, называется *открытым множеством*.

**Определение.** Точки  $A$ , не являющиеся ни внутренними точками множества  $M$ , ни внешними точками для  $M$ , называются *граничными точками* множества  $M$ .

Совокупность граничных точек называется *границей* множества.

Если в системе неравенств (1.4) заменить одно из неравенств  $a_i < x_i < b_i$  на равенство  $x_i = a_i$  или на равенство  $x_i = b_i$ , то получится совокупность граничных точек открытого параллелепипеда, называемая его *гранью*. Если бы в системе (1.4) все неравенства были нестрогие, т.е. система определяла бы замкнутый параллелепипед, рассмотренная выше замена неравенств на равенства приводила бы к грани замкнутого параллелепипеда, также состоящей из граничных точек замкнутого параллелепипеда.

Аналогично, если в неравенстве (1.5) заменить знак неравенства на знак равенства, то получится сфера  $S(B, r)$  радиуса  $r$ , являющаяся границей открытого шара. Рассматриваемая сфера была бы границей и замкнутого шара.

**Определение.** Множество  $M$  называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Среди объектов евклидовой геометрии важнейшую роль играют прямые и отрезки прямых. В вещественном координатном пространстве  $R^n$  прямые можно задать параметрическими уравнениями

$$x_1 = a_1 t + b_1, \quad x_2 = a_2 t + b_2, \quad \dots, \quad x_n = a_n t + b_n,$$

в которых  $t$  вещественный параметр, изменяющийся от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Числа  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  определяют направляющий вектор  $\vec{a}$  прямой. При  $t = 0$  прямая проходит через точку  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Если же параметр  $t$  изменяется на некотором конечном отрезке, то уравнения (1.7) задают отрезок прямой.

**Определение.** Открытое множество  $M$  называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить ломаной, которая состоит из отрезков, целиком лежащих в  $M$ .

Открытое и связное множество в  $R^n$  принято называть открытой областью.

Если присоединить к открытой области ее границу, то получится замкнутая область.

Рассмотрим область  $M$ , точки которой определяются системой неравенств

$$1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2,$$

т.е. кольцо с внутренним радиусом единица и внешним радиусом равным двум. Такая область связна. Однако в отличие от круга, в области  $M$  существуют замкнутые ломаные, которые охватывают внутреннюю окружность и не могут поэтому быть сжатыми в точку. Такие области не являются *односвязными*. В то же время круг – односвязная область.

Множество  $M$  называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором параллелепипеде или, эквивалентно, в некотором шаре конечного радиуса. На Рис. 4.1.2. схематически изображена ограниченная, связная, но не односвязная область координатной плоскости, представляющая собой внутренность эллипса с двумя “дырками” в верхнем правом и нижнем левом углах.

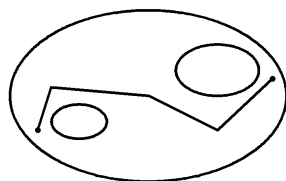


Рис. 4.1.2

### 1.3. Пределы функций нескольких аргументов. Непрерывность.

Введем одно важное для определения свойства непрерывности функций понятие.

**Определение.** Точка  $A$  называется точкой прикосновения множества  $M$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  содержится по крайней мере одна точка множества  $M$  отличная от  $A$ .

Из определения следует, что для всякой точки  $A$  прикосновения множества  $\mathbf{M}$  существует по крайней мере одна сходящаяся к  $A$  последовательность  $\{A_n\}$  точек множества  $\mathbf{M}$ , каждая из которых отлична от  $A$ .

Рассмотрим функцию  $f(M)$ , определенную на некотором подмножестве  $\mathbf{M}$  пространства  $R^n$ . Пусть  $A$  есть точка прикосновения множества  $\mathbf{M}$ .

**Определение.** Функция  $f(M)$  имеет предел равный  $\alpha$  в точке  $A$ , если для любой последовательности  $\{A_n\}$  точек подмножества  $\mathbf{M}$ , сходящейся к  $A$ , числовая последовательность  $\{f(A_n)\}$  сходится к числу  $\alpha$ :

$$\alpha = \lim_{M \rightarrow A} f(M).$$

**Пример.** Рассмотрим функцию двух аргументов

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (1.6)$$

определенную формулой (1.6) всюду на плоскости  $R^2$ , кроме точки  $O$  начала координат. Будем обозначать эту область через  $R^2 \setminus \{0\}$ .

Рассмотрим последовательность  $\{A_n(a_n, 0)\}$  отличных от  $0$  точек оси абсцисс, сходящуюся к  $O$ . Из (1.6) следует, что  $f(A_n) = 0$  для всех  $n$ , поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n) = 0$ . Такой же нулевой предел будет, если рассмотреть любую последовательность точек на оси ординат.

Рассмотрим, однако, последовательность  $\{B_n(a_n, a_n)\}$  точек, расположенных на биссектрисе  $y = x$  первого и третьего координатных углов, сходящуюся к началу координат. Справедливо равенство

$$f(B_n) = \frac{a_n^2}{a_n^2 + a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(B_n) = 1/2$ , и функция (1.6) не имеет предела в начале координат.

**Пример.** Рассмотрим функцию

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (1.7)$$

определенную формулой (1.7) в  $R^2 \setminus \{0\}$ , и докажем, что она имеет равный нулю предел в начале координат. Заметим, что выполнено равенство  $g(x, y) = x f(x, y)$ .

Докажем, что функция  $f(x, y)$  (1.6) ограничена на своей области определения. Для этого рассмотрим квадратный трехчлен  $p(x, y) = \alpha x^2 - xy + \alpha y^2$ , где  $\alpha$  некоторое положительное вещественное число. Если  $\alpha$  таково, что дискриминант квадратного трехчлена  $D(\alpha) = 1 - 4\alpha^2 < 0$ , то выполняется неравенство  $p(x, y) > 0$ , или  $xy < \alpha(x^2 + y^2)$ . Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} < \alpha. \quad (1.8)$$

Дискриминант  $D(\alpha) < 0$ , например, при  $\alpha > 1/2$ , поэтому  $f(x, y) \leq 1/2$ .

Из соотношения  $g(x, y) = x f(x, y)$  и неравенства (1.8) следует, что

$$|g(x, y)| \leq \frac{|x|}{2}. \quad (1.9)$$

Рассмотрим последовательность точек  $\{A_n(x_n, y_n)\}$ , сходящуюся к началу координат. Очевидно, что последовательности координат  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  точек последовательности  $\{A_n\}$  сходятся к 0. Из (1.9) для  $g(A_n)$  получаем неравенство

$$|g(x_n, y_n)| \leq \frac{|x_n|}{2},$$

из которого получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = 0$ . Таким образом функция  $g(x, y)$  имеет равный нулю предел в начале координат.

**Определение.** Пусть  $A$  точка из области определения  $\mathbf{M}$  функции  $f(M)$ , являющаяся точкой прикосновения  $\mathbf{M}$ . Если выполнено равенство

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A),$$

то говорят, что функция  $f(M)$  непрерывна в точке  $A$ .

Функции  $f(x, y)$  (1.9) и  $g(x, y)$  (1.10) непрерывны в любой точке области  $R^2 \setminus \{0\}$ . В самом деле, если  $\{A_n(x_n, y_n)\}$  последовательность точек, сходящаяся к некоторой точке  $A(a, b)$ , не совпадающей с началом координат, то последовательность  $\{x_n\}$  координат сходится к числу  $a$ , а последовательность  $\{y_n\}$  сходится к  $b$ , причем одно из чисел  $a$  или  $b$  отлично от нуля. Тогда по Теореме о пределах последовательностей  $x_n y_n \rightarrow ab$ ,  $x_n^2 \rightarrow a^2$ ,  $y_n^2 \rightarrow b^2$ , а, следовательно,  $f(A_n) \rightarrow f(A)$ ,  $g(A_n) \rightarrow g(A)$ .

Как бы ни доопределять значение функции  $f(x, y)$  (1.9) в начале координат, нельзя получить непрерывную функцию в точке  $O$ , поскольку  $f(x, y)$  не имеет предела в этой точке. В то же время, доопределив функцию  $g(x, y)$  в  $O$  нулем, мы получим непрерывную на всей координатной плоскости функцию.

#### 1.4. Свойства непрерывных функций нескольких аргументов.

Относительно непрерывных функций нескольких аргументов справедливы основные теоремы, доказанные для непрерывных функций одного аргумента, определенных на отрезках числовой оси. В многомерном случае роль отрезков играют ограниченные замкнутые множества пространства  $R^n$ . Формулируя теоремы, мы ограничимся случаем функций двух аргументов.

**Первая теорема Вейерштрасса.** Если функция  $f(x, y)$ , определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $\mathbf{M}$  координатной плоскости, то она ограничена:

$$|f(x, y)| < C \quad \text{для} \quad (x, y) \in \mathbf{M}.$$

**Вторая теорема Вейерштрасса.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве  $\mathbf{M}$ , тогда на  $\mathbf{M}$  существует точка  $A$ , в которой функция принимает наибольшее на множестве

$M$  значение, и существует точка  $B$ , в которой функция принимает наименьшее на  $M$  значение.

Помимо теорем об ограниченности и достижении наибольших и наименьших значений непрерывных функций, в случае функций одного аргумента важную роль играла теорема о нулях непрерывной функции.

**Теорема о нулях непрерывной функции.** Пусть непрерывная функция  $f(t)$  определена в некоторой области  $M$ . Пусть в точках  $A$  и  $B$  этой области она принимает значения разных знаков:  $f(A)f(B) < 0$ . Тогда в этой области найдется по крайней мере одна точка  $C$  такая, что  $f(C) = 0$ .

### 1.5. Равномерная непрерывность.

Как и в случае функций одного аргумента, обсуждение свойства равномерной непрерывности функций приходится проводить “на языке  $\varepsilon, \delta$ ”. Сформулируем свойство непрерывности функций нескольких аргументов на этом языке.

**Определение.** Функция  $f(M)$  непрерывна в точке  $A$  своей области определения, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon, A)$ , зависящее, вообще говоря, от точки  $A$ , что  $|f(A) - f(M)| < \varepsilon$  при условии, что точка  $M$  принадлежит  $\delta$ -окрестности точки  $A$ .

Аналогично случаю одного аргумента, нетрудно доказать эквивалентность этого определения определению на языке последовательностей.

**Определение.** Если в предшествующем определении число  $\delta$  не зависит от точки  $A$  области определения, то функция  $f(M)$  называется равномерно непрерывной на области определения.

**Теорема Кантора.** Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области  $M$ , то она на ней равномерно непрерывна.

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

### 2.1. Частные производные.

Для большей простоты и наглядности рассуждений мы вновь в основном будем рассматривать функции двух аргументов. Пусть функция  $f(x, y)$  определена в некоторой области  $\mathbf{M}$ , и пусть  $A(a, b) \in \mathbf{M}$  некоторая точка этой области. Назовем *приращением функции  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$  по аргументу  $x$*  функцию одного аргумента  $x$  с заголовком  $\Delta_A f$ , определяемую соотношением

$$\Delta_A f(x) = f(x, b) - f(a, b).$$

Соответственно, *приращением функции  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$  по аргументу  $y$*  называется функция одного аргумента  $y$ , определяемая соотношением

$$\Delta_A f(y) = f(a, y) - f(a, b).$$

**Определение.** *Частной производной функции  $f(x, y)$  по аргументу  $x$  в точке  $A(a, b)$  называется предел разностного отношения*

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta_A f(x)}{\Delta_A x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}, \quad (2.1)$$

если он существует.

*Частной производной функции  $f(x, y)$  по аргументу  $y$  в точке  $A(a, b)$  называется предел, в случае его существования, разностного отношения*

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Delta_A f(y)}{\Delta_A y} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}, \quad (2.2)$$

*Частные производные обозначаются также через  $f_x(a, b)$  и  $f_y(a, b)$ .*

Таким образом, при вычислении частных производных порождаются две функции одного аргумента  $\Delta_A f(x)$  и  $\Delta_A f(y)$ . Их обычные производные по своим аргументам и называются частными производными. Как и в случае функций одного аргумента, частными производными называются также и функции, значения которых в каждой точке равны частным производным функции  $f(x, y)$ .

По аналогии с функциями одного аргумента полезно ввести понятие *правой (левой) односторонних частных производных* функции двух аргументов, понимая под ними соответствующие пределы (2.1), (2.2), вычисляемые с помощью последовательностей  $x_n$  или  $y_n$ , сходящихся к числам  $a$  или  $b$  слева (справа).

## 2.2. Касательная плоскость. Дифференциал.

Визуальную информацию о поведении функций двух аргументов в окрестностях выбранных точек предоставляют их графики.

**Определение.** *Графиком функции  $f(x, y)$  двух аргументов называется совокупность точек  $(x, y, z)$  трехмерного пространства  $R^3$  вида  $(x, y, f(x, y))$ , где точка  $(x, y)$  пробегает область определения функции.*

К сожалению, строить графики функций двух аргументов значительно сложнее, чем в одномерном случае. Тем не менее, воспользуемся геометрическими понятиями, относящимися к трехмерному пространству, чтобы ввести понятие дифференциала функции.

Сопоставляя алгебраические свойства систем линейных уравнений (существование, несуществование, единственность решений), каждое из которых имеет вид  $ax + by + cz + d = 0$ , и геометрические свойства плоскостей в трехмерном евклидовом пространстве, можно прийти к выводу о том, что графиком линейной функции  $ax + by + c$  является плоскость.

В следующем ниже определении используется понятие бесконечно малой в некоторой точке координатной плоскости функции, аналогичное понятию бесконечно малой функции одного аргумента.

**Определение.** *Функция  $\phi(x, y)$  называется бесконечно малой в точке  $A(a, b)$ , если она имеет равный нулю предел в точке  $A$ .*

Для бесконечно малых функций используют обозначение:

$$\phi(M) = o(1) \quad \text{при } M \rightarrow A.$$

Функции  $\phi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$ , бесконечно малые в одной и той же точке, можно сравнивать, выясняя, малость какой функции больше. Если предел в точке  $A$  отношения  $\phi(x, y)/\psi(x, y)$  равен нулю, то говорят, что *порядок малости функции  $\phi(x, y)$  в точке  $A$  больше, чем порядок малости функции  $\psi(x, y)$* , и пишут  $\phi(x, y) = o(\psi(x, y))$ .

В частности, если  $\phi(M) = o(\rho(A, M))$ , то функция  $\phi(M)$  стремится к нулю при  $M \rightarrow A$  быстрее, чем расстояние от  $M$  до  $A$ .

**Определение.** *Касательной плоскостью к графику функции  $f(x, y)$  в точке  $(a, b, f(a, b))$  называется график такой линейной функции  $l(x, y) = Kx + Ly + M$ , что, во-первых, значения функций  $l(x, y)$  и  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$  совпадают:*

$$f(a, b) = Ka + Lb + M,$$

*и, во-вторых, приращение  $\Delta_A f(x, y) = f(x, y) - f(a, b)$  функции  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$  и приращение  $\Delta_A l(x, y) = K(x - a) + L(y - b)$  линейной функции в той же точке совпадают с точностью до функции  $\phi(x, y)$  бесконечно малой в точке  $A(a, b)$  и имеющей более высокий порядок малости, чем  $\rho(M, A)$ :*

$$\begin{aligned} \Delta_A f(x, y) &\equiv f(x, y) - f(a, b) = K(x - a) + L(y - b) + \phi(x, y), \\ \phi(x, y) &= o(\rho(M, A)). \end{aligned}$$

Положим в (1.15)  $y = b$ , тогда  $\rho(M, A) = |x - a|$ . Разделив равенство (1.15) на  $x - a$  и устремляя  $x$  к  $a$ , получаем, что  $K$  равно частной производной по переменной  $x$  функции  $f(x, y)$  в точке  $A$ . Аналогично, коэффициент  $L$  равен частной производной по переменной  $y$ :

$$K = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}, \quad L = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}.$$

Таким образом, из существования касательной плоскости следует существование частных производных.

В случае функций одного аргумента было справедливо обратное утверждение: если в какой-то точке существует производная функции  $f(x)$ , то в этой точке существует и касательная. Для функций от двух и большего числа аргументов известны примеры, когда одного существования частных производных в точке оказывается недостаточным для существования касательной плоскости. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

**Теорема о достаточных условиях существования касательной плоскости.** Пусть частные производные функции  $f(x, y)$  по переменным  $x$  и  $y$  существуют в некоторой окрестности точки  $A(a, b)$  и непрерывны в рассматриваемой точке, тогда в точке  $(a, b, f(a, b))$  существует касательная плоскость к графику, и приращение  $\Delta_A f(x, y)$  в окрестности точки  $A$  можно представить в виде

$$\Delta_A f(x, y) \equiv f(x, y) - f(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b) + o(\rho(M, A)). \quad (2.3)$$

**Определение.** Дифференциалом  $df_A(x, y)$  функции  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$  называется линейная по переменным  $x, y$ , не равная тождественно нулю и бесконечно малая в точке  $A$  функция такая, что выполняется соотношение:

$$\Delta_A f(x, y) \equiv f(x, y) - f(a, b) = df_A(x, y) + o(\rho(M, A)).$$

Если же приращение функции имеет более высокий порядок малости, чем линейные функции  $x - a$  и  $y - b$ , то дифференциал тождественно равен 0.

Функция, имеющая дифференциал в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Из соотношения (2.3) и равенства, приведенного в определении, следует, что

$$df_A(x, y) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b).$$

Дифференциал функции играет существенную роль при нахождении экстремумов функции, а также в приближенных вычислениях.

### 2.3. Производные высших порядков.

Предположим, что частная производная  $\partial f(x, y)/\partial x$  функции  $f(x, y)$  по аргументу  $x$ , рассматриваемая как функция точки  $M(x, y)$ , существует в некоторой области  $\mathbf{M}$ , которая, вообще говоря, может не совпадать с областью



задания функции  $f(x, y)$ . Имеет смысл задача о вычислении частных производных функции  $\partial f(x, y)/\partial x$  по аргументам  $x$  и  $y$ . То же самое справедливо по отношению к частной производной  $\partial f(x, y)/\partial y$ . Эти частные производные от частных производных, в случае их существования в каких-то точках области  $\mathbf{M}$ , называются *вторыми частными производными* функции  $f(x, y)$ . Из нашего рассуждения следует, что число вторых частных производных равно четырем. Для частных производных от  $\partial f(x, y)/\partial x$  используются обозначения:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)$$

а для частных производных от функции  $\partial f(x, y)/\partial y$  обозначения:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$$

Частные производные  $\partial^2 f(x, y)/\partial x \partial y$  и  $\partial^2 f(x, y)/\partial y \partial x$  называются *смешанными производными*. Вторые частные производные обозначаются также через  $f_{xx}(x, y)$ ,  $f_{xy}(x, y)$ ,  $f_{yx}(x, y)$  и  $f_{yy}(x, y)$ .

**Теорема о равенстве смешанных производных.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена в некоторой области  $\mathbf{M}$ . Предположим, что в  $\mathbf{M}$

- 1) существуют первые частные производные  $f_x(x, y)$  и  $f_y(x, y)$  функции  $f(x, y)$ ,
- 2) существуют и непрерывны смешанные частные производные  $f_{xy}(x, y)$  и  $f_{yx}(x, y)$ .

При выполнении сформулированных предположений в области  $\mathbf{M}$  смешанные производные равны:  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ .

С надлежащими изменениями и в предположении непрерывности можно доказать равенство соответствующих смешанных производных третьего и более высоких порядков.

#### 2.4. Дифференцирование сложных функций.

Пусть вместо аргументов  $x, y$  функции  $f(x, y)$  подставлены функции

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \tag{2.4}$$

аргументов  $u, v$ . Обозначим через  $F(u, v)$  сложную функцию

$$F(u, v) = f(\phi(u, v), \psi(u, v)).$$

**Теорема о дифференцируемости сложной функции.** Пусть функции  $\phi(u, v)$  и  $\psi(u, v)$  дифференцируемы в точке  $\alpha(u_0, v_0)$ , а функция  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $A(a, b)$ , где  $a = \phi(u_0, v_0)$ ,  $b = \psi(u_0, v_0)$ . Тогда функция  $F(u, v)$  дифференцируема в точке  $\alpha(u_0, v_0)$ , а ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(u_0, v_0)}{\partial u} &= \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \frac{\partial \phi(u_0, v_0)}{\partial u} + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \frac{\partial \psi(u_0, v_0)}{\partial u}, \\ \frac{\partial F(u_0, v_0)}{\partial v} &= \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \frac{\partial \phi(u_0, v_0)}{\partial v} + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \frac{\partial \psi(u_0, v_0)}{\partial v} \end{aligned} \tag{2.5}$$

В частном случае, когда функции  $\phi(u, v)$  и  $\psi(u, v)$  в формуле (2.4) зависят лишь от одного из двух аргументов ( пусть для определенности это будет аргумент  $u$ ), вместо функции  $F(u, v)$ , задаваемой формулой (2.5), возникает сложная функция одного аргумента

$$F(u) = f(\phi(u), \psi(u)). \quad (2.6)$$

Ясно, что мы можем применить первую формулу (2.5) для вычисления обычной, а не частной производной от функции (2.6). Она примет вид

$$\frac{dF(u)}{du} = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \phi'(u) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \psi'(u),$$

где  $a = \phi(u_0)$ ,  $b = \psi(u_0)$ .

### 2.5. Производная по направлению. Градиент.

При вычислении частной производной  $f_x(a, b)$  функции  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$  согласно формуле (1.14) значение аргумента  $y$  считалось фиксированным и равным  $b$ . Геометрически соотношение (1.14) можно понимать так, что переменная точка  $M(x, b)$  при своем стремлении к точке  $A(a, b)$  перемещается вдоль прямой на координатной плоскости, имеющей уравнение  $y = b$ . Поэтому частную производную  $f_x(a, b)$  можно понимать как производную по направлению оси абсцисс.

Аналогично, частная производная  $f_y(a, b)$  есть скорость изменения функции  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$  по направлению оси ординат. Можно определить производную от рассматриваемой функции в заданной точке по направлению, составляющему произвольный угол с осью абсцисс. Делается это следующим образом.

Рассмотрим прямую, проходящую через точку  $A(a, b)$  под углом  $\alpha$  к оси абсцисс. Уравнения этой прямой имеют вид

$$x = a + t \cos \alpha, \quad y = b + t \sin \alpha.$$

**Определение.** Производная  $F'(0)$  сложной функции  $F(t) = f(a + t \cos \alpha, b + t \sin \alpha)$  в случае ее существования называется производной функции  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$  по направлению, задаваемому единичным вектором  $\vec{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ .

Производная по направлению единичного вектора  $\vec{v}$  обозначается через

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial \vec{v}} = \left. \frac{dF(a + t \cos \alpha, b + t \sin \alpha)}{dt} \right|_{t=0}.$$

**Теорема о существовании производных по направлению.** Пусть функция  $f(x, y)$  дифференцируема в точке  $A(a, b)$ , тогда в рассматриваемой точке существуют производные по любому направлению и для них справедлива формула

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \sin \alpha. \quad (2.7)$$

С точки зрения векторной алгебры формула (2.7) есть запись в координатах скалярного произведения двух векторов. Первый есть единичный вектор  $\vec{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , задающий направление, по которому вычисляется производная. Второй вектор, обозначаемый как  $\text{grad } f(a, b)$  имеет координаты  $f_x(a, b)$  и  $f_y(a, b)$ . По определению скалярного произведения векторов оно равно произведению их модулей на косинус угла  $\phi$  между векторами. Таким образом,

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial \vec{v}} = |\text{grad } f(a, b)| \cos \phi. \quad (2.8)$$

Из формулы (2.8) следует, что наибольшее значение среди всех производных по направлению имеет производная по направлению нормированного на единицу вектора  $\text{grad } f(a, b)$ . Иными словами, *функция двух переменных быстрее всего возрастает по направлению, определяемому вектором градиента.*

## 2.6. Неявные функции.

Термин *неявная функция* нужно понимать следующим образом. Речь идет об одном из способов задания обычных функций одного или нескольких аргументов.

**Определение.** *Функция одного аргумента  $f(x)$  считается определенной неявно, если она удовлетворяет тождеству по переменной  $x$*

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad (2.9)$$

где  $F(x, y)$  заданная функция двух аргументов.

Из определения следует, что для нахождения значения функции  $f(x)$  нужно решить относительно неизвестной  $y$  уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (2.10)$$

В случае неявных функций двух аргументов  $f(x, y)$  нужно решить относительно неизвестной  $z$  уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \quad (2.11)$$

и, таким образом, неявно заданная функция  $f(x, y)$  удовлетворяет тождеству по переменным  $x, y$

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0. \quad (2.12)$$

### Теорема о существовании неявной функции одного аргумента.

*Пусть в прямоугольнике  $P = [a_1, b_1; a_2, b_2]$  определена непрерывная функция  $F(x, y)$ . Пусть в некоторой внутренней точке  $A(x_0, y_0)$  прямоугольника  $P$  она обращается в нуль. Пусть далее для каждого фиксированного  $x \in [a_1, b_1]$  функция  $F(x, y)$  монотонно возрастает (или убывает) при изменении аргумента  $y \in [a_2, b_2]$ .*

*Тогда для каждого  $x$  из некоторой окрестности точки  $x_0$  уравнение (2.11) однозначно разрешается относительно неизвестной  $y$  и определяет, тем самым, единственную неявную функцию  $f(x)$  такую, что  $f(x_0) = y_0$ . Более того, функция  $f(x)$  непрерывна на области своего существования.*

В следующей теореме установлены достаточные условия, при выполнении которых неявная функция, задаваемая уравнением (2.10) дифференцируема.

**Теорема о дифференцируемости неявной функции одного аргумента.** Пусть функция  $F(x, y)$  определена и непрерывна в прямоугольнике  $P = (a_1, b_1; a_2, b_2)$  и в некоторой внутренней точке  $A(x_0, y_0)$  прямоугольника  $P$  обращается в нуль. Пусть в прямоугольнике  $P$  существуют непрерывные частные производные  $F_x(x, y)$  и  $F_y(x, y)$  функции  $F(x, y)$ , причем в точке  $A$  производная  $F_y(x_0, y_0)$  не равна нулю.

Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0$  существует дифференцируемая функция  $f(x)$ , удовлетворяющая тождеству (2.9).

Дифференцируя тождество (2.9) по переменной  $x$ , получаем следующую формулу для производной от неявной функции

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \quad (2.13)$$

Предположим, что у функции  $F(x, y)$  существуют вторые производные по обоим аргументам, тогда правую часть формулы (2.13) можно продифференцировать по  $x$  как сложную функцию одного аргумента, и получить формулу

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}f'(x)}{F_y(x, f(x))} + F_x(x, f(x)) \frac{F_{xy}(x, f(x)) + F_{yy}(x, f(x))f'(x)}{F_y(x, f(x))^2}.$$

для второй производной от неявной функции. Аналогично выводятся формулы для старших производных неявной функции.

Сформулируем теорему существования неявной функции двух аргументов, задаваемой уравнением (2.11).

**Теорема о существовании неявной функции двух аргументов.** Пусть в прямоугольнике  $P = (a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3)$  определена и непрерывна функция  $F(x, y, z)$  и в некоторой внутренней точке  $A(x_0, y_0, z_0)$  этого прямоугольника она обращается в нуль. Пусть в прямоугольнике  $P$  существуют непрерывные частные производные  $F_x(x, y, z)$ ,  $F_y(x, y, z)$ ,  $F_z(x, y, z)$  функции  $F(x, y, z)$ , причем в точке  $A(x_0, y_0, z_0)$  производная  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Тогда в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  существует дифференцируемая функция  $f(x, y)$ , удовлетворяющая тождеству по переменным  $x, y$

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0.$$

Частные производные неявной функции  $f(x, y)$  в этой окрестности вычисляются по формулам

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}, \quad f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}.$$

## 2.7. Поверхности и линии уровня непрерывных функций.

Пусть  $f(x, y)$  есть некоторая функция двух аргументов.

**Определение.** Множеством уровня  $M_c$  функции  $f(x, y)$  называется множество всех таких точек  $(x, y)$  из области определения функции, в которых рассматриваемая функция принимает одно и то же постоянное значение  $c$ , т.е.

$$f(x, y) = c \quad \text{для} \quad (x, y) \in M_c.$$

Наиболее просто устроены множества уровня линейной функции  $\alpha x + \beta y + \gamma$ . Если  $\beta \neq 0$ , то каждое множество  $M_c$  представляет собой график линейной функции  $y = -\alpha/\beta x + (c-\gamma)/\beta$ , т.е. прямую линию, наклоненную к оси абсцисс по углом  $\arctg(-\alpha/\beta)$ . При  $\beta = 0$  множества уровня есть вертикальные прямые  $x = (c-\gamma)/\alpha$ . Для функции  $-x^2 + y$  множества уровня суть линии, являющиеся графиками функций  $y = x^2 + c$ , т.е. параболы.

Теория неявных функций в том виде, в каком она излагалась в предыдущем параграфе, отдает неоправданное предпочтение координате  $x$ , как независимому аргументу неявных функций, по сравнению с координатой  $y$ . Вполне уместно поставить вопрос не только об условиях разрешимости уравнения (2.9) относительно координаты  $y$ , но и относительно координаты  $x$ . В случае выполнения условий разрешимости относительно  $x$  эта координата будет определяться уравнением (2.9) как функция координаты  $y$ . Таким образом, уравнение (2.9) будет задавать неявную функцию  $g(y)$ , удовлетворяющую тождеству по  $y$

$$F(g(y), y) \equiv 0.$$

Теоремы о достаточных условиях существования и непрерывности неявной функции  $y = f(x)$ , могут быть очевидным образом переформулированы для функции  $x = g(y)$ . В первой теореме нужно заменить условие монотонности функции  $F(x, y)$  по координате  $y$  на условие монотонности по координате  $x$ . Во второй теореме нужно потребовать, чтобы в точке  $A(x_0, y_0)$  была бы отлична от нуля частная производная  $F_x(x_0, y_0)$ .

**Определение.** Непустое множество  $M_c$  уровня непрерывной функции  $f(x, y)$ , такое что в каждой точке  $(a, b) \in M_c$  выполнено хотя бы одно из неравенств  $f_x(a, b) \neq 0$  или  $f_y(a, b) \neq 0$  и хотя бы одна отличная от нуля в точке  $(a, b)$  производная непрерывна в некоторой окрестности этой точки, называется неособой линией уровня.

Если в некоторой точке  $(x_0, y_0) \in M_c$  обращаются в нуль обе частные производные функции  $f(x, y)$ , то такая точка называется особой.

Достаточным условием того, что множество уровня является линией есть требование, чтобы каждая точка множества  $M_c$  содержалась в некотором прямоугольнике, в котором обе частные производные функции были бы непрерывны и ни в одной точке множества  $M_c$  не обращался в нуль градиент функции  $f(x, y)$ . Тем не менее, для заданной функции некоторые множества уровня могут содержать одну или несколько особых точек или даже состоять из особых точек.

Последнее имеет место для множества  $M_1$  функции  $\sin(x - y)$ . Действительно, частные производные этой функции с точностью до знака равны  $\cos(x -$

$y$ ), поэтому они одновременно обращаются в нуль на  $\mathbf{M}_1$ . Тем не менее, множество  $\mathbf{M}_1$  есть совокупность прямых линий, заданных уравнениями  $y = x + (2k + 1)\pi/2$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Тот факт, что каждая из этих прямых состоит из особых точек, не означает несуществования функций, неявно заданных уравнением  $\sin(x - y) = 1$ . Дело в том, что теоремы существования 1.6 и 1.7 дают только достаточные условия существования неявных функций, но эти условия не являются необходимыми. Название *особая точка* отражает лишь то обстоятельство, что производную неявной функции нельзя вычислить, используя равенство (2.13), так как его правая часть в особой точке есть неопределенность вида  $0/0$ .

На линии уровня значение функции постоянно. Градиент же указывает направление ее наиболее быстрого возрастания. Отсюда следует, что градиент не может быть касателен к линии уровня. Более точное утверждение о взаимном расположении линии уровня и градиента составляет содержание следующей теоремы.

**Теорема о градиенте.** Пусть точка  $A(x_0, y_0)$  лежит на линии  $l$  уровня функции  $F(x, y)$ . Пусть в некоторой окрестности  $P_\varepsilon$  точки  $A$ , принадлежащей области определения функции  $F(x, y)$ , последняя имеет непрерывные частные производные  $F_x$  и  $F_y$ , и  $\text{grad } F(x_0, y_0) \neq 0$ . Тогда векторы градиента и касательные к линии уровня взаимно перпендикулярны в некоторой окрестности точки  $A(x_0, y_0)$ .

## 2.8. Формула Тейлора.

Когда вводилось понятие многочлена Тейлора для функции от одной переменной, то исходной была задача приближения функции в окрестности рассматриваемой точки многочленом  $n$ -го порядка. В настоящем параграфе мы получим формулу Тейлора для функции  $f(x, y)$  от двух аргументов, ограничившись случаем  $n = 2$ .

Пусть

$$P_2(x, y) = \alpha(x - a)^2 + \beta(x - a)(y - b) + \gamma(y - b)^2 + k(x - a) + m(y - b) + l$$

есть многочлен второго порядка от двух переменных.

**Определение.** Назовем  $P_2(x, y)$  многочленом Тейлора второго порядка функции  $f(x, y)$  в точке  $A(a, b)$ , если выполнено соотношение

$$f(M) = P_2(M) + o(\rho(M, A)^2),$$

где  $M(x, y)$  переменная точка на координатной плоскости.

Из определения дифференциала немедленно следует, что если функция  $f(x, y)$  имеет в точке  $A(a, b)$  многочлен Тейлора второго порядка, то она дифференцируема в точке  $A(a, b)$ , свободный член  $l = f(a, b)$ , а коэффициенты  $k$  и  $m$  многочлена  $P_2(x, y)$  равны частным производным  $f_x(a, b)$  и  $f_y(a, b)$ . Рассмотрим вопрос о существовании многочлена Тейлора второго порядка и об остаточном члене  $R_3(x, y) = f(x, y) - P_2(x, y)$ .

**Теорема Тейлора.** Пусть функция  $f(x, y)$  имеет в некоторой окрестности точки  $A(a, b)$  непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, тогда многочлен Тейлора второго порядка имеет вид

$$P_2(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} (f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2 f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2).$$

а для остаточного члена  $R_3(x, y)$  справедлива формула

$$R_3(x, y) = \frac{1}{6} (f_{xxx}(x^*, y^*)(x - a)^3 + 3 f_{xxy}(x^*, y^*)(x - a)^2(y - b) + 3 f_{xyy}(x^*, y^*)(x - a)(y - b)^2 + f_{yyy}(x^*, y^*)(y - b)^3).$$

В последней формуле  $x^*$  есть некоторая точка между  $a$  и  $x$ , а  $y^*$  есть точка между  $b$  и  $y$ .

### 3. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ.

Одной из важнейших задач, возникающих при исследовании прикладных математических моделей, является задача отыскания наибольших и наименьших значений функций от нескольких аргументов.

#### 3.1. Локальные экстремумы.

В этом параграфе мы будем рассматривать более простую задачу нахождения локальных минимумов и максимумов.

**Определение.** Пусть функция  $f(x, y)$  задана на открытом множестве  $\mathbf{M}$ . Точка  $A(a, b) \in \mathbf{M}$  называется точкой локального максимума (минимума) рассматриваемой функции, если найдется такая окрестность  $A_\delta$  точки  $A(a, b)$ , что для всех точек  $M(x, y)$  из  $A_\delta$  выполняется неравенство  $f(M) \leq f(A)$  ( $f(M) \geq f(A)$  для локального минимума).

Если заменить нестрогие знаки неравенства на строгие, то локальный максимум (минимум) называется строгим локальным максимумом (минимумом). Точки локальных минимумов и максимумов носят общее название локальных экстремумов.

Для дифференцируемых функций от одного аргумента обращение в нуль производной было необходимым условием локального экстремума. Для функций от двух и более аргументов необходимые условия сформулированы в следующей теореме.

**Теорема о необходимых условиях локального экстремума.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и дифференцируема на открытом или замкнутом множестве  $\mathbf{M}$  и пусть  $A(a, b)$  есть внутренняя точка множества. Тогда необходимым условием того, что  $A$  является точкой локального экстремума функции, является обращение в нуль ее первых частных производных:

$$f_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) = 0. \quad (3.1)$$

Геометрический смысл условий (3.1) прозрачен. В точках локального экстремума дифференцируемой функции касательная плоскость к ее графику горизонтальна (параллельна координатной плоскости  $XOY$ ). Рисунок 4.1.3 дает картину одного из локальных минимумов функции  $\sin(x^2 + y^2)$ , расположенного в точке  $(0, 0)$ . В окрестности критической точки: открытом прямоугольнике  $P(-1, 1; -1, 1)$  – график функции расположен над горизонтальной касательной плоскостью.



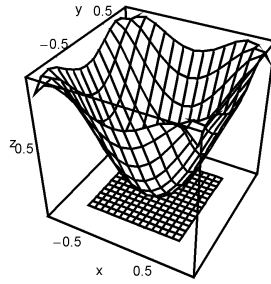


Рис. 4.1.3

Точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (3.1), называются *критическими точками* функции. Поскольку (3.1) необходимые условия локального экстремума, то критические точки всего лишь *подозрительны* на локальный экстремум. Вполне может быть, что они на самом деле не являются точками локального экстремума. Действительно, рассмотрим функцию  $x y$ , для которой условия (3.1) принимают вид  $y = 0, x = 0$ . Таким образом, начало координат является единственной критической точкой рассматриваемой функции. В ней функция принимает нулевое значение. В то же время, в любой точке первого ( $x > 0, y > 0$ ) и третьего ( $x < 0, y < 0$ ) квадрантов координатной плоскости функция  $x y$  принимает положительное значение, а в любой точке второго и четвертого квадрантов отрицательное значение. Следовательно, нет такой окрестности начала координат, для всех точек которой выполняются неравенства  $f(M) \leq f(O)$  или неравенства  $f(M) \geq f(O)$ .

Типичной критической точкой, не являющейся точкой локального экстремума, является *точка перевала*. Это название становится понятным, если обратиться к рисунку Рис. 4.1.4, на котором изображен график функции  $x^2 - y^2$  и касательная плоскость к нему в точке  $O$  начала координат. Эта точка отвечает единственной критической точке  $(0, 0)$  рассматриваемой функции.

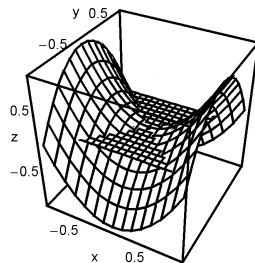


Рис. 4.1.4

Из рисунка видно, что часть графика функции расположена над горизонтальной касательной плоскостью, а часть под ней. При движении вдоль оси абсцисс начало координат самая низкая точка графика, а при движении вдоль оси ординат – самая высокая, т.е. наблюдается типичная картина перевала горной гряды. Как мы увидим, экстремумами и точками перевала не исчерпываются все типы критических точек у функций двух аргументов.

Теорема Тейлора позволяют сформулировать и доказать следующую теорему о достаточных условиях наличия или отсутствия локального экстремума в критических точках функций двух аргументов.

**Теорема о достаточном условии экстремума.** Пусть  $A(a, b)$  есть критическая точка функции  $f(x, y)$ . Пусть  $f(x, y)$  имеет в некоторой окрестности точки  $A(a, b)$  непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда достаточным условием наличия экстремума в критической точке  $A(a, b)$  является следующее неравенство

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0. \quad (3.2)$$

Более того, при  $f_{xx}(a, b) > 0$  критическая точка есть строгий локальный минимум, а при  $f_{xx}(a, b) < 0$  – строгий локальный максимум.

При выполнении неравенства противоположного неравенству (3.2)

$$f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 < 0.$$

критическая точка  $A(a, b)$  – перевал.

Неохватываемый условиями последней теоремы случай  $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 = 0$  требует отдельного рассмотрения, которое можно провести на основе формулы Тейлора с многочленом Тейлора более высокого, чем второй, порядка. В этом случае, несмотря на то, что многочлен  $P_2(x, y)$  имеет в критической точке экстремум, через критическую точку проходит прямая, на которой многочлен  $P_2(x, y)$  обращается в нуль. Поэтому существенно исследование знакоопределенности многочленов третьего и более высокого порядков в формуле Тейлора.

В качестве примеров можно рассмотреть функции  $(x-y)^2 + x^4$  и  $(x-y)^2 + x^3$ , каждая из которых имеет единственную критическую точку  $(0, 0)$ . В силу того, что  $x^4 > 0$  при  $x > 0$ , первая функция имеет в начале координат минимум. Ввиду знаконеопределенности многочлена  $x^3$  и ввиду того, что при  $x = 0$  он имеет точку перегиба, а не экстремума, критическая точка второй функции не является точкой экстремума, но и не является точкой перевала (см. Рис. 4.1.5).

### 3.2. Условный экстремум.

Предположим, что функция  $f(x, y)$  определена в некоторой замкнутой или открытой области  $M$ . Пусть  $l$  есть неособая линия уровня некоторой дифференцируемой функции  $g(x, y)$ . Она задается уравнением

$$g(x, y) = 0. \quad (3.3)$$

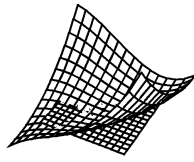


Рис. 4.1.5

Будем предполагать, что линия  $l$  целиком содержится в  $\mathbf{M}$ . Рассмотрим ограничение  $f|_l$  функции  $f(x, y)$  на кривую  $l$  и поставим вопрос об отыскании локальных экстремумов функции  $f|_l$ .

Неособая линия уровня характеризуется тем, что в окрестности любой точки  $A$ , лежащей на  $l$ , линия  $l$  является либо графиком функции  $\phi(x)$ , либо функции  $\psi(y)$  таких, что выполняются тождества

$$g(x, \phi(x)) \equiv 0, \quad \text{либо} \quad g(\psi(y), y) \equiv 0. \quad (3.4)$$

Если линия  $l$  в окрестности некоторой точки есть график функции  $\phi(x)$ , то речь фактически идет о локальных экстремумах функции  $f(x, \phi(x))$  одного аргумента  $x$ . Если же  $l$  является графиком функции  $\psi(y)$ , то отыскиваются локальные экстремумы функции  $f(\psi(y), y)$ . В первом случае критические точки являются корнями уравнения

$$f_x(x, \phi(x)) + f_y(x, \phi(x)) \phi'(x) = 0, \quad (3.5)$$

полученного приравниванием нулю производной по  $x$  сложной функции  $f(x, \phi(x))$ , а во втором – корнями уравнения

$$f_x(\psi(y), y) \psi'(y) + f_y(\psi(y), y) = 0. \quad (3.6)$$

Производная  $\phi'(x)$  неявной функции, задаваемой уравнением (3.5), может быть найдена по формуле (2.13):

$$\phi'(x) = -\frac{g_x(x, \phi(x))}{g_y(x, \phi(x))}.$$

Подставляя последнее выражение в (3.5) и умножая обе части получающегося соотношения на отличную от нуля производную  $g_y(x, \phi(x))$ , приходим к следующему уравнению для абсцисс критических точек

$$f_x(x, \phi(x)) g_y(x, \phi(x)) - f_y(x, \phi(x)) g_x(x, \phi(x)) = 0.$$

Аналогично, уравнение (3.6) может быть преобразовано к виду

$$f_x(\psi(y), y) g_y(\psi(y), y) - f_y(\psi(y), y) g_x(\psi(y), y) = 0.$$

Учитывая, что функции  $\phi(x)$  и  $\psi(y)$  находятся из уравнения (3.3), приходим к выводу, что координаты критических точек удовлетворяют системе уравнений

$$f_x(x, y)g_y(x, y) - f_y(x, y)g_x(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

### 3.3. Экстремумы функций трех и более аргументов.

В этом параграфе мы приведем без доказательства обобщения результатов о локальных и условных экстремумах функций двух аргументов на случай функций большего числа аргументов.

Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дифференцируемая функция  $n$  аргументов, тогда ее дифференциал в точке  $A(a_1, \dots, a_n)$  имеет вид

$$d_A f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_k} (x_k - a_k). \quad (3.7)$$

Для многочлена Тейлора второго порядка в точке  $A$  справедливо выражение

$$P_2(x_1, \dots, x_n) = d_A f(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Из формулы (3.7) следует, что критические точки функции  $n$  аргументов являются корнями системы уравнений

$$f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad f_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad f_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Пусть  $A(a_1, \dots, a_n)$  – критическая точка функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Для того, чтобы сформулировать достаточные условия наличия локального экстремума в критической точке, изучим свойства квадратичной формы

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j). \quad (3.8)$$

Форма  $Q(x_1, \dots, x_n)$  называется *положительно определенной*, если  $Q(M) > 0$  для всех точек  $M(x_1, \dots, x_n) \neq A(a_1, \dots, a_n)$ . Если форма  $-Q(M)$  положительно определенная, то форма  $Q(M)$  называется *отрицательно определенной*. Квадратичная форма называется *неопределенной*, если она может принимать значения разных знаков.

Из курса линейной алгебры известно, что невырожденным преобразованием координат

$$x = T y,$$

где  $T$  обратимая матрица преобразования, квадратичная форма (3.8) может быть приведена к виду

$$Q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad (3.9)$$

где числа  $\lambda_i$  называются *каноническими коэффициентами* квадратичной формы.

Если в (3.9) все канонические коэффициенты квадратичной формы имеют один и тот же положительный знак ( в частности, нет нулевых коэффициентов), то форма положительно определенная. При отрицательном знаке всех канонических коэффициентов - форма отрицательно определенная. Если среди канонических коэффициентов встречаются числа разных знаков, то форма неопределенная.

Процесс приведения квадратичной формы к каноническому виду состоит в повторном выделении полных квадратов.

Обобщением Теоремы о достаточных условиях наличия экстремума в критической точке функции двух аргументов является следующее утверждение.

**Теорема о локальных экстремумах.** Пусть точка  $A(a_1, \dots, a_n)$  есть критическая точка функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , в некоторой окрестности которой существуют и непрерывны все частные производные рассматриваемой функции до второго порядка включительно. Тогда, если квадратичная форма (3.8) положительно (отрицательно) определена, то критическая точка есть локальный минимум (максимум).

Если квадратичная форма (3.8) неопределенная, то в критической точке нет экстремума.

В заключение сформулируем известный из линейной алгебры критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы. Он основан на изучении матрицы квадратичной формы

$$M = \left\| \left\| \frac{\partial^2 f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \right\|. \quad (3.10)$$

Обозначим через

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

значения вторых производных функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  в критической точке  $A(a_1, \dots, a_n)$ . Назовем *главными минорами* матрицы  $M$  определители

$$D_1 = \alpha_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_k = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix} \quad \dots$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

**Критерий Сильвестра.** Для того, чтобы квадратичная форма (3.8) была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы  $M$  (3.10) были положительны:

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \dots, \quad D_n > 0.$$

Для того, чтобы квадратичная форма (3.8) была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров чередовались, причем знак  $D_1$  был отрицателен:

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0, \quad \dots$$

## ГЛАВА 4. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ К РАЗДЕЛУ 4

В этой главе будут приведены описания лабораторных работ по материалу четвертого раздела книги.

### Лабораторная работа 1. Пределы и непрерывность функций двух аргументов.

Для изучения непрерывности функций двух аргументов в различных точках числовой плоскости в данной лабораторной работе используется команда

$$\mathbf{FunctionLimit3D}[\mathbf{Function}[f[x, y]], \mathbf{Rectangle}[\{x, a, b\}, \{y, b, c\}], \\ \mathbf{Sequences}[x_n, y_n], \mathbf{IndexRange}[n, k, m]].$$

Первый аргумент команды - изучаемая функция  $f[x, y]$ , которая задается явной формулой. Вторым и третьим аргументами определяют прямоугольник  $P[a, b; c, d]$  на плоскости  $R^2$ , содержащий точку  $A(\alpha, \beta)$ , в которой исследуется непрерывность. Желательно, чтобы точка  $A$  находилась в центре прямоугольника  $P$ . Четвертый аргумент задает пару последовательностей таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$ . Пятый аргумент определяет номера от  $k$  до  $m$  изменения номеров элементов последовательностей.

Выполнение команды имеет результатом рисунок, на котором представлена совокупность точек  $M_n(x_n, y_n, f[x_n, y_n])$  трехмерного пространства  $R^3$  для  $n$  изменяющегося от  $k$  до  $m$ . По этой совокупности точек можно высказать гипотезу о сходимости или расходимости последовательности  $M_n$ .

Рассматриваемая команда имеет опциональный аргумент  $Color \rightarrow \text{цвет}$ , позволяющий пользователю задавать цвет точек  $M_n$ . Это бывает полезным, при одновременном представлении на дисплее нескольких последовательностей точек графика функции, полученных последовательным выполнением команд **FunctionLimit3D**. Такое одновременное представление обеспечивает команда **Show** системы “Математика”.

### Задания.

С помощью команды **FunctionLimit3D** ответьте на вопрос, являются ли непрерывными следующие функции в точке  $O(0, 0)$  начала координат.

$$1) \frac{\sin(xy)}{xy}$$

$$2) \frac{x^2 + 4y}{2x^2y^2 + 1}$$

- 3)  $\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$   
 4)  $(1+x^2+y^2)^{\frac{y}{x^2+y^2}}$   
 5)  $(1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$

**Образец выполнения лабораторной работы.**

**Задание.** Исследовать непрерывность функции

$$\frac{xy}{x^2+y^2}$$

в начале координат  $O(0,0)$ .

**Выполнение.** Рассмотрим последовательность  $M_n(x_n, y_n)$  точек плоскости для  $x_n = 1/n$ ,  $y_n = 2/n$ . Эта последовательность точек лежит на прямой  $y = 2x$  и сходится к началу координат. Рассмотрим отрезок последовательности  $\{M_n\}$  для  $2 \leq n \leq 50$  и выполним команду

```
FunctionLimit3D [Function [  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  ], Rectangle[{x, -1, 1}, {y, -1, 1}],
Sequences [  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}$  ], IndexRange[n, 2, 50], Color -> Hue[0]
```

После ее выполнения на экране компьютера появляется рисунок

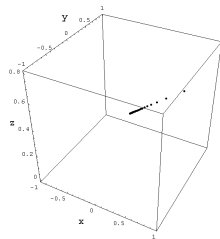


Рис. 4.4.1

На рисунке 4.4.1 красными точками представлены элементы последовательности  $M_n$ .

Выберем другую последовательность точек  $M_n(x_n, y_n)$ , положив  $x_n = -1/n$ ,  $y_n = 1/n^2$ . Эта последовательность точек лежит на параболе  $y = x^2$  и стремится к началу координат при  $n \rightarrow \infty$ . Выполняем команду

```
FunctionLimit3D [Function [  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  ], Rectangle[{x, -1, 1}, {y, -1, 1}],
Sequences [  $-\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$  ], IndexRange[n, 2, 50], Color -> Hue[0.7]
```

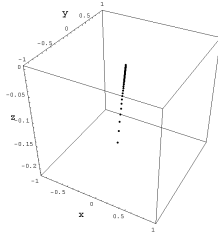


Рис. 4.4.2

и получаем рисунок 4.4.2.

На нем синими точками представлены элементы последовательности  $M_n$ .  
Совмещаем оба рисунка.

**Show[p1, p2]**

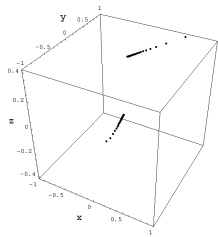


Рис. 4.4.3

Рисунок 4.4.3 наглядно демонстрирует, что обе последовательности точек стремятся к разным пределам.

Теоретическая часть лабораторной работы состоит в том, чтобы вычислить пределы последовательностей

$$z_n = \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}$$

для первой и второй пар последовательностей  $x_n, y_n$ . Для первой пары  $x_n = 1/n, y_n = 2/n$

$$z_n = \frac{\frac{1}{n} \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5}.$$



Следовательно, в рассматриваемом случае последовательность точек  $M_n$  сходится к точке  $B(0, 0, 2/5)$ , лежащей на оси  $OZ$ .

Для второй пары последовательностей  $x_n = -1/n$ ,  $y_n = 1/n^2$  последовательность

$$z_n = \frac{-\frac{1}{n} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = -\frac{n}{n^2 + 1}$$

сходится к нулю. Поэтому последовательность точек  $M_n$  сходится к началу координат  $O(0, 0, 0)$ . Обе последовательности точек  $M_n$  сходятся к разным пределам, поэтому рассматриваемая функция в точке  $O(0, 0)$  не имеет предела и не является непрерывной.

## Лабораторная работа 2. Локальные экстремумы функций двух аргументов.

В заданиях лабораторной работы требуется найти критические точки функций и исследовать характер этих точек. Последнее означает, что нужно установить, является ли критическая точка локальным минимумом, максимумом, седловой точкой или она вырождена.

### Описание компьютерных команд, используемых в работе.

Команда **Gradient**[*функция*, {*var1*, *var2*}], где *var1*, *var2* аргументы, вычисляет градиент функции.

Команда **TangentPlane**[*функция*, *точка*, {*var1*, *a*, *b*}, {*var2*, *c*, *d*}] позволяет построить график функции, зависящей от переменных *var1* и *var2*, вместе с касательной плоскостью к графику в заданной точке *точка*. График строится в интервале от *a* до *b* по первой переменной, и в интервале от *c* до *d* по второй переменной. Желательно, чтобы рассматриваемая точка располагалась возможно ближе к центру прямоугольника [*a*, *b*; *c*, *d*].

Команда **LocalExtrema**[*функция*, {*var1*, *a*, *b*}, {*var2*, *c*, *d*}] рисует линии уровня функции в прямоугольнике  $a \leq \textit{var1} \leq b$ ,  $c \leq \textit{var2} \leq d$ , где *var1* и *var2* имена аргументов функции, а также рисует векторное поле градиента функции. Использование команды **LocalExtrema** есть другой по сравнению с командой **TangentPlane** способ визуального изучения свойств функций двух аргументов и поисков точек их локальных экстремумов.

Команда **SecondDifferential**[*функция*, *точка*, *переменные*] вычисляет второй дифференциал (третий член многочлена Тейлора второго порядка) функции в критической точке.

Команда **CanonicalForm**[*второй дифференциал*, {*dx*, *dy*}] приводит второй дифференциал к полному квадрату, позволяя установить его знакопостоянство или знакопеременность.

### Задания.

Найти стационарные точки следующих функций с помощью команд **Gradient** и **Solve** и исследовать их, применяя команды **TangentPlane**, **LocalExtrema**, **SecondDifferential**.

- 1)  $x * y$
- 2)  $x E^{-x^2-y^2}$

- 3)  $\frac{x * y}{x^2 + y^2 + 1}$
- 4)  $\text{Cos}[x] + \text{Cos}[y]$  в прямоугольнике  $[-\pi/2, 3\pi/2; -3\pi/2, \pi/2]$
- 5)  $\text{Sin}[\pi \text{Sin}[x] + y]$  в прямоугольнике  $[-\pi, \pi; -2\pi, 2\pi]$
- 6)  $(E^{-(x-1)^2} + E^{-(x+1)^2}) E^{-y^2}$ .

**Указание.** При нахождении абсцисс стационарных точек в задаче 6) применить команду **FindRoot** системы “Математика”.

**Образец выполнения задания.**

**Задача.** Найти и исследовать критические точки функции

$$\frac{1}{1 + x^2 + y^2 + x * y}$$

**Решение.** В критических точках градиент функции обращается в нуль. Вычисляем градиент рассматриваемой функции. С этой целью выполняем команду

$$\text{Gradient} \left[ \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + x * y}, \{x, y\} \right]$$

$$\left\{ -\frac{2x + y}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2}, -\frac{x + 2y}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2} \right\}$$

Приравниваем найденные координаты градиента нулю и решаем получившуюся систему уравнений с помощью команды **Solve**:

$$\text{Solve} \left[ \left\{ -\frac{2x + y}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2}, -\frac{x + 2y}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2} \right\}, \{x, y\} \right]$$

$$\{\{0, 0\}\}$$

Критическая точка есть точка  $(0, 0)$ . Выясним, является ли она локальным экстремумом, точкой перевала или имеет другой характер. Для этого прибегаем к команде **LocalExtrema**.

$$\text{LocalExtrema} \left[ \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + x * y}, \{0, 0\}, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\} \right]$$

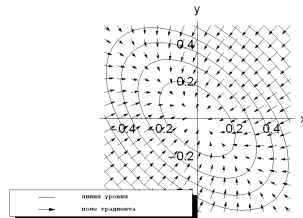


Рис. 4.4.4

Изучение линий уровня и направление векторов градиента в окрестности критической точки – начала координат позволяет высказать гипотезу о том, что рассматриваемая критическая точка есть точка локального максимума. Для подтверждения гипотезы нарисуете график функции вместе с касательной плоскостью в критической точке.

$$\text{TangentPlane} \left[ \left[ \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + x * y}, \{0, 0\}, \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\} \right] \right];$$

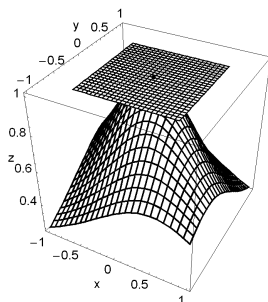


Рис. 4.4.5

Рассмотрение полученного рисунка подтверждает высказанную гипотезу. Действительно, поскольку в окрестности критической точки график функции располагается ниже касательной плоскости, исследуемая критическая точка, весьма вероятно, есть точка локального максимума.

Докажем выдвинутую гипотезу строго. Для этого вычисляем второй дифференциал исследуемой функции в критической точке.

$$\text{dif2} = \text{SecondDifferential} \left[ \left[ \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + x y}, \{0, 0\}, \{x, y\} \right] \right]$$

$$-dx^2 - dx dy - dy^2$$

Приводим его к канонической форме, или, иначе, записываем в виде полного квадрата.

$$\text{CanonicalForm}[\text{dif2}, dx, dy]$$

$$-\left(dx + \frac{dy}{2}\right)^2 - \frac{3dy^2}{4}$$

Второй дифференциал знакопостоянен. Он отрицательно определен. Следовательно, высказанная гипотеза строго доказана.

## РАЗДЕЛ 5

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

## 1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Изучение задачи о площади плоской фигуры: криволинейной трапеции – в параграфе 1.2 Раздела 3 позволило нам сформулировать общее понятие определенного интеграла от функции одного аргумента на основе понятия площади криволинейной трапеции. Трехмерным аналогом задачи о площади криволинейной трапеции служит задача об объеме цилиндрического бруса.

### 1.1. Объем цилиндрического бруса с прямоугольником в основании.

Рассмотрим трехмерное тело  $W$  (Рис. 5.1.1), с основанием в виде замкнутого прямоугольника  $P$ , расположенного на плоскости  $XOY$ , со сторонами параллельными координатным осям. С боков тело  $W$  ограничено вертикальными плоскими гранями, а сверху графиком функции двух аргументов  $f(x, y)$ , определенной на  $P$ . Требуется определить понятие объема тела  $W$  и дать способ его вычисления.

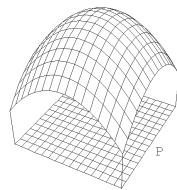


Рис. 5.1.1

В самом простом случае, когда функция  $f(x, y)$  постоянна на  $P$ :  $f(x, y) = H$ , тело  $W$  представляет собой параллелепипед, и значения функции  $f(x, y)$  в точках  $P$  равны его высоте. Объем параллелепипеда вычисляется как произведение площади  $S$  основания на высоту  $H$ . Для произвольной функции  $f(x, y)$

мы прибегаем к декартовой прямоугольной сетке координат с тем, чтобы построить разбиение  $T$  основания  $P$  цилиндрического тела на неперекрывающиеся прямоугольники  $R_{kl} = [\alpha_{k-1}, \alpha_k; \beta_{l-1}, \beta_l]$  с боковыми сторонами параллельными координатным осям. Сумма площадей прямоугольников разбиения равна площади прямоугольника  $P$ , а их число пусть равно  $n = K L$ , где  $K, L$  – число отрезков разбиения стороны прямоугольника  $P$  параллельной соответственно оси абсцисс или оси ординат.

Обозначим через  $f(\xi_{kl}, \eta_{kl})$  значение функции  $f(x, y)$  в какой-либо точке прямоугольника разбиения  $R_{kl}$ . Построим параллелепипед высотой  $f(\xi_{kl}, \eta_{kl})$ , опирающийся на прямоугольник  $R_{kl}$ . Объем параллелепипеда разбиения равен произведению площади  $(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\beta_l - \beta_{l-1})$  его основания на высоту  $f(\xi_{kl}, \eta_{kl})$ . Объем же  $V$  всего цилиндрического тела приближенно равен сумме  $V_n$  объемов параллелепипедов:

$$V \cong V_n = \sum_{k=1, l=1}^{K, L} f(\xi_{kl}, \eta_{kl}) (\alpha_k - \alpha_{k-1})(\beta_l - \beta_{l-1}), \quad n = K L. \quad (1.1)$$

Сумму в правой части равенства (1.1) естественно назвать *Римановой суммой* функции  $f(x, y)$ , построенной по пунктированному разбиению  $T$ .

Назовем *диаметром*  $\lambda_T$  разбиения  $T$  длину наибольшей диагонали прямоугольников  $R_{kl}$ . Для повышения точности вычисления объема тела следует перейти к последовательности  $\{T_n\}$  разбиений, диаметры которых стремятся к нулю. Пусть для последовательности  $\{T_n\}$  существует предел

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n, \quad (1.2)$$

где  $V_n$  определяется формулой (1.1).

**Определение.** Предел (1.2) в случае его существования и независимости от выбора последовательности  $\{T_n\}$  называется *объемом цилиндрического тела* и обозначается через

$$\int \int_{(P)} f(x, y) dS. \quad (1.3)$$

Символ (1.3) называется *двойным интегралом* от функции  $f(x, y)$  по прямоугольнику  $P$ . Части этого составного символа имеют следующий смысл. Два поставленные подряд знака неопределенного интеграла и следующее за ними обозначение  $f(x, y)$  функции говорят о том, что мы имеем дело с двойным интегралом от функции  $f(x, y)$ . Буква  $P$  обозначает область интегрирования, буква  $S$  напоминает о площади, а символ  $d$  говорит об измельчении разбиения области при переходе к пределу. Не следует понимать  $dS$  как площадь “бесконечно малого” прямоугольника или как “дифференциал площади”.

**Теорема о существовании двойного интеграла от непрерывной функции.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутом прямоугольнике  $P$  координатной плоскости  $R^2$ , тогда двойной интеграл (1.3) от функции  $f(x, y)$  по прямоугольнику  $P$  существует.

**1.2. Сведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольника.**

Рассмотрим вновь прямоугольник  $P = [a, b; c, d]$  координатной плоскости. Предположим, что для каждого  $x \in [a, b]$  существует определенный интеграл

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad (1.4)$$

тогда определенный интеграл

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (1.5)$$

в случае его существования называется *повторным интегралом*. Наряду с (1.5) можно рассмотреть повторный интеграл

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

**Теорема о сведении двойного интеграла к повторному.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутом прямоугольнике  $P = [a, b; c, d]$ , тогда для двойного интеграла (1.3) справедливы равенства

$$\int \int_{(P)} f(x, y) dS = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1.6)$$

**Пример 1.** Вычислим с помощью формулы (1.6) двойной интеграл от функции  $f(x, y) = 1 + x \sin(xy)$  по прямоугольнику  $P = [0, 1; 0, \pi]$ . Обозначим через  $g(x)$  определенный интеграл

$$g(x) = \int_0^\pi f(x, y) dy = \int_0^\pi (1 + x \sin(xy)) dy = (y - \cos(xy)) \Big|_0^\pi = \pi + 1 - \cos(\pi x).$$

Следовательно, для первого повторного интеграла в (1.6) справедливы соотношения

$$\int_0^1 dx \int_0^\pi f(x, y) dy = \int_0^1 (\pi + 1 - \cos(\pi x)) dx = \left( (\pi + 1)x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right) \Big|_0^1 = \pi + 1.$$

Вычислим второй повторный интеграл. Положим

$$h(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 (1 + x \sin(xy)) dx = \left( x - x \frac{\cos(xy)}{y} + \frac{\sin(xy)}{y^2} \right) \Big|_0^1 =$$

$$1 + \frac{\sin y}{y^2} - \frac{\cos y}{y} = 1 - \left( \frac{\sin y}{y} \right)'$$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} h(y) dy = \left( y - \frac{\sin y}{y} \right) \Big|_0^{\pi} = \pi + 1.$$

Оба повторных интеграла совпадают и, в силу последней теоремы равны двойному интегралу.

### 1.3. Квадрируемые плоские фигуры.

Определенный интеграл от функции одного аргумента по отрезку вещественной числовой оси и двойной интеграл по прямоугольнику допускали несложное описание процесса измельчения тех элементарных областей: отрезков или прямоугольников – которые фигурировали в предельном переходе, определяющем соответствующие интегралы. Кроме того, из геометрических соображений было очевидно, что считать длиной или площадью исходной фигуры и фигур измельчения.

Для двойных интегралов по более общим плоским замкнутым областям, нежели прямоугольники, возникают две проблемы. Первая состоит в том, чтобы описать достаточно широкий класс замкнутых областей вещественной координатной плоскости, для которых можно определить понятие площади. Вторая проблема: выбор процесса измельчения исходной области на элементарные фигуры, также имеющие площадь. В нашем курсе мы ограничимся рассмотрением двойных интегралов, вычисляемых по следующим замкнутым областям  $P$  вещественной координатной плоскости  $R^2$ , которые мы будем называть *квадрируемыми*.

В простейшем случае границей  $\Gamma$  квадрируемой области  $P$  служит замкнутый выпуклый многоугольник евклидовой геометрии с конечным числом сторон. Из школьного курса геометрии известно, как вычислять площади многоугольников и как разбивать их на более мелкие многоугольники.

В более общем случае граница  $\Gamma$  представляет собой замкнутый криволинейный многоугольник без самопересечений. Сторонами криволинейного многоугольника являются кривые. Каждая кривая либо график непрерывной функции  $y = f(x)$ , либо непрерывной функции  $x = g(y)$ . Функции  $f(x)$ ,  $g(y)$  могут быть заданы параметрически или быть неявными функциями, определяемыми из уравнений вида  $F(x, y) = 0$ .

**Определение.** *Замкнутая область  $P$  называется квадрируемой, если ее можно разбить на конечное число частей, площади которых определяются (и вычисляются) с помощью определенных интегралов от функций одного аргумента.*

Приведем несколько характерных примеров криволинейных многоугольников.

**Пример 2.** Криволинейная трапеция, которую мы рассматривали в параграфе 1.2 Раздела 3 (см. Рис. 5.1.2). Площадь криволинейной трапеции равна определенному интегралу

$$\int_a^b f(x) dx$$

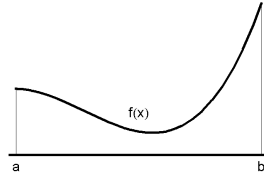


Рис. 5.1.2

от функции  $f(x)$ , чей график определял верхнее основание криволинейной трапеции.

**Пример 3.** Плоская фигура, изображенная на рисунке Рис. 5.1.3. Ее можно назвать “разностью” криволинейных трапеций, поскольку площадь фигуры вычисляется как разность площадей криволинейных трапеций, верхние основания которых суть графики двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$ .

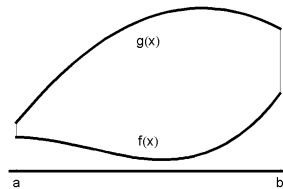


Рис. 5.1.3

Площадь фигуры равна интегралу

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

**Пример 4.** Плоская фигура класса, описанного в Примере 3, но расположенная вертикально (Рис. 5.1.4). Рассматриваемая фигура ограничена горизонтальными линиями  $y = a$ ,  $y = b$  и графиками непрерывных функций  $x = g(y)$  слева и  $x = f(y)$  справа.

Площадь рассматриваемой фигуры вычисляется с помощью интеграла

$$\int_a^b (f(y) - g(y)) dy$$

**Пример 5.** Плоская фигура, ограниченная кривой, называемой “кардиоидой” (Рис. 5.1.5).



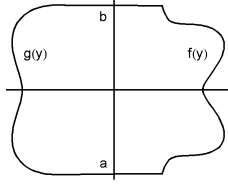


Рис. 5.1.4

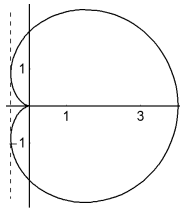


Рис. 5.1.5

Кардиоиды может быть задана неявно уравнением  $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ , которое имеет четыре корня относительно  $y$ . Графики функций

$$y = \sqrt{2 + 2x - x^2 + 2\sqrt{1 + 2x}}, \quad y = -\sqrt{2 + 2x - x^2 + 2\sqrt{1 + 2x}},$$

задают части верхней и нижней границы кардиоиды от точки пересечения вертикальной пунктирной линии  $x = -0.5$  с кардиоидой до точки  $x = 4$ . Графики функций

$$y = \sqrt{2 + 2x - x^2 - 2\sqrt{1 + 2x}}, \quad y = -\sqrt{2 + 2x - x^2 - 2\sqrt{1 + 2x}},$$

задают части границ кардиоиды, расположенные слева от начала координат и образующие заострение в начале координат. Таким образом, кардиоиды распадается на три фигуры типа рассмотренных в Примерах 3, 4. Одна часть расположена справа от оси ординат, а две других, верхняя и нижняя, расположены слева от оси ординат.

#### 1.4. Двойные интегралы по плоским квадрируемым областям.

Пусть в квадрируемой области  $P$  определена функция  $f(x, y)$ . Разобьем область  $P$  на конечное число квадрируемых областей  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , площади которых равны  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Назовем *диаметром* элементарной области  $P_i$  длину наибольшего отрезка, которым можно соединить точки границы области  $P_i$ . Полученное разбиение области  $P$  обозначим через  $T$ . *Диаметром  $\lambda$  разбиения  $T$*  назовем наибольший из диаметров элементарных областей разбиения.

В каждой элементарной области  $P_i$  выберем произвольно точку  $(\xi_i, \eta_i)$  и составим конечную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i, \quad (1.10)$$

которая называется *интегральной суммой* функции  $f(x, y)$  в области  $P$ .

**Определение.** Если для каждой последовательности  $\{T_n\}$  разбиений, диаметры  $\lambda_n$  которых стремятся к нулю, существует один и тот же конечный предел интегральных сумм (1.10), то этот предел называется *двойным интегралом* функции  $f(x, y)$  по области  $P$  и обозначается через

$$\int \int_{(P)} f(x, y) dS. \quad (1.11)$$

Функция, имеющая интеграл по области  $P$ , называется *интегрируемой* по области  $P$ .

Очевидно, что *необходимым условием* интегрируемости функции по области  $P$  является ее *ограниченность* в  $P$ . В самом деле, для неограниченной функции  $f(x, y)$  по любому числу  $N$  можно найти бесконечное число точек, в которых значения функции больше, чем  $N$ . Поэтому при любом разбиении области  $P$  подходящим выбором точек  $(\xi_i, \eta_i)$  области  $P$  можно сделать интегральную сумму (1.10) сколь угодно большой.

Рассмотрим непрерывную в замкнутой области  $P$  функцию  $f(x, y)$ . Обозначим через  $m$  наименьшее, а через  $M$  наибольшее значения непрерывной функции  $f(x, y)$  в  $P$ :

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

и для данного разбиения  $T$  области  $P$  на элементарные области обозначим через  $m_i, M_i$  наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x, y)$  в  $i$ -ой элементарной области. Как и в случае функции одного аргумента введем для данного разбиения  $T$  *нижнюю  $s$  и верхнюю  $S$  суммы Дарбу*:

$$s_T = \sum_{i=1}^n m_i S_i, \quad S_T = \sum_{i=1}^n M_i S_i. \quad (1.12)$$

Для любой интегральной суммы  $\sigma$ , отвечающей разбиению  $T$ , выполняются неравенства

$$s_T \leq \sigma \leq S_T. \quad (1.13)$$

Из (1.13), как и в случае двойного интеграла по прямоугольнику, вытекает следующее утверждение.

**Теорема об интегрируемости непрерывной функции.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой квадратуемой области  $P$ , тогда функция  $f(x, y)$  интегрируема по области  $P$ .

Доказательство теоремы опирается на равномерную непрерывность непрерывных функций двух аргументов в замкнутых ограниченных областях, что

составляет утверждение Теоремы Кантора, сформулированной в параграфе 1.5 настоящего раздела.

Аналогично доказательству Теоремы о сведении двойного интеграла к повторному для прямоугольных замкнутых областей, может быть установлено следующее утверждение для произвольных плоских квадрируемых областей.

**Общая теорема о сведении двойного интеграла к повторному.** Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывна в замкнутой, ограниченной, связной, квадрируемой области  $P$ . Пусть  $P$  обладает тем свойством, что любая вертикальная прямая  $x = \alpha$  пересекает границу области  $P$  самое большее в двух точках, ординаты которых удовлетворяют неравенству:  $y_1(\alpha) < y_2(\alpha)$ . Тогда справедлива следующая формула сведения двойного интеграла от функции  $f(x, y)$  по области  $P$  к повторному интегралу:

$$\int \int_{(P)} f(x, y) dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (1.14)$$

где  $a, b$  наименьшая и наибольшая абсциссы точек области  $P$ .

Если для области  $P$  любая горизонтальная прямая  $y = \alpha$  пересекает границу области  $P$  самое большее в двух точках, абсциссы которых удовлетворяют неравенству:  $x_1(\alpha) < x_2(\alpha)$ , то справедлива следующая формула сведения двойного интеграла от функции  $f(x, y)$  по области  $P$  к повторному интегралу:

$$\int \int_{(P)} f(x, y) dS = \int_a^b dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx, \quad (1.15)$$

где  $a, b$  наименьшая и наибольшая ординаты точек области  $P$ .

Теоремы о сведении двойного интеграла к повторному объясняют используемый часто вместо (1.3) символ

$$\int \int_{(P)} f(x, y) dx dy$$

для обозначения двойного интеграла.

**Пример 6.** Пусть область  $P$  ограничена двумя параболой  $y = x^2$  и  $y^2 = x$  (см. Рис. 5.1.6).

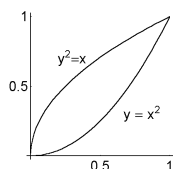


Рис. 5.1.6

Требуется вычислить двойной интеграл от функции  $f(x, y) = xy$  по области  $P$ . Воспользуемся формулой (1.14) и вычислим сначала интеграл

$$g(x) = \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy = x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy = \frac{1}{2} xy^2 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} = \frac{x}{2}(x - x^4).$$

Затем вычисляем повторный интеграл

$$\int_0^1 g(x) \, dx = \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

В области  $P$  двойной интеграл можно свести к повторному также и с помощью формулы (1.15). Для этого вычисляем интеграл

$$h(y) = \int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy \, dx = \frac{y^2}{2}(1 - y^3),$$

а затем интеграл от функции  $h(y)$ :

$$\int_0^1 h(y) \, dy = \left( \frac{y^3}{6} - \frac{y^6}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Результаты совпадают.

### 1.5. Криволинейные координаты на вещественной координатной плоскости.

Взаимно однозначное соответствие между упорядоченными парами  $(\alpha, \beta)$  вещественных чисел и точками евклидовой плоскости, снабженной двумя взаимно перпендикулярными вещественными числовыми осями, было описано в параграфе 3.10 Раздела 1. А именно, число  $\alpha$  отмечалось точкой  $P_\alpha$  на оси абсцисс, число  $\beta$  – точкой  $Q_\beta$  на оси ординат. Затем через точку  $P_\alpha$  проводилась прямая, параллельная оси ординат, а через точку  $Q_\beta$  – прямая, параллельная оси абсцисс. Точка пересечения  $A(\alpha, \beta)$  этих прямых служила отметкой упорядоченной пары  $(\alpha, \beta)$ .

Обратно, любая точка  $A$  вещественной координатной плоскости порождала упорядоченную пару вещественных чисел  $(\alpha, \beta)$ , которые являлись координатами проекций точки  $A$  на оси абсцисс и ординат. Числа  $(\alpha, \beta)$  называются *декартовыми прямоугольными координатами* точки  $A$ .

Описанное соответствие порождает на вещественной координатной плоскости  $R^2$  сетку из двух семейств взаимно перпендикулярных прямых. Прямые одного семейства параллельны оси ординат. На каждой такой прямой координата  $x$  принимает постоянное значение. Прямые другого семейства параллельны оси абсцисс. На таких прямых координата  $y$  принимает постоянные значения. В некоторых вопросах анализа бывает удобным сопоставлять точке  $A(x, y)$  координатной плоскости упорядоченную пару  $(\alpha, \beta)$  вещественных чисел другими способами. Их проще всего описать в терминах криволинейных координат.

Одной из самых известных криволинейных систем координат на плоскости является *полярная*. В ней точке  $A(x, y)$ , где  $(x, y)$  декартовы координаты, сопоставляется пара чисел  $(\rho, \phi)$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  есть радиус окружности с центром в начале координат, проходящей через точку  $A$ , а  $\phi$  равно углу в радианах, который составляет луч  $OA$  с осью абсцисс. Угол отсчитывается в направлении против часовой стрелки, а его значение ограничивается полуинтервалом  $[-\pi, \pi)$ . Нетрудно проверить, что  $\phi = \operatorname{arctg}(y/x)$  при  $x > 0$  или  $\phi = \operatorname{arctg}(y/x) + \pi$  при  $x < 0$ .

Обратно, любой паре чисел  $(\rho, \phi)$ , удовлетворяющей неравенствам  $0 \leq \rho$ ,  $-\pi \leq \phi < \pi$ , ставится в соответствие точка  $A$  координатной плоскости с декартовыми координатами

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi. \quad (1.16)$$

При описанном способе соответствия на плоскости  $R^2$  порождается система концентрических окружностей, на которых постоянна координата  $\rho$  и лучей, исходящих из начала координат, на которых постоянна координата  $\phi$  (Рис. 5.1.7).

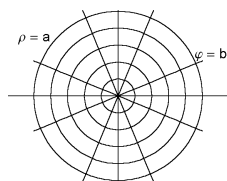


Рис. 5.1.7

Формулы (1.16) устанавливают взаимно однозначное соответствие между декартовыми и полярными координатами точки плоскости за исключением точки  $O$  начала координат, которой не соответствует определенного значения полярного угла  $\phi$ . Точка начала координат называется *особой точкой* полярной системы координат.

В общем случае пусть формулы

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v) \quad (1.17)$$

определяют взаимно однозначное соответствие между упорядоченными парами  $(x, y)$  и  $(u, v)$  вещественных чисел, т.е. декартовыми  $x, y$  и криволинейными  $u, v$  координатами на плоскости. Формулы (1.17) при фиксированном  $v$  определяют кривую на плоскости, называемую *координатной линией  $u$* . Соответственно, при фиксированном  $u$  получается *координатная линия  $v$* . Векторы

$$\tau_u = \left( \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u} \right), \quad \tau_v = \left( \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v} \right) \quad (1.18)$$

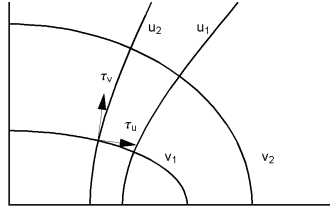


Рис. 5.1.8

касательны к координатным линиям  $u$  или  $v$  (Рис. 5.1.8).

Их точкой приложения считается точка, чьи криволинейные координаты равны  $(u, v)$ .

### 1.6. Двойные интегралы в полярных координатах.

В приложениях нередко встречаются двойные интегралы по областям, границы которых имеют простое аналитическое выражение в полярных координатах. Окружность радиуса  $a$  описывается уравнением  $\rho = a$ . Кольцо ограничено двумя окружностями. Границы кругового сектора задаются уравнениями  $\rho = a$ ,  $\phi = \phi_1$ ,  $\phi = \phi_2$ . Кардиоида, рассмотренная в Примере 5, задается в полярных координатах уравнением

$$\rho = 2(1 + \cos \phi), \quad (1.19)$$

и т.д. Поэтому представляет интерес получение формулы сведения двойных интегралов по описанным областям к повторным интегралам по переменным  $\rho$  и  $\phi$ .

**Теорема о сведении двойного интеграла к повторному в полярных координатах.** Пусть функция  $f(\rho, \phi)$  непрерывна в замкнутой, ограниченной, связной, квадрируемой области  $P$ . Обозначим через  $\Omega$  множество лучей  $\phi = \alpha$ , пересекающихся с  $P$ .

Пусть область  $P$  обладает тем свойством, что любой луч из  $\Omega$  имеет с границей области самое большее две общие точки с полярными координатами  $(\rho_1(\alpha), \alpha)$  и  $(\rho_2(\alpha), \alpha)$ , причем  $\rho_1(\alpha) \leq \rho_2(\alpha)$ .

При сделанных предположениях справедлива следующая формула сведения двойного интеграла от функции  $f(\rho, \phi)$  по области  $P$  к повторному:

$$\int \int_{(P)} f(\rho, \phi) dS = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\rho_1(\phi)}^{\rho_2(\phi)} \rho f(\rho, \phi) d\rho, \quad (1.20)$$

где  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  наименьшее и наибольшее значение полярных углов для точек области  $P$ .

Соотношение (1.20) служит основанием для обозначения

$$\int \int_{(P)} f(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi$$

двойного интеграла в полярных координатах, так как она содержит указание, как свести двойной интеграл к повторному для областей, границы которых задаются в полярных координатах.

**Пример 7.** Найдём площадь области  $P$ , ограниченной кардиоидой (см. Пример 5). Для этого нужно вычислить двойной интеграл

$$\int \int_{(P)} \rho d\rho d\phi.$$

По формулам (1.20), (1.19) рассматриваемый двойной интеграл сводится к повторному

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2(1+\cos\phi)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 \Big|_0^{2(1+\cos\phi)} d\phi = \\ & 2 \int_0^{2\pi} (1+\cos\phi)^2 d\phi = 2 \int_0^{2\pi} d\phi + 4 \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi + 2 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi = 6\pi. \end{aligned}$$

### 1.7. Замена переменных в двойном интеграле.

Системы координат на вещественной координатной плоскости  $R^2$  не участвуют непосредственно в определении двойного интеграла по произвольной плоской квадрируемой области  $P$ . Их роль в составлении интегральных сумм (1.10) может состоять в том, что координатные линии систем координат могут использоваться при выборе разбиения области  $P$ .

В криволинейных координатах естественно возникает разбиение на криволинейные прямоугольники, границами которых являются отрезки координатных линий, отвечающие приращениям криволинейных координат  $du, dv$  (см. Рис. 4.2.8). Вычисление площади такого криволинейного прямоугольника сопровождается довольно громоздкими вычислениями. Мы приведём лишь приближённое, но прозрачное с геометрической точки зрения выражение для площади криволинейного прямоугольника.

Для этого воспользуемся векторным произведением касательных к координатным линиям векторов  $\tau_u du$  и  $\tau_v dv$  (1.18), приближённо равных длинам отрезков координатных линий. Таким образом мы заменяем отрезки кривых на отрезки прямых – касательных векторов, модуль векторного произведения которых, как известно из курса аналитической геометрии, равен площади построенного на них параллелограмма. Следовательно, площадь криволинейного прямоугольника приближённо равна

$$|[\tau_u du, \tau_v dv]| = \left| \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial u} \right| du dv. \quad (1.25)$$

Выражение под знаком модуля в правой части формулы (1.18) называется *якобианом* преобразования (1.17). Якобиан обозначается через

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

и для него справедливо выражение через функции  $g(u, v)$ ,  $h(u, v)$ , задающие соответствие (1.17):

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \det \begin{vmatrix} g_u(u, v) & g_v(u, v) \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{vmatrix} \quad (1.26)$$

где в правой части стоит определитель матрицы Якоби  $J$ :

$$J = \begin{vmatrix} g_u(u, v) & g_v(u, v) \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{vmatrix}$$

Формула (1.25) позволяет сформулировать следующую теорему, которую мы приведем без доказательства.

**Теорема о замене переменных в двойном интеграле.** Пусть преобразование (1.17) является взаимно однозначным и отображает область  $P'$  на плоскости переменных  $u, v$  на область интегрирования  $P$ . Пусть функции  $g(u, v)$ ,  $h(u, v)$  имеют в  $P'$  непрерывные частные производные, а якобиан (1.19) отличен в  $P'$  от нуля. Тогда при условии существования двойного интеграла (1.11) справедлива следующая формула замены переменных

$$\int \int_{(P)} f(x, y) dS = \int \int_{(P')} f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dS. \quad (1.27)$$

Формула (1.27) называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

**Пример 8.** Вычислим площадь криволинейного прямоугольника, заключенного между гиперболами  $1/x$ ,  $2/x$  и прямыми  $10x$ ,  $15x$  (см. Рис. 5.1.9).

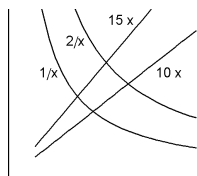


Рис. 5.1.9

Для этого воспользуемся криволинейной системой координат  $(u, v)$  в первом квадранте координатной плоскости, в которой линии постоянной координаты  $u$  суть гиперболы  $y = u/x$ ,  $u > 0$ , а линии постоянной координаты  $v$  суть прямые линии  $y = vx$ ,  $v > 0$ . Таким образом, мы включаем рассматриваемые гиперболы в семейство всех гипербол первого квадранта, а рассматриваемые прямые – в семейство всех прямых первого квадранта, проходящих через начало координат.



Переход от декартовых координат  $x, y$  к криволинейным координатам  $u, v$  задается формулами

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x},$$

Решая последнюю систему уравнений относительно неизвестных  $x, y$ , приходим к формулам

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}. \quad (1.28)$$

На плоскости переменных  $u, v$  криволинейный прямоугольник соответствует обычному прямолинейному прямоугольнику  $P'$ , так как координата  $u$  пробегает отрезок  $[10, 15]$ , а координата  $v$  – отрезок  $[1, 2]$ .

Вычислим якобиан преобразования (1.28):

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \det \begin{vmatrix} 1/(2\sqrt{uv}) & -\sqrt{u}/(2v\sqrt{v}) \\ \sqrt{v}/(2\sqrt{u}) & \sqrt{u}/(2\sqrt{v}) \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

В соответствии с формулой (1.20) площадь криволинейного прямоугольника выражается двойным интегралом

$$\int \int_{(P')} \frac{1}{2v} du dv = \int_1^2 du \int_{10}^{15} \frac{1}{2v} dv = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

## 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейные интегралы суть обобщения определенных интегралов от функций одного аргумента по отрезку вещественной числовой оси. Обобщение основано на рассмотрении отрезков кривых на плоскости и в пространстве вместо отрезков числовой оси и функций двух или трех аргументов вместо функций одного аргумента. Существуют два вида криволинейных интегралов.

### 2.1. Криволинейные интегралы первого рода.

Рассмотрим на вещественной координатной плоскости  $R^2$  кривую  $\gamma$ , заданную параметрическими уравнениями

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.1)$$

Относительно функций  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ , задающих кривую  $\gamma$ , сделаем следующие предположения.

1) *Функции  $\phi(t)$  и  $\psi(t)$  дифференцируемы, а их производные  $\phi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ .*

2) *Двум различным значениям параметра  $t$  отвечают две различные точки кривой  $\gamma$ .*

3) *Кривая  $\gamma$  не имеет особых точек, т.е. точек в которых одновременно обе производные  $\phi'(t)$  и  $\psi'(t)$  обращаются в нуль.*

4) *Производная  $\phi'(t)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  конечное число нулей.*

Отсутствие особых точек означает, что всюду на отрезке  $[a, b]$  выполняется неравенство  $\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0$ . Как следует из формулы (3.10) параграфа 3.2 Раздела 3, кривая (2.1) при выполнении условий 1), 2) имеет длину

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt. \quad (2.2)$$

Если отрезок  $[a, b]$  разбить точками  $\alpha_0 = a, \alpha_1, \dots, \alpha_m = b$  на меньшие отрезки, то кривая  $\gamma$  также окажется разбитой на дуги точками  $A_k, k = 0, \dots, m$ , где  $A_k$  имеет координаты  $(\phi(\alpha_k), \psi(\alpha_k))$ . Дуги  $A_k A_{k+1}$  имеют длину, выражаемую интегралами (2.2) с нижними пределами  $\alpha_k$  и верхними пределами  $\alpha_{k+1}$ . Обозначим длину дуги  $A_k A_{k+1}$  через  $l_k$ .

Пусть на кривой  $\gamma$  задана непрерывная функция  $f(M)$ , где  $M$  произвольная точка кривой  $\gamma$ .

**Определение.** Функция  $f(M)$  непрерывна в точке  $A \in \gamma$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta(\varepsilon, A)$ , что для всех точек  $M \in \gamma$  таких, что  $\rho(A, M) < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(A) - f(M)| < \varepsilon$ .

В приведенном определении  $\rho(A, M)$  – обычное евклидово расстояние между точками  $A$  и  $M$ , т.е. длина отрезка прямой, концами которого служат точки  $A$  и  $M$ .

Выберем на дугах разбиения  $A_k A_{k+1}$  кривой  $\gamma$  произвольно по одной точке  $M_k(\xi_k, \eta_k)$  и составим интегральную сумму

$$\sigma_T = \sum_{k=0}^{m-1} f(M_k) l_k, \quad (2.3)$$

где  $T$  рассматриваемое разбиение кривой  $\gamma$  точками  $A_k$ . Назовем *диаметром*  $\lambda_T$  разбиения  $T$  наибольшую длину дуги разбиения.

**Определение.** Если для любой последовательности  $\{T_n\}$  разбиений кривой  $\gamma$  такой, что последовательность их диаметров разбиения стремится к нулю, существует один и тот же для всех разбиений предел интегральных сумм (2.3), то этот предел называется *криволинейным интегралом первого типа от функции  $f(M)$  по кривой  $\gamma$*  и обозначается через

$$\int_{\gamma} f(M) dl. \quad (2.4)$$

Типичной задачей, где требуется вычислить криволинейный интеграл первого рода, является задача о вычислении массы неоднородной изогнутой струны. Пусть струна сделана из материала, плотность которого  $\rho(M)$  изменяется от точки к точке. При условии, что закон изгиба струны описывается формулами (2.1), масса струны задается интегралом (2.4), в котором  $f(M) = \rho(M)$ .

Криволинейные интегралы вычисляются либо приближенно с помощью интегральных сумм (2.3), либо сведением к определенным интегралам по отрезку  $[a, b]$ .

**Теорема о сведении криволинейного интеграла к определенному интегралу.** Пусть функция  $f(M)$  непрерывна на кривой  $\gamma$ , тогда в предположении справедливости условий 1) – 3), наложенных на кривую  $\gamma$  криволинейный интеграл (2.4) существует, и справедливо следующее соотношение

$$\int_{\gamma} f(M) dl = \int_a^b f(\phi(t), \psi(t)) \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt, \quad (2.5)$$

где для краткости через  $f(\phi(t), \psi(t))$  обозначена функция  $f(M(\phi(t), \psi(t)))$ .

В теории и приложениях встречаются случаи, когда нужно вычислить криволинейный интеграл от функции  $f(x, y)$ , заданной на всей вещественной координатной плоскости или в некоторой области  $P$ , содержащей кривую  $\gamma$ . В этом случае под функцией  $f(M)$  нужно понимать ограничение функции двух

аргументов  $f(x, y)$  на кривую  $\gamma$ . Сам криволинейный интеграл первого типа (2.4) часто обозначают поэтому через

$$\int_{\gamma} f(x, y) dl. \quad (2.10)$$

**Пример 1.** Вычислить интеграл (2.10) по четверти астрои́ды

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1,$$

расположенной в первом квадранте, от функции  $f(x, y) = x$ .

Прибегнем к параметрическому заданию рассматриваемой кривой в виде

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad t \in [0, \pi/2]. \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что справедлива формула  $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9 \sin^2 t \cos^2 t$ , поэтому в силу (2.5) следует вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/2} 3 \cos^4 t \sin t dt.$$

Он равен  $3/5$ .

Совершенно аналогичные определения и результаты справедливы относительно криволинейных интегралов первого рода вдоль пространственных кривых. Пусть пространственная кривая  $\gamma$  задается формулами

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.12)$$

Относительно функций  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\chi(t)$  сделаем те же предположения 1) – 3), что и в плоском случае. Тогда криволинейный интеграл первого рода от функции  $f(M)$ , заданной на кривой  $\gamma$ , определяется как предел интегральных сумм (2.3) для последовательности  $T_n$  разбиений кривой  $\gamma$ , диаметры которых стремятся к нулю. Криволинейный интеграл первого рода и в пространственном случае обозначается так же, как в формуле (2.4).

Для непрерывной функции  $f(x)$  справедлив аналог Теоремы 3.1 и формула сведения к определенному интегралу по отрезку  $[a, b]$ :

$$\int_{\gamma} f(M) dl = \int_a^b f(\phi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt. \quad (2.13)$$

## 2.2. Криволинейные интегралы второго рода.

Как и в предыдущем параграфе, начнем рассмотрение с плоского случая. Вновь рассмотрим кривую  $\gamma$ , задаваемую параметрически уравнениями

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.1)$$

Относительно свойств функций  $\phi(t)$  и  $\psi(t)$  будем считать справедливыми предположения 1) – 4) предыдущего параграфа.

Пусть на кривой  $\gamma$  заданы две функции  $P(M)$  и  $Q(M)$ . Рассмотрим вместо интегральной суммы (2.3) следующие интегральные суммы, построенные по разбиению  $T$  и функциям  $P(M)$ ,  $Q(M)$ :

$$\sigma_T(P) = \sum_{k=0}^{m-1} P(M_k) (x_{k+1} - x_k), \quad \sigma_T(Q) = \sum_{k=0}^{m-1} Q(M_k) (y_{k+1} - y_k), \quad (2.14)$$

где  $x_k$  и  $y_k$  – абсцисса и ордината точки  $A_k$  разбиения  $T$ .

**Определение.** Если для каждой последовательности  $\{T_n\}$  разбиений кривой  $\gamma$  точками  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, m(n)$  такой, что диаметры  $\lambda_n$  разбиений  $T_n$  стремятся к нулю, существует предел последовательности  $\{\sigma_n(P)\}$  (последовательности  $\{\sigma_n(Q)\}$ ), не зависящий от последовательности  $\{T_n\}$ , то этот предел называется криволинейным интегралом второго рода от функции  $P(M)$  (функции  $Q(M)$ ) и обозначается через

$$\int_{\gamma} P(M) dx, \quad \text{или} \quad \int_{\gamma} Q(M) dy. \quad (2.15)$$

Сумму

$$\int_{\gamma} P(M) dx + \int_{\gamma} Q(M) dy$$

называют криволинейным интегралом второго рода общего вида.

Аналогично Теореме о сведении криволинейного интеграла первого рода к определенному интегралу устанавливается справедливость следующего утверждения.

**Теорема о сведении криволинейного интеграла второго рода к определенному.** Пусть функции  $P(M)$  и  $Q(M)$  непрерывны на кривой  $\gamma$ , тогда при выполнении условий 1) – 3), наложенных на кривую  $\gamma$ , криволинейные интегралы (2.15) существуют, и справедливы следующие соотношения

$$\int_{\gamma} P(M) dx = \int_a^b P(\phi(t), \psi(t)) \phi'(t) dt, \quad (2.16)$$

$$\int_{\gamma} Q(M) dy = \int_a^b Q(\phi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (2.17)$$

Аналогичные формулы справедливы для криволинейных интегралов второго рода, взятых по пространственным кривым (2.12)

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [a, b]. \quad (2.12)$$

Вдоль кривой (2.12) считаются заданными три функции  $P(M)$ ,  $Q(M)$  и  $R(M)$ . Соответственно возможны криволинейные интегралы

$$\int_{\gamma} P(M) dx, \quad \int_{\gamma} Q(M) dy, \quad \text{или} \quad \int_{\gamma} R(M) dz \quad (2.18)$$

и криволинейный интеграл

$$\int_{\gamma} P(M) dx + \int_{\gamma} Q(M) dy + \int_{\gamma} R(M) dz \quad (2.19)$$

второго рода общего вида.

Прикладной смысл интегралов второго рода можно понять из следующего примера. Пусть материальная точка  $m$  движется вдоль пространственной кривой  $\gamma$  (2.19) под действием силы  $\vec{F}(M)$  с координатами  $(P(M), Q(M), R(M))$ . Работа силы по перемещению точки вдоль кривой дается выражением

$$\int_a^b \left( \vec{F}(M), \vec{\tau}(M) \right) dl, \quad (2.20)$$

где  $\vec{\tau}(M) = (\cos a, \cos b, \cos c)$  касательный вектор к кривой  $\gamma$  в точке  $M$ . Его координаты суть углы, которые касательный вектор образует с координатными осями. Интеграл (2.20) есть криволинейный интеграл первого рода. Расписывая подинтегральное скалярное произведение в виде суммы произведений координат сомножителей, т.е. в виде  $P(M) \cos a + Q(M) \cos b + R(M) \cos c$  и учитывая, что  $dl \cos a = dx$  и т.д., заключаем, что интеграл (2.20) можно записать как криволинейный интеграл второго рода (2.19) общего вида.

**Пример 2.** Рассмотрим точечный электрический заряд  $q$  в поле неподвижного единичного заряда, расположенного в начале координат. Тогда заряд  $q$  испытывает действие силы

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( -q \frac{\partial V}{\partial x}, -q \frac{\partial V}{\partial y}, -q \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (2.21)$$

где  $V(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  потенциал статического электрического поля, создаваемого неподвижным единичным зарядом. С учетом последнего выражения можно вычислить координаты силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = \left( \frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{qy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{qz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \quad (2.22)$$

Рассмотрим дуги  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  двух эллипсов, расположенных в плоскости  $z = 0$  (Рис. 5.2.1).

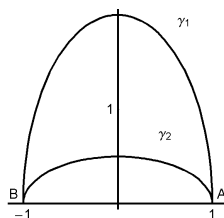


Рис. 5.2.1

Дуги соединяют точки  $A(1, 0, 0)$  и  $B(-1, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned}\gamma_1 : \quad x &= \cos t, & y &= 2 \sin t, & z &= 0, & t &\in [0, \pi] \\ \gamma_2 : \quad x &= t, & y &= \frac{1}{2} \sin t, & z &= 0, & t &\in [0, \pi]\end{aligned}$$

Вычислим криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой  $\gamma_1$ . Для этого воспользуемся формулами (2.16) и (2.17):

$$\int_{\gamma_1} P(M) dx + Q(M) dy = \int_0^\pi (-P(\cos t, 2 \sin t) \sin t + 2 Q(\cos t, 2 \sin t) \cos t) dt. \quad (2.23)$$

Воспользовавшись формулой (2.22) для компонент силы  $\vec{F}$ , получаем, что подынтегральное выражение в (2.23) имеет вид

$$-P(\cos t, 2 \sin t) \sin t + 2 Q(\cos t, 2 \sin t) \cos t = \frac{3 \cos t \sin t q}{(\cos^2 t + 4 \sin^2 t)^{3/2}}. \quad (2.24)$$

Функция в правой части формулы (2.24) нечетна относительно точки  $\pi/2$ , поэтому интеграл (2.23) равен 0. Аналогичные вычисления показывают, что подынтегральное выражение в криволинейном интеграле вдоль кривой  $\gamma_2$  равно

$$-P(\cos t, \frac{1}{2} \sin t) \sin t + \frac{1}{2} Q(\cos t, \frac{1}{2} \sin t) \cos t = \frac{6 \sqrt{2} \sin 2t q}{(5 + 3 \cos 2t)^{3/2}},$$

и также нечетно относительно середины отрезка интегрирования. Следовательно, рассматриваемый криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой  $\gamma_2$  также равен 0.

### 2.3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути.

В примере 2, рассмотренном в предыдущем параграфе, криволинейный интеграл второго рода не зависел от выбора кривых  $\gamma_1$  или  $\gamma_2$ , вдоль которых он вычислялся. На самом деле, он не зависит от выбора любого пути, т.е. кривой, соединяющей точки  $A(1, 0, 0)$  и  $B(-1, 0, 0)$ . Более того, он не зависит от выбора кривых, начинающихся и заканчивающихся в одних и тех же точках пространства. Это вытекает из следующей теоремы.

**Первая теорема о необходимом и достаточном условии независимости криволинейного интеграла второго рода от пути.** *Для того, чтобы криволинейный интеграл второго рода (2.16) не зависел от выбора пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  было дифференциалом некоторой функции  $F(x, y)$  двух аргументов:*

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = dF(x, y). \quad (2.29)$$

В трехмерном пространстве аналогичная теорема формулируется следующим образом.

**Вторая теорема о необходимом и достаточном условии независимости криволинейного интеграла второго рода от пути.** Для того, чтобы криволинейный интеграл второго рода (2.19) не зависел от выбора пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы  $P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  было дифференциалом некоторой функции  $F(x, y, z)$  трех аргументов:

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = dF(x, y, z). \quad (2.30)$$

#### 2.4. Формула Грина.

Существует формула, связывающая двойной интеграл по области и криволинейный интеграл по границе области, к рассмотрению которой мы приступаем. Она называется формулой Грина.

Рассмотрим двумерную область  $K$ , которая является разностью криволинейных трапеций (Рис. 5.2.3).

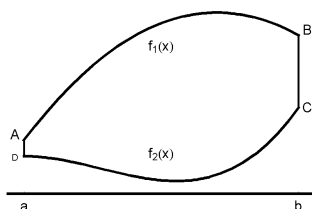


Рис. 5.2.3

Граница  $L$  области  $K$  состоит из четырех частей. Кривая  $AB$  является графиком функции  $f_1(x)$ , кривая  $DC$  - графиком функции  $f_2(x)$ , а  $DA$  и  $BC$  - вертикальные отрезки.

Пусть в области  $K$  задана функция  $P(x, y)$  непрерывная вместе со своей частной производной  $\partial P/\partial y$ . Вычислим двойной интеграл

$$\int \int_{(K)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (2.31)$$

Для этого сведем его к повторному при помощи формулы (2.4):

$$\int \int_{(K)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Внутренний интеграл от производной легко вычисляется:

$$\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x)),$$



что позволяет выразить двойной интеграл (2.31) через криволинейные интегралы второго рода:

$$\int_{(K)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b P(x, f_1(x)) dx - \int_a^b P(x, f_2(x)) dx = \int_{(AB)} P(x, y) dx + \int_{(CD)} P(x, y) dx. \quad (2.32)$$

Добавляя в правую часть формулы (2.32) равные нулю интегралы  $\int_{(DA)} P(x, y) dx$  и  $\int_{(BC)} P(x, y) dx$ , приходим к формуле

$$\int_{(K)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{(L)} P(x, y) dx,$$

где контур  $L$  проходится по часовой стрелке, т.е. в направлении, противоположном ориентации осей  $OX$ ,  $OY$ . Если контур  $L$  проходить в направлении, согласованном с ориентацией осей, т.е. против часовой стрелке, то получим формулу

$$\int_{(K)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{(L)} P(x, y) dx, \quad (2.33)$$

являющуюся частным случаем формулы Грина.

Формула (2.33) справедлива и для областей более общего вида, чем только что рассмотренная. Например, вертикальные отрезки, один или оба, могут вырождаться в точку. Подходит и область, которая конечным числом вертикальных отрезков разбивается на области вида области  $K$ . Мы не будем более подробно на этом останавливаться.

Аналогично, в предположении, что функция  $Q(x, y)$  непрерывна вместе со своей частной производной  $\partial Q / \partial x$  в области  $M$ , являющейся криволинейной трапецией вида, показанного на Рис. 5.2.4, устанавливается и формула

$$\int \int_{(M)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{(L)} Q(x, y) dy, \quad (2.34)$$

где  $L$  - граница области  $M$ , которая в криволинейном интеграле проходится против часовой стрелки.

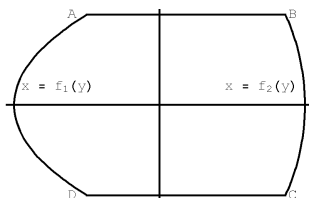


Рис. 5.2.4

Если же области, по которым вычисляются двойные интегралы в формулах (2.33), (2.34) одновременно удовлетворяют условиям применимости этих формул, то вычитая формулу (2.34) из (2.33), получаем, что

$$\int_{(L)} P dx + Q dy = \int \int_{(K)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.35)$$

Формула (2.35) называется общей *формулой Грина*.

Выбирая функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad (2.36)$$

из формулы Грина (2.36) можно получить различные выражения площади плоской области через криволинейные интегралы вдоль ее границы.

**Пример 3.** В параграфе 4 главы 3 Раздела 3, посвященном геометрическим приложениям определенного интеграла, в качестве примера была вычислена площадь фигуры (Рис. 3.3.5), расположенной над полукубической параболой  $3y^2 = x^2$  внутри окружности  $x^2 + y^2 = 4$ . Вычислим вновь площадь этой фигуры с помощью формулы (2.35), положив  $P(x, y) = -y$ ,  $Q(x, y) = x$ . Площадь фигуры выразится интегралом

$$\frac{1}{2} \int_{(L)} -y dx + x dy, \quad (2.37)$$

который вычисляется против часовой стрелки по контуру  $L$ , который удобно представлять разбитым на две части. Нижняя  $L_1$  есть график функции  $x^{2/3}/3^{1/3}$ , а верхняя  $L_2$  - график функции  $\sqrt{4-x^2}$ .

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_{(L_1)} -y dx + x dy &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left( -\frac{x^{2/3}}{3^{1/3}} + x \frac{2}{3} \frac{x^{-1/3}}{3^{1/3}} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^{2/3}}{3^{1/3}} dx = -\frac{2\sqrt{3}}{5}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \int_{(L_2)} -y dx + x dy &= \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} \left( -\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Складывая, формулы (2.38) и (2.39) и умножая результат на  $1/2$ , приходим к ответу, совпадающему с ранее полученным.

### 3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

К необходимости определить понятие интеграла от функции по поверхности приводят как прикладные задачи (вычисление площади и массы тонкой пространственной оболочки, подсчет массы жидкости, протекающей в единицу времени через пространственную поверхность и т.п.), так и некоторые теоретические проблемы математического анализа. Подобно криволинейным интегралам, существуют поверхностные интегралы первого и второго рода.

**3.1. Поверхности в трехмерном пространстве.** Будем обозначать поверхности символом  $\Phi$ . Простейшими поверхностями в трехмерном пространстве  $R^3$  являются графики непрерывных функций двух аргументов. График функции  $f(x, y)$  состоит из точек  $M \in R^3$ , имеющих координаты  $(x, y, f(x, y))$ . Можно также сказать, что графики функций задаются уравнениями вида

$$z = f(x, y). \quad (3.1)$$

Задание поверхности  $\Phi$  уравнением (3.1) называется *явным заданием*.

**Пример 1.** Уравнение  $z = \sin(\pi \sin x + y)$  задает поверхность, часть которой изображена на Рис. 5.3.1.

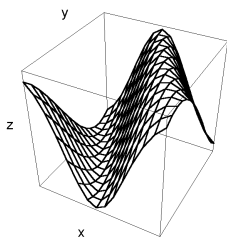


Рис. 5.3.1

Если функция  $f(x, y)$  задана в некоторой замкнутой области  $D(f)$ , то образы граничных точек  $D(f)$  образуют *край* поверхности  $\Phi$ . Край поверхности обозначается через  $\partial\Phi$ .

Следует отметить, что в теории поверхностей координата  $z$  не имеет преимуществ перед координатами  $x$  и  $y$ . В этой связи можно напомнить, что

при вычислении объемов тел вращения в параграфе 3.4 Раздела 3 рассматривались тела, ограниченные поверхностями, полученными вращениями графиков функций  $y = f(x)$  вокруг оси  $OX$ . Например, если вращать параболу  $y = \sqrt{x}$  вокруг оси  $OX$ , то получится поверхность, уравнение которой имеет вид  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ . Таким образом, наряду с уравнением (3.1) поверхности могут задаваться явными уравнениями вида

$$x = g(y, z) \quad \text{или} \quad y = h(x, z). \quad (3.2)$$

Явному заданию поверхности противопоставляется  *неявное задание*  уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (3.3)$$

Неявное задание имеет более общий характер. С помощью (3.3) можно определить поверхности, которые нельзя или громоздко задавать явно. Простейшим примером неявно задаваемой поверхности служит сфера радиуса  $r$  (уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ).

Если в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  соотношение (3.3) выполняется, и хотя бы одна из непрерывных частных производных  $F_x(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F_y(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F_z(x_0, y_0, z_0)$  функции  $F(x, y, z)$  отлична от нуля, то, в силу Теоремы о существовании и единственности неявной функции параграфа 2.6 Раздела 4, в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  поверхность задается одним из уравнений (3.1), (3.2).

Исключениями являются  *особые точки*  поверхности, в которых одновременно все частные производные обращаются в 0. Примером поверхности с особыми точками является конус  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ , для которого начало координат является особой точкой.

Еще более общим способом задания поверхности является  *параметрическое задание*

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (3.4)$$

где точка  $(u, v)$  пространства  $R_{u,v}^2$  параметров пробегает по некоторой области  $M \subset R_{u,v}^2$ .

**Предположение 1.**  *Впредь будем предполагать, что уравнения (3.4) задают взаимно однозначное соответствие между точками области  $M$  и точками поверхности  $\Phi$ .*

Это означает, что точке  $A(x, y, z)$  поверхности  $\Phi$  отвечает единственная пара  $(u, v)$  параметров из области  $M$ , а сама поверхность  $\Phi$  не имеет  *кратных точек, или точек самопересечения.*

**Предположение 2.**  *Функции  $\phi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  и  $\chi(u, v)$  в соотношениях (3.4) предполагаются имеющими непрерывные первые частные производные в области  $M$ .*

При изучении свойств параметрически заданных поверхностей важную роль играет  *матрица Якоби*  системы (3.4):

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \phi_u(u, v) & \psi_u(u, v) & \chi_u(u, v) \\ \phi_v(u, v) & \psi_v(u, v) & \chi_v(u, v) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

**Теорема о локальном представлении поверхности в виде графика.**

Пусть выполнены следующие условия

1) функции  $\phi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$ ,  $\chi(u, v)$  определены и непрерывны в некотором параллелепипеде  $P = [u_0 - \delta_1, u_0 + \delta_1; v_0 - \delta_2, v_0 + \delta_2]$  пространства параметров и удовлетворяют в нем Предположениям 1 и 2;

2) хотя бы один из трех миноров второго порядка матрицы Якоби (3.5)

$$D_1 = \begin{vmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \chi_u & \phi_u \\ \chi_v & \phi_v \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

отличен от 0 в точке  $(u_0, v_0)$ .

Если минор  $D_1$  отличен от нуля, то в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ , где  $x_0 = \phi(u_0, v_0)$ ,  $y_0 = \psi(u_0, v_0)$ ,  $z_0 = \chi(u_0, v_0)$ , поверхность (3.4) может быть задана явным уравнением  $z = f(x, y)$ .

Если минор  $D_2$  отличен от нуля, то в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  поверхность (3.4) может быть задана явным уравнением  $y = g(x, z)$ .

Если минор  $D_3$  отличен от нуля, то в некоторой окрестности точки  $x_0, y_0, z_0$  поверхность (3.4) может быть задана явным уравнением  $x = h(y, z)$ .

Функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$ ,  $h(x, y)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные:

$$\begin{cases} f_x = -\frac{D_3}{D_1} \\ f_y = -\frac{D_2}{D_1} \end{cases} \quad \begin{cases} g_x = -\frac{D_3}{D_2} \\ g_z = -\frac{D_1}{D_2} \end{cases} \quad \begin{cases} h_y = -\frac{D_2}{D_3} \\ h_z = -\frac{D_1}{D_3} \end{cases} \quad (3.7)$$

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение, которое мы сейчас сформулируем. Рассмотрим систему уравнений

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0, \quad (3.8)$$

являющуюся обобщением первой пары уравнений (3.4).

**Теорема о системе неявных функций.** Пусть точка  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$  удовлетворяет системе уравнений (3.8), и в некоторой окрестности этой точки существуют частные производные функций  $F(x, y, u, v)$ ,  $G(x, y, u, v)$ , причем производные по аргументам  $u, v$  непрерывны.

Пусть определитель

$$D = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

отличен от нуля в точке  $(x_0, y_0, u_0, v_0)$ . Тогда существует окрестность точки  $(u_0, v_0)$  такая, что система уравнений (3.8) однозначно разрешается относительно неизвестных  $u, v$  и задает их как функции аргументов  $x, y$

$$u = \alpha(x, y), \quad v = \beta(x, y). \quad (3.10)$$

Частные производные функций  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$  существуют в рассматриваемой окрестности и удовлетворяют в ней системам уравнений

$$\begin{cases} F_u \alpha_x + F_v \beta_x + F_x = 0, \\ G_u \alpha_x + G_v \beta_x + G_x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_u \alpha_y + F_v \beta_y + F_y = 0, \\ G_u \alpha_y + G_v \beta_y + G_y = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

### 3.2. Односторонние и двусторонние поверхности.

В предыдущем параграфе было установлено, что при выполнении условия  $D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 > 0$  все поверхности локально могут быть заданы явными уравнениями (3.1), (3.2). Следовательно, в неособых точках поверхностей определены и существуют касательные плоскости, а, значит, в каждой неособой точке существует и единичный вектор  $\vec{n}$  нормали к касательной плоскости, который мы будем также называть *вектором нормали к поверхности*. Вектор нормали определен с точностью до знака.

Рассмотрим произвольную точку  $M_0$  на поверхности и зафиксируем единичную нормаль  $\vec{n}$  к поверхности в этой точке. Пусть  $l$  некоторая замкнутая кривая на поверхности, начинающаяся и заканчивающаяся в точке  $M_0$ . Будем выбирать в каждой точке  $M$  кривой  $l$  то направление единичного нормального вектора, в которое непрерывно переходит выбранное в точке  $M_0$  направление нормали. После того, как точка  $M$  пробежит по замкнутой кривой  $l$  и вернется в точку  $M_0$ , могут представиться два и только два случая: либо совокупность нормалей в точках  $M$  при ее совпадении с  $M_0$  закончится снова вектором  $\vec{n}$ , либо мы вернемся в точку  $M_0$  с противоположным направлением нормали  $-\vec{n}$ .

Тот факт, что такая возможность может реализоваться, доказывает следующий пример.

**Пример 2.** Рассмотрим поверхность в  $R^3$ , параметрически заданную системой уравнений

$$\begin{aligned} x = \cos \phi + t \cos \phi \cos \frac{\phi}{2}, \quad y = \sin \phi + \frac{t}{2} \left( \sin \frac{\phi}{2} + \sin \frac{3\phi}{2} \right), \quad z = t \sin \frac{\phi}{2}, \\ 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -1 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Она изображена на Рис. 5.3.2 и называется *листом Мебиуса*.

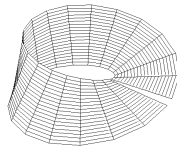


Рис. 5.3.2

Рисунок выявляет геометрический смысл параметров  $\phi$  – полярного угла на плоскости  $XOY$  и  $t$  – координаты на отрезке прямой, перпендикулярном окружности единичного радиуса на плоскости  $XOY$ . Лист изображен незамкнутым, чтобы читатель смог проследить, как внешний контур поверхности переходит во внутренний, а, значит, нормаль меняет знак при обходе по окружности.

Если для какой-то точки  $M_0$  и для какой-то замкнутой кривой  $l$ , лежащей на поверхности, нормаль меняет знак при обходе  $l$ , то и для любой другой точки  $M_1$  можно построить кривую  $M_1 M_0 l M_1$ , при обходе которой нормаль

в точке  $M_1$  меняет знак на противоположный. Такие поверхности называются *односторонними*. Лист Мебиуса – односторонняя поверхность. В дальнейшем мы сосредоточимся на теории двусторонних поверхностей.

*Двусторонние поверхности* характеризуются тем свойством, что, какова бы ни была точка  $M_0$  поверхности и каков бы ни был замкнутый контур с началом и концом в точке  $M_0$ , не пересекающий края поверхности, после его обхода единичная нормаль к поверхности, непрерывно изменяя свое направление, возвращается к своему исходному значению.

Двусторонними являются поверхности, задаваемые явными формулами (3.1), (3.2), при условии, что функции  $f(x, y)$ ,  $g(y, z)$  или  $h(x, z)$  непрерывно дифференцируемы. Рассмотрим, например, поверхности (3.1). Согласно формуле (1.25) раздела 4 уравнение касательной плоскости к поверхности (3.1) в точке  $M(a, b, f(a, b))$  имеет вид

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b).$$

Следовательно, нормальный вектор в точке  $M(a, b, f(a, b))$  может быть задан в виде

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x(a, b)^2 + f_y(a, b)^2}} (-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1). \quad (3.19)$$

Он образует острый угол с осью  $OZ$  и его длина  $|\vec{n}| = 1$ .

Поскольку частные производные функции  $f(x, y)$  непрерывны, то, при движении по любому замкнутому пути на поверхности непрерывность выбора нормали автоматически обеспечивается выбором векторов (3.19). Следовательно, после обхода по любому замкнутому пути на поверхности нормаль возвращается к своему исходному значению (3.19).

Для двусторонних поверхностей корректно определено понятие *стороны поверхности*. А именно, совокупность пар  $(M, \vec{n}(M))$ , первым элементом которых является точка поверхности, а вторым – не обращающийся в нуль нормальный вектор к поверхности, при условии, что  $\vec{n}$  есть непрерывная функция точки  $M$ , называется *стороной поверхности*. Выбор нормальных векторов (3.19) фиксирует верхнюю сторону графика функции.

Для параметрически заданных поверхностей выбор нормального вектора

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}(D_3, D_2, D_1) \quad (3.20)$$

задает *положительную сторону* поверхности. Противоположно направленный вектор фиксирует *отрицательную сторону*.

**3.3. Площадь поверхности.** К определению площади поверхности можно было бы применить тот общий подход, который использовался ранее в этой книге для определения иррациональных чисел, интеграла, площади плоской фигуры или длины кривой. Исследуемый объект, в данном случае поверхность  $\Phi$  в двумерном пространстве, заключается между двумя последовательностями “модельных” поверхностей, площади которых  $s_n$  и  $S_n$  легко вычисляются. В первой последовательности площадь каждой поверхности меньше,

чем площадь поверхности с тем же номером в другой последовательности:  $s_n < S_n$ . Последовательность  $s_n$  монотонно возрастает, а  $S_n$  - монотонно убывает. Если последовательность  $S_n - s_n$  бесконечно малая, то рассматриваемые последовательности имеют общий предел. При условии, что этот предел не зависит от выбора конкретных последовательностей модельных поверхностей, его естественно назвать площадью рассматриваемой поверхности.

Однако такой подход сопряжен с необходимостью проведения сложных вычислений. Поэтому мы определим площадь поверхности, отправляясь от последовательностей площадей плоских фигур, лежащих в касательных плоскостях к поверхности.

Рассмотрим простейший в теоретическом отношении случай графика функции  $f(x, y)$ . Пусть область определения  $D(f)$  функции  $f(x, y)$  есть ограниченная квадратуемая область координатной плоскости  $R^2$  независимых переменных  $x, y$ . Разобьем область  $D(f)$  на конечное число областей  $\omega_i$  площади  $s_i$ . Обозначим это разбиение через  $T$ . Обозначим также через  $\lambda_i$  длину наибольшей хорды области  $\omega_i$ , где хорда - это отрезок, соединяющий две произвольные точки границы области  $\omega_i$ . Обозначим через  $\lambda$  диаметр разбиения  $T$ , т.е. наибольшее из чисел  $\lambda_i$ .

Выберем в каждой области  $\omega_i$  разбиения  $T$  произвольную точку  $A_i(a_i, b_i)$  и проведем касательную плоскость  $P_i$  к графику функции  $f(x, y)$  в точке  $B_i = (a_i, b_i, f(a_i, b_i))$ . Рассмотрим совокупность  $\Omega_i$  точек графика функции  $f(x, y)$ , являющихся образами точек  $M \in \omega_i$ . Спроектируем  $\Omega_i$  на касательную плоскость  $P_i$  вдоль нормали  $\vec{n}_i$  к графику функции в точке  $B_i$ , составляющей с осью  $OZ$  острый угол. В касательной плоскости возникает область  $\Delta_i$ . Ее площадь  $S_i$  принимается равной площади  $\Omega_i$ . Численно  $S_i$  равна площади  $s_i$ , деленной на косинус угла  $\theta_i$  между нормалью  $\vec{n}_i$  и координатной осью  $OZ$ :

$$S_i = \frac{s_i}{\cos \theta_i} = s_i \sqrt{f_x(a_i, b_i)^2 + f_y(a_i, b_i)^2 + 1}. \quad (3.21)$$

Составим сумму

$$\sigma = \sum_i S_i \quad (3.22)$$

всех полученных описанным выше способом площадей.

**Определение.** Рассмотрим произвольную последовательность разбиений  $T_j$  области  $D(f)$  такую, что диаметры  $\lambda_j$  разбиений  $T_j$  стремятся к нулю. Обозначим через  $\sigma_j$  сумму (3.22), вычисленную по разбиению  $T_j$ . Если для каждой такой последовательности существует предел  $S$  при  $j \rightarrow \infty$  сумм  $\sigma_j$  и этот предел один и тот же для всех последовательностей  $T_j$ , то этот предел  $S$  называется площадью графика функции  $f(x, y)$ .

Из формулы (3.21) следует, что сумма  $\sigma$  (3.22) является римановой интегральной суммой двойного интеграла

$$S = \int \int_{D(f)} \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dS, \quad (3.23)$$

который, по определению, принимается равным площади графика функции  $f(x, y)$ .



**Пример 3.** Вычислим площадь части верхней единичной полусферы, высекаемой из нее цилиндром  $x^2 + y^2 = x$  (поверхность Вивиани). Некоторое представление об этой поверхности дает Рис. 5.3.3, на котором изображена линия пересечения вертикального цилиндра с верхней полусферой.

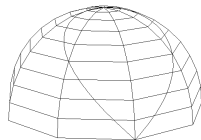


Рис. 5.3.3

В примере речь идет о площади графика функции  $f(x) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , заданной в плоской области с границей  $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ . Подынтегральное выражение в интеграле (3.23) равно

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Сводя двойной интеграл к повторному, получаем для площади поверхности Вивиани выражение

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dy.$$

Внутренний интеграл вычисляется следующим образом

$$\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dy = \arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} \right) \Big|_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} = 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right)$$

Для вычисления внешнего интеграла по переменной  $x$  сначала применяем метод интегрирования по частям, а затем метод подстановки:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) dx &= 2x \arcsin \left( \sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \\ &= 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} - 2 + 2 \operatorname{arctg} 1 = \pi - 2. \end{aligned}$$

Следовательно, площадь поверхности Вивиани равна  $\pi - 2$ .

Пусть поверхность задается параметрически уравнениями

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (3.4)$$

где параметры  $u, v$  пробегает по некоторой квадратируемой области  $\mathbf{M}$  в пространстве параметров  $R_{u,v}^2$ . Предположим, что минор

$$D_1 = \begin{vmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{vmatrix}, \quad (3.24)$$

отличен от нуля всюду в области  $\mathbf{M}$ . Тогда из Теоремы 4.1 следует, что рассматриваемая поверхность может быть задана явным уравнением (3.1), причем для частных производных от функции  $f(x, y)$  справедливы выражения (3.7). Воспользуемся этими соотношениями с тем, чтобы получить выражения для площади графика функции  $f(x, y)$  с помощью интеграла по области  $\mathbf{M}$ .

Для этого вычислим подинтегральное выражение в интеграле (3.22). В силу формул (3.7) справедливы соотношения

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{D_3^2}{D_1^2} + \frac{D_2^2}{D_1^2}} = \frac{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}}{|D_1|}. \quad (3.25)$$

Воспользовавшись формулами (3.6), раскрывая миноры и вычисляя сумму их квадратов, после упрощений получаем следующий результат

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{|D_1|}, \quad (3.26)$$

где

$$E = \phi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2, \quad G = \phi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2, \quad F = \phi_u \phi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v \quad (3.27)$$

так называемые *гауссовы коэффициенты* заданной параметрически поверхности.

Подставляя (3.26) в интеграл (3.22) и воспользовавшись формулой (2.27) замены переменных в двойном интеграле, приходим к результату

$$\begin{aligned} S &= \int \int_{D(f)} \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dS = \\ &= \int \int_{D(f)} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{|D_1|} dS = \int \int_{\mathbf{M}} \sqrt{EG - F^2} dS_{u,v}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где символ  $S_{u,v}$  указывает, что интегральные суммы (2.10) двойного интеграла вычисляются на плоскости  $R_{u,v}^2$ . Совершенно аналогичные вычисления приводят к выражению

$$\int \int_{\mathbf{M}} \sqrt{EG - F^2} dS_{u,v}$$

для площади поверхности при условии отличия от нуля миноров  $D_2$  или  $D_3$  в формуле (3.6). Таким образом, Теорема о локальном представлении поверхности и формула (3.28) обосновывают следующее утверждение.

**Теорема о площади поверхности.** Пусть поверхность задается параметрически уравнениями (3.4), где функции  $\phi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  и  $\chi(u, v)$  обладают непрерывными частными производными в каждой точке ограниченной, квадратуемой области  $\mathbf{M}$ . Пусть в  $\mathbf{M}$  отличен от нуля хотя бы один из миноров (3.6), тогда площадь поверхности задается интегралом

$$\int \int_{\mathbf{M}} \sqrt{EG - F^2} dS_{u,v}, \quad (3.29)$$

в котором функции  $E(u, v)$ ,  $G(u, v)$ ,  $F(u, v)$  определяются соотношениями (3.27).

**Пример 4.** Вычислим площадь поверхности, которая задается неявно уравнением  $F(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2xy = 0$ . Из уравнения следует, что поверхность расположена только над и под первым и третьим квадрантом координатной плоскости  $XOY$ . Граница проекции поверхности на координатную плоскость  $XOY$  определяется системой уравнений

$$F_z(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2)z = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

которая после исключения  $z$  приводит к уравнению границы

$$(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0.$$

Последняя представляет собой “восьмерку”, что ясно видно из рисунка Рис. 5.3.4.

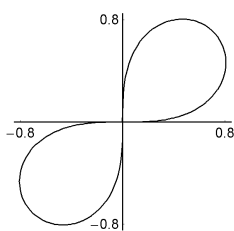


Рис. 5.3.4

Саму поверхность можно представлять как две “сросшиеся” раковины морского моллюска, представленные на Рис. 5.3.5.

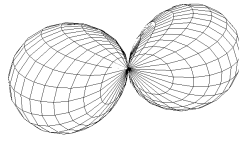


Рис. 5.3.5

Рассматриваемую поверхность удобно задать в сферических координатах  $(r, u, v)$ , где  $r$  – расстояние от точки до начала координат,  $u$  – угол, отсчитываемый от положительного направления оси  $OZ$  и изменяющийся в пределах  $0 \leq u \leq \pi$ , а  $v$  – обычный полярный угол в плоскости  $XOY$ :

$$x = r \sin u \cos v, \quad y = r \sin u \sin v, \quad z = r \cos u. \quad (3.30)$$

Если подставить (3.30) в приведенное выше уравнение поверхности, то получим уравнение рассматриваемой поверхности в сферических координатах

$$r = \sin u \sqrt{\sin 2v}. \quad (3.31)$$

Поскольку для вычисления площади поверхности требуются формулы, задающие декартовы координаты как функции параметров, то из (3.31) легко получить, что

$$\begin{aligned} x \equiv \phi(u, v) &= \sin^2 u \sqrt{\sin 2v} \cos v, & y \equiv \psi(u, v) &= \sin^2 u \sqrt{\sin 2v} \sin v, \\ z \equiv \chi(u, v) &= \sin u \sqrt{\sin 2v} \cos u. \end{aligned}$$

Вычисляя функции  $E(u, v)$ ,  $G(u, v)$ ,  $F(u, v)$  по формулам (3.27), получаем в результате, что

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \frac{1}{16} \left( \frac{7 + \cos 4u - 8 \cos 2v}{\sin 2u} + 2 \cos 4v \sin 2u \right), & G(u, v) &= \sin 2u, \\ F(u, v) &= \frac{1}{2} \cos 2u \sin 2v, & EG - F^2 &= \sin^4 v. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Для получения площади рассматриваемой поверхности достаточно вычислить ее четверть, проектирующуюся в правую часть восьмерки на Рис. 4.4.4 и расположенную над плоскостью  $XOY$ :

$$\int_0^{\pi/2} du \int_0^{\pi/2} \sin^2 v dv = \frac{\pi^2}{8}.$$

Следовательно, площадь всей поверхности равна  $\pi^2/2$ .

**3.4. Поверхностные интегралы первого рода.** Рассмотрим поверхность  $\Phi$ , явно заданную уравнением (3.1), где функция  $f(x, y)$  определена в квадратируемой области  $D(f)$  координатной плоскости  $R^2$  и имеет в ней непрерывные частные производные первого порядка. Пусть в точках поверхности  $\Phi$  определена функция  $H(M)$ .

Рассмотрим разбиение  $T$  области  $D(f)$  на плоские фигуры  $\omega_i$ , имеющие конечные площади  $s_i$ . Разбиение  $T$  порождает разбиение поверхности  $\Phi$  с помощью образов  $\Omega_i$  фигур разбиения  $\omega_i$ : точки  $M \in \Omega_i$  имеют вид  $M = f(x, y)$  для  $(x, y) \in \omega_i$ . Будем обозначать последнее разбиение также через  $T$ . Обозначим через  $\Delta_i$  проекции областей  $\Omega_i$  на касательные плоскости к поверхности  $\Phi$ , проведенные в фиксированных точках  $B_i \in \Omega_i$ , а через  $S_i$  площади  $\Delta_i$ . Наибольшую из хорд областей  $\Omega_i$  назовем диаметром разбиения  $T$ .

Выберем в каждой области  $\Omega_i$  какую-то точку  $A_i$  и рассмотрим сумму

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n(T)} H(A_i) S_i, \quad (3.33)$$

которую назовем *интегральной суммой первого рода* функции  $H(M)$ .

**Определение.** Рассмотрим последовательность  $T_j$  разбиений поверхности  $\Phi$  такую, что последовательность их диаметров стремится к нулю.

Если последовательность  $\sigma_j$  интегральных сумм (3.33), порожденных разбиениями  $T_j$ , стремится к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , и этот предел не зависит от выбора последовательности разбиений, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода* функции  $H(M)$  по поверхности  $\Phi$  и обозначается символом:

$$\int \int_{\Phi} H(M) dS. \quad (3.34)$$

Сопоставляя данное определение поверхностного интеграла первого рода и определение площади графика функции, данное в параграфе 4.3, приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

**Первая теорема о существовании поверхностного интеграла первого рода.** Пусть функция  $H^*(x, y) = H(M(x, y, f(x, y)))$  непрерывна в замкнутой квадратируемой области  $D(f)$ , тогда поверхностный интеграл первого рода от функции  $H(M)$  по поверхности  $\Phi$  существует и равен двойному интегралу

$$\int \int_{D(f)} \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} H^*(x, y) dS. \quad (3.35)$$

Для поверхностей  $\Phi$ , заданных параметрически уравнениями (3.4), аналогом сформулированной теоремы будет следующее утверждение.

**Вторая теорема о существовании поверхностного интеграла первого рода.** Пусть функция  $H(M)$  определена в точках параметрически заданной соотношениями (3.4) поверхности  $\Phi$  и пусть сложная функция  $H^*(u, v) =$

$H(M(\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)))$  непрерывна в области  $\mathbf{M} \subset R_{u,v}^2$ . Пусть функции  $\phi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  и  $\chi(u, v)$  удовлетворяют условиям Теоремы 4.3, тогда поверхностный интеграл от функции  $H(M)$  по поверхности  $\Phi$  существует и равен двойному интегралу

$$\int \int_{\mathbf{M}} H^*(u, v) \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F^2(u, v)} d S_{u,v}, \quad (3.36)$$

где функции  $E(u, v)$ ,  $G(u, v)$ ,  $F(u, v)$  заданы соотношениями (3.27).

**Пример 5.** Вычислим потенциал электрического поля, создаваемый равномерно заряженной сферой  $\Phi$  радиуса  $a$  в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $b$  от центра сферы. Пусть заряд сферы равен  $Q$ , тогда поверхностная плотность заряда  $\sigma$  равна  $Q/(4\pi a^2)$ . Искомый потенциал электрического поля задается поверхностным интегралом первого рода

$$\int \int_{\Phi} \frac{\sigma}{R} d S, \quad (3.37)$$

где  $R$  – расстояние от точки  $A$  до переменной точки  $M$ , пробегающей по сфере.

Выберем сферическую систему координат (3.30) с началом в центре сферы и осью  $OZ$ , проходящей через точку  $A$ . Тогда  $R(u, v) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos u}$ , а для вычисления интеграла (3.38) воспользуемся формулой (3.36). Вычислим для этого гауссовы коэффициенты  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$  для сферы. Подставляя в (3.30)  $r = a$  и пользуясь формулами (3.27) для гауссовых коэффициентов, получаем следующие соотношения:

$$E(u, v) = a^2, \quad G(u, v) = a^2 \sin^2 u, \quad F(u, v) = 0.$$

Следовательно, поверхностный интеграл (3.38) примет вид

$$\int \int_{\Phi} \frac{\sigma a^2 \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos u}} d u d v. \quad (3.38)$$

Интеграл (3.38) на плоскости  $R_{u,v}^2$  вычисляется по прямоугольнику  $P$ , задаваемому неравенствами  $0 \leq u \leq \pi$ ,  $0 \leq v < 2\pi$ . Поэтому интеграл (3.38) сводится к повторному интегралу

$$\int_0^{2\pi} d u \int_0^{\pi} \frac{\sigma a^2 \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos u}} d v. \quad (3.39)$$

Внутренний интеграл в (3.39) легко вычисляется. Он равен

$$\int_0^{\pi} \frac{\sigma a^2 \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos u}} d v = \frac{a\sigma}{b} (a + b - |a - b|),$$

а повторный интеграл (3.39), следовательно равен

$$\int_0^{2\pi} d u \int_0^{\pi} \frac{\sigma a^2 \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos u}} d v = \frac{2\pi \sigma a}{b} (a + b - |a - b|). \quad (3.40)$$

При  $b > a$ , т.е. в случае, когда точка  $A$  находится вне сферы, правая часть равенства (3.40) принимает вид

$$\int_0^{2\pi} du \int_0^\pi \frac{\sigma a^2 \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos u}} dv = \frac{4\pi a^2 \sigma}{b} = \frac{Q}{b}.$$

Таким образом, заряженная сфера создает такое же электрическое поле вне себя, как точечный заряд величины  $Q$ , помещенный в начале координат. При  $b < a$ , т.е. внутри сферы, потенциал равен

$$\int_0^{2\pi} du \int_0^\pi \frac{\sigma a^2 \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos u}} dv = 4\pi \sigma a.$$

Следовательно, потенциал внутри сферы постоянен, и электрическое поле равно нулю.

**3.5. Поверхностные интегралы второго рода.** Одной из прикладных задач, приводящих к понятию поверхностного интеграла второго рода, является задача о подсчете расхода жидкости, протекающей через пространственную поверхность. Расход определяется как количество жидкости, протекающей через поверхность в единицу времени.

В простейшем случае течения жидкости вдоль тонкой трубы, направленной вдоль оси  $OX$ , когда скорость жидкости может считаться одинаковой во всех точках поперечного сечения  $\Sigma$  и направленной также вдоль оси  $OX$ , для расхода жидкости справедливо выражение:

$$q = \rho v S, \quad (3.41)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения,  $\rho$  – плотность жидкости. Если же сечение  $\Sigma$  наклонено под углом  $\alpha$  к оси трубы, для вычисления расхода следует учитывать только перпендикулярную к сечению составляющую скорости  $v_n = v \sin \alpha$ . Обозначая через  $S_\alpha$  площадь наклонного сечения, приходим к формуле

$$q = \rho v S_\alpha \sin \alpha = \rho v S. \quad (3.42)$$

Если под  $v$  в последней формуле понимать *величину* скорости, т.е. скаляр, то можно придти к выводу о необходимости рассматривать проекцию  $S_\alpha \sin \alpha = S$  площади наклонного сечения на плоскость  $YOZ$ , в которой лежит поперечное сечение.

Поверхностный интеграл второго рода позволяет решить общую задачу вычисления расхода пространственного течения жидкости через произвольную пространственную поверхность, когда скорость жидкости является функцией пространственной точки.

Для того, чтобы ввести понятие поверхностного интеграла второго рода, вновь, как и в предыдущем параграфе, рассмотрим поверхность  $\Phi$ , являющуюся графиком непрерывно дифференцируемой функции  $f(x, y)$ , определенной в квадратуемой области  $D(f) \subset R^2$ . Рассмотрим также непрерывную функцию  $H(M)$  точек  $M$  поверхности  $\Phi$ .

Пусть  $T$  разбиение области  $D(f)$  на плоские квадратуемые фигуры  $\omega_i$ , площади которых обозначим через  $s_i$ . Образы  $\Omega_i$  фигур  $\omega_i$  образуют разбиение поверхности  $\Phi$ . Последнее разбиение также обозначим через  $T$ . Наибольшую из хорд областей  $\Omega_i$  назовем диаметром разбиения.

Выберем в каждой области  $\Omega_i$  какую-то точку  $A_i$  и составим интегральную сумму

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n(T)} H(A_i) s_i, \quad (3.43)$$

где  $n(T)$  число фигур  $\omega_i$  разбиения  $T$ , которая называется *интегральной суммой второго рода* для функции  $H(M)$ . Обращаем внимание, что в интегральную сумму (3.33) входят проекции  $s_i$  площадей  $S_i$  областей  $\Omega_i$  на координатную плоскость  $XOY$ , в то время как в интегральную сумму первого рода (3.33) входили площади  $S_i$ .

**Определение.** Рассмотрим последовательность  $T_j$  разбиений поверхности  $\Phi$  такую, что последовательность их диаметров стремится к нулю.

Если последовательность  $\sigma_j$  интегральных сумм второго рода (3.44), порожденных разбиениями  $T_j$ , стремится к пределу при  $j \rightarrow \infty$ , и этот предел не зависит от выбора последовательности разбиений, то этот предел называется *поверхностным интегралом второго рода функции  $H(M)$  по верхней стороне поверхности  $\Phi$*  и обозначается символом:

$$\int \int_{\Phi} H(M) dx dy. \quad (3.45)$$

Произведение  $dx dy$  в (3.45) имеет тот символический смысл, что при составлении интегральных сумм второго рода используются площади проекций разбиения поверхности  $\Phi$ .

Поверхностный интеграл второго рода *по нижней стороне* поверхности  $\Phi$  определяется аналогично. Выбор стороны поверхности производится с помощью выбора нормальных векторов к поверхности. Сторона поверхности называется *верхней*, если нормали во всех ее точках образуют острый угол с осью  $OZ$ . Соответственно с этим определением площадь  $S_i$  элемента разбиения  $\Omega_i$  и площадь  $s_i$  его проекции  $\omega_i$  на плоскость  $XOY$  имеют один и тот же (положительный знак). Если же выбирается нижняя сторона поверхности, то при составлении интегральной суммы (3.44) площади  $s_i$  проекций берутся со знаком минус. Поэтому для поверхностей – графиков функций поверхностные интегралы второго рода по верхней и нижней сторонам поверхности отличаются знаком!

Повторяя проведенные выше рассуждения для поверхностей, заданных явными формулами (3.2), приходим к поверхностным интегралам

$$\int \int_{\Phi} H(M) dy dz \quad \text{и} \quad \int \int_{\Phi} H(M) dz dx. \quad (3.46)$$

В приложениях возникают поверхностные интегралы, которые состояются из сумм интегралов (3.45), (3.46):

$$\int \int_{\Phi} P(M) dy dz + \int \int_{\Phi} Q(M) dz dx + \int \int_{\Phi} R(M) dx dy,$$



где  $P(M)$ ,  $Q(M)$ ,  $R(M)$  функции, определенные в точках поверхности  $\Phi$ . Рассматриваемые интегралы обозначаются также через

$$\int \int_{\Phi} P(M) dy dz + Q(M) dz dx + R(M) dx dy. \quad (3.47)$$

Из определения интегральных сумм второго рода (3.43) вытекает следующее утверждение.

**Теорема о сведении поверхностного интеграла второго рода к двойному.** Поверхностный интеграл второго рода (3.45) по верхней стороне поверхности от функции  $H(M)$ , заданной в точках  $M$  поверхности  $\Phi$ , совпадает с двойным интегралом от функции

$$H^*(x, y) = H(M(x, y, f(x, y)))$$

по области  $D(f)$ :

$$\int \int_{\Phi} H(M) dx dy = \int \int_{D(f)} H^*(x, y) dS. \quad (3.48)$$

Существование одного из интегралов (3.48) влечет существование другого.

Пусть двусторонняя поверхность  $\Phi$  задана параметрически соотношениями

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (3.4)$$

в которых точка  $(u, v)$  пробегает по некоторой квадратуемой области  $\mathbf{M} \subset R_{u,v}^2$ . Пусть в точках этой поверхности задана непрерывная функция  $H(M)$ . Определим для этого случая поверхностный интеграл второго рода от функции  $H(M)$  вдоль положительной стороны поверхности  $\Phi$ , определяемой нормальным вектором (3.20). Определяемый интеграл является обобщением интеграла (3.45).

Заметим, что заданная параметрически поверхность может проектироваться на кривую на координатной плоскости  $XOY$ . Такие поверхности называются *цилиндрическими поверхностями с образующими параллельными оси  $OZ$* . Например, прямой круговой цилиндр, задаваемый уравнениями

$$x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = v,$$

проектируется на единичную окружность плоскости  $XOY$  с центром в начале координат. Положим по определению, что поверхностный интеграл второго рода

$$\int \int_{\Phi} H(M) dx dy = 0$$

для цилиндрических поверхностей с образующими параллельными оси  $OZ$ .

В общем случае рассмотрим разбиение  $T$  области  $\mathbf{M}$  на конечное число плоских квадратуемых фигур  $\omega_i$ , площади которых обозначим через  $s_i$ . Образы  $\Omega_i$

фигур  $\omega_i$  при отображении (3.4) составляют разбиение поверхности  $\Phi$ , которое мы также будем обозначать через  $T$ . По Теореме 4.3 площадь  $S_i$  элемента  $\Omega_i$  равна интегралу

$$S_i = \int \int_{\omega_i} \sqrt{EG - F^2} dS_{u,v}. \quad (3.49)$$

Выберем в каждом элементе  $\Omega_i$  произвольную точку  $A_i$ . Обозначим через  $n_i$  нормальный вектор (3.20) в точке  $A_i$ . Площадь  $S_i$  элемента  $\Omega_i$  умножим на косинус угла  $\gamma_i$ , который составляет вектор  $n_i$  с осью  $OZ$ .

Составим интегральную сумму

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n(T)} H(A_i) S_i \cos \gamma_i \quad (3.50)$$

и, рассматривая последовательности все более мелких разбиений, придем к понятию поверхностного интеграла (3.45) второго рода от функции  $H(M)$  по выбранной стороне поверхности  $\Phi$  в полной аналогии со случаем поверхности – графика функции.

Заметим, что для цилиндрических поверхностей интегральные суммы (3.50) равны нулю, поэтому данное ранее частное определение поверхностного интеграла второго рода для цилиндрических поверхностей совпадает с общим.

Получим формулу, сводящую вычисление поверхностного интеграла второго рода (3.45) по параметрически заданной поверхности, в предположении его существования, к двойному интегралу по области  $\mathbf{M}$ . Для непрерывной функции  $H(M)$ , заданной в точках поверхности  $\Phi$ , обозначим через  $H^*(u, v)$  следующую функцию, определенную в  $\mathbf{M}$ :

$$H^*(u, v) = H(M(\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))).$$

Воспользуемся Теоремой о среднем для двойного интеграла (3.49)

$$S_i = \sqrt{E(u_i^*, v_i^*) G(u_i^*, v_i^*) - F(u_i^*, v_i^*)^2} s_i, \quad (3.51)$$

где  $(u_i^*, v_i^*)$  некоторая точка, принадлежащая фигуре  $\omega_i$ . В каждом элементе  $\Omega_i$  разбиения поверхности  $\Phi$  выберем точку  $A_i$  с координатами

$$x_i = \phi(u_i^*, v_i^*), \quad y_i = \psi(u_i^*, v_i^*), \quad z_i = \chi(u_i^*, v_i^*)$$

и рассмотрим соответствующую интегральную сумму (3.50):

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n(T)} H^*(u_i^*, v_i^*) \sqrt{E(u_i^*, v_i^*) G(u_i^*, v_i^*) - F(u_i^*, v_i^*)^2} s_i \cos \gamma_i. \quad (3.52)$$

Учитывая, что согласно формуле (3.26)

$$\cos \gamma = \frac{D_1}{\sqrt{EG - F^2}},$$

преобразуем формулу (3.52) к виду

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n(T)} H^*(u_i^*, v_i^*) D_1(u^*, v^*) s_i.$$

Правая часть последней формулы есть интегральная сумма двойного интеграла

$$\int \int_{\mathbf{M}} H^*(u, v) D_1(u, v) dS_{u,v}.$$

Суммируя наши рассуждения, приходим к следующему утверждению.

**Вторая теорема о сведении поверхностного интеграла второго рода к двойным интегралам.** Пусть поверхность  $\Phi$  задана параметрическими соотношениями (3.4), в которых функции  $\phi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  и  $\chi(u, v)$  удовлетворяют Предположениям 1 и 2. Пусть  $P(M)$ ,  $Q(M)$  и  $R(M)$  определенные на  $\Phi$  непрерывные функции. Тогда справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Phi} P(M) dy dz + Q(M) dz dx + R(M) dx dy = \\ & \int \int_{\mathbf{M}} (P^*(u, v) D_3(u, v) + Q^*(u, v) D_2(u, v) + R^*(u, v) D_1(u, v)) dS_{u,v}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

**Пример 6.** Вычислим поверхностный интеграл второго рода

$$\int \int_{\Phi} x^2 y^2 z dx dy \quad (3.54)$$

по верхней стороне нижней половины сферы  $\Phi$  радиуса  $R$ . Вычисления удобно проводить в сферических координатах, поэтому положим

$$\phi(u, v) = R \cos u \sin v, \quad \psi(u, v) = R \sin u \sin v, \quad \chi(u, v) = R \cos v,$$

где точка  $(u, v)$  пробегает по прямоугольнику  $\mathbf{M}$ , задаваемому неравенствами  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $\pi/2 \leq v \leq \pi$ . Вычисление минора  $D_1$  приводит к результату

$$D_1 = -R^2 \cos v \sin v.$$

Для нижней половины сферы  $D_1 > 0$ , поэтому по формуле (3.53)

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Phi} x^2 y^2 z dx dy = \\ & - \int \int_{\mathbf{M}} R^7 \cos^2 u \cos^2 v \sin^2 u \sin^5 v dS_{u,v}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Вычисляем двойной интеграл (3.55), сводя его к повторному

$$\begin{aligned} & - \int \int_{\mathbf{M}} R^7 \cos^2 u \cos^2 v \sin^2 u \sin^5 v dS_{u,v} = \\ & -R^7 \int_{\pi/2}^{\pi} dv \int_0^{2\pi} \cos^2 u \cos^2 v \sin^2 u \sin^5 v du = \\ & -\frac{\pi R^7}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 v \sin^2 v dv = -\frac{2\pi}{105} R^7. \end{aligned}$$

## 4. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Теория тройного интеграла развивается в полной аналогии с теорией двойного интеграла с очевидными изменениями, вносимыми различием размерностей плоских фигур и пространственных тел. Одной из наиболее часто встречающихся задач, связанных с необходимостью вычисления тройного интеграла, является задача о подсчете массы неоднородного трехмерного тела.

**4.1. Вычисление массы прямоугольного параллелепипеда.** Пусть дан прямоугольный параллелепипед  $W$  с ребрами параллельными координатным осям. Пусть плотность материала, из которого он изготовлен, задается функцией  $\rho(x, y, z)$ . Для вычисления массы параллелепипеда  $W$  разбиваем его на более мелкие прямоугольные параллелепипеды  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  с ребрами, параллельными ребрам  $W$ . Считая приближенно в пределах параллелепипедов  $w_i$  разбиения плотность материала постоянной и равной, скажем, ее значениям в случайно выбранных точках  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in w_i$ , находим, что масса  $m$  параллелепипеда  $W$  приближенно равна

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i, \quad (4.1)$$

где  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ ,  $\Delta z_i$  длины ребер параллелепипеда  $w_i$ .

Назовем *диаметром* параллелепипеда длину его диагонали, соединяющей вершину нижнего основания с противоположной вершиной верхнего основания. Рассмотрим последовательность  $T_n$  разбиений параллелепипеда  $W$ . *Диаметром разбиения*  $T_n$  назовем наибольший из диаметров параллелепипедов разбиения. Тогда масса параллелепипеда  $W$  считается равной

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i, \quad (4.2)$$

где предел вычисляется по последовательности разбиений, диаметры которых стремятся к нулю. Предполагается, что предел не зависит от выбора последовательности разбиений.

Предел (4.2) в случае его существования обозначается через

$$\int \int \int_{(W)} \rho(x, y, z) dV. \quad (4.3)$$

и называется *тройным интегралом* от функции  $\rho(x, y, z)$  по прямоугольному параллелепипеду. Символ  $dV$  в (4.3) подчеркивает, что при составлении интегральных сумм используются объемы параллелепипедов разбиения.

При вычислении массы параллелепипеда мы использовали фактически *римановы суммы* (4.1), построенные по разбиениям  $T_n$  трехмерных тел и значениям интегрируемых функций, и пределы римановых сумм по разбиениям, диаметры которых стремятся к нулю. Эти соображения кладутся в основу общей теории тройного интеграла.

Аналогом Теоремы о существовании двойного интеграла будет следующее утверждение.

**Теорема о существовании тройного интеграла.** Пусть функция  $H(x, y, z)$  определена и непрерывна в замкнутом прямоугольном параллелепипеде  $W$ , тогда тройной интеграл (4.2) от функции  $H(x, y, z)$  существует и обозначается через

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV. \quad (4.4)$$

Применяя с очевидными изменениями те же рассуждения, что и при доказательстве Теоремы о сведении двойного интеграла к повторному, можно легко вывести следующее утверждение.

**Теорема о сведении тройного интеграла к повторному.** Пусть функция  $H(x, y, z)$  непрерывна в замкнутом параллелепипеде  $W$ , задаваемом системой неравенств:  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ ,  $m \leq z \leq k$  – тогда для тройного интеграла (5.4) справедлива формула сведения к кратному интегралу

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_m^k H(x, y, z) dz \quad (4.5)$$

и аналогичные пять равенств, получаемых изменением порядка интегралов по переменным  $x, y, z$ .

**Пример 1.** Вычислим тройной интеграл

$$\int \int \int_{(W)} (x + y + z) dV$$

по параллелепипеду  $W$ , задаваемому неравенствами:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ , т.е. массу неоднородного параллелепипеда с распределением плотности  $\rho(x, y, z) = x + y + z$ .

Воспользуемся формулой (4.5) для следующих вычислений:

$$\begin{aligned} \int \int \int_W (x + y + z) dV &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x + y + z) dz = \\ \int_0^1 dx \int_0^1 \left( xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 dy &= \int_0^1 dx \int_0^1 (2x + 2y + 2) dy = \\ \int_0^1 dx (2xy + y^2 + 2y) \Big|_0^1 &= \int_0^1 (2x + 3) dx = (x^2 + 3x) \Big|_0^1 = 4. \end{aligned}$$

**4.2. Кубируемые пространственные фигуры.** В теории двойного интеграла особую роль играли квадратируемые плоские фигуры. Напомним, что

плоская фигура считалась квадратуемой, если ее можно было разбить на конечное число частей, площадь каждой из которых вычислялась с помощью интеграла от функции одного аргумента. Примеры 2, 3, 4 и 5 Главы 1 настоящего раздела давали представление о квадратуемых плоских фигурах.

Двойной интеграл от положительной функции  $H(x, y)$  по квадратуемой области  $P$  имеет геометрическую интерпретацию объема цилиндрического бруса с основанием  $P$ , вертикальными боковыми гранями и верхней гранью, являющейся графиком функции  $H(x, y)$ , определенной в области  $P$ .

**Определение.** Назовем кубуемым такое пространственное тело  $W$ , которое можно разбить на конечное число частей, объемы которых можно определить, вычисляя двойные интегралы.

Кроме цилиндрических брусков кубуемыми несомненно являются выпуклые многогранники евклидовой геометрии, а также шар, эллипсоид и множество других пространственных тел.

Тройной интеграл по кубуемому телу  $W$  от функции трех аргументов  $H(x, y, z)$  определяется следующим образом. Рассматривают разбиение  $T$  тела  $W$  на кубуемые фигуры  $w_i$ , имеющие объем  $v_i$ . В каждой фигуре  $w_i$  выбирается произвольная точка  $A_i$  и составляется риманова интегральная сумма

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n(T)} H(A_i) v_i. \quad (4.6)$$

Назовем *диаметром* разбиения наибольший из объемов частей  $w_i$  разбиения  $T$ .

**Определение.** Тройным интегралом от функции  $H(x, y, z)$  по пространственному телу  $W$  называется общий предел интегральных сумм (4.6) для всех последовательностей  $T_n$  разбиений тела  $W$  диаметры которых стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$

Тройной интеграл обозначается через

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV. \quad (4.7)$$

Аналогом Теоремы о существовании двойного интеграла будет следующее утверждение.

**Общая теорема о существовании тройного интеграла.** Пусть функция  $H(x, y, z)$  непрерывна в замкнутом кубуемом теле  $W$ , тогда тройной интеграл (4.7) от рассматриваемой функции существует.

Доказательство настоящей теоремы опирается на равномерную непрерывность непрерывной функции в замкнутой ограниченной области, что составляет утверждение Теоремы Кантора.

**4.3. Сведение тройных интегралов к кратным.** В явном виде тройные интегралы, как и двойные, вычисляются путем сведения их к кратным интегралам. Приведем без доказательства соответствующую теорему.

**Общая теорема о сведении тройного интеграла к кратному.** Пусть существует тройной интеграл от функции  $H(x, y, z)$  по замкнутому кубируемому телу  $W$ .

1) Пусть тело  $W$  заключено между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$  и пусть при каждом  $x$ ,  $a \leq x \leq b$ , плоскость параллельная координатной плоскости  $YOZ$  пересекается с телом  $W$  по некоторой квадратуемой фигуре. Если через  $P_x$  обозначить проекцию фигуры на плоскость  $YOZ$ , то

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int \int_{(P_x)} H(x, y, z) dS \quad (4.8)$$

в предположении существования двойных интегралов от функции  $H(x, y, z)$  ( $x$  фиксирован) по фигурам  $P_x$ .

2) Пусть тело  $W$  представляет собой цилиндрический брус, ограниченный по оси  $OZ$  снизу и сверху поверхностями  $z = \alpha(x, y)$  и  $z = \beta(x, y)$ , проектирующимися на плоскости  $XOY$  в некоторую плоскую квадратуемую фигуру  $D$ , тогда

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV = \int \int_{(D)} dS \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} H(x, y, z) dz \quad (4.9)$$

при условии, что при всех  $x, y \in D$  интеграл  $\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} H(x, y, z) dz$  существует.

**Пример 2.** Найдем массу шара  $W$  радиуса  $R$ , плотность материала которого обратно пропорциональна расстоянию от его центра. Для этого следует вычислить тройной интеграл

$$\int \int \int_{(W)} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV, \quad (4.10)$$

где  $k$  коэффициент пропорциональности. Воспользуемся формулой (4.8), в которой фигуры  $P_x$  представляют собой круги радиусов  $\sqrt{R^2 - x^2}$ :

$$\int \int \int_{(W)} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV = k \int_{-R}^R dx \int \int_{(P_x)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS. \quad (4.11)$$

Вычислим двойной интеграл в правой части формулы (4.11). Для этого воспользуемся полярными координатами  $\rho, \phi$  на плоскости  $YOZ$ , где  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ , и сведем двойной интеграл к повторному:

$$\begin{aligned} \int_{(P_x)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} \rho d\rho = \\ &= 2\pi \sqrt{\rho^2 + x^2} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi (R - x). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.11), получаем результат:

$$\int \int \int_{(W)} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV = 4\pi k R^2.$$

**4.4. Криволинейные координаты в пространстве.** В параграфе 3.10 Раздела 1 и в параграфе 2.5 настоящего раздела обсуждался способ, которым устанавливается взаимно однозначное соответствие между упорядоченными парами  $(\alpha, \beta)$  вещественных чисел и точками евклидовой плоскости. Он опирается на геометрические построения, связанные с двумя взаимно перпендикулярными вещественными осями на плоскости, а также на аксиому непрерывности. Аналогично, если в пространстве рассмотреть три взаимно перпендикулярные оси: ось абсцисс  $OX$ , ось ординат  $OY$  и ось аппликат  $OZ$ , то с их помощью можно отмечать точками в пространстве упорядоченные тройки  $(\alpha, \beta, \gamma)$  вещественных чисел. Обратно, любой точке  $M$  евклидова пространства можно поставить в соответствие единственную тройку  $(\alpha, \beta, \gamma)$  вещественных чисел, называемую ее декартовыми координатами.

Рассмотренное соответствие порождает в пространстве три семейства плоскостей: одно семейство состоит из плоскостей, на которых постоянна координата  $x$ . Плоскости этого семейства параллельны плоскости  $YOZ$ . В точках каждой плоскости второго семейства постоянна координата  $y$ , а на плоскостях третьего семейства постоянна координата  $z$ . Плоскости каждого семейства перпендикулярны плоскостям любого другого семейства.

Имеются другие способы установить взаимно однозначное соответствие между упорядоченными тройками  $(\alpha, \beta, \gamma)$  вещественных чисел и точками вещественного координатного пространства. Пусть формулы

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w) \quad (4.13)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между упорядоченными тройками  $(x, y, z)$  и  $(u, v, w)$ . Будем считать, что в формулах (4.13)  $x, y, z$  есть декартовы координаты в пространстве. Тогда тройки  $(u, v, w)$  также могут считаться координатами в пространстве, так как с помощью соотношений (4.12) они могут быть взаимно однозначным образом сопоставлены с точками пространства. В общем случае координаты  $u, v, w$  называются *криволинейными координатами* в пространстве.

Соотношения (4.13) при фиксированном  $u$  параметрически задают в пространстве поверхность, называемую координатной поверхностью постоянной координаты  $u$ . Эти координатные поверхности входят в семейство, элементы которого отвечают различным фиксированным значениям координаты  $u$ . Аналогично возникают координатные поверхности постоянства координат  $v$  и  $w$ . Если же в соотношениях (4.13) зафиксировать сразу две координаты, скажем  $u$  и  $v$ , то они будут задавать кривую в пространстве, называемую координатной линией изменения координаты  $w$ .

При условии, что функции  $f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)$  дифференцируемы, векторы

$$\tau_u = \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u} \right), \quad \tau_v = \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v} \right), \quad \tau_w = \left( \frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial g}{\partial w}, \frac{\partial h}{\partial w} \right) \quad (4.14)$$

касательны соответственно к координатным линиям изменения координаты  $u, v$  или  $w$ . Они считаются приложенными в точке с криволинейными координатами  $(u, v, w)$ .



Рассмотрим две важные для приложений системы криволинейных координат в пространстве. *Цилиндрическая система*  $(\rho, \phi, z)$  получается из полярной системы координат на плоскости  $XOY$  присоединением к ней декартовой координаты  $z$ . Для цилиндрической системы соотношения (4.13) имеют вид

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (4.15)$$

Поверхности постоянной координаты  $\rho$  суть концентрические цилиндры с осью, совпадающей с координатной осью  $OZ$ . Поверхности постоянной координаты  $\phi$  суть полуплоскости, проходящие через координатную ось  $OZ$ . Наконец, постоянство координаты  $z$  реализуется на плоскостях параллельных координатной плоскости  $XOY$ . На Рис. 5.4.1 показаны три поверхности, по одной из каждого семейства.

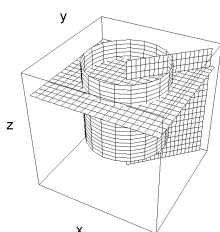


Рис. 5.4.1

*Сферическая система* координат  $(r, \theta, \phi)$  связана с декартовой соотношениями:

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (4.16)$$

Координата  $r$ , для которой из (4.16) легко получить выражение  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  имеет смысл расстояния от точки  $M(x, y, z)$  до начала координат. Координата  $\phi$  есть угол между осью  $OX$  и отрезком на плоскости  $XOY$ , соединяющем начало координат с проекцией точки  $M$  на эту плоскость. Координата  $\theta$  геометрически означает угол между отрезком, соединяющим начало координат с точкой  $M(x, y, z)$ , и осью  $OZ$  (см. Рис. 5.4.2).

Поверхности постоянной координаты  $r$  суть концентрические сферы с центром в начале координат. Поверхности постоянства координаты  $\phi$  – полуплоскости, проходящие через координатную ось  $OZ$ . Координата  $\theta$  постоянна на конусах с вершинами в начале координат, осью  $OZ$  и углом раствора  $\theta$ . На Рис. 5.4.3 показаны три поверхности из этих семейств.

**4.5. Замена переменных в тройных интегралах.** Замечание аналогичное тому, что было сделано в параграфе 2.7 относительно двойного интеграла, заключается в том, что системы координат не участвуют непосред-

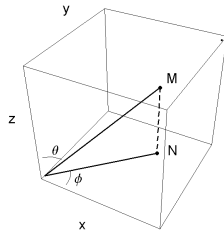


Рис. 5.4.2

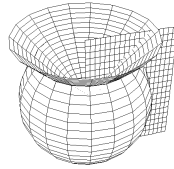


Рис. 5.4.3

ственно в определении тройного интеграла. При условии, что тройной интеграл по некоторому пространственному телу от заданной функции существует, криволинейные системы координат можно использовать для вычисления тройного интеграла путем его сведения к повторному.

Для этого рассматривают разбиения тела на более мелкие пространственные тела, заключенные между координатными поверхностями, и измельчения таких разбиений. На Рис. 5.4.4 изображен криволинейный параллелепипед разбиения, порожденный цилиндрическими координатами.

Приведем прозрачную с геометрической точки зрения приближенную формулу для объема подобных криволинейных параллелепипедов. Для этого выберем точку  $A(u, v, w)$ , являющуюся одним из вершин криволинейного параллелепипеда и проходящие через нее координатные линии изменения координат  $u, v, w$ . Векторы  $\tau_u, \tau_v$  и  $\tau_w$  (4.14) касательны к соответствующим координатным линиям. Рассмотрим параллелепипед с плоскими гранями, построенный на векторах  $\tau_u \Delta u, \tau_v \Delta v$  и  $\tau_w \Delta w$ . Из курса аналитической геометрии и векторной алгебры известно, что объем  $\Delta V$  такого параллелепипеда равен модулю

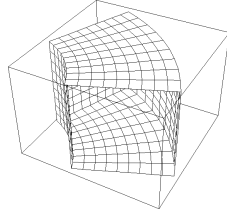


Рис. 5.4.4

смешанного произведения:

$$\Delta V = |([\tau_u, \tau_v], \tau_w)| = \left| \det \begin{vmatrix} f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \\ f_w & g_w & h_w \end{vmatrix} \right|,$$

где  $[\tau_u, \tau_v]$  векторное произведение, а круглые скобки служат для обозначения скалярного произведения трехмерных векторов.

Матрица в правой части формулы для  $\Delta V$  называется *матрицей Якоби*, а ее определитель – *якобианом* соответствия (4.13). Последний обозначается через

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \det \begin{vmatrix} f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \\ f_w & g_w & h_w \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

**Теорема о замене переменных в тройном интеграле.** Пусть преобразование (4.13) является взаимно однозначным и отображает тело интегрирования  $W$  на тело  $W'$  в пространстве переменных  $u, v, w$ . Пусть функции  $f(u, v, w)$ ,  $g(u, v, w)$ ,  $h(u, v, w)$  имеют в  $W'$  непрерывные частные производные, а якобиан (4.17) отличен в  $W'$  от нуля. Тогда при условии существования тройного интеграла (4.4) справедлива следующая формула замены переменных

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV_{x,y,z} = \int \int \int_{(W')} H(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dV_{u,v,w}. \quad (4.18)$$

Формула (4.18) называется *формулой замены переменных в тройном интеграле*.

Общая теорема о сведении тройного интеграла к повторному и Теорема о замене переменных в тройном интеграле имеют следствием следующий результат относительно сведения тройного интеграла к кратному.

**Общая теорема о сведении тройного интеграла к кратному в криволинейных координатах.** Пусть выполнены условия Теоремы о замене переменных и пусть в пространстве координат  $(u, v, w)$  тело  $W'$  удовлетворяет условиям Общей теоремы о сведении тройного интеграла к кратному по координате  $u$ . Тогда справедлива формула сведения тройного интеграла по телу  $W$  к кратному интегралу:

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV_{x,y,z} = \int_a^b du \int \int_{(P'_u)} H(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dS_{v,w}. \quad (4.19)$$

В частности, если тело  $W'$  представляет собой параллелепипед:  $a \leq u \leq b$ ,  $c \leq v \leq d$ ,  $m \leq w \leq k$ , формула (4.19) позволяет свести тройной интеграл к трехкратному:

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV_{x,y,z} = \int_a^b du \int_c^d dv \int_m^k H(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| dw. \quad (4.20)$$

**4.6. Тройные интегралы в цилиндрических и сферических координатах.** Тройные интегралы по пространственным телам, являющимися частями цилиндра или сферы часто удается вычислить, сведя их к повторным в цилиндрических или сферических координатах. Начнем с цилиндрических координат.

Вычисляя якобиан (4.17) для цилиндрических координат (4.14), получаем в результате

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \phi, z)} = \rho,$$

поэтому формула (4.19) приводится к виду

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV_{x,y,z} = \int_a^b dz \int \int_{(P'_z)} H^*(\rho, \phi, z) \rho dS_{\rho,\phi}, \quad (4.21)$$

где  $H^*(\rho, \phi, z) = H(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$ .

**Пример 3.** Вычислим интеграл

$$\int \int \int_{(W)} z dV, \quad (4.22)$$

по телу  $W$ , ограниченному конической поверхностью  $z^2 = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 1$ .

В рассматриваемом случае тело  $W'$  в пространстве координат  $(r, \phi, z)$  ограничено поверхностями  $z = r$ ,  $r = 0$ ,  $r = 1$ ,  $\phi = 0$  и  $\phi = 2\pi$ . Поэтому применение

формулы (4.19) позволяет вычислить рассматриваемый интеграл следующим образом:

$$\int \int \int_{(W)} z dV_{x,y,z} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 z dz \int_0^z \rho d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{z^3}{2} dz = \frac{\pi}{4}.$$

В сферических координатах (4.15) якобиан (4.17) равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta,$$

поэтому формула (4.18) имеет вид

$$\int \int \int_{(W)} H(x, y, z) dV_{x,y,z} = \int \int \int_{(W')} H^*(r, \phi, \theta) r^2 \sin \theta dV_{r,\phi,\theta}, \quad (4.23)$$

где  $H^*(r, \phi, \theta) = H(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)$ .

**Пример 4.** Вычислим интеграл (4.22) по части шара радиуса  $R$ , расположенной в первом октанте. Поскольку подинтегральная функция  $z = r \cos \theta$  не зависит от координаты  $\phi$ , применение формулы (4.23) приводит к следующему результату:

$$\int \int \int_{(W)} z dV = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R r^3 \cos \theta \sin \theta dr = \frac{\pi R^4}{16}.$$

**4.7. Формула Остроградского-Гаусса.** Пусть тело  $W$  представляет собой цилиндрический брус, ограниченный по оси  $OZ$  снизу и сверху поверхностями  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , которые задаются уравнениями  $z = \alpha(x, y)$  и  $z = \beta(x, y)$  и проектируются на плоскости  $XOY$  в некоторую плоскую квадрируемую фигуру  $D$ . Сбоку тело  $W$  ограничено цилиндрической поверхностью  $\Phi_3$ . Обозначим через  $\Phi$  объединение поверхностей  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , т.е. полную границу тела  $W$ .

**Теорема о сведении тройного интеграла к поверхностному.** Пусть в точках тела  $W$  определена некоторая функция  $R(x, y, z)$  непрерывная вместе со своей производной  $R_z(x, y, z)$  в теле  $W$ , включая его границу. Тогда справедлива формула:

$$\int \int \int_{(W)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dV = \int \int_{(\Phi)} R(x, y, z) dS, \quad (4.24)$$

где поверхностный интеграл второго рода, стоящий в правой части формулы (4.24), берется по внешней стороне поверхности  $\Phi$ .

**Следствие.** Пусть тело  $W$  может быть разбито на конечное множество цилиндрических брусков, описанных в формулировке теоремы. Тогда для него имеет место формула (4.24).

Отметим, что формула (4.24) справедлива, на самом деле, для любых тел, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями.

Если функция  $R(x, y, z)$  непрерывна вместе со своими первыми частными производными в точках тела  $W$  и в точках границы этого тела, то для нее имеет место формула

$$\int \int \int_{(W)} \left( \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \int \int_{(\Phi)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (4.25)$$

Формула (4.25) называется формулой Остроградского-Гаусса.

## 5. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ К РАЗДЕЛУ 5

В этой главе будут приведены описания лабораторных работ по материалу пятого раздела книги.

### Лабораторная работа 1. Двойные интегралы.

В задачах лабораторной работы требуется вычислить объем тела, ограниченного двумерными поверхностями.

#### Задания.

- 1) Вычислить объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Указание. Можно ограничиться вычислением восьмой части объема, заключенного в первом квадранте:  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

- 2) Вычислить объем "сферической шапочки", т.е. трехмерного тела ограниченного сферой радиуса  $R$  и плоскостью  $z = R - h$ , где  $h$  - высота шапочки. Параметр  $h$  удовлетворяет неравенствам  $0 < h < R$ .

- 3) Вычислить объем конечного тела, отсекаемого плоскостью  $z = -3/2$  от нижней части двуполостного гиперболоида

$$z^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$$

- 4) Вычислить объем тела, заключенного между двумя параболоидами  $z = 8 - x^2 - y^2$  и  $z = 3x^2 + y^2$ .

- 5) Вычислить объем конечного тела, заключенного между параболоидом  $z = 8 - x^2 - y^2$  и плоскостью  $x + y - 2z = -8$ .

#### Компьютерные команды

При выполнении задач лабораторной работы используются следующие команды.

Встроенная команда **Solve** и команда **ImplicitPlot** из подгружаемого стандартного пакета `Graphics`ImplicitPlot``. Первая команда находит решения алгебраических и некоторых более общих уравнений, а вторая рисует неявно заданные кривые.

Кроме того, полезно запрограммировать специальную команду названную нами **Sketch3D**. Она рисует графики нескольких функций от двух аргументов. Ее легко создать, пользуясь встроенной командой **ParametricPlot3D**.

**Образец выполнения задания.**

**Задача.** Вычислить объем тела, заключенного между параболоидом  $z = 2 - x^2 - y^2$  и поверхностью  $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ . При необходимости прибегнуть к численному интегрированию с помощью команды `NIntegrate[функция, {var, a, b}]`.

**Решение.** Проекция линии пересечения поверхностей на плоскость  $XOY$  имеет уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} = 2 - x^2 - y^2. \quad (5.1)$$

Поскольку левая часть уравнения неотрицательна для вещественных переменных  $x, y$ , то отсюда следует, что проекция линии пересечения поверхностей содержится в круге радиуса  $\sqrt{2}$  с центром в начале координат.

Нарисуем эту линию, пользуясь командой `ImplicitPlot`:

```
ImplicitPlot[ $\sqrt{x^2 + 2y^2} == 2 - x^2 - y^2$ , {x,  $-\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$ }]
```

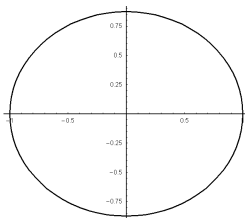


Рис. 5.5.1

Рисунок 5.5.1 показывает, что на самом деле проекция линии пересечения на плоскость  $XOY$  заключена в квадрате  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Этот факт будет полезен нам в дальнейшем при задании аргументов команды `Sketch3D`.

Кроме того, двумерная область, ограничиваемая проекцией, обладает тем свойством, что любая вертикальная прямая, проходящая через точки оси абсцисс, принадлежащие отрезку  $[-1, 1]$ , пересекает эту проекцию линии пересечения самое большее два раза. Поэтому в рассматриваемом случае двойной интеграл может быть сведен к повторному. Для того, чтобы выяснить взаимное расположение поверхностей, выполним команду `Sketch3D`.

```
Sketch3D[ $\{\sqrt{x^2 + 2y^2}, 2 - x^2 - y^2\}$ , {x, -1, 1}, {y, -1, 1}];
```

Из рисунка 5.5.2 следует, что тело, объем которого следует вычислить, ограничено снизу поверхностью  $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ , а сверху параболоидом  $z = 2 - x^2 - y^2$ . Таким образом, для вычисления объема тела нужно вычислить двойной интеграл от функции  $f[x, y] = 2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + 2y^2}$  по области  $D$  плоскости  $XOY$ , заключенной внутри проекции линии пересечения.



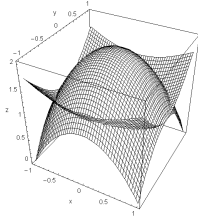


Рис. 5.5.2

Чтобы свести двойной интеграл

$$\int \int_D f[x, y] dx dy$$

к повторному, нужно найти уравнения верхней и нижней половин проекции линии пересечения. Для этого решаем уравнение (5.1) относительно переменной  $y$ .

$$y /. \text{Solve}[\sqrt{x^2 + 2y^2} == 2 - x^2 - y^2, y]$$

$$\left\{ -\sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}}, \sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}}, \right.$$

$$\left. -\sqrt{3 - x^2 + \sqrt{5 - x^2}}, \sqrt{3 - x^2 + \sqrt{5 - x^2}} \right\}$$

Команда **Solve** дала четыре решения, а, между тем, полученные выше рисунки демонстрируют, что таких решений должно быть два. Проверка показывает, что два последних корня являются посторонними. В самом деле, подставим два последних решения в формулу  $2 - x^2 - y^2$ :

$$\left\{ 2 - x^2 - y^2 /. \{y \rightarrow -\sqrt{3 - x^2 + \sqrt{5 - x^2}}\}, \right.$$

$$\left. 2 - x^2 - y^2 /. \{y \rightarrow \sqrt{3 - x^2 + \sqrt{5 - x^2}}\} \right\}$$

$$\{-1 - \sqrt{5 - x^2}, -1 - \sqrt{5 - x^2}\}$$

Результат явно меньше нуля, в то время как  $\sqrt{x^2 + 2y^2}$  принимает неотрицательные значения. Таким образом, верхняя часть линии пересечения имеет уравнение  $y = \sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}}$ , а нижняя  $y = -\sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}}$ .

Границы изменения переменной  $x$  можно найти из условия, что подрадикальное выражение в формуле  $\sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}}$  неотрицательно.

$$\text{InequalitySolve}[3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2} \geq 0, x]$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Итак, переменная  $x$  пробегает отрезок  $[-1, 1]$ . Следовательно, справедливо следующее равенство:

$$\int \int_D f[x, y] dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{3-x^2-\sqrt{5-x^2}}}^{\sqrt{3-x^2-\sqrt{5-x^2}}} f[x, y] dy \right) dx$$

Обозначим через  $g[x]$  внутренний интеграл в двойном интеграле.

$$g[x] = \int_{-\sqrt{3-x^2-\sqrt{5-x^2}}}^{\sqrt{3-x^2-\sqrt{5-x^2}}} \left( 2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + 2y^2} \right) dy$$

Для его фактического вычисления полезно прибегнуть к записи определенного интеграла в виде **Integrate[функция, отрезок, предположения]**, где **предположения** – это опциональный аргумент команды **Integrate**. В данном случае его полезно задать в виде **Assumptions**  $\rightarrow 3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2} \geq 0$ .

Кроме того, учитывая, что в уравнения обеих поверхностей переменные  $x, y$  входят в квадрате, мы можем сделать заключение, что рассматриваемой тело симметрично как относительно оси  $OX$ , так и относительно оси  $OY$ . Поэтому на плоскости  $XOY$  достаточно рассмотреть квадрант  $x \geq 0, y \geq 0$ , вычислить двойной интеграл по части области  $D$ , находящейся в первом квадранте, а результат умножить на 4. Поэтому вычисления проходят по следующему алгоритму.

$$\mathbf{g[x\_]} = \mathbf{Integrate[2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + 2y^2}, \{y, 0, \sqrt{3 - x^2 + \sqrt{5 - x^2}}\}, \mathbf{Assumptions} \rightarrow \mathbf{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2} \geq 0 \&\& x \geq 0}]}$$

$$2\sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}} - x^2 \sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}} - \frac{1}{3} \left( 3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2} \right)^{3/2} \\ \frac{1}{8} \left( -4 \sqrt{(-4 + x^2) \left( -7 + x^2 + 3 \sqrt{5 - x^2} \right)} + \sqrt{2} x^2 \text{Log}[2] + 2 \sqrt{2} x^2 \text{Log}[x] - \right. \\ \left. 2 \sqrt{2} x^2 \text{Log} \left[ \sqrt{2} \sqrt{6 - x^2 - 2 \sqrt{5 - x^2}} + 2 \sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}} \right] \right)$$

Полученную функцию  $g[x]$  нужно проинтегрировать по отрезку  $[0, 1]$ . Однако в символьном виде это сделать не удастся, поскольку даже первое слагаемое  $2\sqrt{3 - x^2 - \sqrt{5 - x^2}}$  в формуле для  $g[x]$  не интегрируемо в явном виде. Следовательно, нам следует прибегнуть к численному интегрированию.

$$\mathbf{NIntegrate[g[x], \{x, 0, 1\}]}$$

0.557125

**Ответ.** Объем тела, ограниченного поверхностями  $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$  и  $z = 2 - x^2 - y^2$ , равен

**4 0.557125**

2.2285

## Лабораторная работа 2. Длины дуг плоских кривых.

В заданиях лабораторной работы требуется найти длины дуг параметрически заданных кривых.

### Задания.

- 1) Найти длину отрезка параболы:  $y = kx^2$  для  $x$ , изменяющегося от 0 до  $a$ .
- 2) Найти длину эллипса:  $x = a \cos[t]$ ,  $y = b \sin[t]$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
- 3) Найти длину астроида:  $x = a \cos^3[t]$ ,  $y = b \sin^3[t]$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
- 4) Найти длину кардиоиды:  $x = 2\cos[t] - \cos[2t]$ ,  $y = 2\sin[t] - \sin[2t]$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
- 5) Найти длину “Улитки Паскаля” :  $x = (1 + 2\cos[t])\cos[t]$ ,  $y = (1 + 2\cos[t])\sin[t]$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

### Образец решения задачи.

**Задача.** Вычислить длину дуги “листа”, т.е. плоской кривой, задаваемой параметрически уравнениями  $x = (3\cos[t] + \cos[3t])\cos[t]$ ,  $y = (3\cos[t] + \cos[3t])\sin[t]$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ .

**Решение.** Введем уравнение кривой в компьютер, выполнив команду

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[t\_ ] &= (3 \cos[t] + \cos[3t])\cos[t]; \\ \mathbf{y}[t\_ ] &= (3 \cos[t] + \cos[3t])\sin[t]; \end{aligned}$$

Рассмотрим графическое представление кривой.

`ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, -π, π}]`

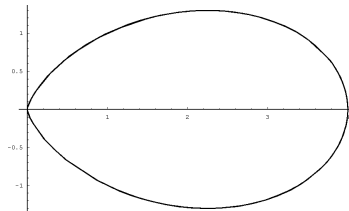


Рис. 5.5.3

Рисунок показывает, что кривая симметрична относительно оси абсцисс. Это свойство вытекает также из параметрических уравнений кривой, в которых функция  $y[t]$  есть нечетная функция параметра  $t$ . Следовательно, достаточно найти длину верхней части кривой, и удвоить полученный результат.

Вычисляем интеграл

$$\text{result} = 2 \int_0^\pi \sqrt{x'[t]^2 + y'[t]^2} dt$$

$$2 \left( \frac{7 \text{EllipticE}[-8]}{3} + 3 \text{EllipticK}[-8] \right)$$

В ответ входят специальные функции, называемые эллиптическими. Эти функции достаточно хорошо изучены, поэтому можно вычислить приближенное значение длины дуги.

**N[result]**

20.6496

**Ответ.** Длина дуги листа равна

$$2 \left( \frac{7 \text{EllipticE}[-8]}{3} + 3 \text{EllipticK}[-8] \right)$$

или приближенно 20.6496.

### Лабораторная работа 3. Площадь поверхности.

В заданиях лабораторной работы требуется найти площади участков поверхностей, определяемых пересечениями с другими поверхностями.

#### Задания.

1) Найти площадь участка поверхности, вырезаемой цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$  из гиперболического параболоида  $z = x^2 - y^2$ .

**Указание.** Воспользоваться цилиндрическими координатами.

2) Найти площадь участка поверхности, вырезаемой цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$  из эллиптического параболоида  $z = x^2/4 + y^2/9$ .

**Указание.** Воспользоваться цилиндрическими координатами. При необходимости провести численное интегрирование.

3) Найти площадь участка поверхности, вырезаемой цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$  из конуса  $x^2 + z^2 = y^2$ .

4) Найти площадь поверхности цилиндра  $x^2 + y^2 = x$ , заключенной внутри сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

5) Найти площадь сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ , заключенной внутри конуса  $z^2 = x^2 + 4y^2$ .

#### Компьютерные команды.

Для решения задач лабораторной работы используются следующие компьютерные команды.

Команда **Sketch3D**[формула, {координата1, a, b}, {координата2, c, d}] создается преподавателем на основе встроенной команды **ParametricPlot3D**. Описываемая команда рисует участок поверхности, задаваемой явной формулой **формула**. Участок располагается над прямоугольником  $[a, b; c, d]$  координатной плоскости, определяемой выбором пары параметров координата1, координата2. Эта упорядоченная пара может принимать значения  $\{x, y\}$ ,  $\{x, z\}$  и  $\{y, z\}$ .

Если задать первый аргумент команды в виде {формула1, формула2, ...}, то будут нарисованы несколько поверхностей или частей одной и той же поверхности, заданных с помощью одних и тех же координат, но разными формулами.

Команда **IntersectionCurve**[формула1, формула2], где формулы задают поверхности, вычисляет параметрические уравнения линии пересечения поверхностей.

Команда **PlotIntersectionCurve**[кривая, {параметр, а, b}] позволяет нарисовать кривую пересечения по заданным параметрическим уравнениям кривой.

Команда **SurfaceElement**[ {формула1, формула2, формула3}, {координата1, координата2}] вычисляет коэффициент  $\sqrt{EG - F^2}$ , стоящий перед элементом площади поверхности в криволинейных координатах. Формулы в аргументе команды задают координаты  $x, y, z$  как функции координаты1 и координаты2.

Команда **Sphere**[R, {a, b, c}] рисует сферу радиуса  $R$  с центром в точке с координатами  $(a, b, c)$ .

### Образец решения задачи лабораторной работы.

**Задача.** Найти площадь части поверхности конуса  $y^2 + z^2 = x^2$ , лежащий внутри сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Решение.** В качестве первого шага сделаем рисунки конуса и сферы. Из уравнения конуса находим, что конус можно представить как объединение графиков функций  $x = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$ . Введем их в компьютер

$$\begin{aligned} f[y_, z_] &:= \sqrt{y^2 + z^2} \\ g[y_, z_] &:= -\sqrt{y^2 + z^2} \end{aligned}$$

С помощью команды **Sketch3D** рисуем конус.

```
p1 = Sketch3D[{f[y, z], g[y, z]}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}];
```

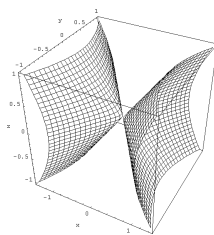


Рис. 5.5.4

а затем сферу

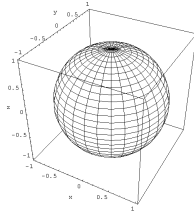


Рис. 5.5.5

```
p2 = Sphere[1, {0, 0, 0}];
```

Скомбинируем полученные рисунки, чтобы наглядно представить поверхность, площадь которой требуется вычислить.

```
Show[p1, p2];
```

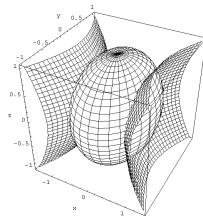


Рис. 5.5.6

На рисунке часть поверхности, площадь которой следует вычислить, не видна. Поэтому нарисуем конус и линию пересечения конуса с поверхностью. Для этого найдем параметрические уравнения линии пересечения.

```
ic = IntersectionCurve[x2 == y2 + z2, x2 + y2 + z2 == 1]
```

$$\left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{1-2z^2}}{\sqrt{2}}, z \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{1-2z^2}}{\sqrt{2}}, z \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{1-2z^2}}{\sqrt{2}}, z \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{1-2z^2}}{\sqrt{2}}, z \right\},$$

Мы получили, что четыре части линии пересечения параметрически задаются полученными формулами, в которых параметром является декартова координата  $z$ . Линия пересечения конечна, и параметр  $z$  изменяется от  $-1/\sqrt{2}$  до  $1/\sqrt{2}$ . Нарисуем линию пересечения

```
p3 = PlotIntersectionCurve[ic, {z, -1, 1}]
```

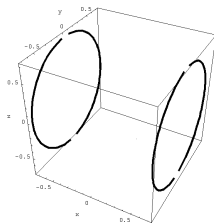


Рис. 5.5.7

Совместим рисунки конуса и кривой пересечения

```
Show[p1, p3]
```

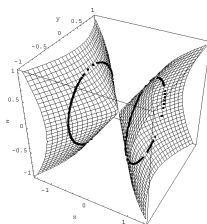


Рис. 5.5.8

Рассматривая рисунки, можно сделать предположение, что рассматриваемая часть конуса проектируется взаимно однозначно на плоскость  $YOZ$ . Выполняя команду **Eliminate** системы “Математика”, исключая указанные пользователем неизвестные из системы уравнений:

```
Eliminate[{x^2 == y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 == 1}, x]
```

$$1 - 2z^2 == 2y^2$$

находим, что наше предположение верно, и проекция линии пересечения на плоскость  $YOZ$  задается уравнением  $1 - 2z^2 = 2y^2$ , т.е. представляет собой окружность радиуса  $1/\sqrt{2}$  с центром в начале координат. Обозначим через  $D$

круг, ограничиваемый этой окружностью. Тогда искомая площадь поверхности выражается с помощью двойного интеграла по области  $D$  в виде

$$2 \iint_D \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2} dy dz$$

Двойной интеграл преобразуется в кратный

$$\iint_D \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2} dy dz = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2z^2}/2}^{\sqrt{1-2z^2}/2} \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2} dy dz$$

Приступаем к вычислению кратного интеграла. Прежде всего вычисляем коэффициент  $\sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}$ , стоящий перед элементом площади:

$$\mathbf{SurfaceElement}[\{\mathbf{f}[\mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{y}, \mathbf{z}\}, \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}]$$

$$\sqrt{2}$$

Вычисляем внутренний интеграл

$$\mathbf{h}[\mathbf{z}_-] = \int_{-\sqrt{1-2z^2}/2}^{\sqrt{1-2z^2}/2} \sqrt{2} dy$$

$$\sqrt{2 - 4z^2}$$

Вычисляем внешний интеграл

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \mathbf{h}[\mathbf{z}] dz$$

$$\frac{\pi}{2}$$

**Ответ.** Площадь поверхности конуса, заключенная внутри сферы равна  $\pi$ .



## РАЗДЕЛ 6

### ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Ряд является важным в теоретическом и практическом аспектах понятием математического анализа. Ряды служат средством приближенного вычисления иррациональных вещественных чисел и функций вещественных аргументов. Числовые ряды естественно возникают в задаче вычисления сумм числовых последовательностей. Наиболее известной задачей такого рода является суммирование геометрической прогрессии. Степенные ряды и действия с ними являются непосредственным обобщением алгебраических многочленов и алгебраических операций с многочленами. Функциональные ряды общего вида используются для определения функций вещественных аргументов и изучения их свойств.

#### 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**1.1. Основные определения.** Понятие числового ряда можно ввести, опираясь на числовые последовательности.

**Определение.** Числовой ряд – это числовая последовательность  $\{S_n\}$ , определяемая рекуррентным соотношением

$$S_n = S_{n-1} + u_n, \quad S_0 = 0, \quad (1.1)$$

в котором  $\{u_n\}$  есть заданная числовая последовательность, ни один из элементов которой не равен нулю.

Рекуррентное соотношение (1.1) легко решить в явном виде

$$S_0 = 0, \quad S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad (1.2)$$

поэтому часто дается другое определение числового ряда.

**Определение.** Ряд – это формальная сумма бесконечного числа слагаемых

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1.3)$$

где  $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$  есть последовательность не равных нулю чисел, называемых членами ряда.

Для  $n = 1, 2, \dots$  суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad (1.4)$$

т.е. элементы последовательности (1.1), называются *частичными суммами ряда*, а сама последовательность  $\{S_n\}$  называется *последовательностью частичных сумм ряда*.

Если последовательность  $\{S_n\}$  частичных сумм имеет конечный предел при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд называется *сходящимся*, а сам предел называется *суммой ряда*. Если предела не существует, то говорят, что *ряд расходится*. Если сходится ряд, члены которого равны абсолютным значениям  $|u_k|$  членов исходного ряда, то говорят, что (исходный) ряд *абсолютно сходится*. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется *условно сходящимся*.

Наиболее известным примером числового ряда является последовательность частичных сумм геометрической прогрессии, элементы которой имеют вид

$$u_n = a q^{n-1}. \quad (1.5)$$

Для геометрической прогрессии (1.5) легко найти в явном виде частичные суммы

$$S_n = a (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (1.6)$$

Из формулы (1.6) легко выводится утверждение о том, что если знаменатель  $q$  геометрической прогрессии по абсолютной величине меньше 1, то последовательность частичных сумм (1.6) имеет предел равный  $a/(1 - q)$ . Это число в рассматриваемом случае является суммой бесконечной геометрической прогрессии. Если же абсолютная величина знаменателя больше или равна 1, то ряд расходится.

Примером сходящегося ряда может служить ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}. \quad (1.7)$$

В самом деле, общий член ряда может быть записан в виде

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

поэтому частичные суммы ряда равны

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad \dots,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Ясно, что последовательность частичных сумм имеет предел равный 1, т.е. сумма ряда равна 1.

Аналогичные вычисления показывают, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n+1}{n} \right)$$

расходится.

**1.2. Простейшие свойства числовых рядов.** Рассмотрим числовой ряд  $\sigma$  (1.3) и ряд  $\sigma'_n$ , полученный из него отбрасыванием первых  $n$  членов ряда:

$$\sigma'_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k. \quad (1.8)$$

Ряд  $\sigma'_n$  называется *остатком* ряда  $\sigma$  (1.3).

**Теорема о сходимости остатков ряда.** *Если ряд  $\sigma$  сходится, то сходится и любой из его остатков. Обратно, из сходимости какого-либо остатка ряда следует сходимость исходного ряда.*

**Теорема о сходимости к нулю членов сходящегося ряда.** *Если ряд сходится, то последовательность  $u_n$  его членов сходится к нулю:  $u_n \rightarrow 0$ .*

Утверждение последней теоремы можно переформулировать, сказав, что сходимость последовательности  $u_n$  членов ряда к нулю является необходимым условием сходимости ряда. Однако это условие не является достаточным. Существуют расходящиеся числовые ряды, члены которых стремятся к нулю. Одним из самых известных примеров такого ряда является *гармонический* ряд

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \quad (1.9)$$

Ряд (1.9) называется гармоническим, так как любой из его членов, кроме первого, равен среднему гармоническому своих соседей. Напомним, что число  $c$  есть среднее гармоническое чисел  $a$  и  $b$ , если справедливо соотношение

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Для доказательства расходимости гармонического ряда рассмотрим последовательность его частичных сумм с номерами, являющимися последовательными степенями двойки. Справедливы следующие соотношения

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{4},$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{4}{8} > 1 + \frac{3}{2}, \dots, S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Таким образом, рассматриваемая подпоследовательность последовательности  $S_n$  частичных сумм стремится к бесконечности, т.е. расходится. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность. Поэтому последовательность частичных сумм гармонического ряда не может сходиться!

**Теорема о сходимости произведений ряда на число.** Если ряд  $\sigma$  сходится, то сходится и ряд  $\lambda\sigma$ , члены которого равны членам ряда  $\sigma$ , умноженным на одно и то же число  $\lambda$ . Сумма ряда  $\lambda\sigma$  равна  $\lambda S$ , где  $S$  сумма ряда  $\sigma$ .

Если сходятся ряды

$$\sigma_1 = u_1 + u_2 + \dots \quad (1.10)$$

и

$$\sigma_2 = v_1 + v_2 + \dots, \quad (1.11)$$

то сходится и ряд  $\sigma$ , общий член которого  $w_n$  равен сумме  $u_n + v_n$  членов рядов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Сумма ряда  $\sigma$  равна сумме рядов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Утверждение теоремы часто формулируют словами: *сходящиеся ряды можно почленно умножать на числа и складывать.*

**1.3. Сходимость положительных рядов.** Для рядов, все члены  $u_n$  которых положительны, т.е. удовлетворяют неравенству  $u_n > 0$ , особенно просто решается вопрос об условиях сходимости.

**Первый признак сравнения.** Пусть все члены рядов  $\sigma_1$  (1.10) и  $\sigma_2$  (1.11) положительны и все члены первого ряда не превосходят членов второго ряда:  $u_n \leq v_n$ . Тогда из сходимости ряда  $\sigma_2$  следует сходимость ряда  $\sigma_1$ , а из расходимости ряда  $\sigma_1$  следует расходимость ряда  $\sigma_2$ .

В качестве примера применения первого признака сравнения установим сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (1.12)$$

при  $s \geq 2$ . Рассмотрим сначала случай  $s = 2$ , т.е. ряд

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (1.13)$$

Сравним остаток

$$\sigma' = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

ряда (1.13) со сходящимся рядом (1.7). Имеем неравенства

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)},$$

из которых следует сходимость остатка ряда (1.13). Теорема о сходимости остатков ряда гарантирует в таком случае сходимость и самого ряда (1.13).

Ясно, что при  $s > 2$  справедливы неравенства

$$\frac{1}{k^s} < \frac{1}{k^2},$$

из которых и из первого признака сравнения следует сходимость ряда (1.12) при  $s \geq 2$ .

Проводя аналогичные рассуждения, легко доказать расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Для этого достаточно сравнить его с расходящимся гармоническим рядом (1.9).

**Второй признак сравнения.** Если для рядов (1.10), (1.11) с положительными членами существует отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda \neq 0, \quad (1.14)$$

то эти ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся.

**Признак Даламбера.** Пусть для ряда  $\sigma$  с положительными членами существует такое число  $\lambda < 1$ , что, начиная с некоторого номера  $n$  члены ряда удовлетворяют неравенству

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda, \quad (1.15)$$

тогда ряд сходится. Если же, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

то ряд расходится.

Признак Даламбера часто переформулируют с помощью пределов.

**Предельный признак Даламбера.** Если для ряда с положительными членами существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda, \quad (1.16)$$

то при  $\lambda < 1$  ряд сходится, а при  $\lambda > 1$  ряд расходится.

В качестве примера применения признака Даламбера исследуем сходимость ряда

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{4}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \dots \quad (1.17)$$

Для рассматриваемого ряда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \frac{2}{n+1},$$

поэтому предел отношения  $u_{n+1}/u_n$  при  $n \rightarrow \infty$  равен нулю. По признаку Даламбера ряд сходится.

Признак Даламбера позволяет также оценить остаток  $\sigma'$  сходящегося ряда  $\sigma$ . Из (1.15) следует, что

$$\sigma' = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < u_{n+1} (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = u_{n+1} \frac{1}{1 - \lambda}. \quad (1.18)$$

Применяя это неравенство к ряду (1.17), получаем

$$\sigma' < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

где  $\varepsilon$  сколь угодно мало в силу того, что предел отношения  $u_{n+1}/u_n$  в рассматриваемом случае равен нулю.

**Признак Коши.** Пусть для числового ряда  $\sigma$  с положительными членами для всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < \lambda < 1, \quad (1.19)$$

тогда ряд сходится. Если же, начиная с некоторого номера  $N$ , выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} > 1,$$

то ряд расходится.

Подобно признаку Даламбера признак Коши часто применяется с использованием предела.

**Предельный признак Коши.** Пусть для ряда  $\sigma$  с положительными членами существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

Тогда при  $\lambda < 1$  ряд сходится, а при  $\lambda > 1$  ряд расходится.

Рассмотрим в качестве примера ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n. \quad (1.20)$$

Для рассматриваемого ряда  $\sqrt[n]{a_n} = 2/n$ . Предел этого выражения при  $n \rightarrow \infty$  равен нулю, поэтому ряд (1.20) сходится.

Последний признак сходимости рядов с положительными членами, который мы рассмотрим, основан на сравнении числового ряда с несобственным определенным интегралом. Сходимость или расходимость ряда будет определяться существованием или несуществованием этого интеграла.

**Интегральный признак Маклорена-Коши.** Пусть на множестве  $[1, \infty)$  существует непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция  $f(x)$  такая, что для членов  $u_n$  ряда  $\sigma$  выполняются соотношения  $u_n = f(n)$ . Тогда сходимость или расходимость ряда  $\sigma$  имеют место в точности тогда, когда существует или не существует несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx. \quad (1.21)$$

Легко вывести следующие оценки для остатка сходящегося ряда  $\sigma$ :

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq \sigma' \leq \int_n^{\infty} f(x) dx \quad (1.22)$$

Применяя интегральный признак Маклорена-Коши, исследуем сходимость ряда

$$\sigma = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}. \quad (1.23)$$

Применение признаков Коши и Даламбера в форме пределов не позволяет сделать вывод о сходимости ряда, так как соответствующие пределы равны единице. В то же время функция  $f(x) = 1/(x \ln^2 x)$ , значения которой в натуральных точках совпадает с членами ряда, обладает перечисленными в Интегральном признаке Маклорена-Коши свойствами и имеет функцию  $F(x) = -1/\ln x$  в качестве одной из первообразных. Последняя функция имеет предел равный нулю при  $x \rightarrow +\infty$ , поэтому ряд  $\sigma$  сходится.

Воспользуемся теперь оценками (1.22), чтобы решить вопрос: сколько членов ряда (1.23) следует просуммировать, чтобы найти сумму с абсолютной погрешностью 0.01? Из (1.22) следует

$$\sigma' \leq \frac{1}{\ln n}.$$

Решая неравенство  $1/\ln n < 0.01$ , приходим к выводу, что нужно взять не меньше, чем  $e^{100}$  членов. Это гигантское число, приближенно равное  $2.7 \times 10^{43}$ , говорит об очень медленной сходимости рассматриваемого ряда.

**1.4. Знакопередающиеся ряды.** Знакопередающимся называется ряд, смежные члены которого являются числами противоположных знаков. Условимся считать первый член ряда положительным, тогда знакопередающийся ряд можно записать в виде

$$\sigma = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (1.24)$$

где все числа  $u_n$  положительны. Для ряда (1.24) имеется простое достаточное условие сходимости.

**Условие Лейбница.** Если члены знакопередающегося ряда, монотонно убывая, стремятся к нулю, то ряд сходится, а его сумма  $S$  не превосходит первого члена  $u_1$  и удовлетворяет неравенствам  $S_{2n-1} < S < S_{2n}$ .

Любой остаток сходящегося знакопередающегося ряда не превосходит по абсолютной величине своего первого члена.

Ранее мы установили, что гармонический ряд (1.9) расходится. Рассмотрим знакопередающийся гармонический ряд

$$\sigma = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \quad (1.25)$$

Ряд (1.25) удовлетворяет условию Лейбница, поэтому он сходится и его сумма не превосходит единицы. Остаток ряда удовлетворяет неравенству  $|\sigma'_n| < 1/(n+1)$ .

**1.5. Ряды с членами произвольных знаков.** Пусть члены ряда (1.3)

$$\sigma = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.3)$$

принимают как положительные, так и отрицательные значения. Такие ряды называют *знакопеременными*. С каждым знакопеременным рядом можно связать два новых ряда  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  с положительными членами. Чтобы получить ряд  $\sigma_+$ , следует в (1.3) оставить только положительные члены, а отрицательные вычеркнуть. Для получения  $\sigma_-$ , наоборот, следует оставить в (1.3) только отрицательные члены, а затем изменить их знак на противоположный. Например, для знакопередающегося гармонического ряда (1.25) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots \\ \sigma_- &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots \end{aligned}$$

Из определения рядов  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  следует, что любая частичная сумма  $S_n$  ряда (1.3) равна разности

$$S_n = S_{n_1}^+ - S_{n_2}^-, \quad (1.26)$$

где  $S_{n_1}^+$ ,  $S_{n_2}^-$  частичные суммы рядов  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  соответственно. Например, для ряда (1.25) справедливы соотношения

$$S_1 = S_1^+, \quad S_2 = S_1^+ - S_1^-, \quad S_3 = S_2^+ - S_1^- \quad \text{и т.д.}$$

**Теорема о сходимости абсолютно сходящихся рядов.** Пусть ряд (1.3) абсолютно сходится, тогда существует предел  $S$  его частичных сумм, т.е. из абсолютной сходимости ряда (1.3) следует его сходимость.



Сумма  $S$  абсолютно сходящегося ряда равна разности  $S^+ - S^-$  сумм рядов  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$ .

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{f(k)} \sin \frac{\pi}{k}}{k}, \quad (1.27)$$

где  $f(k)$  равно целой части половины  $k$ . Вот список значений этой функции для нескольких первых натуральных чисел:  $\{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$ . Таким образом, члены ряда (1.27) меняют знак на противоположный через каждые два номера. Поскольку  $\sin(\pi/k)$  при  $k \geq 2$  положителен, ряд из модулей членов ряда (1.27) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{k}}{k}.$$

Этот ряд сходится, так как выполняется неравенство  $\sin \alpha \leq \alpha$ . Следовательно,

$$\frac{\sin \frac{\pi}{k}}{k} \leq \frac{\pi}{k^2}.$$

Ряд (1.13) сходится, поэтому по Теореме сравнения ряд (1.27) сходится абсолютно.

Знакопередающийся гармонический ряд (1.25) не является абсолютно сходящимся рядом и доставляет пример условно сходящегося ряда.

## 2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

### 2.1. Основные определения.

Если в определениях (1.1) – (1.3) числовых рядов под элементами  $u_n$  понимать функции, то вместо числового возникает *функциональный* ряд. Мы начнем изучение функциональных рядов с самого простого случая – степенных рядов.

**Определение.** *Ряд вида*

$$\sigma(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n + \dots,$$

где  $\{a_n\}$  некоторая числовая последовательность,  $c$  вещественное число, называется *степенным рядом*.

Числа  $a_0, a_1 \dots$  называются *коэффициентами* степенного ряда. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением рядов вида

$$\sigma(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (2.1)$$

так как заменой  $y = x - c$  степенной ряд общего вида сводится к ряду (2.1).

Придавая переменной  $x$  различные числовые значения, из ряда (2.1) можно получить числовые ряды. Некоторые из них могут сходиться, другие расходиться. Множество тех  $x$ , для которых соответствующий числовой ряд сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда. Очевидно, что степенной ряд (2.1) сходится при  $x = 0$ . Таким образом, область сходимости любого степенного ряда заведомо не пуста.

**2.2. Радиус сходимости.** При нахождении области сходимости степенного ряда важную роль играет следующее утверждение.

**Теорема Абеля.** *Если степенной ряд сходится при некотором  $x_0 \neq 0$ , то он абсолютно сходится для всех  $x$ , по модулю строго меньших модуля  $x_0$ , т.е. при  $|x| < |x_0|$ . Если же степенной ряд расходится при  $x = x_1$ , то он расходится при всех  $x$  таких, что  $|x| > |x_1|$ .*

Как мы увидим в дальнейшем, существуют степенные ряды, область сходимости которых исчерпывается точкой  $x = 0$ . С другой стороны, некоторые степенные ряды сходятся на всей вещественной числовой оси. Общий же случай области сходимости описывается следующей теоремой.

**Теорема о существовании радиуса сходимости.** *Пусть степенной ряд  $\sigma(x)$  обладает тем свойством, что в точке  $x_0 > 0$  он сходится, а в точке*

$x_1 > x_0$  расходится. Тогда существует положительное число  $R$  такое, что  $x_0 < R < x_1$ , и для всех  $x$  из интервала  $(-R, R)$  ряд  $\sigma(x)$  сходится, а для всех  $x$  вне отрезка  $[-R, R]$  он расходится.

Положительное число  $R$ , описанное в Теореме, называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

### 2.3. Вычисление радиуса сходимости.

Приведем два метода вычисления радиуса сходимости степенного ряда, основанных на применениях признаков сходимости Коши и Даламбера для числовых рядов.

**Первая теорема о радиусе сходимости** Пусть существует отличный от нуля предел  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , тогда радиус сходимости степенного ряда равен обратному к  $K$  числу:  $R = K^{-1}$ .

Формула  $R = K^{-1}$  верна и в случаях  $K = \infty$  (радиус сходимости равен 0) и  $K = 0$  (ряд сходится при всех  $x$ ). В качестве примера вычислим радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n.$$

В данном случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

поэтому радиус сходимости ряда равен единице. Поскольку общие члены рядов, полученных подстановками  $x = \pm 1$  в степенной ряд, не стремятся к нулю, степенной ряд расходится в граничных точках своего интервала сходимости.

**Вторая теорема о радиусе сходимости.** Пусть существует отличный от нуля предел

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

тогда радиус сходимости степенного ряда равен  $D^{-1}$ .

Теорему можно применять также при  $D = 0$  и  $D = +\infty$ .

Воспользуемся теоремой для вычисления радиуса сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}.$$

В рассматриваемом примере

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s}{(n+1)^s} = 1$$

независимо от  $s$ , поэтому при всех значениях показателя  $s$  радиус сходимости рассматриваемого степенного ряда равен 1. Подставляя  $x = 1$ , получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

который по признаку Маклорена-Коши сходится при  $s > 1$  и расходится при остальных значениях  $s$ . При  $x = -1$  ряд, будучи знакоперевающимся, сходится при  $s > 0$ .

#### 2.4. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Будем предполагать, что рассматриваемые нами степенные ряды имеют ненулевой радиус сходимости. Изучим функциональные свойства суммы  $S(x)$  степенного ряда  $\sigma(x)$  (2.1) на интервале  $(-R, R)$ .

**Теорема о непрерывности суммы степенного ряда.** *Сумма степенного ряда непрерывна на интервале  $(-R, R)$ .*

Теорема о непрерывности позволяет сделать вывод о том, что сумма степенного ряда интегрируема на любом отрезке  $[\alpha, \beta]$ , целиком содержащимся внутри интервала сходимости.

**Теорема о почленной интегрируемости степенного ряда.** *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку внутри интервала сходимости:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k (\beta^{k+1} - \alpha^{k+1})}{k+1} \quad (2.2)$$

(интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от его членов.)

Соотношение (2.2) часто используют в том частном случае, когда нижний предел интегрирования равен нулю, а верхний предел переменный, тогда оно приобретает вид

$$\int_0^x S(x) dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \dots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (2.3)$$

**Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда.** *Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать:*

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}. \quad (2.4)$$

(Производная от суммы ряда равна сумме производных членов ряда.)

#### 2.5. Разложение функций в степенные ряды.

Если степенной ряд (2.1) имеет ненулевой радиус сходимости, то его сумма  $S(x)$  определена на интервале  $(-R, R)$ , непрерывна на этом интервале и имеет

производные любого порядка. В справедливости последнего утверждения можно убедиться с помощью повторного применения Теоремы о почленном дифференцировании.

**Теорема о совпадении частичных сумм степенного ряда и многочленов Тейлора его суммы.** Пусть радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, тогда его частичная сумма  $S_n(x)$  является многочленом Тейлора  $n$ -го порядка для суммы  $S(x)$  ряда в точке  $x = 0$ :

$$S(x) - S_n(x) = O(x^{n+1}), \quad x \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

**Следствие 1.** Для степенного ряда  $\sigma(x)$  с ненулевым радиусом сходимости коэффициенты ряда выражаются через его сумму  $S(x)$  по формулам

$$a_0 = S(0), \quad a_1 = \frac{S'(0)}{1!}, \quad \dots, \quad a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}, \quad \dots \quad (2.6)$$

**Следствие 2.** Для степенного ряда  $\sigma(x)$  с радиусом сходимости  $R > 0$  справедливо следующее выражение для остатка

$$r_n(x) = \frac{S^{(n+1)}(\eta(x))}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad x \in (-R, R), \quad 0 < |\eta(x)| < |x|. \quad (2.7)$$

При получении формулы (2.7) мы воспользовались остаточным член формулы Тейлора в форме Лагранжа. Последняя теорема делает естественной постановку следующего вопроса.

**Задача.** По заданной функции  $f(x)$ , область определения  $D_f$  которой содержит точку  $x = 0$ , построить степенной ряд  $\sigma_f(x)$  с ненулевым радиусом сходимости, который сходился бы к  $f(x)$  на некотором непустом подмножестве  $M_f$  пересечения  $D_{f,\sigma} = D_f \cap (-R, R)$  области определения функции и интервала сходимости ряда, или доказать отсутствие подобного ряда.

Если ряд, описанный в задаче существует, то говорят, что функция  $f(x)$  раскладывается в степенной ряд.

Следствия указывают метод решения поставленной задачи. Ясно, что в силу Следствия 1 степенной ряд  $\sigma_f(x)$ , в случае его существования, необходимо имеет вид

$$\sigma_f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (2.8)$$

Этот ряд называется *рядом Маклорена* функции  $f(x)$ .

Если ряд (2.8) имеет нулевой радиус сходимости, функция  $f(x)$  не может быть разложена в степенной ряд. Если же радиус сходимости ненулевой, и, следовательно, сумма ряда  $S(x)$  определена на интервале сходимости  $(-R, R)$ , следует убедиться в справедливости равенства  $f(x) = S(x)$  на некотором подмножестве  $M_f \subset D_{f,\sigma}$ . Достаточным условием сходимости частичных сумм

ряда к функции  $f(x)$  в точке  $x \in D_{f,\sigma}$  будет выполнение следующего предельного условия :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0 \quad \text{для всех } 0 < \eta < x \quad (2.9)$$

которое гарантирует, что остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, который дается формулой (3.29) Раздела 2, будет стремиться к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Проведенные рассуждения составляют доказательство следующей теоремы.

**Условия разложимости функции в степенной ряд.** *Необходимым условием разложимости функции  $f(x)$  в степенной ряд является существование у нее производных любого порядка в некоторой окрестности точки  $x = 0$ .*

*Если функция  $f(x)$  раскладывается в степенной ряд, то этот ряд  $\sigma_f(x)$  имеет вид (2.8).*

*Ряд (2.8) сходится к функции  $f(x)$  на некотором подмножестве  $M_f \subset D_f \cap (-R, R)$  в том случае, когда на  $M_f$  функция бесконечно дифференцируема и равенство (2.9) выполняется для всех  $x \in M_f$ .*

Для того, чтобы понять, почему даже в случае ненулевого радиуса сходимости ряд  $\sigma_f(x)$  может иметь суммой функцию, отличную от  $f(x)$ , и поэтому необходимо убеждаться в сходимости ряда именно к функции  $f(x)$ , рассмотрим поучительный пример.

**Пример 1.** Функция

$$g(x) = e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0, \quad g(0) = 0 \quad (2.10)$$

определена и бесконечно дифференцируема на всей вещественной числовой прямой. Действительно, если  $x \neq 0$ , то для производных от функции  $g(x)$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad g''(x) = \left( \frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right) e^{-1/x^2}, \dots, \\ g^{(k)}(x) &= \frac{Q_{2(k-1)}(x)}{x^{3k}} e^{-1/x^2}, \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $Q_{2(k-1)}(x)$  некоторый многочлен степени  $2(k-1)$ . Производные имеют равный нулю предел при  $x \rightarrow 0$ .

В то же время вычисление пределов разностных отношений, которые равны значениям производных в точке  $x = 0$ , приводят к тем же нулевым значениям производных. В самом деле,

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0, \quad g''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{-1/x^2}}{x^4} = 0, \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, все производные функции  $g(x)$  в точке  $x = 0$  непрерывны и равны нулю, поэтому члены ряда  $\sigma_g(x)$  (2.8) также равны нулю. Ряд Маклорена сходится для всех вещественных  $x$ , а его сумма тождественно равна нулю и не совпадает с функцией  $g(x)$  (2.10).

Рассмотренный пример показывает, что функции  $f(x)$  и  $f(x)+g(x)$ , где  $f(x)$  произвольная функция, а  $g(x)$  определена равенством (2.10), порождают один и тот же ряд (2.8), который может не сходиться ни к первой, ни ко второй из рассматриваемых функций.

## 2.6. Ряды Маклорена некоторых элементарных функций.

**Функция  $e^x$ .** Поскольку экспонента  $e^x$  играет заметную роль в математическом анализе и его приложениях, мы начнем с исследования ряда Маклорена для этой функции. Рассматриваемая функция определена и бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси. Поскольку  $(e^x)' = e^x$ , то все производные этой функции при  $x = 0$  равны единице. Следовательно, ряд Маклорена для функции  $e^x$  имеет вид

$$\sigma_{e^x}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2.12)$$

Вычислим радиус сходимости ряда (2.12), применяя Теорему 2.4

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, ряд (2.12) сходится во всех точках вещественной числовой оси.

Докажем, с помощью условия (2.9), что ряд (2.12) сходится к показательной функции  $e^x$  на всей вещественной оси. Для остатка ряда справедлива формула

$$r_n(x) = \frac{e^\eta x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < |\eta| < |x|. \quad (2.13)$$

Для  $x \geq 0$  справедливо неравенство  $e^\eta < e^x$ , а для отрицательных  $x$  неравенство  $e^\eta < 1$ . Поэтому

$$r_n(x) \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \geq 0, \quad |r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x < 0.$$

И в первом и во втором случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Следовательно, ряд Маклорена (2.12) сходится к функции  $e^x$  на всей вещественной оси:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (2.14)$$

**Тригонометрическая функция  $\sin x$ .** Функция  $\sin x$  определена и бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси. Вычисляя последовательно производные  $\sin x$  при  $x = 0$ , убеждаемся в справедливости соотношений

$$(\sin x)^{(2k+1)}|_{x=0} = (-1)^k, \quad (\sin x)^{(2k)}|_{x=0} = 0 \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Отсюда следует, что ряд Маклорена, порожденный функцией  $\sin x$  знакопередающийся и имеет вид

$$\sigma_{\sin x}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (2.15)$$

Рассматриваемый ряд обладает бесконечным радиусом сходимости.

Поскольку значение любой производной функции  $\sin x$  при любом значении аргумента по модулю не превосходит единицы, то справедливы следующие соотношения для остатка ряда (2.15):

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Таким образом, ряд (2.15) на всей вещественной прямой сходится к функции  $\sin x$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (2.16)$$

**Тригонометрическая функция  $\cos x$ .** Дифференцируя ряд (2.16), получаем разложение в степенной ряд функции  $\cos x$ :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (2.17)$$

**Функции  $\ln(1-x)$  и  $\operatorname{arctg}(x)$ .** Для функций  $\ln(1-x)$  и  $\operatorname{arctg}(x)$  разложения в ряд Маклорена могут быть получены с помощью Теоремы 2.6 о почленном интегрировании степенных рядов. Для этого рассмотрим формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (2.18)$$

которая имеет место при  $|x| < 1$ , т.е. для  $x$  из интервала  $(-1, 1)$  сходимости ряда в правой части формулы (2.18). Интегрируя этот ряд почленно, получим равенство

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad (2.19)$$

которое является разложением в ряд Маклорена функции  $\ln(1-x)$  на интервале  $(-1, 1)$ .

Сделаем в (2.18) замену  $x$  на  $-x^2$ . Получим знакопередающийся ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \dots$$

Проинтегрируем его почленно и придем к разложению Маклорена для функции  $\operatorname{arctg}(x)$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (2.20)$$



на интервале  $(-1, 1)$ .

Вычисляя радиусы сходимости рядов (2.19) и (2.20), приходим к выводу, что в обоих случаях радиус сходимости равен 1. Поэтому, несмотря на то, что функция  $\ln(1-x)$  определена и бесконечно дифференцируема на полу-бесконечном интервале  $(-\infty, 1)$ , а функция  $\operatorname{arctg} x$  определена и бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси, обе функции раскладываются в степенные ряды только на интервале  $(-1, 1)$ .

### 3. РЯДЫ ФУРЬЕ

#### 3.1. Введение.

Как было установлено в предыдущей главе, если функция  $f(x)$  раскладывается в степенной ряд на некотором интервале, то она на нем бесконечно дифференцируема. Это существенно ограничивает класс функций раскладывающихся в степенные ряды или определяемых с помощью степенных рядов. Ограничение может быть ослаблено, если обратиться к разложениям в иные ряды. В частности, представляют интерес ряды, членами которых являются тригонометрические функции синус и косинус.

Назовем *тригонометрическим многочленом* функцию вида

$$T_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (3.1)$$

где  $a_i, b_i$  числа, называемые *коэффициентами* многочлена. Многочлены (3.1) периодические функции с периодом  $2\pi$ . Свойство периодичности послужило причиной применения тригонометрических многочленов в прикладных задачах.

По-видимому, самой ранней теорией, в которой фактически применялись тригонометрические многочлены, была теория движения планет античного греческого математика и астронома Птолемея. В ней сделана попытка объяснить изменение видимого с Земли направления движения некоторых планет по небесной сфере на обратное посредством сложения движений по круговым орбитам (циклам и эпициклам). Движение по круговой орбите описывается формулами, в которые входят тригонометрические функции синус и косинус. Поскольку орбиты замкнуты, периоды обращения по циклу и эпициклам должны быть соизмеримы, что приводит к многочленам (3.1).

На Рис. 6.3.1. изображена орбита гипотетической планеты с тремя петлями обратного движения. Орбита параметрически задается уравнениями  $x(t) = \cos t + 4^{-2/3} \cos(4t)$ ,  $y(t) = \sin t + 4^{-2/3} \sin(4t)$ .

Петли рассматриваемой планеты объясняются в теории Птолемея движением планеты по круговой орбите (эпициклу), центр которой движется по циклу – другой круговой орбите радиуса в  $4^{2/3}$  раза больше (Рис. 6.3.2). Период обращения по эпициклу вчетверо меньше, чем период обращения по циклу.

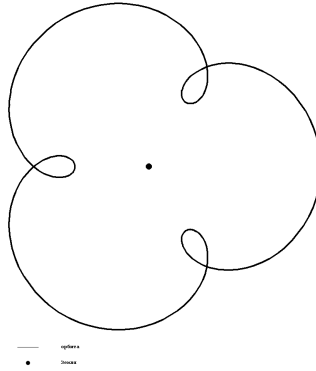


Рис. 6.3.1

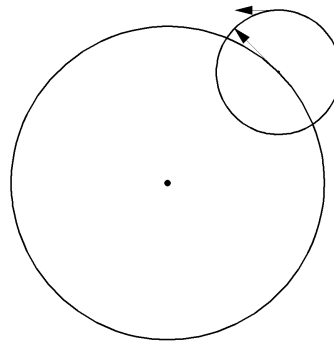


Рис. 6.3.2

Другими прикладными областями, где важную роль играют тригонометрические многочлены и последовательности таких многочленов, являются колебательные процессы в различных механических системах и колебания в электротехнических и радиотехнических устройствах. Такие устройства могут испытывать простейшие *гармонические* колебания, зависимость которых от времени задается с помощью синуса, косинуса или их линейной комбинации, а также более сложные, но периодические колебания. Рисунок Рис.6.3.3 позволяет составить представление о том, как выглядит график функции, являющейся линейной комбинацией  $\sin x - 0.7 \sin 2x + 0.5 \sin 3x$  всего лишь трех синусов.

### 3.2. Разложение в тригонометрический ряд.

Рассмотрим задачу *приближения* тригонометрическими многочленами (3.1) заданной периодической с периодом  $2\pi$  функции  $f(x)$ . Качество приближения одной функции  $f(x)$  последовательностью  $g_n(x)$  других функций на некотором множестве  $A$ , входящем в общую область определения рассматриваемых функций, оценивается свойствами, которыми обладает на этом множестве разность  $r_n(x) = f(x) - g_n(x)$ .

Задача *интерполяции* функции  $f(x)$  функциями  $g_n(x)$  возникает тогда, когда требуют обращения в нуль разности  $r_n(x)$  на некотором конечном подмножестве  $Z_n$  точек множества  $A$ .

В случае, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N(\varepsilon)$ , что при

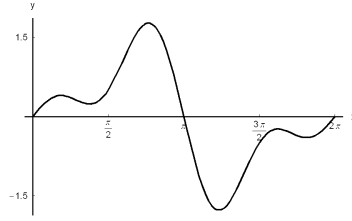


Рис. 6.3.3

всех  $n > N(\varepsilon)$  и всех  $x \in A$  выполняется неравенство  $|r_n(x)| < \varepsilon$ , говорят, что функции  $g_n(x)$  *равномерно приближают (аппроксимируют)* функцию  $f(x)$  на отрезке  $A$ .

Если для любого  $\varepsilon$  существует такой номер  $N(\varepsilon)$ , что при всех  $n > N(\varepsilon)$  выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} r_n^2(x) dx < \varepsilon,$$

говорят, что последовательность  $g_n(x)$  приближает  $f(x)$  в *среднем квадратичном*.

Мы будем полагать  $g_n(x) = T_n(x)$ , т.е. будем рассматривать задачу приближения периодических функций тригонометрическими многочленами. Периодическая функция полностью определяется своими значениями на любом отрезке длины  $2\pi$ , поэтому всюду в дальнейшем будем полагать, что множество  $A$  есть отрезок  $[-\pi, \pi]$ .

Если последовательность тригонометрических многочленов удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (3.2)$$

где  $a_n, b_n$  числовые последовательности, то возникает задача о *разложении функции в тригонометрический ряд*. Действительно, если последовательность тригонометрических многочленов удовлетворяет соотношению (3.2), то  $T_n(x)$  можно рассматривать как частичные суммы ряда

$$\sigma(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (3.3)$$

**Определение.** Пусть ряд (3.3) сходится на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и  $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$  его сумма. Функция  $f(x)$  раскладывается в тригонометрический ряд  $\sigma(x)$ , если во всех точках отрезка выполняется равенство  $f(x) = T(x)$ .

Тот факт, что функция  $f(x)$  раскладывается в тригонометрический ряд символически записывают в виде

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (3.4)$$

### 3.3. Периодические продолжения функций.

Если на отрезке  $[-\pi, \pi]$  рассматривается какая-то функция  $f(x)$ , то ее можно единственным образом *продолжить* до периодической с периодом  $2\pi$  функции на всей вещественной числовой оси следующим образом. Если точка  $\alpha$  не принадлежит отрезку  $[-\pi, \pi]$ , то найдется отрезок  $A_k$  вида  $[(2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi]$ , где  $k$  целое число, которому эта точка принадлежит. Точка  $\alpha - 2k\pi$ , очевидно, принадлежит отрезку  $[-\pi, \pi]$ , поэтому полагаем  $f(\alpha) = f(\alpha - 2k\pi)$ . Если  $\alpha$  левый конец отрезка  $A_k$ , то его можно одновременно рассматривать и как правый конец отрезка  $A_{k-1}$ . Поэтому, если значения функции  $f(x)$  в точках  $-\pi$  и  $\pi$  не совпадают, то при продолжении функции возникают точки разрыва первого рода. Сказанное справедливо также и для правого конца отрезка  $A_k$ .

Рассмотрим три характерных примера кусочно дифференцируемых на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функций и их периодических продолжений. Функция, называемая неформально “ступенькой”, задается соотношениями

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{если } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Она имеет единственную точку разрыва первого рода в начале координат. Ее график представлен на Рис. 6.3.4, а график периодического продолжения этой функции содержится на Рис. 6.3.5.

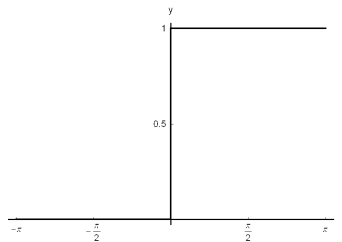


Рис. 6.3.4

У продолженной функции точками разрыва являются точки  $k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$

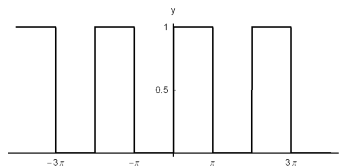


Рис. 6.3.5

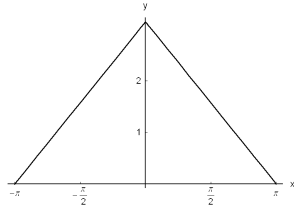


Рис. 6.3.6

Функция

$$g(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{если } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x, & \text{если } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

имеет график, показанный на Рис. 6.3.6.

График ее периодического продолжения представлен на Рис. 6.3.7.

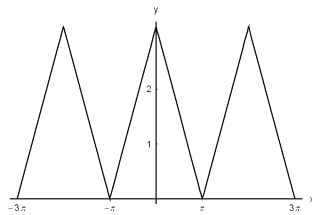


Рис. 6.3.7

Линейная функция  $f(x) = x$ , определенная и непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , при ее периодическом продолжении порождает функцию с точками разрыва первого рода в точках  $(2k + 1)\pi$  (см. Рис. 6.3.8).

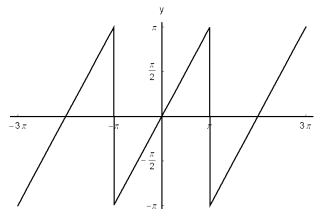


Рис. 6.3.8

### 3.4. Ряд Фурье.

Рассмотрим вопрос об определении коэффициентов тригонометрического ряда (3.4). Всюду в дальнейшем в этой главе мы будем рассматривать только кусочно-дифференцируемые на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется кусочно дифференцируемой на отрезке  $[a, b]$ , если он точками  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$  разбивается на конечное число меньших отрезков так, что на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  функция дифференцируема в каждой внутренней точке, а на концах отрезка функция и ее первая производная имеют конечные пределы слева и справа:

$$f(x_j - 0) = \lim_{h \rightarrow +0} f(x_j - h), \quad f(x_j + 0) = \lim_{h \rightarrow +0} f(x_j + h),$$

$$f'(x_j - 0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_j - h) - f(x_j - 0)}{-h}, \quad f'(x_j + 0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_j + h) - f(x_j + 0)}{h}.$$

Сделаем предположение, что для некоторой интегрируемой на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции  $f(x)$  ряд (3.3) не только сходится к этой функции, но и его можно почленно интегрировать. Считая предположение выполненным, проинтегрируем равенство (3.4) по переменной  $x$  от  $-\pi$  до  $\pi$ . В силу того, что интегралы от функций  $\cos kx$  и  $\sin kx$  по отрезку  $[-\pi, \pi]$  для натуральных  $k \neq 0$  обращаются в нуль, получаем равенство

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (3.5)$$

Для дальнейшего нам понадобятся соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = 0,$$

$$k \neq n$$

которые легко вывести, пользуясь тригонометрическими тождествами

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha,$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta),$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta),$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta). \quad (3.6)$$

Умножим обе части равенства (3.4) на  $\cos nx$  и проинтегрируем получившееся соотношение от  $-\pi$  до  $\pi$ . В силу равенств (3.6) в результате получаем, что

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Аналогично, для коэффициентов  $b_n$  получаем равенства

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x dx, n = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

**Теорема о коэффициентах сходящегося к функции  $f(x)$  тригонометрического ряда.** Пусть тригонометрический ряд (3.3) сходится к функции  $f(x)$  и его можно почленно интегрировать, тогда коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам (3.5), (3.7), (3.8).

Подчеркнем, что доказанная теорема вовсе не утверждает, что для любой функции  $f(x)$ , для которой интегралы в правых частях формул (3.5), (3.7), (3.8) существуют, тригонометрический ряд (3.3) с коэффициентами, вычисленными по этим формулам, сходится к  $f(x)$ . Ниже мы специально займемся вопросом о сходимости тригонометрического ряда и об условиях его сходимости к порождающей этот ряд функции  $f(x)$ .

**Определение.** Тригонометрический ряд (3.3), коэффициенты которого определяются формулами (3.5), (3.7), (3.8), называется рядом Фурье функции  $f(x)$  независимо от того, сходится ли фактически ряд (3.3) к функции  $f(x)$ .

Оказывается, что частичные суммы ряда Фурье обладают интересным экстремальным свойством.

**Теорема о наилучшем приближении.** При любом натуральном  $n$  частичная сумма  $T_n(x)$  ряда Фурье (3.4), порожденной функцией  $f(x)$ , дает наилучшее среднеквадратичное приближение функции  $f(x)$  среди всех тригонометрических многочленов  $n$ -го порядка. А именно, среднеквадратичное уклонение

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P_n(x))^2 dx, \quad (3.9)$$

где  $P_n(x)$  произвольный тригонометрический полином  $n$ -го порядка, принимает минимальное значение, если  $P_n(x)$  совпадает с  $n$ -ой частичной суммой  $T_n(x)$  ряда Фурье.

Это минимальное значение уклонения равно

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \sum_{k=0}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (3.10)$$

### 3.5. Дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим задачу интерполяции периодической функции  $f(x)$  тригонометрическими многочленами (3.1). Поскольку обозначения  $a_k, b_k$  удобно сохранить за коэффициентами частичных сумм ряда Фурье, в настоящем параграфе коэффициенты тригонометрических полиномов будут обозначаться через  $\alpha_k, \beta_k$ .

В задаче интерполяции требуют, чтобы значения тригонометрического многочлена и значения интерполируемой функции совпадали в конечном числе



точек отрезка  $[-\pi, \pi]$ . Поскольку тригонометрический многочлен  $T_n(x)$  содержит  $2n + 1$  подлежащих определению коэффициентов, то выбирают  $2n + 1$  точек. Формулы для коэффициентов получаются простыми, если выбрать равноотстоящие точки, расположенные симметрично относительно начала координат. Положим, что выбраны точки

$$x_j = j h, \quad j = -n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{2\pi}{2n + 1}. \quad (3.11)$$

Точки  $x_j$  называют узлами интерполяции, а величину  $h$ , равную расстоянию между точками – шагом дискретизации. Тригонометрический многочлен  $T_n(x)$  будет интерполяционным многочленом для функции  $f(x)$ , если выполнены равенства

$$f(x_j) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(k j h) + \beta_k \sin(k j h)), \quad j = -n, \dots, n. \quad (3.12)$$

Заметим, что концы отрезка  $[-\pi, \pi]$  не совпадают с узлами интерполяции. Это сделано по следующим причинам. Во-первых, если функция  $f(x)$  непрерывна в точках  $-\pi, \pi$ , то число уравнений (3.12) фактически на единицу меньше, чем число коэффициентов, так как уравнения в узлах  $-\pi$  и  $\pi$  в силу периодичности тригонометрического многочлена одинаковы. Во-вторых, если функция  $f(x)$  имеет разные значения на концах отрезка, т.е. имеет разрыв первого рода в этих точках, то система уравнений (3.12) не имеет решений. В самом деле, в (3.12) правые части при  $x = -\pi$  и  $x = \pi$  одинаковы, а левые различны!

Однако при выборе точек (3.11) в качестве узлов интерполяции расстояния между концами отрезка и крайними узлами интерполяции  $|\pi - 2\pi/(2n + 1)|$  и  $|\pi - 2\pi/(2n + 1)|$  равные  $\pi/(2n + 1)$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Это позволяет надеяться на хорошую аппроксимацию функции и в окрестностях концов отрезка  $[-\pi, \pi]$ .

Для того, чтобы из соотношений (3.12) вывести формулы для коэффициентов  $\alpha_k, \beta_k$ , воспользуемся следующим тригонометрическим равенством

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos j \alpha = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (3.13)$$

Его легко получить, если умножить левую часть (3.13) на  $2 \sin(\alpha/2)$  и каждое произведение  $2 \sin(\alpha/2) \cos(j \alpha)$  заменить по формулам тригонометрии на разность  $\sin(j + 1/2) \alpha - \sin(j - 1/2) \alpha$ . Тогда в сумме взаимно сократятся все члены, кроме последнего.

Если в (3.13) положить угол  $\alpha$  равным шагу дискретизации  $h = 2\pi/(2n + 1)$ , то синус в числителе правой части формулы обратится в нуль. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos j h = 0, \quad h = \frac{2\pi}{2n + 1}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим сумму соотношений (3.12):

$$\sum_{j=-n}^n f(x_j) = (2n+1)\alpha_0 + \sum_{j=-n}^n \left( \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(kjh) + \beta_k \sin(kjh)) \right). \quad (3.15)$$

В правой части (3.15) переставим местами суммирование по индексу  $j$  и по индексу  $k$ , иначе говоря, сгруппируем коэффициенты при различных  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ :

$$\sum_{j=-n}^n f(x_j) = (2n+1)\alpha_0 + \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \sum_{j=-n}^n \cos kjh + \beta_k \sum_{j=-n}^n \sin(kjh) \right). \quad (3.16)$$

Сумма

$$\sum_{j=-n}^n \sin kjh = 0 \quad (3.17)$$

в силу нечетности тригонометрической функции синус. Ввиду четности функции косинус сумму, являющуюся коэффициентом при  $\alpha_k$  в (3.16), можно записать в виде

$$\sum_{j=-n}^n \cos(kjh) = 1 + 2 \sum_{j=1}^n \cos(kjh).$$

Правая часть полученного соотношения равна нулю в соответствии с (3.14).

Итак, суммируя равенства (3.12), получаем следующее выражение для коэффициента  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_j), \quad x_j = jh, \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}. \quad (3.18)$$

Чтобы найти остальные коэффициенты  $\alpha_k$ , умножим каждое равенство (3.12) на  $\cos(mjh)$ , где  $m$  какое-то натуральное число, заключенное между 1 и  $n$ . Полученные соотношения сложим. Вновь изменяя порядок суммирования, получим, в силу нечетности функции синус, что все коэффициенты при  $\beta_k$  обращаются в нуль. Коэффициенты при  $\alpha_k$  преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^n \cos(mjh) \cos(kjh) &= \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n \cos(m+k)jh + \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^n \cos(m-k)jh = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos(m+k)jh + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos(m-k)jh. \end{aligned} \quad (3.19)$$

При любых  $m$  и  $k$  первые два члена в последней строке (3.19) обращаются в нуль в силу (3.14). Последние два слагаемых обращаются в нуль при  $m \neq k$ , а если  $m = k$  то эти слагаемые в сумме дают  $n + 1/2$ . Следовательно, получаем выражение для коэффициента  $\alpha_m$ :

$$\alpha_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_j) \cos x_j, \quad x_j = jh, \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}. \quad (3.20)$$

Для коэффициентов  $\beta_k$  аналогичные преобразования приводят к выражениям

$$\beta_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_j) \sin x_j, \quad x_j = j h, \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}. \quad (3.21)$$

**Определение.** Совокупность коэффициентов  $\alpha_m, \beta_m$ , полученных по формулам (3.28), (3.20), (3.21) называется дискретным преобразованием Фурье функции  $f(x)$ .

Иногда тригонометрический многочлен  $T_n(x)$  с коэффициентами (3.18), (3.20), (3.21) также называют дискретным преобразованием Фурье.

Отметим одно существенное обстоятельство. Коэффициенты  $\alpha_k, \beta_k$  интерполяционного многочлена  $T_n(x)$  зависят, на самом деле, от номера  $n$ , и их следовало бы обозначать через  $\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}$ . Таким образом, последовательность интерполяционных тригонометрических многочленов

$$T_n(x) = \alpha_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k^{(n)} \cos kx + \beta_k^{(n)} \sin kx \right) \quad (3.22)$$

в общем случае не является последовательностью частичных сумм какого-либо ряда.

**Теорема о пределах коэффициентов интерполяционных тригонометрических многочленов.** Пусть функция  $f(x)$  кусочно-дифференцируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , тогда коэффициенты  $\alpha_k^{(n)}, \beta_k^{(n)}$  тригонометрических многочленов (3.22) интерполирующих функцию  $f(x)$ , вычисляемые по формулам (3.18), (3.20) (3.21), при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к соответствующим коэффициентам Фурье  $a_k, b_k$  функции  $f(x)$ .

### 3.6. Сходимость рядов Фурье.

Приведем без доказательства важнейший результат относительно сходимости рядов Фурье.

**Основная теорема о рядах Фурье.** Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции  $f(x)$  сходится в любой точке  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Его сумма равна  $f(\alpha)$ , если в точке  $\alpha$  функция непрерывна. Если же функция терпит в точке  $\alpha$  разрыв, то сумма ряда Фурье равна полусумме левого и правого пределов:

$$\frac{f(\alpha - 0) + f(\alpha + 0)}{2}.$$

### 3.7. Примеры разложения в ряд Фурье. Эффект Гиббса.

Познакомимся с рядами Фурье кусочно-дифференцируемых функций, ранее рассмотренных нами в параграфе 3 настоящей главы.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $\theta(x)$ , график которой представлен на Рис. 5.3.4, а график ее периодического продолжения – на Рис. 5.3.6. Вычисляя

коэффициенты Фурье рассматриваемой функции, получим

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1, \\
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} = 0, \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Из (3.23) следует, что коэффициенты при функциях синус для четных  $k$  обращаются в нуль, а для нечетных  $k$  равны  $2/(\pi k)$ . Таким образом, справедливо разложение

$$\theta(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}. \tag{3.24}$$

График функции  $\theta(x)$  и график частичной суммы

$$S_5(x) = \frac{1}{2} + \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \tag{3.25}$$

ее ряда Фурье (3.25) представлены на Рис. 6.3.9.

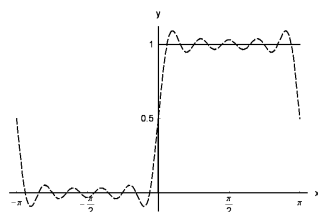


Рис. 6.3.9

В соответствии с Теоремой о сходимости рядов Фурье, в точках разрыва периодического продолжения функции  $\theta(x)$  частичная сумма  $S_5(x)$  принимает значения близкие, а в данном случае просто равные, 0.5. Кроме того, рисунок демонстрирует колебательный характер аппроксимации постоянных значений рассматриваемой функции, особенности которого становятся более наглядными при сравнении приближений функции частичными суммами  $S_5(x)$  и  $S_9(x)$ . График последней суммы представлен на Рис. 6.3.10.

Поскольку частичные суммы ряда Фурье (3.25) нечетные функции, ограничимся рассмотрением области  $x > 0$ . Видно, что вблизи от точек разрыва

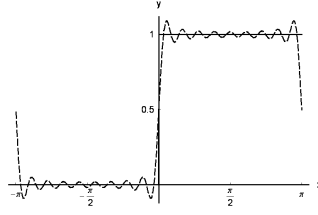


Рис. 6.3.10

сосредоточены наибольшие отклонения значений частичных сумм от значений функции  $\theta(x)$ . Число экстремальных точек частичной суммы равно ее степени как тригонометрического многочлена, при этом число локальных максимумов нечетно, а локальных минимумов – четно. Наибольшие значения частичных сумм превосходят значения функции и не уменьшаются заметным образом при увеличении номера частичной суммы.

Подтвердим эти выводы вычислениями. Начнем с частичной суммы  $S_5(x)$ . Найдем положения ее локальных экстремумов. Для этого вычислим первую производную

$$S_5'(x) = \frac{2}{\pi} (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 6x}{\sin x}.$$

Приравнявая ее нулю, находим, что на интервале  $(0, \pi)$  имеется 5 экстремумов:  $\pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$  и  $5\pi/6$ . Три из них:  $\pi/6, \pi/2$  и  $5\pi/6$  – локальные максимумы, остальные – локальные минимумы. Подставляя значения локальных максимумов в частичную сумму  $S_5(x)$ , получаем, что  $S_5(\pi/6) = S_5(5\pi/6) = 0.5 + 28/(15\pi) > 1$ , что больше, чем  $S_5(\pi/2) = 0.5 + 26/(15\pi) > 1$ .

В общем случае справедлива следующая формула для производной от частичной суммы  $S_n(x)$ :

$$S_n'(x) = \frac{2}{\pi} (\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x},$$

поэтому на интервале  $(0, \pi)$  эта частичная сумма имеет  $2n-1$  экстремальных точек. Ближайшая точка  $x_{1n} = \pi/(2n)$  есть точка локального максимума. При  $n \rightarrow \infty$  она стремится к 0. Докажем, что значения частичных сумм в этой точке стремятся к некоторому числу  $\mu_0 > 1$ .

Воспользуемся равенством

$$\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \int_0^x \cos(2k-1)y \, dy$$

и запишем частичную сумму  $S_n(x)$  в виде

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^x (\cos y + \cos 3y + \dots + \cos(2n-1)y) \, dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2ny)}{\sin y} \, dy. \quad (3.26)$$

С помощью (3.26) получаем, что

$$S_n(x_{1n}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{x_{1n}} \frac{\sin 2ny}{\sin y} dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin z}{\sin \frac{z}{2n}} dz.$$

Устремляя  $n \rightarrow \infty$ , получаем, что

$$\mu_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_{1n}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz = 1.08949 \dots$$

**Эффект Гиббса** для рассматриваемой функции состоит в следующем.

1) Частичная сумма  $S_{2n-1}(x)$  ряда Фурье (3.24) имеет на отрезке  $[0, \pi]$  локальные экстремумы в точках  $x_j = j\pi/(2n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n-1$ .

2) Эти локальные экстремумы являются локальными максимумами при  $j$  нечетных и минимумами при  $j$  четных. Значения суммы в симметричных относительно  $\pi/2$  точках локального экстремума совпадают.

3) При возрастании  $x_j$  от  $x_1$  до  $x_n = \pi/2$  максимальные значения убывают, а минимальные значения возрастают.

4) Наибольшее значение в точке  $x_1$  при  $n \rightarrow \infty$ , монотонно убывая, стремится к пределу  $\mu_0 > \theta(x_1)$ .

Эти характерные черты эффекта Гиббса с соответствующими изменениями свойственны поведению частичных сумм рядов Фурье функций в окрестностях их точек разрыва первого рода.

Заключительное замечание, относящееся к ряду Фурье (3.24), состоит в том, что с его помощью можно просуммировать знакопередающийся числовой ряд (Грегори-Лейбница)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (3.27)$$

Действительно, полагая в (3.24)  $x = \pi/2$ , получаем соотношение

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}.$$

Из него следует, что ряд (3.27) имеет сумму равную  $\pi/4$ .

**Пример 2.** Для функции  $g(x) = x + \pi$  для  $-\pi \leq x \leq 0$  и  $g(x) = \pi - x$  для  $0 < x < \pi$ , график которой представлен на Рис. 5.3.6, ряд Фурье имеет вид

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \quad (3.28)$$

С помощью формулы (3.28) легко просуммировать ряд из обратных квадратов нечетных чисел. Полагая в (3.28)  $x = 0$ , получаем, что

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

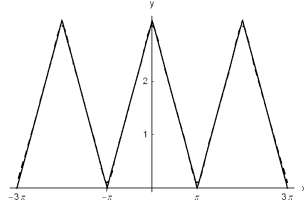


Рис. 6.3.11

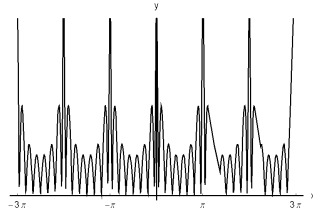


Рис. 6.3.12

Рисунок Рис. 6.3.11 показывает, что график частичной суммы

$$S_5(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} \right)$$

всюду близок к графику функции  $g(x)$ .

Однако Рис. 6.3.12, на котором нарисован модуль разности функции и рассматриваемой частичной суммы, демонстрирует, что точность приближения значительно уменьшается в окрестности точек, в которых производная  $g'(x)$  терпит разрыв первого рода.

**Пример 3.** Для функции  $f(x) = x$ , определенной на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , справедливо равенство

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k}. \quad (3.29)$$

Периодическое продолжение этой функции имеет разрывы первого рода в точках  $(2k+1)\pi$ , где  $k$  нечетные целые числа. Рисунок Рис. 6.3.13, на котором изображены графики продолженной функции и частичной суммы  $S_5(x)$  ряда (3.29), демонстрирует наличие эффекта Гиббса, который нами обсуждался в Пример 1.

Из рисунка явствует, что качество аппроксимации рассматриваемой функции частичной суммой  $S_5(x)$  ее ряда Фурье значительно хуже, чем аппроксимация непрерывной функцией  $g(x)$  из предыдущего примера. Это обусловлено точками разрыва периодического продолжения рассматриваемой функции.

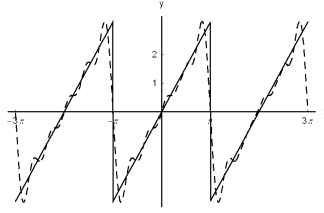


Рис. 6.3.13

### 3.8. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на произвольном отрезке.

Наиболее просто перенести развитую ранее теорию на случай отрезка  $[-l, l]$ ,  $l \neq \pi$ . Для этого достаточно обратимой заменой переменной

$$y = \frac{\pi x}{l} \quad (3.30)$$

отобразить его в отрезок  $[-\pi, \pi]$ . При такой замене произвольная кусочно-дифференцируемая функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[-l, l]$ , преобразуется в кусочно-дифференцируемую функцию  $\phi(y) = f(l y/\pi)$ , заданную на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Функция  $\phi(y)$  может быть разложена в ряд Фурье

$$\phi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k y + b_k \sin k y), \quad (3.31)$$

коэффициенты которого определяются формулами (3.27?). Подставляя в (3.31) вместо  $y$  его выражение (3.30) через  $x$ , приходим к следующему разложению исходной функции  $f(x)$  в тригонометрический ряд, который также называется рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k \pi x}{l} + b_k \sin \frac{k \pi x}{l} \right). \quad (3.32)$$

Если в интегралах, входящих в формулы (3.27?), также сделать замену переменной (3.30), то можно получить следующие формулы, выражающие коэффициенты  $a_k, b_k$  непосредственно через интегралы от функции  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y) \cos k y \, dy = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k \pi x}{l} \, dx, & k = 0, 1, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(y) \sin k y \, dy = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k \pi x}{l} \, dx, & k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

Кусочно-дифференцируемую функцию  $f(x)$ , определенную на произвольном отрезке  $[a, b]$ ,  $b > a$  длины  $L = b - a$ , также можно разложить в ряд Фурье



(3.32), в котором  $l = L/2$ . Коэффициенты ряда (3.32) в рассматриваемом случае вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{k \pi x}{l} dx, & k = 0, 1, \dots \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{k \pi x}{l} dx, & k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

Проще всего в этом убедиться, заметив, что функции  $\cos(k \pi x/l)$  и  $\sin(k \pi x/l)$  удовлетворяют на рассматриваемом отрезке  $[a, b]$  соотношениям, аналогичным соотношениям (3.6):

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx &= \int_a^b \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx = l, \\ \int_a^b \cos \frac{k \pi x}{l} \cos \frac{n \pi x}{l} dx &= \int_a^b \cos \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} dx = \\ &= \int_a^b \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} dx = 0, & k \neq n. \end{aligned}$$

Следовательно, умножая равенство (3.31) последовательно на  $\cos(m \pi x/l)$  и  $\sin(m \pi x/l)$  и интегрируя от  $a$  до  $b$ , получаем формулы (3.34). Дальнейшие рассуждения, приводящие к Основной теореме о сходимости рядов Фурье, почти дословно повторяют рассуждения, относящиеся к отрезку  $[-\pi, \pi]$ .

## 4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

**4.1. Основные понятия.** Ряды, элементами которых являются функции, рассматривались нами в двух предыдущих главах. При изучении степенных рядов и рядов Фурье основной акцент делался на исследовании качества приближения заданной функции порождаемым ею рядом. В настоящей главе основное внимание будет уделено свойствам непрерывности, дифференцируемости и другим функциональным свойствам, которыми может обладать сумма функционального ряда. Предварительно дадим необходимые определения.

**Определение.** *Ряд*

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad (4.1)$$

*элементами которого являются функции, имеющие одну и ту же область определения  $D$ , называется функциональным рядом.*

В качестве области  $D$  мы всюду в дальнейшем будем понимать интервал  $(a, b)$ , полуинтервалы  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ , в том числе бесконечные или полубесконечные, или отрезок  $[a, b]$ .

Положим аргумент каждого элемента ряда равным  $\alpha \in D$ , тогда ряд (4.1) станет числовым. Если полученный числовой ряд сходится, то скажем, что точка  $\alpha$  принадлежит области определения суммы  $S(x)$  ряда (4.1). В дальнейшем будем предполагать, что областью определения суммы  $S(x)$  ряда является  $D$ , т.е. числовые ряды, получаемые подстановкой любого числа из  $D$  в качестве аргумента функций  $f_n(x)$ , сходятся.

В каждой точке области  $D$  функция  $S(x)$ , по определению, является пределом последовательности функций  $S_n(x)$  — частичных сумм ряда (4.1):

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad \text{где} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x). \quad (4.2)$$

Таким образом, изучение функциональных свойств суммы ряда (4.1) сводится к изучению свойств пределов функциональных последовательностей.

Пусть элементы  $f_n(x)$  непрерывны на  $D$  функции. Первый вопрос относительно свойств суммы  $S(x)$  ряда, который мы можем задать: будет ли сумма ряда непрерывной на  $D$  функцией? Поскольку каждая частичная сумма  $S_n(x)$  ряда (4.1) непрерывная функция, вопрос можно сформулировать так: будет ли предел последовательности непрерывных функций непрерывной функцией? Оказывается, что иногда будет, а иногда нет.

Рассмотрим, например, функциональную последовательность, элементами которой являются непрерывные функции

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}, \quad (4.3)$$

определенные на отрезке  $[-1, 1]$ . Легко установить, что если  $\alpha \in [-1, 1]$  и  $\alpha \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\alpha) = 0$ . Если же  $\alpha = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(0) = 1$ . Следовательно, предельная функция  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  имеет устранимый разрыв в точке  $\alpha = 0$ .

В то же время последовательность функций

$$h_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad (4.4)$$

на отрезке  $[-1, 1]$  имеет пределом тождественно равную нулю и поэтому непрерывную функцию.

Как мы увидим, ключевую роль в вопросе о непрерывности суммы функционального ряда, элементами которого являются непрерывные функции, играет характер сходимости к пределу его частичных сумм.

**4.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей.** Сходимость числовых последовательностей  $S_n(\alpha)$  частичных сумм ряда (4.1) при  $x = \alpha$  к сумме ряда  $S(\alpha)$  означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $N(\varepsilon, \alpha)$ , что выполняется соотношение

$$|S(\alpha) - S_n(\alpha)| < \varepsilon, \quad \text{при } n > N(\varepsilon, \alpha). \quad (4.5)$$

Если же число  $N(\varepsilon, \alpha)$  в (4.5) может быть выбрано не зависящим от  $\alpha$ , то говорят о *равномерной сходимости* частичных сумм  $S_n(x)$  функционального ряда  $\sigma(x)$  к сумме  $S(x)$  этого ряда.

Дадим общее определение равномерной сходимости функциональных последовательностей. Рассмотрим последовательность  $\varphi_n(x)$ , элементами которой являются функции с общей областью определения  $D$ .

**Определение.** *Функциональная последовательность  $\varphi_n(x)$  сходится к функции  $\Phi(x)$  равномерно на  $D$ , если выполняются следующие условия:*

- 1) *числовая последовательность  $\varphi_n(\alpha)$  сходится к  $\Phi(\alpha)$  при каждом  $\alpha \in D$ ,*
- 2) *для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое натуральное число  $N(\varepsilon) > 0$ , что для каждого  $x \in D$  выполняются соотношения*

$$|\Phi(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{если } n > N(\varepsilon). \quad (4.6)$$

Рассмотрим функциональную последовательность  $g_n(x)$ , элементы которой задаются формулой (4.3), и графики первого, четвертого и седьмого элементов последовательности, представленных на Рис. 6.4.1. На рисунке проведена также прямая  $y = 0.25$ .

Рисунок позволяет предположить, что при любом  $\alpha \neq 0$  числовая последовательность  $g_n(\alpha)$ , монотонно убывая стремится к нулю. Но каково бы ни было

Рис. 6.4.1

$\varepsilon > 0$  и каково бы ни был номер  $n$  элемента последовательности, найдется такое число  $a(\varepsilon, n) > 0$  в окрестности 0, что  $g_n(x) > \varepsilon$  при  $|x| < a(\varepsilon, n)$ . Иными словами, сходимость функциональной последовательности к нулю на любом отрезке  $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$ ,  $a > 0$  или  $b < 0$  не является равномерной.

Нетрудно подтвердить эти наблюдения вычислениями. Действительно, как бы ни был велик номер  $n$  элемента последовательности, при  $x = 1/n$  функция  $g_n(x)$  принимает значение  $1/2$ .

Обратимся теперь к функциональной последовательности  $h_n(x)$ , элементы которой задаются формулой (4.4). Графики функций  $h_n(x)$  с номерами  $n = 2, 5, 8$  представлены на Рис. 6.4.2.

Рис. 6.4.2

Поведение функций  $h_n(x)$  отличается от поведения функций  $g_n(x)$  в том отношении, что максимальные и минимальные значения функций  $h_n(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  по модулю равны  $1/(2n)$ . Следовательно,  $|h_n(x)| < \varepsilon$  при  $n > 1/(2\varepsilon)$ . Таким образом, сходимость функциональной последовательности (4.4) к нулю равномерная на отрезке  $[-1, 1]$ .

**4.3. Непрерывность предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности.** В этом параграфе рассматриваются равномерно сходящиеся функциональные последовательности.

**Теорема о непрерывности предела функциональной последовательности.** Пусть функциональная последовательность  $\varphi_n(x)$  сходится равномерно на  $D$  к предельной функции  $\Phi(x)$  и пусть все функции  $\varphi_n(x)$  непрерывны в точке  $\alpha \in D$ . Тогда функция  $\Phi(x)$  также непрерывна в точке  $\alpha$ .

**Следствие.** Если функции  $\varphi_n(x)$  непрерывны на  $D$  и последовательность  $\varphi_n(x)$  сходится к предельной функции  $\Phi(x)$  равномерно на  $D$ , то функция  $\Phi(x)$  непрерывна на  $D$ .

**4.4. Непрерывность суммы функционального ряда.** Вернемся к функциональным рядам.

**Определение.** Функциональный ряд  $\sigma(x)$  сходится равномерно на  $D$  к своей сумме  $S(x)$ , если функциональная последовательность  $S_n(x)$  частичных сумм ряда сходится к  $S(x)$  равномерно.

Непосредственным следствием Теоремы о непрерывности предела последовательности функций является следующее утверждение.

**Теорема о непрерывности предела функционального ряда.** Пусть функциональный ряд  $\sigma(x)$ , элементы которого непрерывны на  $D$ , сходится на  $D$  равномерно, тогда его сумма непрерывна на  $D$  функция.

В связи с последней теоремой представляют интерес признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Остановимся на простейшем из них.

**Признак Вейерштрасса.** Пусть члены  $f_n(x)$  функционального ряда  $\sigma(x)$  в области  $D$  удовлетворяют неравенствам

$$|f_n(x)| \leq c_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.7)$$

где  $c_n$  – элементы сходящегося числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad (4.8)$$

тогда ряд  $\sigma(x)$  сходится равномерно.

Применим признак Вейерштрасса для исследования непрерывности суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}. \quad (4.9)$$

Очевидно, что при любом  $x$  выполняются неравенства

$$\frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится, поэтому ряд (4.9) сходится равномерно на всей вещественной оси, и его сумма непрерывна функция.

**4.5. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.** В то время как степенные ряды можно почленно интегрировать на любом отрезке их интервала сходимости, для почленного интегрирования произвольных функциональных рядов требуется выполнение дополнительных условий.

**Теорема о почленном интегрировании функциональных рядов.** Пусть элементы  $f_k(x)$  функционального ряда  $\sigma(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , и ряд

$\sigma(x)$  сходится равномерно на  $[a, b]$  к своей сумме  $S(x)$ , тогда ряд  $\sigma(x)$  можно почленно интегрировать по отрезку  $[a, b]$ , т.е. справедливо следующее соотношение

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_k(x) dx + \dots$$

Опираясь на только что доказанную теорему можно сформулировать достаточные условия почленной дифференцируемости функциональных рядов.

**Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов.** Пусть элементы  $f_k(x)$  функционального ряда  $\sigma(x)$  имеют на отрезке  $[a, b]$  непрерывные производные  $f'_k(x)$ . Если на отрезке  $[a, b]$  ряд  $\sigma(x)$  сходится, а ряд

$$\tilde{\sigma}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x),$$

элементами которого являются производные функций  $f_k(x)$ , равномерно сходится на отрезке  $[a, b]$ , то сумма  $S(x)$  ряда  $\sigma(x)$  имеет на  $[a, b]$  производную и для ее вычисления ряд  $\sigma(x)$  можно почленно продифференцировать:

$$S'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_k(x) + \dots$$

## 5. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ К РАЗДЕЛУ 6

В этой главе будут приведены описания лабораторных работ по материалу шестого раздела книги.

### Лабораторная работа 1. Числовые ряды.

В задачах лабораторной работы требуется:

- 1) выяснить сходимость ряда, используя различные признаки сходимости числовых рядов,
- 2) если ряд сходится, то попытаться найти в явном виде сумму ряда как предел частичных сумм ряда,
- 3) если ряд сходится, но пакет "Математика" не может найти предел частичных сумм, то найти приближенное значение суммы с помощью команды **NSum**.

### Задания.

Исследуйте числовые ряды:

- 1)  $1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$
- 2)  $\frac{1}{101} + \frac{2}{104} + \frac{3}{109} + \frac{4}{116} + \dots$
- 3)  $\frac{1}{6} + \frac{4}{120} + \frac{36}{5040} + \frac{576}{362880} + \frac{14400}{39916800} + \dots$
- 4)  $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\sqrt{24}}{81} + \frac{\sqrt{120}}{243} + \dots$
- 5)  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$
- 6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$
- 7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$
- 8)  $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots$
- 9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt[3]{n}}{n+2}$

### Образец выполнения работы.

Выполнение лабораторной работы разбивается на несколько этапов. Объясним их на примере числового ряда

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

1) Находится формула для общего члена ряда. В данном случае  $u_n = 2n/3^n$ . Формула вводится в компьютер в виде

$$\mathbf{u[n\_]} = \frac{\mathbf{2\ n}}{\mathbf{3^n}}$$

2) Выбирается признак сходимости. В рассматриваемом примере ряд положительный, поэтому рассматриваем признаки сходимости положительных числовых рядов. Начнем с признака Даламбера. С помощью пакета "Математика" вычисляем предел:

$$\mathbf{Limit} \left[ \frac{\mathbf{u[n+1]}}{\mathbf{u[n]}}, \mathbf{n \rightarrow \infty} \right]$$
$$\frac{1}{3}$$

Поскольку предел меньше единицы, то, по признаку Даламбера, ряд сходится.

3) Если согласно выбранному признаку сходимости ряд расходится, то задача исследования ряда считается решенной.

4) Если признак устанавливает сходимость ряда, то следует попытаться найти его сумму. Для этого определим и введем в "Математику" формулу для частичных сумм ряда:

$$\mathbf{s[n\_]} = \sum \mathbf{k} = \mathbf{1^n u[k]}$$
$$\frac{1}{2} 3^{-n} (-3 + 3^{1+n} - 2n)$$

"Математика" нашла явную формулу для частичных сумм, поэтому можно вычислить предел частичных сумм при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\mathbf{Limit[s[n], n \rightarrow \infty]}$$
$$\frac{3}{2}$$

Итак, исследуемый ряд сходится и его сумма равна  $3/2$ .

Если бы упрощения формулы для частичной суммы не произошло, то можно было бы вычислить предел с помощью команды

$$\mathbf{NSum[u[n], \{n, \infty\}]}$$
$$1.5$$



В рассматриваемом случае приближенное значение предела равно точному, в общем же случае можно получить именно приближенное значение предела.

## Лабораторная работа 2. Степенные ряды.

Для изучения степенных рядов полезно запрограммировать следующие команды. Команда **MaclaurinPlot**[**функция, интервал, число членов ряда Маклорена**] представляет на одном рисунке графики функции и частичной суммы ее ряда Маклорена с заданным пользователем числом членов, окрашенные в различные цвета. Эта команда позволяет визуальнo оценить абсолютную ошибку приближения функции частичной суммой ее ряда Маклорена и понять, сколько членов ряда Маклорена нужно взять, чтобы приблизить функцию отрезком степенного ряда в заданной окрестности начала координат с абсолютной ошибкой, не превосходящей ошибку задаваемую пользователем.

Команда **PlotRelativeError**[**функция, интервал, число членов ряда Маклорена**] рисует график относительной ошибки приближения функции частичной суммой ряда Маклорена.

Команда **RelativeError**[**функция, точка, число членов ряда Маклорена**] вычисляет относительную погрешность приближения в процентах в задаваемой точке.

Команда **PlotSeries**[**общий член ряда, { k, i, j }, { x, a, b }**], первый аргумент которой формула для общего члена ряда, рисует график суммы членов ряда с номерами от  $i$  до  $j$  на отрезке  $[a, b]$ . В частности, при  $i = 1$  будет нарисован график частичной суммы. При  $i > 1$  команда позволяет визуальнo исследовать поведение остатка степенного ряда.

### Задания.

#### Задача 1.

1) Вычислить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k x^k$$

2) Исследовать сходимость ряда в граничных точках его интервала сходимости.

#### Задача 2.

1) Вычислить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k+1}$$

2) С помощью пакета "Математика" найти в явном виде его сумму

3) С помощью команд **PlotRelativeError** и **RelativeError** найти, сколько членов этого ряда следует взять, чтобы относительная ошибка приближения суммы ряда его частичной суммой не превосходила 1% на интервале  $(-0.5, 0.5)$ ?

### Задача 3.

1) Вычислить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k!}$$

2) Исследовать поведение ряда в граничных точках его интервала сходимости

3) Будет ли сумма этого ряда ограниченной на интервале сходимости? Проиллюстрируйте ваш ответ с помощью команды **PlotSeries**.

**Задача 4.** Ряд Маклорена функции  $\ln(1+x)$

Ряд Маклорена функции  $\ln(1+x)$  имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^k}{k} + \dots$$

Его радиус сходимости равен 1.

1) С помощью команд **MaclaurinPlot**, **PlotRelativeError** и **RelativeError** оцените, сколько членов ряда Маклорена рассматриваемой функции следует взять, чтобы приблизить ее на интервале  $(-0.9, 0.9)$  с погрешностью, не превосходящей 1%?

2) С помощью команды **PlotAbsoluteError** найдите максимальную абсолютную ошибку приближения функции  $\ln(1+x)$  найденной в пункте 1) частичной суммой на том же интервале  $(-0.9, 0.9)$ .

**Задача 5.** Ряд Маклорена функции  $\sin x$

Ряд Маклорена тригонометрической функции  $\sin x$  имеет вид

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Его радиус сходимости равен  $\infty$ .

1) С помощью команд **MaclaurinPlot**, **PlotRelativeError** и **RelativeError** оцените, сколько членов ряда Маклорена рассматриваемой функции следует взять, чтобы приблизить ее на интервале  $(-6, 6)$  с погрешностью, не превосходящей 1%?

2) С помощью команды **PlotAbsoluteError** найдите максимальную абсолютную ошибку приближения функции  $\sin x$  найденной в пункте 1) частичной суммой на том же интервале  $(-6, 6)$ .

### Образец выполнения лабораторной работы

#### Задание.

1) Вычислить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^{3/2}}$$

- 2) С помощью пакета "Математика" найти в явном виде его сумму  
 3) С помощью команд **PlotRelativeError** и **RelativeError** найти, сколько членов этого ряда следует взять, чтобы относительная ошибка приближения суммы ряда его частичной суммой не превосходила 1% на интервале  $(-0.5, 0.5)$ ?

**Решение.**

- 1) Введем в компьютер коэффициенты рассматриваемого ряда:

$$a[k_] = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

Воспользуемся одной из теоретических формул для вычисления радиуса сходимости ряда:

$$\text{Limit} \left[ \frac{a[k]}{a[k+1]}, k \rightarrow \infty \right]$$

Поскольку рассматриваемый ряд имеет ненулевой радиус сходимости, попытаемся найти его сумму в явном виде. Для этого введем в компьютер формулу для суммы ряда

$$S[x_] = \sum_{k=1}^{\infty} a[k] x^k$$

$$\text{PolyLog}\left[\frac{3}{2}, x\right]$$

Явный вид суммы ряда найден. Функция  $\text{PolyLog}[n, x]$  является функцией, обратной к функции  $x^n e^x$ , т.е.  $y = \text{PolyLog}[n, x]$  является решением уравнения:

$$y^n e^y = x$$

К функции  $\text{PolyLog}[3/2, x]$  исследуемый ряд сходится на интервале  $(-1, 1)$ .

- 2) Для того, чтобы понять, насколько точно сумма ряда аппроксимируется частичными суммами  $S_n(x)$ , воспользуемся командой **MaclaurinPlot**. Выберем, например, сумму  $S_{10}(x)$ .

$$\text{MaclaurinPlot}[S[x], \{x, -1, 1\}, 10]$$

Изучение графиков суммы ряда и частичной суммы  $S_{10}(x)$  (пунктирная линия) на Рис. 6.5.1 показывает, что на отрезке  $[-0.5, 0.5]$  наблюдается их визуальное совпадение. Это говорит о малой абсолютной погрешности, возникающей при замене суммы ряда его частичной суммой. Чтобы оценить относительную погрешность замены, нарисуем график относительной погрешности.

```
PlotRelativeError[S[x], {x, -0.5, 0.5}, 10]
```

Рис.6.5.2

Рассмотрение рисунка Рис.6.5.2 показывает, что можно взять частичную сумму с меньшим номером, чтобы добиться относительной погрешности, не превосходящей 1% на отрезке  $[-0.5, 0.5]$ . Уменьшая номер  $n$  частичной суммы и рисуя графики относительной погрешности, приходим к выводу, что частичная сумма  $S_4(x)$  обеспечивает требуемую точность.

Выполнение команды

```
RelativeError[S[x], 0.5, 4]
0.732977
```

дает основание утверждать, что максимальная относительная погрешность, на самом деле не превосходит 0.73%.

### Лабораторная работа 3. Ряды Фурье.

Для изучения рядов Фурье используются следующие компьютерные команды, которые создаются преподавателем.

Команда **FourierSeries**[*функция*, {**x**, **a**, **b**}, **n**] вычисляет частичную сумму ряда Фурье функции, заданной на отрезке  $[a, b]$ .

Команда **PeriodicPlot**[*функция*, {**x**, **a**, **b**}] рисует график функции, периодически продолженной на отрезок  $[2a - b, 2b - a]$ .

Команда **FourierPlot**[*функция*, {**x**, **a**, **b**}, **n**] рисует графики периодического продолжения функции и частичной суммы порядка  $n$  ее ряда Фурье на отрезке  $[2a - b, 2b - a]$ .

**Задания.** В каждой задаче дана функция  $f[x]$  и отрезок  $[a, b]$ , на котором она определена. В задачах сравниваются многочлены Фурье функции и ее четного относительно точки  $a$  продолжения на отрезок  $[2a - b, b]$ .

Для решения каждой задачи следует проделать следующие вычисления.

1) Ввести определения функции и ее четного продолжения в компьютер, т.е. выполнить команды:

$$f[x\_ ] := \text{If}[a \leq x \leq b, \text{formula}]$$

$$feven[x\_ ] := \text{Which}[a \leq x \leq b, f[x], 2a - b \leq x < a, f[2a - x]]$$

где **formula** есть формула, определяющая функцию.

После этого нужно выполнить визуализацию заданной функции и ее четного продолжения с помощью команды **PeriodicPlot**. С помощью полученных графиков ответить на вопрос: какими свойствами непрерывности обладают функции на отрезке  $[2a - b, 2b - a]$ .

2) С помощью команды **FourierSeries** вычислить тригонометрические многочлены *poly1*, *poly2* пятого порядка функций  $f[x]$  и  $feven[x]$  на отрезках  $[a, b]$  и  $[2a - b, b]$  соответственно. Затем, используя встроенную команду **Plot** системы "Математика", визуально оценить, какой из двух многочленов дает лучшую аппроксимацию функции  $f[x]$  на отрезке  $[a, b]$ ?

3) Вычислить среднеквадратичные относительные ошибки приближения функции  $f[x]$  на отрезке  $[a, b]$  многочленами *poly1*, *poly2*. С этой целью выполнить команды

$$relerror1 = \sqrt{\frac{\text{NIntegrate}[(f[x] - \text{poly1})^2, \{x, a, b\}]}{\text{NIntegrate}[f[x]^2, \{x, a, b\}]}}$$

$$relerror2 = \sqrt{\frac{\text{NIntegrate}[(f[x] - \text{poly2})^2, \{x, a, b\}]}{\text{NIntegrate}[f[x]^2, \{x, a, b\}]}}$$

Ответить на вопрос: какая ошибка меньше и во сколько раз.

**Задача 1.**

$$f[x] = \frac{1-x}{2}, \quad [a, b] = [0, 1]$$

**Задача 2.**  $f[x] = E^x, \quad [a, b] = [-1, 1]$

**Задача 3.**  $f[x] = x \text{Sin}[x], \quad [a, b] = [0, \pi/2]$

**Задача 4.**  $f[x] = \text{Log}[x], \quad [a, b] = [1, 3]$

**Задача 5.**  $f[x] = \text{ArcTan}[x], \quad [a, b] = [-1, 1]$

**Задача 6.**  $f[x] = (1-x)\text{ArcTan}[x], \quad [a, b] = [0, \pi/2]$

**Задача 7.**

$$f[x] = \frac{\text{Sin}[x]}{x^2}, \quad [a, b] = [2, 3]$$

**Задача 8.**  $f[x] = x E^{-x^2}, \quad [a, b] = [0, 3]$

**Задача 9.**

$$f[x] = x \operatorname{Sin} \left[ \frac{1}{x} \right], \quad [a, b] = [1, 3]$$

**Задача 10.**  $f[x] = \operatorname{Cos}[x], \quad [a, b] = [0, \pi/2]$

**Образец выполнения лабораторной работы.**

**Задание.** Исследовать аппроксимации функции  $f[x] = x^2 - x$ , заданной на отрезке  $[1, 3]$  тригонометрическими многочленами пятого порядка *poly1* и *poly2*.

**Решение.** 1) Выполним команды, определяющие функцию и ее четное относительно левого конца  $a$  отрезка продолжение.

```
f[x_] := If[1 ≤ x ≤ 3, x2 - x]
```

```
feven[x_] := Which[1 ≤ x ≤ 3, f[x], -1 ≤ x < 1, f[2 - x]]
```

Начертим графики периодических продолжений функции  $f[x]$

```
PeriodicPlot[f[x], {x, 1, 3}];
```

Рис.6.5.3

и ее четного продолжения  $feven[x]$

```
PeriodicPlot[feven[x], {x, -1, 3}];
```

Рис.6.5.4

Рисунки показывают, что периодически продолженная функция  $f[x]$  имеет разрывы первого рода, в то время как функция  $feven[x]$  непрерывна.

2) Вычисляем тригонометрические многочлены пятого порядка  $poly1$  и  $poly2$ .

**poly1 = FourierSeries[f[x], x, 1, 3, 5]**

$2.33333 - 0.405285 \text{Cos}[\pi x] + 0.101321 \text{Cos}[2 \pi x] - 0.0450316 \text{Cos}[3 \pi x] +$   
 $0.0253303 \text{Cos}[4 \pi x] - 0.0162114 \text{Cos}[5 \pi x] + 1.90986 \text{Sin}[\pi x] - 0.95493 \text{Sin}[2 \pi x] +$   
 $0.63662 \text{Sin}[3 \pi x] - 0.477465 \text{Sin}[4 \pi x] + 0.381972 \text{Sin}[5 \pi x]$

**poly2 = FourierSeries[feven[x], x, -1, 3, 5]**

$2.33333 - 0.405285 \text{Cos}[\pi x] + 0.101321 \text{Cos}[2 \pi x] - 2.43171 \text{Sin}[\frac{\pi x}{2}] +$   
 $0.27019 \text{Sin}[\frac{3 \pi x}{2}] - 0.0972683 \text{Sin}[\frac{5 \pi x}{2}]$

Начертим графики функции  $f[x]$  и многочлена  $poly1$  на отрезке  $[1,3]$ ,

**Plot[{f[x], poly1}, {x, 1, 3}, GridLines → Automatic]**

Рис.6.5.5

а также функции  $f[x]$  и многочлена  $poly2$  на том же отрезке

**Plot[{f[x], poly2}, {x, 1, 3}, GridLines → Automatic]**

Рис.6.5.6

Совершенно очевидно из представленных рисунков, что качество приближения функции  $f[x]$  многочленом  $poly2$  несравненно выше, чем приближение многочленом  $poly1$ .

3) Для получения погрешностей приближений выполним команды

$$\text{relativerror1} = \sqrt{\frac{\text{NIntegrate}[(f[x] - \text{poly1})^2, \{x, 1, 3\}]}{\text{NIntegrate}[f[x]^2, \{x, 1, 3\}]}} 100 \text{ “\%”}$$

19.6906%

$$\text{relativerror2} = \sqrt{\frac{\text{NIntegrate}[(f[x] - \text{poly2})^2, \{x, 1, 3\}]}{\text{NIntegrate}[f[x]^2, \{x, 1, 3\}]}} 100 \text{ “\%”}$$

2.10839%

Вычислим отношение погрешностей

$$\frac{\text{relativerror1}}{\text{relativerror2}}$$

9.3392

и найдем, что вторая погрешность меньше первой более, чем в 9 раз.

#### Лабораторная работа 4. Дискретное преобразование Фурье.

Цель лабораторной работы – сравнить качество аппроксимаций заданной функции тригонометрическими полиномами Фурье и тригонометрическими полиномами, порождаемыми дискретным преобразованием Фурье.

##### Задания.

В каждом задании рассматривается некоторая функция  $f[x]$ , определенная на некотором отрезке  $[a, b]$ .

Пользователь должен проделать следующие вычисления.

1) Вычислить интерполяционный многочлен  $n$ -го порядка дискретного преобразования Фурье  $poly1$ , используя специально написанную команду **InterpolationTrigPolynomial**. Затем с помощью команды **FourierSeries** вычислить многочлен Фурье  $n$ -го порядка  $poly2$ .

2) Начертить на одном рисунке графики функции  $f[x]$  и многочленов  $poly1$ ,  $poly2$  с целью визуально сравнить качество аппроксимации функции рассматриваемыми многочленами.

3) Сделать количественную оценку качества аппроксимаций, вычислив среднеквадратичные относительные ошибки

$$\sqrt{\frac{\text{NIntegrate}[(f[x] - \text{poly1})^2, \{x, a, b\}]}{\text{NIntegrate}[f[x]^2, \{x, a, b\}]}}$$



и

$$\sqrt{\frac{NIntegrate[(f[x] - poly2)^2, \{x, a, b\}]}{NIntegrate[f[x]^2, \{x, a, b\}]}}$$

Для этого следует ответить на вопросы: какая относительная ошибка меньше? Во сколько раз?

**Задача 1.**

$$f[x] = \frac{x(1-x)}{2}, \quad [a, b] = [0, 1].$$

**Задача 2.**  $f[x] = E^{x^2}$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ .

**Задача 3.**  $f[x] = x \text{Sin}[x]$ ,  $[a, b] = [0, \pi]$ .

**Задача 4.**  $f[x] = (x-3)\text{Log}[x]$ ,  $[a, b] = [1, 3]$ .

**Задача 5.**  $f[x] = \text{ArcTan}[x^2]$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$ .

**Задача 6.**  $f[x] = (1-x)\text{ArcTan}[x]$ ,  $[a, b] = [0, 1]$ .

**Задача 7.**

$$f[x] = \frac{\text{Sin}[x]}{x^2}, \quad [a, b] = [\pi, 3\pi].$$

**Задача 8.**  $f[x] = x E^{-x^2}$ ,  $[a, b] = [0, 3]$ .

**Задача 9.**  $f[x] = x \text{Sin}[x]$ ,  $[a, b] = [1, \pi]$ .

**Задача 10.**  $f[x] = x^2 \text{Cos}[x]$ ,  $[a, b] = [-\pi/2, \pi/2]$ .

**Образец решения задачи.**

**Задача.** Изучить свойства аппроксимаций функции  $18 - 45x + 40x^2 - 15x^3 + 2x^4$ , заданной на отрезке  $[1, 3]$  тригонометрическими многочленами пятого порядка.

**Решение.**

1) Введем в компьютер исследуемую функцию.

`Clear[f, x];`

`f[x_] = 18 - 45 x + 40 x^2 - 15 x^3 + 2 x^4`

$18 - 45x + 40x^2 - 15x^3 + 2x^4$

Вычислим интерполяционный многочлен *poly1* дискретного преобразования Фурье и частичную сумму *poly2* *n*-го порядка ряда Фурье.

**poly1 = InterpolationTrigPolynomial[f[x], {x, 1, 3}, 5]**

$- 0.272113 + 0.186164 \text{Cos}[\pi x] + 0.12887 \text{Cos}[2 \pi x] -$   
 $0.0638955 \text{Cos}[3 \pi x] + 0.0297638 \text{Cos}[4 \pi x] - 0.00879037 \text{Cos}[5 \pi x] -$   
 $0.387173 \text{Sin}[\pi x] + 0.487147 \text{Sin}[2 \pi x] - 0.0149219 \text{Sin}[3 \pi x] +$   
 $0.00702287 \text{Sin}[4 \pi x] - 0.00474254 \text{Sin}[5 \pi x]$

**poly1 = FourierSeries[f[x], {x, 1, 3}, 5]**

$- 0.266667 + 0.174965 \text{Cos}[\pi x] + 0.141046 \text{Cos}[2 \pi x] -$   
 $0.0778962 \text{Cos}[3 \pi x] + 0.0468108 \text{Cos}[4 \pi x] - 0.0308459 \text{Cos}[5 \pi x] -$   
 $0.387018 \text{Sin}[\pi x] + 0.0483773 \text{Sin}[2 \pi x] - 0.014334 \text{Sin}[3 \pi x] +$   
 $0.00604716 \text{Sin}[4 \pi x] - 0.00309615 \text{Sin}[5 \pi x]$

2) Начертим на одном рисунке графики функции  $f[x]$ , многочлена  $poly1$  и многочлена  $poly2$ .

**Plot[Evaluate[{f[x], poly1, poly2}], {x, 1, 3}, PlotStyle → {{Thickness[0.007]},  
{Thickness[0.007], Hue[0]}, {Thickness[0.007], Hue[0.7]}},  
ImageSize → {500, 300}, PlotRange → All,  
PlotLegend → {StyleForm["f[x]", FontSize → 14],  
StyleForm["poly1", FontSize → 14], StyleForm["poly2", FontSize → 14]},  
LegendSize → {1, 0.25}, LegendPosition → {-1., -0.9}];**

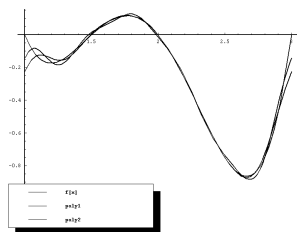


Рис.6.5.7

Как показывает рисунок 6.5.7, визуально обе аппроксимации достаточно хороши.

3) Вычислим относительные ошибки аппроксимаций.

$$\text{relativerror1} = \sqrt{\frac{\text{NIntegrate}[(f[x] - \text{poly1})^2, \{x, a, b\}]}{\text{NIntegrate}[f[x]^2, \{x, a, b\}]}} 100\%$$

8.47033 %

$$\text{relativerror2} = \sqrt{\frac{\text{NIntegrate}[(f[x] - \text{poly2})^2, \{x, a, b\}]}{\text{NIntegrate}[f[x]^2, \{x, a, b\}]}} 100\%$$

5.90731 %

Аппроксимация многочленом *poly2* лучше. Отношение двух относительных ошибок равно

$$\frac{\text{relativerror1}}{\text{relativerror2}}$$

1.43387

## Часть 2

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## Раздел 7

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

## Глава 1. Векторы на плоскости

### 1.1. Векторы. Равенство векторов. Координаты вектора.

*Декартовой координатной плоскостью* называется обычная евклидова плоскость, на которой фиксированы:

- 1) некоторая точка  $O$ , называемая *началом* системы координат;
- 2) две взаимно перпендикулярные оси, т.е. направленные прямые, пересекающиеся под прямым углом в точке  $O$ . Одна из осей называется осью абсцисс, другая - осью ординат;
- 3) отрезки на каждой из осей, которые называются масштабными и которые позволяют установить взаимно однозначное соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек на каждой оси.

Произвольная точка  $P$  координатной плоскости снабжается двумя числами: абсциссой и ординатой. Абсцисса точки  $P$  - это величина отрезка  $OP_x$ , где  $P_x$  есть основание перпендикуляра, опущенного из точки  $P$  на ось абсцисс. Ордината точки  $P$  - это величина отрезка  $OP_y$ , где  $P_y$  есть основание перпендикуляра, опущенного из точки  $P$  на ось ординат.

Величина отрезка  $OP_x$  равна его длине, если точка  $P_x$  расположена справа от точки  $O$ . Если же точка  $P_x$  расположена слева от точки  $O$ , то величина отрезка  $OP_x$  равна его длине, взятой с обратным знаком. Аналогичное замечание справедливо относительно величины отрезка  $OP_y$ .

На рисунке Рис.7.1.1 нарисована точка  $P$  с абсциссой равной 0.7 и ординатой равной 2.3.

Абсцисса и ордината точки  $P$  записываются в круглых скобках после символа  $P$ . Рассматриваемая нами точка записывается поэтому как  $P(0.7, 2.3)$ .

*Вектор* - это направленный отрезок прямой на плоскости. Направление отрезка фиксируется тем, что один его конец объявляется началом, а другой - концом отрезка. Тем самым, отрезок на плоскости задается парой точек. Начало отрезка называется также *точкой приложения* вектора. Например, направленный отрезок  $\vec{MN}$  задается точкой  $M(-0.5, -1.5)$  - началом отрезка и точкой  $N(1.5, 2)$  - концом отрезка (см. Рис. 7.1.2).

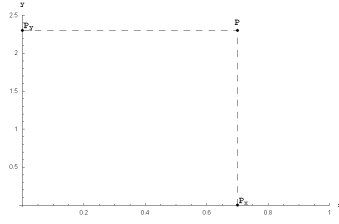


Рис.7.1.1

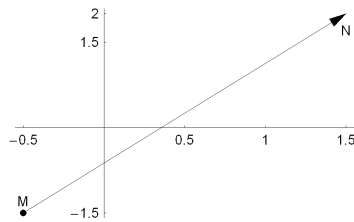


Рис. 7.1.2

Длиной вектора  $\vec{MN}$  называется длина отрезка  $MN$ . Длина вектора  $\vec{MN}$  обозначается через  $|\vec{MN}|$ . Длина вектора также называется *модулем* вектора, или *абсолютной величиной* вектора.

Если начало и конец вектора совпадают, то этот математический объект рассматривается как *нулевой вектор*. Нулевой вектор обозначается цифрой 0.

Два вектора с одной и той же точкой приложения называются *равными*, если они совпадают, т.е. совпадают их концы.

Вектор  $\vec{v} = \vec{PM}$  с точкой приложения  $P$  можно *параллельно перенести* в другую точку  $Q$ . Для этого на основе аксиом и теорем евклидовой геометрии проводятся следующие построения (см. Рис. 7.1.3).

Точки  $P$  и  $Q$  соединяются прямой. Через точку  $M$  проводится прямая, параллельная прямой  $PQ$ , а из точки  $Q$  - прямая, параллельная прямой, на которой лежит вектор  $\vec{PM}$ . Точка  $N$  пересечения этих прямых будет концом вектора  $\vec{QN}$ , который и называется вектором  $\vec{PM}$ , перенесенным параллельно в точку  $Q$ . Пусть рассматриваемые точки суть точки  $P(x_1, y_1)$ ,  $M(x_2, y_2)$ ,  $Q(x_3, y_3)$ , тогда  $N$  есть точка  $N(x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$ .

Если рассмотреть совокупность векторов с одной и той же точкой приложения, скажем, с точкой приложения  $O$  - началом координат, то каждый из таких

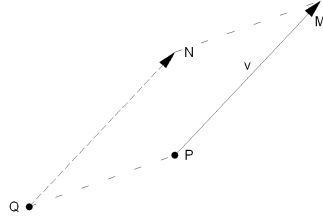


Рис. 7.1.3

векторов будет определяться своим концом. Таким образом, для задания вектора  $\vec{OM}$  достаточно задать координаты  $(a, b)$  точки  $M$ . Эти координаты называются *координатами вектора  $\vec{OM}$* , а сам вектор  $\vec{v} = \vec{OM}$  записывается в виде  $\vec{v}(a, b)$ .

Из формул для координат точки  $N$  предыдущего абзаца следует, что вектор  $\vec{PM}$ , будучи перенесен в начало координат, получит координаты  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ , равные разностям координат конца и начала вектора. Эти числа называются *координатами вектора  $\vec{PM}$* .

Два вектора  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  называются *равными*, если они совпадают после перенесения одного из них в точку приложения другого, или, что то же самое, совпадают, будучи перенесены в одну и ту же точку приложения.

Длина  $|\vec{v}|$  вектора  $\vec{v}(a, b)$  выражается через его координаты по формуле

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## 1.2. Линейные операции над векторами.

*Сложение.* Чтобы сложить векторы  $\vec{v} = \vec{PM}$  и  $\vec{w} = \vec{PN}$  с одной и той же точкой приложения  $P$ , следует через конец  $M$  вектора  $\vec{PM}$  провести прямую, параллельную вектору  $\vec{PN}$ , а через конец  $N$  вектора  $\vec{PN}$  провести прямую, параллельную вектору  $\vec{PM}$  (см. Рис. 7.1.4). Обозначим через  $R$  точку пересечения построенных прямых. Вектор  $\vec{PR}$  - диагональ параллелограмма  $PNRM$  называется *суммой* векторов  $\vec{PM}$  и  $\vec{PN}$ .

Сумма векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  обозначается через  $\vec{v} + \vec{w}$ .

Операция сложения перестановочна:  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ . При сложении векторов их координаты складываются. Координаты суммы  $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$  векторов  $\vec{v}(a, b)$ ,  $\vec{w}(c, d)$  равны  $(a + c, b + d)$ .

Чтобы сложить три вектора  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$ , следует сложить первые два и к их сумме прибавить третий. Можно сначала сложить последние два и к их сумме прибавить первый. Результатами будут равные векторы, т.е.  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ . Это свойство операции сложения называется *ассоциативностью*.

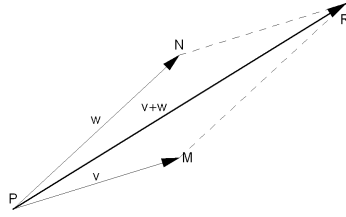


Рис. 7.1.4

*Противоположный вектор.* Вектор  $\vec{PN}$  называется противоположным вектору  $\vec{PM}$ , если их сумма равна нулевому вектору:  $\vec{PN} + \vec{PN} = 0$ . Противоположный к  $\vec{PM}$  вектор обозначается через  $-\vec{PM}$ .

*Вычитание.* Чтобы вычесть вектор  $\vec{v} = \vec{PN}$  из вектора  $\vec{u} = \vec{PM}$ , следует вектор  $\vec{PM}$  сложить с вектором  $-\vec{PN}$  противоположным  $\vec{PN}$  (см. Рис. 7.1.5).

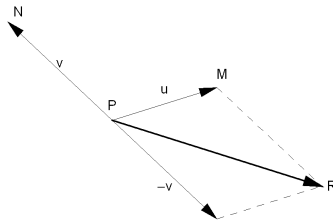


Рис. 7.1.5

*Разность* векторов  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  обозначается через  $\vec{u} - \vec{v}$ . Координаты разности  $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$  векторов  $\vec{u}(a, b)$  и  $\vec{v}(c, d)$  равны  $(a - c, b - d)$ .

*Сложение (вычитание) векторов с разными точками приложения.* Для того, чтобы сложить (вычесть) векторы  $\vec{PM}$  и  $\vec{QN}$  с разными точками приложения, следует указать, к какой точке  $R$  будет приложен результат. Затем следует параллельно перенести оба слагаемых вектора в точку  $R$  и там сложить (вычесть).

*Умножение на число.* Произведение вектора  $\vec{v} = \vec{PM}$  на вещественное число  $\lambda > 0$  есть новый вектор  $\lambda \vec{v} = \vec{PN}$  с точкой приложения  $P$  и концом в точке  $N$ , лежащей на той же прямой, что и вектор  $\vec{PM}$ , и по ту же сторону от  $P$ , что и  $M$ . Длина вектора  $\vec{PN}$  равна длине вектора  $\vec{PM}$ , умноженной на  $\lambda$ .

Если  $\lambda < 0$ , то точка  $N$  лежит на прямой  $PM$  с противоположной от точки

$P$  стороне по сравнению с точкой  $M$ , и длина вектора  $P\vec{N}$  равна  $|\lambda||P\vec{M}|$ . При  $\lambda = 0$  вектор  $\lambda\vec{v} = 0$ , где  $0$  – нулевой вектор.

Для вектора  $\vec{v}(a, b)$  координаты вектора  $\lambda\vec{v}$  равны  $(\lambda a, \lambda b)$ .

**Теорема о свойствах операций над векторами.** *Операция сложения векторов обладает свойствами коммутативности и ассоциативности:*

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} \text{ (коммутативность),}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{w}) + \vec{v} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ (ассоциативность).}$$

*Операции сложения и умножения на число дистрибутивны:*

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}.$$

*Операция умножения на число удовлетворяет тождествам:*

$$\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u},$$

$$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}.$$

Векторы  $\vec{v}(a, b)$  и  $\vec{w}(c, d)$  называются *коллинеарными*, если вектор  $\vec{w}(c, d)$  равен произведению  $\lambda\vec{v}(a, b)$  вектора  $\vec{v}$  на некоторое число  $\lambda$ . Отсюда для координат векторов справедливы соотношения

$$c = \lambda a, \quad d = \lambda b \quad (1.1)$$

Умножим первое равенство (1.1) на  $b$ , второе на  $a$  и вычтем первое из второго. Получим соотношение

$$a d - b c = 0 \quad (1.2)$$

как необходимое условие коллинеарности векторов, выраженное через их координаты. Соотношение (1.2) является также и достаточным условием коллинеарности.

Рассмотрим следующую таблицу, составленную из координат векторов  $\vec{v}(a, b)$ ,  $\vec{w}(c, d)$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Таблица (1.3) называется *матрицей* координат векторов. Выражение  $a d - b c$  называется *детерминантом матрицы* (1.3). Таким образом, равенство нулю детерминанта матрицы координат векторов является необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов.

С помощью операций над векторами легко решить *задачу о делении отрезка в данном отношении*. Она состоит в следующем. Пусть дан отрезок  $AB$  с концами в точках  $A(a, b)$ ,  $B(c, d)$ . Требуется найти координаты точки  $C(x, y)$  такой, что длина отрезка  $AC$  относится к длине отрезка  $CB$  как  $m : n$ , где  $m$ ,  $n$  – вещественные числа. Очевидно, что

$$\vec{AC} = \frac{m}{m+n} \vec{AB}$$

Из последнего соотношения находим, что

$$x = a + \frac{m}{m+n} (c - a) = \frac{na + mc}{m+n}, \quad y = b + \frac{m}{m+n} (d - b) = \frac{nb + md}{m+n}$$



### 1.3. Базисные векторы.

Рассмотрим совокупность векторов с точками приложения в начале координат. Пусть векторы  $\vec{i}(1, 0)$  и  $\vec{j}(0, 1)$  являются векторами единичной длины, направленными по осям абсцисс и ординат соответственно. Пусть  $\vec{OM}(a, b)$  произвольный вектор, тогда, очевидно, что он является суммой векторов  $\vec{OM}_x(a, 0)$  и  $\vec{OM}_y(0, b)$  (см. Рис. 7.1.6):

$$\vec{OM} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y \quad (1.4)$$

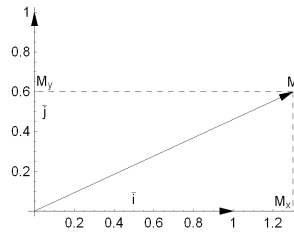


Рис. 7.1.6

В то же время, справедливы равенства  $\vec{OM}_x = a\vec{i}$ ,  $\vec{OM}_y = b\vec{j}$ . Подставляя эти равенства в (1.4), получаем, что

$$\vec{OM}(a, b) = a\vec{i} + b\vec{j} \quad (1.5)$$

Вектор в правой части равенства (1.5) называется *линейной комбинацией* векторов  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ . Поскольку любой вектор может быть представлен как линейная комбинация векторов  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ , последние называются *базисными* векторами. Говорят также, что эти векторы образуют *базис* в семействе векторов на плоскости, а линейная комбинация  $a\vec{i} + b\vec{j}$  называется *разложением вектора  $\vec{OM}$  по базису*.

Оказывается, что любые два неколлинеарных вектора образуют базис векторов на плоскости. Действительно, пусть  $\vec{e}_1(a, b)$  и  $\vec{e}_2(c, d)$  два неколлинеарных вектора. Тогда

$$\vec{e}_1(a, b) = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad \vec{e}_2(c, d) = c\vec{i} + d\vec{j} \quad (1.6)$$

Умножая обе части первого равенства (1.6) на  $d$ , а второго на  $b$  и вычитая второе получившееся равенство из первого, получаем, что

$$(ad - bc)\vec{i} = d\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 \quad (1.7)$$

Поскольку векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  неколлинеарны и поскольку коэффициент при векторе  $\vec{i}$  в равенстве (1.7) равен детерминанту матрицы (1.3) коэффициентов векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , этот коэффициент отличен от нуля, и из (1.7) следует соотношение

$$\vec{i} = \frac{d\vec{e}_1 - b\vec{e}_2}{ad - bc} \quad (1.8)$$

Аналогично, для вектора  $\vec{j}$  получаем из (1.7) соотношение

$$\vec{j} = \frac{a\vec{e}_2 - c\vec{e}_1}{ad - bc} \quad (1.9)$$

Пусть  $\vec{v}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  произвольный вектор. Подставляя в его разложение по базису  $\vec{i}, \vec{j}$  выражения (1.8) и (1.9), получим разложение вектора  $\vec{v}$  по базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ :

$$\vec{v}(x, y) = \frac{xd - yc}{ad - bc} \vec{e}_1 + \frac{ya - xb}{ad - bc} \vec{e}_2$$

#### 1.4. Скалярное произведение.

Пусть  $\vec{v} = \vec{MN}$  вектор, а  $L$  направленная прямая на плоскости (рис. 7.1.7).

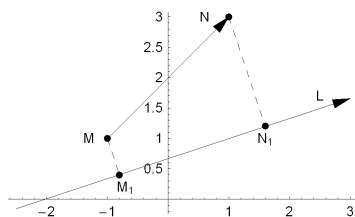


Рис. 7.1.7

Спроектируем точки  $M$  и  $N$  на прямую  $L$ . Обозначим эти проекции через  $M_1$  и  $N_1$ . *Проекцией вектора  $\vec{v}$  на прямую  $L$*  называется величина направленного отрезка  $M_1N_1$ . На рис. 7.1.7 величина проекции положительна. Для вектора  $\vec{NM}$ , противоположного вектору  $\vec{MN}$ , величина проекции будет отрицательной.

Пусть  $\vec{v}$  произвольный, а  $\vec{e}$  единичный вектор на плоскости, лежащий на прямой  $L$ . Ориентируем  $L$  так, чтобы ее ориентация совпала с ориентацией вектора  $\vec{e}$ .

*Скалярным произведением  $(\vec{v}, \vec{e})$  векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{e}$*  называется проекция  $\text{pr}_L \vec{v}$  вектора  $\vec{v}$  на направленную прямую  $L$ .

Для вектора  $\vec{w}$  не единичной длины, *скалярным произведением  $(\vec{v}, \vec{w})$  векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$*  называется величина проекции вектора  $\vec{v}$  на прямую  $L$ , на которой лежит вектор  $\vec{w}$ , умноженная на длину вектора  $\vec{w}$ :

$$(\vec{v}, \vec{w}) = |\vec{w}| \text{pr}_L \vec{v} \quad (1.10)$$

Из геометрических соображений следует, что скалярное произведение векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  равно произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \phi \quad (1.11)$$

**Теорема о свойствах скалярного произведения.** *Скалярное произведение коммутативно:*

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$$

*и линейно по обоим сомножителям:*

$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \lambda (\vec{u}, \vec{w}) + \mu (\vec{v}, \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda (\vec{u}, \vec{v}) + \mu (\vec{u}, \vec{w})$$

*Скалярное произведение положительно определено:*

$$(\vec{u}, \vec{u}) > 0, \text{ если } \vec{u} \neq 0.$$

Скалярное произведение можно вычислить, зная координаты сомножителей  $\vec{v}(a, b)$  и  $\vec{w}(\alpha, \beta)$ , по формуле

$$(\vec{v}, \vec{w}) = a \alpha + b \beta \quad (1.12)$$

Как следствие формул (1.11) и (1.12) получаем, что косинус угла между векторами  $\vec{v}(a, b)$  и  $\vec{w}(\alpha, \beta)$  дается формулой

$$\cos \phi = \frac{a \alpha + b \beta}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Два вектора *ортогональны* (перпендикулярны), если их скалярное произведение равно 0.

## Глава 2. Векторная алгебра в пространстве

### 2.1. Векторы в пространстве.

Основные объекты геометрии: точки, прямые и их отрезки, которые использовались, чтобы ввести понятие вектора на плоскости – существуют и в трехмерном пространстве. Поэтому определения векторов, операций над векторами, линейной независимости и базиса, а также скалярного произведения легко переносятся, с очевидными изменениями, на векторы в трехмерном пространстве. Стандартный базис на плоскости, состоящий из единичных векторов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , направленных по осям  $Ox$ ,  $Oy$ , в трехмерном пространстве дополняется единичным вектором  $\vec{k}$ , направленным по оси  $Oz$ .

### 2.2. Векторное произведение.

Наличие в пространстве дополнительного по сравнению с евклидовой плоскостью измерения позволяет ввести на множестве пространственных векторов две новых операции: векторное и смешанное произведения.

**Определение.** Векторным произведением вектора  $\vec{u}$  на вектор  $\vec{v}$  называется вектор  $\vec{w}$ , обозначаемый через  $[\vec{u}, \vec{v}]$ , такой что:

1) Длина вектора  $\vec{w}$  равна произведению длин векторов  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  и синуса угла  $\varphi$  между ними. Угол  $\varphi$  отсчитывается от вектора  $\vec{u}$  в том из двух направлений на вектор  $\vec{v}$ , в котором угол изменяется в пределах от 0 до  $\pi$ .

2) Вектор  $\vec{w}$  ортогонален плоскости, содержащей векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$ , и направлен в ту сторону от плоскости, из которой поворот от вектора  $\vec{u}$  к вектору  $\vec{v}$  кажется направленным против часовой стрелки (см. Рис. 7.2.1).

Пункт 1) определения можно переформулировать, сказав, что длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ .

Координаты  $(w_1, w_2, w_3)$  векторного произведения  $\vec{w}$  выражаются через координаты векторов  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  и  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$  по формулам

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

**Теорема о свойствах векторного произведения.** Векторное произведение пространственных векторов имеет следующие свойства:

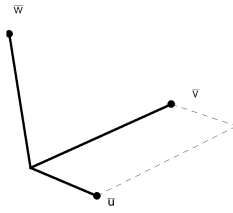


Рис. 7.2.1

1) *Кососимметричность*:  $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$ ,

2) *Линейность* :  $[\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{w}] + \beta [\vec{v}, \vec{w}]$   
 $[\vec{u}, \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}] + \beta [\vec{u}, \vec{w}]$ .

Из определения векторного произведения или из свойства 1) последней теоремы следует, что для любого вектора  $\vec{u}$  справедливо равенство  $[\vec{u}, \vec{u}] = 0$ .

**Теорема о критерии коллинеарности векторов.** *Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.*

### 2.3. Смешанное произведение.

**Определение.** *Смешанным произведением  $[\vec{u}, \vec{v}] \vec{w}$  трех векторов  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  называется число, равное скалярному произведению векторного произведения  $[\vec{u}, \vec{v}]$  на вектор  $\vec{w}$ .*

Смешанное произведение имеет геометрический смысл, раскрываемый следующей теоремой.

**Теорема о смешанном произведении пространственных векторов.** *Абсолютная величина смешанного произведения равна объему параллелепипеда, построенного на его сомножителях.*

*Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.*

Смешанное произведение  $[\vec{u}, \vec{v}] \vec{w}$  можно выразить через координаты сомножителей  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \vec{w}(w_1, w_2, w_3)$  по формуле

$$[\vec{u}, \vec{v}] \vec{w} = w_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + w_2 (v_1 u_3 - v_3 u_1) + w_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Из свойств векторного и скалярного произведений можно вывести следующие свойства смешанного произведения.

**Теорема о свойствах смешанного произведения.** *Смешанное произведение имеет перечисленные ниже свойства.*

1) *Линейность по любому из трех сомножителей:*

$$[\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2, \vec{v}] \vec{w} = \lambda [\vec{u}_1, \vec{v}] \vec{w} + \mu [\vec{u}_2, \vec{v}] \vec{w}$$

$$[\vec{u}, \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2] \vec{w} = \lambda [\vec{u}, \vec{v}_1] \vec{w} + \mu [\vec{u}, \vec{v}_2] \vec{w}$$

$$[\vec{u}, \vec{v}] (\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2) = \lambda [\vec{u}, \vec{v}] \vec{w}_1 + \mu [\vec{u}, \vec{v}] \vec{w}_2$$

2) *Кососимметричность по первым двум аргументам:*

$$[\vec{u}, \vec{v}] \vec{w} = -[\vec{v}, \vec{u}] \vec{w}$$

**2.4 Базис векторов в трехмерном пространстве.** Определение базиса трехмерных векторов с фиксированной точкой приложения аналогично определению в двухмерном случае. А именно, любые три пространственных вектора  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  с одной и той же точкой приложения  $M$  образуют базис в пространстве векторов с той же точкой приложения, если для любого вектора  $\vec{p}$ , приложенного к  $M$ , справедливо равенство

$$\vec{p} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  вещественные числа.

**Теорема о базисе в трехмерном пространстве.** *Любые три некопланарных, т.е. не лежащих в одной плоскости, вектора  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  образуют базис в трехмерном пространстве.*

### 3. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ К РАЗДЕЛУ 7

#### Лабораторная работа 1. Векторная алгебра на плоскости.

Лабораторная работа посвящена решению задач векторной алгебры на плоскости с помощью компьютера. Вычисления проводятся как на бумаге, так и с помощью команд, выполняемых компьютером.

#### Описание компьютерных команд.

С помощью специально написанной команды **VectorOperations**[**vector1**, **vector2**, **point**, **operation**, **options**] выполняются операции сложения или вычитания векторов.

Аргументы **vector1** и **vector2** - это векторы, над которыми осуществляются векторные операции. Векторы могут быть заданы координатами начальной и конечной точки в виде **vector**[[**x1**, **y1**],[**x2**, **y2** ]], где { $x_1, y_1$ } координаты начала, а { $x_2, y_2$ } координаты конца вектора.

Векторы также могут быть заданы своими координатами в виде **vector**[ $\alpha, \beta$ ]. В этом случае они считаются приложенными к точке  $O$  – началу координат.

Аргумент **point** указывает точку приложения результата операции. Точка задается своими координатами в виде { $a, b$ }.

Аргумент **operation** может иметь значения **Plus** для сложения или **Minus** для вычитания векторов.

Результатом выполнения команды **VectorOperations** будет рисунок, на котором стрелками изображаются векторы-аргументы  $v_1$  и  $v_2$ , параллельно перенесенные векторы  $v_1$  и  $v_2$  и вектор-результат операции.

Например, сложим вектор  $\vec{v}_1$  с точкой приложения (1, 2) и концом (2, 3) с вектором  $\vec{v}_2$ , имеющим точку приложения (-2, 3) и конец (-1, 1). Результат пусть будет приложен к точке (2, 2).

**VectorOperations**[**vector**[[1, 2], [2, 3]], **vector**[-2, 3], [-1, 1], [2, 2], **Plus**];

На рисунке 7.3.1 через  $\|v_1$  и  $\|v_2$  обозначены параллельно перенесенные векторы  $v_1$  и  $v_2$ . Если векторы имеют одну и ту же точку приложения, и результат также прилагается к той же точке, то аргумент **point** вводить не обязательно.

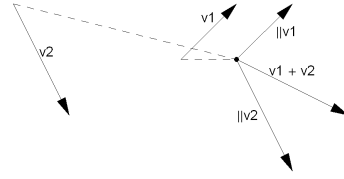


Рис. 7.3.1

Аргументы **options** можно не вводить. Если их не указывать, то значения этих аргументов будут установлены по умолчанию. Пример задания опций:

```
VectorOperations[vector[{1, 2}], {2, 3}], vector[-2, 3], {-1, 1}], {2, 2},  
Plus, Axes → True];
```

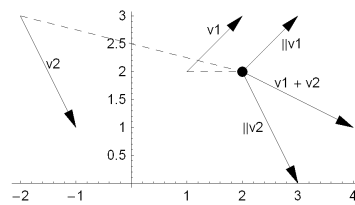


Рис. 7.3.2

Задание опционального аргумента **Axes** → **True** приводит к появлению на рисунке координатных осей.

Аргументы **vector1** и **vector2** команды **VectorOperations** можно задавать в виде произвольных линейных комбинаций векторов. Например, можно записать **vector1** в виде  $2 \mathit{vector}[0, 1] + 3 \mathit{vector}[1, 1]$ , а **vector2** в виде  $-2 \mathit{vector}[2, 1]$ , тогда если третий аргумент команды есть **Plus**, будет построена линейная комбинация  $2 \mathit{vector}[0, 1] + 3 \mathit{vector}[1, 1] - 2 \mathit{vector}[2, 1]$ . Поэтому помощью команды **VectorOperations** могут быть построены линейные комбинации любого числа векторов.

Команда **ScalarProduct**[**vector1**, **vector2**] вычисляет скалярное произведение векторов. Векторы могут быть заданы своими координатами в виде  $\mathit{vector1} = \mathit{vector}[a, b]$ ,  $\mathit{vector2} = \mathit{vector}[c, d]$ . Например,



**ScalarProduct**[vector[7, 4], vector[-6, 8]]

-10

Вычислено скалярное произведение вектора  $\vec{v}_1(7, 4)$  и вектора  $\vec{v}_2(-6, 8)$ . Оно равно -10.

Векторы также могут быть заданы координатам точек приложения и координатами концов в виде  $vector[\{a, b\}, \{c, d\}]$ . В качестве примера вычислим скалярное произведение вектора  $\vec{v}_3$ , приложенного к точке  $(7, -3)$ , с концом в точке  $(2, 4)$  и вектора  $\vec{v}_4$  с точкой приложения  $(5, -6)$  и концом  $(8, 10)$ :

**ScalarProduct**[vector[{7, -3}, {2, 4}], vector[{5, -6}, {8, 10}]]

97

Скалярное произведение равно 97.

Результатом выполнения команды **Abs**[vector[a,b]] является модуль вектора с координатами (a,b), т.е. число  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Abs**[vector[3, 4]]

5

### Задания.

1) Дан вектор  $\vec{MN}$ , с точкой приложения  $M(-1, 3)$  и концом  $N(1, 2)$ .

а) Вычислить на бумаге координаты конца вектора, полученного из  $\vec{MN}$  путем параллельного переноса в точку  $P(2, -1)$ .

б) С помощью команды **VectorOperations** с опциональным аргументом **Axes**  $\rightarrow$  **True** проверить результат.

с) С помощью команд **ScalarProduct** и **Abs** проверить, что перенесенный вектор действительно параллелен исходному.

2) Выполнить команду

**p1 = Pic1;**

которая символу p1 присваивает значением выполненный компьютером рисунок Рис. 7.3.3 (соответствующая компьютерная программа имеет имя Pic1). На рисунке представлен прямоугольник PABC со сторонами длины 3 и длины 4. Точка M - середина стороны BC, точка N - середина стороны AB, точка P имеет координаты (-1,-2).

а) Вычислить на бумаге координаты векторов  $\vec{PM}$ ,  $\vec{PN}$ ,  $\vec{MN}$ . Найти разность векторов  $\vec{PN}$ , и  $\vec{PM}$ , приложить ее к точке M и доказать, что полученный вектор равен вектору  $\vec{MN}$ .

б) Проиллюстрировать проведенные вычисления графически. Для этого перенести параллельно разность векторов  $\vec{PN}$  и  $\vec{PM}$  в точку M с помощью команды **VectorOperations** с опциональным аргументом **Axes**  $\rightarrow$  **True**. Присвоить в качестве значения символу p2 выполненный рисунок. Затем совместить рисунки p1 и p2, выполнив команду **Show**[p1,p2].

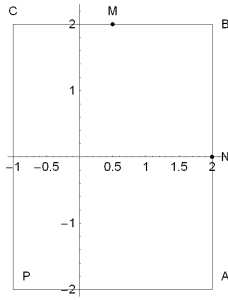


Рис. 7.3.3

с) С помощью команд **ScalarProduct** и **Abs** вычислить угол между векторами  $\vec{PM}$  и  $\vec{PN}$ . Найти приближенное значение угла в градусах.

3) Выполнить команду

**p1 = Pic2;**

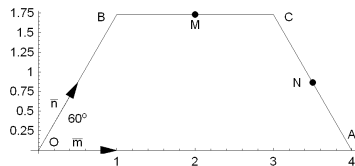


Рис. 7.3.4

которая символу p1 присваивает значением выполненный компьютером рисунок Рис. 7.3.4 (соответствующая компьютерная программа имеет имя Pic2).

В равнобедренной трапеции  $OACB$  (Рис.1.11) угол  $BOA$  равен  $60^\circ$ ,  $OB = BC = CA = 2$ ,  $M$  и  $N$  - середины сторон  $BC$  и  $AC$ .

а) Разложить векторы  $\vec{OM}$  и  $\vec{ON}$  по базису из векторов  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , которые являются единичными векторами направлений  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ . Для решения си-

стемы линейных уравнений, из которых определяются коэффициенты разложений используйте команду **Solve**.

б) С помощью команды **VectorOperations[a m, b n, Plus, Axes → True]**, где  $m, n$  – векторы, заданные своими координатами,  $a$  и  $b$  найденные вами коэффициенты разложения по базису  $m, n$ , постройте графически соответствующие линейные комбинации, присваивая результаты вычислений символам  $p2$  и  $p3$ . Проверьте с помощью команд **Show[p1,p2]** и **Show[p1,p3]** правильность ваших вычислений.

с) Найдите угол между векторами  $\vec{OM}$  и  $\vec{ON}$ . Найти его приближенное значение в градусах.

4) На плоскости даны три точки:  $A(3, 3)$ ,  $B(-2, 3)$  и  $C(-3, -1)$ .

а) Найти с помощью ручки и бумаги координаты точки  $D$ , являющейся вершиной параллелограмма  $ABCD$ . Проверить правильность вычисления с помощью команды **VectorOperations**, присвоив символу  $p1$  значение выполненного вычисления.

б) Найти разложение вектора  $\vec{BD}$  по базису  $\vec{BA}, \vec{CA}$ . Проверить графически правильность разложения по базису. Для этого выполнить команду **p2 = VectorOperations[a \* v1, b \* v2, Plus, Axes → True]**, где  $v1 = \vec{BA}$ ,  $v2 = \vec{CA}$ ,  $a, b$  - коэффициенты разложения, и совместить рисунки  $p1, p2$  с помощью команды **Show[p1,p2]**.

5) Даны векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$ , угол между которыми равен  $120^\circ$ . Длина вектора  $\vec{v}$  равна 3, длина вектора  $\vec{w}$  равна 4.

а) Вычислить с помощью ручки и бумаги координаты вектора  $\vec{u} = 2\vec{v} + 1.5\vec{w}$ .

б) С помощью команды **VectorOperations** построить вектор  $\vec{u}$  и проверить вычисление его координат.

с) С помощью команд **ScalarProduct** и **Abs** найти углы между векторами  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$ ,  $\vec{u}$  и  $\vec{w}$ .

6) а) С помощью команды **VectorOperations** начертить диагонали в параллелограмме, построенном на векторах  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$  и  $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ .

*Указание.* Присвоить символу  $p1$  значение рисунка, на котором построена одна диагональ, а символу  $p2$  - значение рисунка, на котором построена вторая диагональ. Совместить оба рисунка с помощью команды **Show[p1,p2]**.

б) Вычислить угол между диагоналями. Найти его приближенное значение в градусах.

7) Даны векторы  $\vec{v} = \vec{OA}$  длины 2 и  $\vec{w} = \vec{OB}$  длины 4, угол между которыми составляет  $60^\circ$ .

а) Вычислить координаты точки  $C$  - четвертой вершины параллелограмма  $OABC$ . Проверить правильность вычисления с помощью команды **VectorOperations**.

б) С помощью команды **VectorOperations** начертите диагонали этого параллелограмма, сначала по-отдельности, присвоив символам  $p1, p2$  значения построенных рисунков. Затем совместите оба рисунка с помощью команды **Show[ p1, p2]**.

с) Найти угол между диагоналями. Найти его приближенное значение в градусах.

8) Даны три вершины  $A(3, 7)$ ,  $B(2, -3)$ ,  $C(-1, 4)$  параллелограмма.

а) Найти с помощью ручки и бумаги координаты четвертой вершины  $D$  параллелограмма.

б) С помощью команды **VectorOperations** начертите диагонали этого параллелограмма, сначала по-отдельности, присвоив символам  $p1$ ,  $p2$  значения построенных рисунков. Затем совместите оба рисунка с помощью команды **Show[ p1, p2]**.

с) Вычислить с помощью команд **ScalarProduct** и **Abs** острый угол между диагоналями. Найти его приближенное значение в градусах.

9) Отрезок, ограниченный точками  $A(1, -3)$ ,  $B(4, 3)$ , разделен на три равные части.

а) Вычислить координаты точек деления  $P$ ,  $Q$ .

б) Убедитесь графически в правильности вычислений. Для этого постройте командой **VectorOperations** вектор  $\vec{AB}$  как разность векторов  $\vec{OB}$  и  $\vec{OA}$  (присвойте символу  $p1$  значением этот рисунок), а также векторы  $\vec{OP}$  и  $\vec{OQ}$  (присвоив символам  $p2$  и  $p3$  значениями эти рисунки). Совместите рисунки командой **Show[p1,p2,p3]**.

с) Найти угол между векторами  $\vec{OP}$  и  $\vec{OQ}$ .

#### Образец решения задачи.

**Задача.** а) С помощью команды **VectorOperations** начертить диагонали параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$  и  $\vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ .

б) Вычислить угол между диагоналями в радианах и в градусах.

**Указание.** Для выполнения пункта а) присвойте символу  $p1$  значение равное рисунку, содержащему только одну диагональ. Затем присвойте символу  $p2$  значение равное рисунку со второй диагональю. Затем совместите оба рисунка с помощью команды **Show**.

**Решение.** Диагонали параллелограмма суть сумма и разность векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$ . Для того, чтобы нарисовать первую диагональ, выполняем команду

```
p1 = VectorOperations[2 vector[1, 0] + vector[0, 1],  
3 vector[1, 0] - 2 vector[0, 1], Plus, Axes -> True];
```

Вторая диагональ параллелограмма есть вектор разности  $\vec{v} - \vec{w}$ , приложенный к концу вектора  $\vec{w}$ . Вычислим координаты конца вектора  $\vec{w}$ .

```
3 vector[1, 0] - 2 vector[0, 1]  
  
vector[3, -2]
```

Мы получили, что координаты точки, являющейся концом вектора  $\vec{w}$ , равны  $(3, -2)$ . Поэтому выполняем следующую команду

```
p2 = VectorOperations[2 vector[1, 0] + vector[0, 1],
```

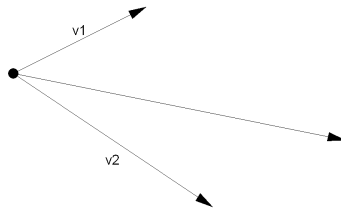


Рис. 7.3.5

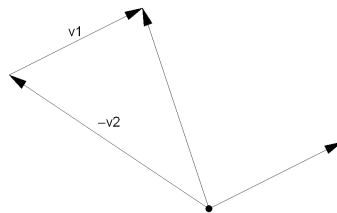


Рис. 7.3.6

**3 vector[1, 0] - 2 vector[0, 1], {3, -2}, Minus];**

Затем совмещаем диагонали рисунков 7.3.5 и 7.3.6 на новом рисунке 7.3.7.

**Show[p1, p2];**

b) Для того, чтобы найти угол между диагоналями, вводим векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{w}$  в компьютер.

$$\mathbf{v} = 2 \text{ vector}[1, 0] + \text{ vector}[0, 1]$$

$$\text{vector}[2, 1]$$

$$\mathbf{w} = 3 \text{ vector}[1, 0] - 2 \text{ vector}[0, 1]$$

$$\text{vector}[3, -2]$$

Теперь можно применить команду вычисления скалярного произведения, чтобы найти угол между диагоналями в соответствии с формулой

$$\phi = \text{ArcCos} \left[ \frac{(\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w})}{|\vec{v} + \vec{w}| |\vec{v} - \vec{w}|} \right]$$

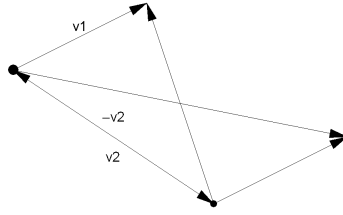


Рис. 7.3.7

где точка означает скалярное произведение.

$$\phi = \text{ArcCos} \left[ \frac{\text{ScalarProduct}[\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}]}{\text{Abs}[\mathbf{v} + \mathbf{w}] \text{Abs}[\mathbf{v} - \mathbf{w}]} \right]$$

$$\text{ArcCos} \left[ -\frac{4}{\sqrt{65}} \right]$$

Мы видим, что угол между диагоналями тупой:  $\phi > \pi/2$ . Чтобы найти его приближенное значение в градусах, выполняем следующую команду

$$\phi \frac{180}{\pi} // \text{N}$$

119.745

**Ответ.** Угол между диагоналями параллелограмма приближенно равен 119.745 градусов.

## Лабораторная работа 2. Векторы в трехмерном пространстве

**Описание компьютерных команд.** Задачи настоящей лабораторной работы выполняются как с помощью вычислений на бумаге, так и с помощью компьютерных команд `Cross[vector1, vector2]`, `CrossProduct[vector1, vector2, options]`, `MixedProduct[vector1, vector2, vector3, options]`, `ScalarProduct[vector1, vector2]` и `Abs[вектор]` вычисляющих векторное, смешанное, скалярное произведения и модуль трехмерных векторов.

Аргументы-векторы задаются в виде `vector[a,b,c]`, где  $a, b, c$  - координаты вектора. Векторы можно складывать и умножать на число. Например,

$$\text{vector}[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \text{vector}[\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$$

$$\text{vector}[1 + a, 2 + b, 3 + c]$$

$$\sqrt{3} \text{vector}[\mathbf{a}, \mathbf{1}, \mathbf{2}]$$

$vector[\sqrt{3}a, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

Команда **Cross** вычисляет векторное произведение и имеет результатом  $vector[a, b, c]$ , где  $a, b, c$  – координаты векторного произведения.

Команда **CrossProduct** дает на выходе векторное произведение и рисунок, на котором представлены векторы-сомножители и векторное произведение.

Команда **MixedProduct** вычисляет смешанное произведение трех векторов.

**Пример 1.** Пусть требуется построить векторное произведение векторов  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  и  $\vec{v} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и вычислить его длину.

Вводим в компьютер векторы  $u$  и  $v$ :

$u = 2 vector[1, 0, 0] + vector[0, 1, 0]$

$vector[2, 1, 0]$

$v = 3 vector[0, 1, 0] + 2 vector[0, 0, 1]$

$vector[0, 3, 2]$

Для вычисления координат векторного произведения выполняем команду

**Cross[u, v]**

$vector[2, -4, 6]$

Наглядное представление о векторном произведении можно получить, выполняя команду

**CrossProduct[u, v]**

векторное произведение =  $vector[2, -4, 6]$

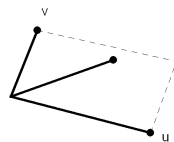


Рис. 7.3.8

Длину вектора вычисляем с помощью команды

**Abs**[vector[6, -4, 6]]

$2\sqrt{22}$

**Пример 2.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{u} = \vec{k} - \vec{j}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Вычислить синус угла между этими векторами.

Вводим в компьютер векторы  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ :

**u** = vector[0, 0, 1] - vector[0, 1, 0]

vector[0, -1, 1]

**v** = vector[1, 0, 0] + vector[0, 1, 0] + vector[0, 0, 1]

vector[1, 1, 1]

Площадь параллелограмма равна длине векторного произведения. Сначала вычисляем векторное произведение

**Cross**[u, v]

vector[-2, 1, 1]

а затем находим его длину

**Abs**[vector[-2, 1, 1]]

$\sqrt{6}$

Синус угла между векторами находим по формуле

$$\frac{\sqrt{6}}{\text{Abs}[\mathbf{u}] \text{Abs}[\mathbf{v}]}$$

1

Таким образом, векторы ортогональны. Проверим это вычисление с помощью скалярного произведения векторов  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$ , которое для ортогональных векторов должно быть равно нулю.

**ScalarProduct**[u, v]

0

**Задания.**

1) Построить векторное произведение вектора  $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$  и вектора  $\vec{v}$ , координаты которого равны скалярным произведениям вектора  $\vec{u}$  с векторами  $\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{k} + \vec{i}$  соответственно. Вычислить его длину.

2) Найти внутренние углы и вычислить площадь треугольника с вершинами  $A(7, 3, 4)$ ,  $B(1, 0, 6)$ ,  $C(4, 5, -2)$ .

3) Вычислить площадь и высоту параллелограмма, построенного на векторах  $2\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{i} + 2\vec{k}$ .



4) Векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  составляют угол в  $45^\circ$  и имеют одинаковую длину 5. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{u} - 2\vec{v}$  и  $3\vec{u} + 2\vec{v}$ .

5) Вычислить угол между векторами  $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ , используя для вычисления косинуса угла скалярное, а для вычисления синуса угла векторное произведение. Проверить, будет ли сумма квадратов результатов равна 1.

6) Даны векторы  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ . Вычислить двойные векторные произведения  $[[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}]$  и  $[\vec{u}, [\vec{v}, \vec{w}]]$ , а также скалярное произведение полученных векторов.

7) Даны векторы  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ . Вычислить двойные векторные произведения  $[[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}]$ ,  $[[\vec{v}, \vec{w}], \vec{u}]$  и  $[[\vec{w}, \vec{u}], \vec{v}]$ . Убедиться в том, что сумма полученных векторов равна нулевому вектору.

8) Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\vec{v} = -3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{w} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ .

9) Вычисляя смешанное произведение, доказать, что точки  $A(2, -1, -2)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(2, 3, 0)$  и  $D(5, 0, -6)$  лежат в одной плоскости.

## РАЗДЕЛ 8

### МАТРИЦЫ

#### 1. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

##### 1.1. Определение матрицы

В математике *матрицей* называется прямоугольная таблица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij}$  некоторые математические объекты (числа, символы и т.п.), называемые *матричными элементами*. Совокупность матричных элементов с одинаковым значением первого индекса  $i$  образует *строку* матрицы, а совокупность матричных элементов с одинаковым значением второго индекса  $j$  - *столбцом* матрицы. Говорят, что матрица  $A$ , задаваемая равенством (1), имеет *размерность*  $k \times n$  (произносится: "k на n"). Если  $k = n$ , то матрица называется *квадратной матрицей*  $n$ -го порядка.

В квадратной матрице матричные элементы  $a_{ii}$  с одинаковыми значениями первого и второго индексов называются *диагональными элементами*, их совокупность - *главной диагональю* матрицы. Остальные матричные элементы называются *внедиагональными*. Сумма диагональных элементов называется *следом* матрицы и обозначается через  $\text{tr}A$ . Матричные элементы  $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$  образуют *побочную диагональ*.

Если у внедиагонального матричного элемента  $a_{ij}$  номер строки  $i$ , которой он принадлежит, больше номера  $j$  столбца, в котором он расположен ( $i > j$ ), то говорят, что этот матричный элемент расположен под главной диагональю, или слева от главной диагонали. В случае противоположного неравенства ( $i < j$ ), матричный элемент  $a_{ij}$  расположен над главной диагональю, или справа от главной диагонали.

Матрица  $O$  с нулевыми матричными элементами называется *нулевой матрицей*. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее внедиагональные элементы равны нулю. Если все матричные элементы диагональной матрицы равны между собой, то матрица называется *скалярной*. Если, кроме того, матричные элементы скалярной матрицы равны 1, то такая матрица называется *единичной*, или *тождественной*, и обозначается через  $E$ .

## 1.2. Матрицы специального вида.

Матрица  $\mathbf{A}$  называется *верхней ступенчатой* при выполнении следующих двух условий:

1) Если у матрицы  $\mathbf{A}$  какая-то строка нулевая, то все строки ниже нее также нулевые.

2) Если первый ненулевой элемент  $i$ -ой строки расположен в столбце с номером  $j$ , то первый ненулевой элемент  $(i+1)$ -ой строки расположен в столбце с номером  $k$ , строго большем  $j$  ( $k > j$ ).

Если в определении верхней ступенчатой матрицы поменять ролями строки и столбцы, то получим *нижнюю ступенчатую* матрицу.

Рассмотрим в качестве примера матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица  $\mathbf{A}$  верхняя ступенчатая, а  $\mathbf{B}$  нижняя ступенчатая.

Если в верхней (нижней) ступенчатой матрице в  $i$ -ой ненулевой строке первый отличный от нуля матричный элемент находится в  $i$ -ом столбце, такая матрица называется *трапецевидной*.

Квадратная матрица  $\mathbf{A}$ , у которой равны нулю все матричные элементы, расположенные под главной диагональю, называется *верхней треугольной* матрицей. Соответственно, если у квадратной матрицы равны нулю все матричные элементы над главной диагональю, то она называется *нижней треугольной* матрицей.

## 1.3. Операции над матрицами.

Две матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  равны ( $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ), если и только если все их матричные элементы совпадают:  $a_{ij} = b_{ij}$  для всех  $i, j$ .

Суммой  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  одинаковой размерности называется матрица  $\mathbf{C}$ , матричные элементы  $c_{ij}$  которой равны сумме соответствующих матричных элементов матриц-слагаемых:  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Очевидно, что  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  и  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{D} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{D})$ , т.е. сложение матриц, как и сложение чисел, коммутативно и ассоциативно. Нулевая матрица  $\mathbf{O}$  обладает свойством числа 0 относительно сложения матриц:  $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$  для всех матриц  $\mathbf{A}$ .

Матрицей, *противоположной матрице*  $\mathbf{A}$ , называется матрица, обозначаемая через  $-\mathbf{A}$ , матричные элементы которой равны соответствующим матричным элементам матрицы  $\mathbf{A}$ , взятым с противоположным знаком. Очевидно, что  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ .

Разностью  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  одинаковой размерности называется матрица  $\mathbf{C}$  такая, что  $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ . Матричные элементы разности матриц удовлетворяют равенствам  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ .

*Произведением матрицы  $\mathbf{A}$  на число  $\alpha$*  называется матрица, обозначаемая через  $\alpha\mathbf{A}$ , получаемая из  $\mathbf{A}$  умножением всех ее матричных элементов на число  $\alpha$ .

Свойства произведения матрицы на число:

$$\begin{aligned} 1 A &= A \\ (\alpha \beta) A &= \alpha (\beta A) \\ \alpha (A + B) &= \alpha A + \alpha B \\ (\alpha + \beta) A &= \alpha A + \beta A \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B} + \dots + \lambda \mathbf{L}$  (конечная сумма) называется *линейной комбинацией* матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{L}$ .

Пусть число  $n$  столбцов матрицы  $\mathbf{A}$  размерности  $k \times n$  равно числу строк матрицы  $\mathbf{B}$  размерности  $n \times t$ , тогда можно определить произведение  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , определив матричные элементы  $c_{ij}$  матрицы  $\mathbf{C}$  равенствами:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Из определения следует, что размерность матрицы  $\mathbf{C}$  равна  $k \times t$ .

Равенство  $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}$  может иметь место лишь для квадратных матриц. Однако и для квадратных матриц произведение зависит, вообще говоря, от порядка сомножителей. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , для которых  $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}$ , называются *перестановочными*, или *коммутирующими*. Произведение матриц обладает следующими свойствами:

- 1)  $(\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{C})$  (ассоциативность),
- 2)  $\alpha (\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A}) \mathbf{B} = \mathbf{A} (\alpha \mathbf{B})$ , где  $\alpha$  - любое вещественное число,
- 3)  $\mathbf{A} (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{C}$ ,  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} + \mathbf{B} \mathbf{C}$ ,
- 4)  $\mathbf{E} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{E} = \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{E}$  - единичная матрица.

#### 1.4. Транспонирование матрицы

Матрица  $\mathbf{A}^T$  с матричными элементами  $a_{ij}^t = a_{ji}$  называется *транспонированной* к матрице  $\mathbf{A}$ . Иными словами, при транспонировании строки и столбцы матрицы меняются местами. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Операция транспонирования обладает свойствами:

- 1)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ ,
- 2)  $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$ ,
- 3)  $(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ ,
- 4)  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ .

#### 1.5. Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие три вида преобразований:

- 1) перестановка между собой двух строк (столбцов) матрицы,
- 2) умножение строки (столбца) матрицы на число,
- 3) прибавление к некоторой строке (столбцу) матрицы другой строки (соответственно, столбца), умноженной на ненулевое число.

**Теорема о приведении к верхней ступенчатой форме.** Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований первого и третьего видов только строк (или только столбцов) может быть приведена к верхней ступенчатой форме.

Аналогичное утверждение верно и относительно приведения матрицы к нижней ступенчатой форме.

**Теорема о матрицах элементарных преобразований.** Элементарные преобразования матрицы можно осуществить, умножая матрицу слева или справа на специальные матрицы

### 1.6. Определитель квадратной матрицы

Рассмотрим первые  $n$  элементов натурального ряда, т.е. числа

$$1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

Если в (1.1) переставить местами числа, стоящие на  $i$ -ом и  $j$ -ом местах, т.е. осуществить транспозицию  $i$ -го и  $j$ -го элементов, то придем к перестановке из чисел  $1, 2, \dots, n$ . Операцию транспозиции можно повторять несколько раз, получая произвольные перестановки

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (1.2)$$

рассматриваемых чисел. Общее число различных перестановок, включая натуральную перестановку (1.1), равно  $n!$  (произносится: "эн факториал"), где  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n$ . Иными словами, общее число различных перестановок равно произведению всех чисел от 1 до  $n$  включительно.

Два натуральных числа  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$  в перестановке (1.2), для которых  $i < j$ , образуют инверсию (беспорядок), если большее из них предшествует меньшему:  $\alpha_i > \alpha_j$ . Перестановка называется четной, если общее число инверсий в ней четное число (в частности, равно 0). Если число инверсий нечетно, то перестановка называется нечетной. Общее число инверсий перестановки называется ее сигнатурой и обозначается через  $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ .

Очевидно, что каждая транспозиция элементов перестановки (1.2) меняет четность перестановки на противоположную. Следовательно, число четных и число нечетных перестановок равны.

Для квадратной матрицы  $\mathbf{A}$   $n$ -го порядка рассмотрим произведение ее матричных элементов следующего вида

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \quad (1.3)$$

Произведение (1.3) получается по следующему правилу: выбираем произвольный матричный элемент  $a_{1\alpha_1}$  первой строки, затем любой элемент второй

строки  $a_{2\alpha_2}$ , стоящий в другом, нежели элемент  $a_{1\alpha_1}$ , столбце, затем в третьей строке выбираем элемент из нового столбца и т.д. и перемножаем выбранные элементы. Таким образом, сомножители в произведении (1.3) стоят в разных строках и разных столбцах! Номера  $\alpha_i$  столбцов матричных элементов произведения (1.3) образуют перестановку. Отсюда следует, что можно составить  $n!$  произведений (1.3).

*Определителем  $\det \mathbf{A}$  квадратной матрицы  $\mathbf{A}$   $n$ -го порядка называется сумма всевозможных произведений (1.3), взятых со знаком  $+$ , если сигнатура перестановки номеров столбцов четна, и со знаком  $-$ , если сигнатура нечетна:*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \quad (1.4)$$

где суммирование производится по всем  $n!$  перестановкам из чисел  $1, 2, \dots, n$ . Определитель квадратной матрицы обозначается также через  $|\mathbf{A}|$ .

Каждое произведение в сумме (1.4) называется *членом определителя*, а число  $(-1)^{\sigma(\alpha)}$  – его *знаком*.

Определитель матрицы обладает следующими свойствами.

1) Если в матрице  $A$  хотя бы одна строка (столбец) нулевая, то ее определитель равен 0.

2) Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании:  $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ .

3) Определитель треугольной матрицы, верхней или нижней, равен произведению ее диагональных элементов.

4) При умножении строки (столбца) матрицы на число ее определитель умножается на то же число.

5) Если элементы  $a_{ij}$  какой-то строки матрицы  $\mathbf{A}$  представлены в виде суммы  $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ , то ее определитель равен сумме определителей матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , у которых все строки, кроме  $i$ -ой, совпадают со строками матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $i$ -я строка у матрицы  $\mathbf{B}$  состоит из матричных элементов  $b_{ij}$ , а у  $\mathbf{C}$  – из матричных элементов  $c_{ij}$ . Аналогичное свойство справедливо для столбцов.

6) При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

7) Если у матрицы две строки (столбца) одинаковые, то ее определитель равен 0.

8) Если у матрицы какая-то строка (столбец) есть линейная комбинация других строк (столбцов), то ее определитель равен 0.

9) Если к какой-то строке (столбцу) матрицы прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель матрицы не изменится.

### 1.7. Миноры и алгебраические дополнения

Если в матрице  $\mathbf{A}$  размерности  $k \times n$  выбрать произвольно  $s$  строк с номерами  $i_1 < i_2 < \dots < i_s$  и такое же количество столбцов с номерами  $j_1 < j_2 < \dots < j_s$ , то матричные элементы матрицы  $\mathbf{A}$ , стоящие на пересечении рассматриваемых строк и столбцов, образуют квадратную матрицу, обозначаемую через  $M_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s}$ . Определитель этой матрицы называется *минором*  $s$ -го порядка

матрицы  $\mathbf{A}$ , расположенном в строках и столбцах с рассматриваемыми номерами.

Если матрица  $\mathbf{A}$  квадратная ( $k = n$ ) и в матрице  $\mathbf{A}$  вычеркнуты строки и столбцы, в которых расположен заданный минор  $\mathbf{M}$ , то оставшиеся элементы матрицы  $\mathbf{A}$  образуют квадратную матрицу  $n - s$ -го порядка. Определитель этой новой матрицы называется *дополнительным минором* к минору  $\mathbf{M}$ . Он обозначается через  $\bar{M}$ .

Вычислим сумму  $\sigma$  номеров строк и столбцов, в которых расположен минор  $\mathbf{M}$ :  $\sigma = i_1 + i_2 + \dots + i_s + j_1 + j_2 + \dots + j_s$ . Дополнительный минор  $\bar{M}$ , умноженный на  $(-1)^\sigma$ , называется *алгебраическим дополнением* к минору  $\mathbf{M}$ . Он обозначается через  $A_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s}$ .

**Теорема Лапласа.** Пусть в квадратной матрице  $\mathbf{A}$  выбраны произвольные  $s$  строк (столбцов), тогда определитель матрицы  $\mathbf{A}$  равен сумме всевозможных произведений миноров матрицы  $\mathbf{A}$ , расположенных в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

Если  $s = 1$  и выбрана строка (столбец) с номером  $i$ , то минорами первого порядка, расположенными в  $i$ -ой строке (столбце), будут сами элементы  $a_{ij}$   $i$ -ой строки ( $a_{ji}$   $i$ -го столбца). Обозначив через  $A_{ij}$  алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$ , из Теоремы Лапласа получаем равенство

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

которое называется *разложением определителя по  $i$ -ой строке*. Если фиксирован столбец, то приходим к равенству

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ji} A_{ji}$$

называемому *разложением определителя по  $i$ -му столбцу*.

## 1.8. Обратная матрица

Пусть дана квадратная матрица  $\mathbf{A}$ . Квадратная матрица  $\mathbf{B}$  называется *обратной* к матрице  $\mathbf{A}$ , если выполнены равенства

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная (тождественная матрица). Обратная к  $\mathbf{A}$  матрица  $\mathbf{B}$ , в случае ее существования, обозначается через  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Квадратная матрица  $\mathbf{A}$  называется *вырожденной*, если ее определитель  $\det \mathbf{A}$  равен 0.

**Критерий обратимости матрицы.** Матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную тогда и только тогда, когда она невырождена, т.е. когда  $\det \mathbf{A} \neq 0$ .

**Теорема о левой и правой обратных матрицах.** Если  $\mathbf{A}$  квадратная матрица, и выполнено равенство  $\mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{E}$  (или равенство  $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{E}$ ), то  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ .

**Следствие.** Обратная матрица единственна: если  $\mathbf{B}_1\mathbf{A} = \mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}_2\mathbf{A} = \mathbf{E}$ , то  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ .

Приведем свойства обратных матриц.

1)  $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$ , т.е. матрица, обратная к тождественной матрице, совпадает с ней.

2)  $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$ . Детерминант обратной матрицы есть величина, обратная к детерминанту матрицы.

3)  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ . Матрица, обратная к обратной матрице, совпадает с исходной.

4)  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ . Операции вычисления транспонированной и обратной матриц престаповочны.

5)  $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .

Практический способ вычисления обратной матрицы основывается на следующем утверждении.

**Теорема.** Произвольная невырожденная матрица элементарными преобразованиями может быть приведена к тождественной.

Пусть выполнено равенство

$$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 \dots \mathbf{L}_k \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_k$  – матрицы элементарных преобразований, тогда

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 \dots \mathbf{L}_k$$



## Глава 2. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса

### 2.1. Системы линейных уравнений.

Системой линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется совокупность  $k$  алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \tag{2.1}$$

В системе (2.1) совокупность  $k \times n$  чисел  $a_{ij}$ , называемых *коэффициентами системы*, задана. Если расположить коэффициенты системы в виде таблицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

то эта таблица  $\mathbf{A}$  будет называться *матрицей коэффициентов* системы (2.1). Матрица состоит из горизонтально расположенных *строк* и вертикально расположенных *столбцов*.

Заданы также  $k$  чисел  $b_i$ . Они называются *правыми частями*, или *свободными членами* системы. Если дополнить матрицу коэффициентов (2.2) системы (2.1) справа столбцом свободных членов, то получится *расширенная матрица* системы (2.1):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

В любое уравнение каждая неизвестная входит самое большее в первой степени, поэтому система называется *линейной*.

Если в систему (2.1) вместо неизвестной  $x_1$  подставить число  $c_1$ , одновременно вместо неизвестной  $x_2$  подставить число  $c_2$  и т.д. вместо  $x_n$  подставить

$c_n$  и при этом левая часть каждого уравнения станет равной правой части, то совокупность чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$  будет называться *решением* системы (2.1).

Система (2.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения. Если совместная система имеет единственное решение, то она называется *определенной*, если больше одного, то *неопределенной*.

*Решить систему* означает установить, является она совместной или нет, и в случае совместности найти единственное решение определенной системы или описать все множество решений неопределенной системы, или, иначе, найти общее решение системы.

Две системы линейных алгебраических уравнений называются *эквивалентными*, если каждое решение первой системы является решением второй и, наоборот, каждое решение второй является решением первой.

## 2.2. Метод Гаусса.

Метод Гаусса решения системы (2.1) состоит в том, что расширенная матрица (2.3) системы элементарными преобразованиями строк приводится к верхней ступенчатой форме:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1r+1} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \alpha_{2r+1} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{mr} & \alpha_{mr+1} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_k \end{pmatrix}, \quad \alpha_{mr} \neq 0$$

Если хотя бы один из элементов  $\beta_{m+1}, \dots, \beta_k$  отличен от нуля, то система несовместна. Если все эти элементы равны нулю, система совместна.

Совместная система имеет единственное решение при  $m = n$ . При  $m < n$  общее решение зависит от  $n - m$  параметров.

Совместную систему решают, начиная с последнего нетривиального уравнения

$$\alpha_{mr}x_r + \alpha_{mr+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m$$

Из этого уравнения находят  $x_r$ , перенося слагаемые, содержащие  $x_{r+1}, \dots, x_n$ , в правую часть уравнения и деля получившуюся новую правую часть на отличный от нуля коэффициент  $\alpha_{mr}$ . Затем подставляют найденное значение  $x_r$  в  $m - 1$ -е уравнение, из которого находят  $x_{r-1}$ , и т.д.

### 3. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ К РАЗДЕЛУ 8

Компьютерный практикум по теме “Матрицы” состоит из четырех лабораторных работ. Сделаем общие замечания ко всем четырем работам.

**Как ввести матрицу в компьютер.** Для того, чтобы ввести матрицу в компьютер, можно воспользоваться двумя способами. Первый заключается в том, что матрицу вводят построчно. Каждая строка заключается в фигурные скобки, и список строк заключается в фигурные скобки. Рассмотрим, например, матрицу

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

При помощи клавиатуры ее вводят в компьютер следующим образом

$$\mathbf{m} = \{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}, \{0, 1, 0\}, \{2, 0, 3\}\}$$
$$\{\{a, b, c\}, \{0, 1, 0\}, \{2, 0, 3\}\}$$

Команда **MatrixForm** позволяет представить эту матрицу на экране компьютера в привычной форме прямоугольной таблицы:

**MatrixForm**[**m**]

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Команду **MatrixForm** можно записать после матрицы **m**, поставив после **m** двойную косую черту:

**m**//**MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Второй способ ввести матрицу в компьютер: воспользоваться шаблоном матрицы. Этот шаблон содержится на панели шаблонов, называемой **BasicInput**. Если этой панели нет на экране, ее можно вызвать через меню **File + Palletes + BasicInput**. На панели **BasicInput** есть шаблон матрицы  $2 \times 2$ .

Если щелкнуть левой кнопкой мыши при указателе мыши в поле шаблона, то этот шаблон помещается в Записную книжку в то ее место, где находится курсор. Добавление новой строки производится с помощью комбинации клавиш **Ctrl+**, (**Ctrl+запятая**), а добавление нового столбца - комбинацией клавиш **Ctrl+Enter**. Перемещение из одного квадратика шаблона в другой производится нажатием клавиши **Tab**. Матрица **m** с помощью панели шаблонов вводится следующей командой:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Единичную матрицу **E** размерности  $n$  можно ввести с помощью команды **IdentityMatrix[n]**. Например, пусть  $n = 3$ , тогда **E** вводится командой

**IdentityMatrix[3]**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Как умножить матрицу на число, сложить и умножить матрицы в системе “Математика”.** Пусть требуется умножить на 2 введенную выше матрицу **m**. С этой целью вводим в компьютер и выполняем любую из двух команд **2 m** или **m 2**.

**2 m**

$$\{\{2a, 2b, 2c\}, \{0, 2, 0\}, \{4, 0, 6\}\}$$

Для того, чтобы сложить матрицы их разделяют знаком **+**. Определим, например, матрицу

$$\mathbf{m1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сумма матриц **m** и **m1** вычисляется следующим образом:

**m + m1**

$$\{\{a + m1, b + m1, c + m1\}, \{m1, 1 + m1, m1\}, \{2 + m1, m1, 3 + m1\}\}$$

Для того, чтобы перемножить матрицы, между ними ставится точка:

**m.m1**

$\{\{a, 2a + by, 3a + c + bz\}, \{0, y, z\}, \{2, 4, 9\}\}$

Как вычислить натуральную степень матрицы в системе “Математика”. Чтобы возвести матрицу **A** в квадрат, следует вычислить произведение **A.A**. Например, квадрат матрицы **m** равен

**m.m**

$\{\{a^2 + 2c, b + ab, 3c + ac\}, \{0, 1, 0\}, \{6 + 2a, 2b, 9 + 2c\}\}$

Нельзя при нахождении квадрата матрицы ввести в компьютер и вычислить выражение **m<sup>2</sup>**:

**m<sup>2</sup>**

$\{\{a^2, b^2, c^2\}, \{0, 1, 0\}, \{4, 0, 9\}\}$

Видно, что “Математика”, вычисляя выражение **m<sup>2</sup>**, возводит в квадрат матричные элементы, поэтому  $m.m \neq m^2$ .

Аналогично, для нахождения третьей степени матрицы **m**, следует вычислить выражение **m.m.m** и т.д.

**Команда Permute.** Матрица, которая при умножении на нее слева произвольной ненулевой матрицы **m** размерности  $k \times n$ , переставляет *i*-ую и *j*-ую строки последней, порождается командой **Permute**[{*i*, *j*}, **k**], где *k* число строк матрицы **m**. Например, команда **Permute**[{**1**, **3**}, **3**] порождает матрицу

**Permute**[{*i*, *j*}, **k**]

$\{\{0, 0, 1\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0\}\}$

которую удобно рассматривать в привычной форме прямоугольной таблицы, что достигается применением к результату команды **MatrixForm**:

**Permute**[{*i*, *j*}, **k**]/MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножение слева матрицы **Permute**[{**1**, **3**}, **3**] на матрицу **m** приводит к матрице

**m.Permute**[{**1**, **3**}, **3**]/MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

первая строка которой совпадает с третьей строкой матрицы **m**, а третья строка соответственно с первой. Умножение произвольной матрицы **m** справа на матрицу **Permute**[{*i*, *j*}, **n**] приводит к перестановке первого и третьего столбца

**Permute**[{1, 3}, 3].m//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} c & b & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Команда LinearCombination.** Умножение матрицы **m** слева на матрицу, порождаемую командой **LinearCombination**[{i, α}, {k, β}, n], приводит к измененной матрице **m**, у которой новая *i*-я строка есть линейная комбинация старой *i*-ой строки, умноженной на число α, и *k*-ой строки, умноженной на число β. Остальные строки не изменяются.

Матрица **LinearCombination**[{3, -a}, {1, 2}, 3], умноженная **слева** на матрицу **m**, приводит к новой матрице, в которой третья строка заменена на линейную комбинацию третьей строки, умноженной на -a, и первой строки, умноженной на 2:

**LinearCombination**[{3, a}, {1, b}, 3].m//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha + a\beta & b\beta & 3\alpha + c\beta \end{pmatrix}$$

С помощью команды **LinearCombination** можно умножать на числа отдельные строки матрицы. Пусть, например, требуется умножить на число *a* *i*-ю строку матрицы **m**. Оказывается, что для этого достаточно выполнить команду **LinearCombination**[{i, a}, {j, 0}, n], где *j* – любая строка. Умножим, например, третью строку рассмотренной выше матрицы **m** на число 3.

**LinearCombination**[{3, 3}, {3, 0}, 3].m//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

**Лабораторная работа 1. Приведение матриц к ступенчатым формам.**

В данной лабораторной работе команды **Permute** и **LinearCombination** используются для порождения матриц элементарных преобразований, с помощью которых матрицы приводятся к верхней или нижней ступенчатой форме.

**Задания.** С помощью элементарных преобразований строк привести следующие матрицы к нижним и верхним ступенчатым формам.

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Образец выполнения задания.**

**Задание.** Привести к верхней и нижней ступенчатым формам матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

**Решение.** Прежде всего вводим эту матрицу в компьютер, присваивая символу **m1** значение этой матрицы

$$\mathbf{m1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\{\{1, -1, 1, -2\}, \{2, -2, 2, -4\}, \{3, -3, 3, -5\}\}$$

С тем, чтобы представить эту матрицу в привычной форме прямоугольной таблицы, выполняем команду

**m1//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Приводим матрицу **m1** к верхней ступенчатой форме с помощью команды **LinearCombination**. Для этого замечаем, что умножая первую строку матрицы

на -2 или на -3 и прибавляя измененную таким образом первую строку ко второй и соответственно к третьей, мы обращаем в нуль все элементы первого столбца, кроме единицы в первой строке. Поэтому выполняем команду

**LinearCombination**[{2, 1}, {1, -2}, 3].m1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

а затем команду

**LinearCombination**[{3, 1}, {1, -3}, 3].  
**LinearCombination**[{2, 1}, {1, -2}, 3].m1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вторая строка у полученной матрицы нулевая, а в третьей строке есть отличный от нуля элемент. Поэтому переставляем вторую и третью строки с помощью команды **Permute**:

**Permute**[{2, 3}, 3].**LinearCombination**[{3, 1}, {1, -3}, 3].  
**LinearCombination**[{2, 1}, {1, -2}, 3].mt//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и приходим к верхней ступенчатой матрице!

Для приведения матрицы **m1** к нижней ступенчатой форме вновь выполняем команду

**m1**//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

с тем, чтобы исследуемая матрица была перед глазами. Рассмотрение матрицы показывает, что если умножить третью строку матрицы на  $-1/3$  и прибавить результат к первой строке, то получим нулевой элемент на пересечении первого столбца и первой строки

**LinearCombination**[{1, 1}, {3, -1/3}].m1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 2 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$



Затем умножаем третью строку полученной матрицы на  $-2/3$  и прибавляем результат ко второй строке

```
LinearCombination[{2, 1}, {3, -2/3}, 3].
LinearCombination[{1, 1}, {3, -1/3}, 3].m1//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Умножаем вторую строку полученной матрицы на  $-1/2$  и прибавляем ее к первой строке

```
LinearCombination[{1, 1}, {2, -1/2}, 3].
LinearCombination[{2, 1}, {3, -2/3}, 3].
LinearCombination[{1, 1}, {3, -1/3}, 3].m1//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Матрица **m1** приведена к нижней ступенчатой форме.

## Лабораторная работа 2. Определители квадратных матриц.

В задачах данной лабораторной работы для вычисления определителя квадратной матрицы используется метод Гаусса. Он состоит в том, что с помощью линейных комбинаций строк матрицы она приводится к верхнему треугольному виду. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Для составления линейных комбинаций иногда приходится переставлять местами строки матрицы. Эта операция меняет знак определителя на противоположный. Часто бывает полезным умножить все элементы данной строки на некоторое число. Эта операция приводит к умножению определителя на это же число.

**Задания.** В следующих ниже задачах требуется вычислить определитель квадратной матрицы методом Гаусса. Для приведения матриц к верхней треугольной форме используются команды **Permute** и **LinearCombination**.

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

6)

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8)

$$\begin{pmatrix} 35 & 59 & 71 \\ 42 & 70 & 77 \\ 43 & 68 & 72 \end{pmatrix}$$

9)

$$\begin{pmatrix} 27 & 44 & 40 \\ 20 & 64 & 21 \\ 13 & -20 & 13 \end{pmatrix}$$

10)

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 13 \\ 4 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

**Образец выполнения задания.**

**Задание.** Вычислить определитель квадратной матрицы третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 24 & 11 & 13 \\ 51 & 13 & 32 \\ 61 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

**Решение.** Вводим матрицу в компьютер

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 24 & 11 & 13 \\ 51 & 13 & 32 \\ 61 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

$\{\{24, 11, 13\}, \{51, 13, 32\}, \{61, 11, 14\}\}$

Затем приводим ее к нижнему треугольному виду. Для этого с помощью первой строки обнуляем элементы первого столбца, стоящие во второй и третьей строчках:

`LinearCombination[{3, 1}, {1, -64/24}, 3].`

`LinearCombination[{2, 1}, {1, -51/24}, 3].m//MatrixForm]`

$$\begin{pmatrix} 24 & 11 & 13 \\ 0 & -\frac{83}{8} & \frac{35}{8} \\ 0 & -\frac{407}{24} & -\frac{457}{24} \end{pmatrix}$$

Далее с помощью второй строки обнуляем элемент третьей строки и второго столбца:

`LinearCombination[{3, 1}, {2, -407/(3 * 83)}, 3].`

`LinearCombination[{3, 1}, {1, -64/24}, 3].`

`LinearCombination[{2, 1}, {1, -51/24}, 3].m//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 24 & 11 & 13 \\ 0 & -\frac{83}{8} & \frac{35}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{2174}{83} \end{pmatrix}$$

Матрица приведена к нижнему треугольному виду элементарными преобразованиями строк, не изменяющими детерминанта. Поэтому вычисляем произведение диагональных элементов

$$24 * \left(-\frac{83}{8}\right) * \left(-\frac{2174}{83}\right)$$

6522

**Ответ.** Определитель рассматриваемой матрицы равен 6522.

### Лабораторная работа 3. Обратная матрица.

В задачах данной лабораторной работы используется метод Гаусса-Жордана вычисления матрицы обратной к невырожденной квадратной матрице  $\mathbf{m}$ .

Метод состоит в следующем. Сначала матрица элементарными преобразованиями приводится к верхней треугольной матрице  $\mathbf{m}_1$ . Диагональные элементы этой матрицы отличны от нуля, так как исходная матрица  $\mathbf{m}$  не вырождена. Если они не равны единице, то умножая строки на числа, обратные диагональным элементам строки, приходим к матрице  $\mathbf{m}_2$ , у которой все диагональные элементы равны 1. Затем матрицу  $\mathbf{m}_2$  приводим к нижней треугольной матрице  $\mathbf{m}_3$ , которая есть на самом деле единичная матрица. Произведение матриц преобразований первого, второго и третьего этапов есть матрица, обратная к матрице  $\mathbf{m}$ .

**Задания.** С помощью метода Гаусса-Жордана вычислить обратные матрицы для следующих матриц.

1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Образец выполнения задания.**

**Задание.** Вычислить матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Решение.** Вводим матрицу в компьютер

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}\}$$

Для удобства приведения матрицы к верхнему треугольному виду переставляем первую и вторую строки матрицы с помощью команды **Permute**.

**Permute**[\{1, 2\}, 3].m//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обнуляем матричный элемент третьей строки и первого столбца, вычитая первую строку из третьей

**LinearCombination**[\{3, 1\}, \{1, -1\}, 3].

**Permute**[\{1, 2\}, 3].m//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Обнуляем матричный элемент, стоящий на пересечении третьей строки и второго столбца

**LinearCombination**[\{3, 1\}, \{2, -1\}, 3].

**LinearCombination**[\{3, 1\}, \{1, -1\}, 3].

**Permute**[\{1, 2\}, 3].m//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Матрица приведена к верхнему треугольному виду. Единственный отличный от единицы диагональный матричный элемент равен -2. Умножаем третью строку матрицы на  $-1/2$ .

**LinearCombination**[\{3, -1/2\}, \{3, 0\}, 3].

**LinearCombination**[\{3, 1\}, \{2, -1\}, 3].

**LinearCombination**[\{3, 1\}, \{1, -1\}, 3].

**Permute**[\{1, 2\}, 3].m//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приступим к приведению полученной матрицы к единичной. Для этого обнуляем элементы третьего столбца, стоящие в первой и второй строках, с помощью единицы третьей строки.

**LinearCombination**[\{2, 1\}, \{3, -1\}, 3].

**LinearCombination**[\{1, 1\}, \{3, -1\}, 3].

**LinearCombination**[{3, -1/2}, {3, 0}, 3].  
**LinearCombination**[{3, 1}, {2, -1}, 3].  
**LinearCombination**[{3, 1}, {1, -1}, 3].  
**Permute**[{1, 2}, 3].m//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим через **m1** произведение матриц проведенных нами элементарных преобразований

**m1 = LinearCombination**[{2, 1}, {3, -1}, 3].  
**LinearCombination**[{1, 1}, {3, -1}, 3].  
**LinearCombination**[{3, -1/2}, {3, 0}, 3].  
**LinearCombination**[{3, 1}, {2, -1}, 3].  
**LinearCombination**[{3, 1}, {1, -1}, 3].  
**Permute**[{1, 2}, 3].m

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\} \right\}$$

Проверим, что матрица **m1** есть матрица обратная к **m**:

**m.m1**//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка подтверждает, что обратная матрица **m1** найдена нами правильно.

Последняя лабораторная работа посвящена решению систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

#### Лабораторная работа 4. Метод Гаусса.

Решение системы следует начать с введения в компьютер расширенной матрицы данной системы и присвоения некоторому символу, например, символу **m** значения этой матрицы. Затем введенную матрицу преобразуют к верхней ступечатой форме путем умножения матрицы **m** слева на матрицы элементарных преобразований. Матрица, которая, будучи умноженной слева на произвольную ненулевую матрицу, переставляет *i*-ую и *j*-ую строки последней, порождается командой **Permute**[{i, j}, n], где *n* число строк матрицы **m**. Например, выполнение команды

**Permute**[{2, 4}, 4]//MatrixForm

приводит к появлению на экране матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Прибавление к  $i$ -ой строке матрицы  $\mathbf{m}$   $j$ -ой строки этой матрицы, умноженной на число  $k$ , осуществляется умножением слева матрицы  $\mathbf{m}$  на матрицу, порождаемую командой `LinearCombination[{i, 1}, {j, k}, n]`, где  $n$  число строк матрицы  $\mathbf{m}$ . Выполняя, например, команду

`LinearCombination[{2, 1}, {4, -2}, 4]//MatrixForm`

получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразования матрицы  $\mathbf{m}$  проводятся последовательно до тех пор, пока матрица не будет приведена к верхней ступенчатой форме.

Пусть  $\mathbf{mm}$  есть полученная ступенчатая матрица. С помощью команды `MakeSystem[mm]` по матрице  $\mathbf{mm}$  получают систему уравнений, которую решают последовательно, начиная с самого последнего уравнения.

### Задания.

Методом Гаусса найти решения следующих систем линейных алгебраических уравнений.

1)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + 4x_5 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 + 2x_5 &= -3 \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 2x_5 &= -14 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= -10 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 &= 8 \\ 7x_1 + 9x_2 + x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 &= 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2 \\3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9 \\4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 &= 1\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1 \\4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3\end{aligned}$$



**Образец выполнения задания.**

**Задание.** Пусть требуется решить систему уравнений:

$$\begin{aligned}2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12\end{aligned}$$

**Решение.** Вводим расширенную матрицу системы. Для этого подводим указатель мыши к той клетке таблицы шаблонов Basic Input, где нарисован шаблон матрицы  $2 \times 2$ . Затем добавляем два столбца, дважды прибегая к комбинации клавиш **Ctrl +**, (**Ctrl+ запятая**). После этого добавляем две строки с помощью комбинации клавиш **Ctrl+Enter**. Перемещаем активный синий квадратик в левый верхний угол шаблона матрицы, вводим матричный элемент 2 и нажимаем клавишу Tab. Активный квадратик переместится в следующий столбец, а после заполнения строки он будет перемещаться в следующую по номеру строку. Присвоим символу **m** значение равное вводимой матрице, выполняя команду:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

Результатом ее выполнения является список:

$$\{\{2, 5, -8, 8\}, \{4, 3, -9, 9\}, \{2, 3, -5, 7\}, \{1, 8, -7, 12\}\}$$

поскольку в “Математике” матрицы представляются списком своих строк.

Для удобства дальнейших вычислений полезно представить эту матрицу в привычной форме таблицы.

**m//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

Рассматривая таблицу, замечаем, что удобно переставить четвертую и первую строки матрицы **m**, так как первый элемент четвертой строки равен 1. Перестановку строк осуществляем с помощью команды **Permute**.

**Permute[{1, 4}, 4].m**

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Умножая первую строку полученной матрицы последовательно на -4, -2, -2 и прибавляя произведения соответственно ко второй, третьей и четвертой строкам, что осуществляется с помощью команды **LinearCombination**, приходим к матрице

```
LinearCombination[{4, 1}, {1, -2}, 4].LinearCombination[{3, 1}, {1, -2}, 4].  
LinearCombination[{2, 1}, {1, -4}, 4].Permute[{1, 4}, 4].m//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{pmatrix}$$

у которой все элементы первого столбца, стоящие во второй, третьей и четвертой строках, нулевые.

Затем умножаем вторую строку матрицы **m** на  $-13/29$  и  $-11/29$  и прибавляем произведения к третьей и четвертой строкам с тем, чтобы сделать нулевыми элементы второго столбца, стоящие в третьей и четвертой строках. Для этого выполняем команду

```
LinearCombination[{4, 1}, {2, -11/29}, 4].  
LinearCombination[{3, 1}, {2, -13/29}, 4].  
LinearCombination[{4, 1}, {1, -2}, 4].LinearCombination[{3, 1}, {1, -2}, 4].  
LinearCombination[{2, 1}, {1, -4}, 4].Permute[{1, 4}, 4].m//MatrixForm
```

и получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{14}{29} & \frac{14}{29} \\ 0 & 0 & -\frac{35}{29} & -\frac{35}{29} \end{pmatrix}$$

Остается сделать равным нулю элемент четвертой строки, стоящий в третьем столбце. Для этого умножаем третью строку полученной матрицы на  $35/14$  и прибавляем результат к четвертой строке. Выполняем команду

```
LinearCombination[{4, 1}, {3, 35/14}, 4].  
LinearCombination[{4, 1}, {2, -11/29}, 4].  
LinearCombination[{3, 1}, {2, -13/29}, 4].  
LinearCombination[{4, 1}, {1, -2}, 4].LinearCombination[{3, 1}, {1, -2}, 4].  
LinearCombination[{2, 1}, {1, -4}, 4].Permute[{1, 4}, 4].m//MatrixForm
```

и приходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{14}{29} & \frac{14}{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица **m** приведена к верхней треугольной форме! Для дальнейших вычислений следует избавиться от команды **MatrixForm**, выполнив вновь предыдущее вычисление без этой команды

```

m1 = LinearCombination[{4, 1}, {3, 35/14}, 4].
LinearCombination[{4, 1}, {2, -11/29}, 4].
LinearCombination[{3, 1}, {2, -13/29}, 4].
LinearCombination[{4, 1}, {1, -2}, 4].LinearCombination[{3, 1}, {1, -2}, 4].
LinearCombination[{2, 1}, {1, -4}, 4].Permute[{1, 4}, 4].m

{{1, 8, -7, 12}, {0, -29, 19, -39}, {0, 0, 14/29, 14/29}, {0, 0, 0, 0}}

```

По матрице **m1** строим систему уравнений с помощью специальной команды **MakeSystem**:

```

equations = MakeSystem[m1]

{-12 + x[1] + 8 x[2] - 7 x[3] == 0, 39 - 29 x[2] + 19 x[3] == 0,
-14/29 + 14/29 x[3] == 0, True}

```

Система **equations** содержит четыре уравнения, последнее из которых тождественно выполняется, поэтому решаем систему, начиная с третьего уравнения. Видно, что  $x[3] = 1$ . Подставляем это значение в систему, выполняя команду подстановки системы "Математика":

```

equations /. {x[3] -> 1}

{-19 + x[1] + 8 x[2] == 0, 58 - 29 x[2] == 0, True, True}

```

Теперь очевидно, что  $x[2] = 2$ . Подставляем и это значение в систему

```

equations /. {x[3] -> 1, x[2] -> 2}

{-3 + x[1] == 0, True, True, True}

```

Из полученной системы получаем, что  $x[1] = 3$ . Для проверки подставляем и это значение неизвестной  $x[1]$  в систему.

```

equations /. {x[3] -> 1, x[2] -> 2, x[1] -> 3}

{True, True, True, True}

```

**Указание.** Иногда при решении систем уравнений бывает полезно применить команду **Simplify** с тем, чтобы были раскрыты скобки или произведены какие-то упрощения сложных выражений. Ее можно применить, например, в постфиксной форме:

```

equations /. {x[3] -> 1, x[2] -> 2, x[1] -> 3} // Simplify

{True, True, True, True}

```

## РАЗДЕЛ 9

### ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

#### 1. Линейные (векторные) пространства

##### 1.1. Определение линейного пространства

Рассмотрим некоторое множество  $V$ , элементы которого в определяемом ниже смысле можно “складывать” и “умножать” на вещественные числа.

Говорят, что элементы  $V$  можно складывать, если любой упорядоченной паре  $(u, v)$  элементов  $V$  сопоставляется некоторый элемент  $w$  из  $V$ , обозначаемый через  $u + v$ . Операция сопоставления удовлетворяет всем свойствам операции сложения чисел. А именно, справедливы соотношения:

- 1)  $u + v = v + u$  (свойство коммутативности, или перестановочности слагаемых);
- 2)  $(u + v) + z = u + (v + z)$  (свойство ассоциативности);
- 3) в множестве  $V$  существует единственный элемент  $\mathbf{o}$  такой, что  $u + \mathbf{o} = u$  для любого элемента  $u$  из  $V$  (элемент  $\mathbf{o}$  называется *нулевым элементом*  $V$ );
- 4) для любого элемента  $u$  из  $V$  существует единственный элемент  $z$  такой, что  $u + z = \mathbf{o}$ . Элемент  $z$  обозначается через  $-u$  и называется элементом, *противоположным* элементу  $u$ .

Элемент  $w = u + v$  называется *суммой* элементов  $u$  и  $v$ , а сама операция сопоставления *сложением* элементов множества  $V$ .

Элементы  $V$  можно умножать на вещественные числа в том смысле, что любому вещественному числу  $\alpha$  и любому элементу  $u$  из  $V$  можно поставить в соответствие некоторый элемент  $v$  из  $V$ , который обозначается через  $\alpha u$ . Операция сопоставления удовлетворяет следующим соотношениям:

- 5)  $1 u = u$  для любого элемента  $u$  из  $V$ ;
- 6)  $(\alpha \beta) u = \alpha (\beta u)$ ;
- 7)  $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$  (свойство распределительности, или дистрибутивности, умножения на число относительно сложения чисел);
- 8)  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$  (свойство распределительности, или дистрибутивности, умножения на число относительно сложения элементов множества  $V$ ).

Множество  $V$ , на котором заданы операции сложения элементов и умножения элементов на вещественные числа, удовлетворяющие свойствам 1) - 8), называется *линейным (векторным) пространством*.

Элементы линейных пространств называются *векторами*. Множества обычных геометрических векторов (направленных отрезков) являются примерами линейных пространств.

### 3.2. Линейная независимость.

Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_k$  – векторы линейного пространства  $V$ , а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  – вещественные числа. *Линейной комбинацией* векторов  $u_1, u_2, \dots, u_k$  с коэффициентами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  называется вектор  $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$ . Говорят также, что вектор  $v$  *линейно выражается* через векторы  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , а само это выражение называется *разложением* вектора  $v$  по векторам  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов  $\alpha_i$  отличен от нуля. В противном случае она называется *тривиальной*.

Система векторов  $u_1, u_2, \dots, u_k$  называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулевому вектору  $\mathbf{o}$ .

Система векторов  $u_1, u_2, \dots, u_k$  называется *линейно независимой*, если только тривиальная комбинация этих векторов равна нулевому вектору  $\mathbf{o}$ .

### 3.3. Размерность линейного пространства.

Векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют *базис* линейного пространства  $V$ , если

- 1) они линейно независимы,
- 2) любой вектор  $v$  пространства  $V$  линейно выражается через рассматриваемые векторы:

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \quad (1.1)$$

Число  $n$  называется *размерностью* векторного пространства  $V$ , так как любой базис пространства  $V$  содержит ровно  $n$  векторов. Коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  разложения (1.1) называются *координатами* вектора  $v$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

### 3.4. Матрица перехода к новому базису.

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  – базис пространства  $V$ , а  $f_1, f_2, \dots, f_n$  – другой базис этого пространства. Каждый вектор  $f_k$  разлагается по базису  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Запишем эти разложения в виде системы равенств

$$\begin{aligned} f_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n \\ f_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n \\ &\dots \dots \dots \\ f_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n \end{aligned} \quad (1.2)$$

Заметьте, что в каждой строчке постоянно второе число в индексе коэффициентов  $t_{ij}$ !

Разложения (1.2) можно кратко записать в виде

$$f_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i$$

Суммирование идет по первому индексу коэффициентов  $t_{ij}$ .

Коэффициенты  $t_{ij}$  разложений (1.2) образуют *матрицу  $\mathbf{T}$  перехода* от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к базису  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Внимание! Коэффициенты  $t_{ij}$ , располагавшиеся в одной строке соотношений (1.2), занимают в (1.3) столбец матрицы  $T$ . Иными словами, столбец с номером  $k$  матрицы  $\mathbf{T}$  состоит из координат базисного вектора  $f_k$  в базисе  $\mathbf{e}$ .

Рассмотрим матрицы  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  и  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  размерностей  $1 \times n$ , матричными элементами которых являются векторы старого или нового базисов. Соотношения (1.2) можно записать с помощью произведения матриц в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{e} \mathbf{T}$$

Матрица  $\mathbf{T}$  невырождена, и обратная к ней матрица  $\mathbf{T}^{-1}$  является матрицей перехода от нового базиса  $\mathbf{f}$  к старому базису  $\mathbf{e}$ :

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} \mathbf{T}^{-1}$$

Рассмотрим произвольный вектор  $v$  и его разложения по старому и новому базисам

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad v = \sum_{j=1}^n \beta_j f_j, \quad (1.4)$$

Подставляя в правую часть второго из соотношений (1.4) выражения (1.2), а в левую часть первое из разложений (1.4) и приравнивая коэффициенты при базисных векторах  $e_i$ , приходим к следующему выражению координат  $\alpha$  через координаты  $\beta$ :

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \beta_j \quad (1.5)$$

Введем матрицу  $\alpha$  размерности  $n \times 1$ , матричными элементами которой являются координаты  $\alpha_i$  вектора  $v$  в старом базисе

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$$

и аналогичную матрицу координат  $\beta$ . Тогда формула (1.5) может быть записана в виде произведения матриц:

$$\alpha = \mathbf{T} \beta$$

### 3.5. Ранг матрицы.

Пусть в матрице  $\mathbf{m}$  существует ненулевой минор  $r$ -го порядка, а любой минор  $r+1$ -го порядка равен нулю. Тогда число  $r$  называется *рангом* матрицы  $\mathbf{m}$  и обозначается через  $\text{rang } \mathbf{m}$ . Ранг нулевой матрицы  $\mathbf{0}$  полагается равным нулю.

Рассмотрим матрицу  $\mathbf{m}$  такую, что ее ранг  $r = \text{rang } \mathbf{m} > 0$ . Пусть  $M$  есть ненулевой минор  $r$ -го порядка матрицы  $\mathbf{m}$ . Любой такой минор называется *базисным*. Строки и столбцы матрицы  $\mathbf{m}$ , порождающие минор  $M$ , называются *базисными строками* или *столбцами* матрицы  $\mathbf{m}$ .

**Теорема о базисном миноре.** *Базисные строки (столбцы) матрицы  $\mathbf{m}$  линейно независимы.*

*Любая строка (столбец) матрицы  $\mathbf{m}$  является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).*

Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк или столбцов. На этих замечаниях основан метод Гаусса вычисления ранга матрицы, который состоит в приведении матрицы при помощи элементарных преобразований к ступенчатой форме и подсчете ненулевых строк в последней.

Вычисление ранга матрицы бывает полезно при выяснении вопроса о линейной независимости системы  $u_1, u_2, \dots, u_k$  векторов линейного пространства  $V$ . Пусть рассматриваемые векторы даны своими координатами в некотором базисе, тогда можно составить матрицу  $\mathbf{m}$  координат рассматриваемых векторов, каждый столбец которой состоит из координат фиксированного вектора. Если  $\text{rang } \mathbf{m} = k$ , то система линейно независима. В противном случае имеется линейная зависимость.

### 3.6. Линейные подпространства и линейные подмногообразия линейного пространства

Непустое подмножество  $W$  линейного пространства  $V$  называется *линейным подпространством*, если любая линейная комбинация векторов из  $W$  принадлежит  $W$ .

Любое линейное пространство содержит по крайней мере два подпространства: нулевое, состоящее из нулевого вектора  $\mathbf{o}$ , и само пространство  $V$ . Эти два подпространства называются *тривиальными*, или *несобственными*.

В одномерном пространстве нетривиальных подпространств нет. Любое подпространство содержит нулевой вектор  $\mathbf{o}$ . Размерность нетривиального подпространства больше нуля и меньше размерности пространства  $V$ .

*Линейным многообразием  $H$*  векторного пространства  $V$  называется совокупность векторов из  $V$ , получаемая прибавлением ко всем векторам некоторого линейного подпространства  $W$  фиксированного вектора  $u$ . Говорят также, что  $H$  получено *сдвигом*  $W$  на вектор  $u$ .

*Размерность линейного многообразия  $H$*  полагается равной размерности линейного подпространства  $W$ .

Одномерное линейное подмногообразие называется *прямой*, двумерное - *плоскостью*. Нетривиальное линейное подмногообразие максимальной размерности  $n-1$ , где  $n$  - размерность  $V$ , называется *гиперплоскостью*.

## Глава 2. Линейные операторы

### 2.1. Определение линейного оператора

Пусть  $V$  - линейное пространство. Если каждому вектору  $u$  из пространства  $V$  поставлен в соответствие вектор  $v = Au$  из того же пространства  $V$  и рассматриваемое соответствие удовлетворяет условию

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha Au_1 + \beta Au_2, \quad (2.1)$$

где  $u_1, u_2$  - произвольные векторы из  $V$ , то соответствие  $A$  называют *линейным оператором*, действующим в линейном пространстве  $V$ .

Пусть  $A$  и  $B$  два линейных оператора. *Произведением*  $BA$  рассматриваемых операторов называется линейный оператор, который определен на любом векторе  $u$  следующим образом: сначала на  $u$  действует оператор  $A$ , а затем к образу  $Au$  вектора  $u$  применяется оператор  $B$ . Таким образом,  $BAu = B(Au)$ . Аналогично определяется произведение  $AB$ , а также произведение нескольких операторов.

В любом линейном пространстве определены: *нулевой оператор*  $O$  ( $Ou = \mathbf{o}$ ), где  $\mathbf{o}$  нулевой вектор пространства  $V$ , и *тождественный*, или *единичный оператор*  $E$ :  $Eu = u$ .

### 2.2. Матрица линейного оператора.

Поскольку каждый вектор  $u$  пространства  $V$  раскладывается по базису, то в силу свойства (2.1) для задания линейного оператора  $A$  достаточно определить его действие на векторах некоторого базиса  $e = (e_1, \dots, e_n)$  пространства  $V$ . Пусть выполняются соотношения

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ Ae_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $a_{ij}$  - числа. Эти числа образуют *матрицу*  $\mathbf{A}_e$  оператора  $A$  в базисе  $e$ :

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Столбец с номером  $j$  матрицы  $\mathbf{A}_e$  состоит из координат образа  $Ae_j$  базисного вектора  $e_j$ . Равенство (2.2), используя умножение матриц, можно записать в виде  $\mathbf{eA}_e$ , где  $\mathbf{e}$  – матрица, в которой всего одна строка. Матричными элементами матрицы  $\mathbf{e}$  служат базисные векторы.

Пусть вектор  $u$  задан своими координатами  $\alpha_k$  в базисе  $e$ :

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

тогда из (2.1) и (2.2) следует, что

$$Au = \sum_{i=1}^n \alpha_i A e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} \alpha_i \right) e_j \quad (2.3)$$

Из соотношения (2.3) следует, что координаты  $\beta_j$  вектора  $Au$  в базисе  $e$  выражаются через координаты  $\alpha$  вектора  $u$  и матричные элементы матрицы  $\mathbf{A}_e$  по формулам

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \alpha_i$$

### 2.3. Матрица оператора в новом базисе.

Пусть  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  – новый базис пространства  $V$ , а  $\mathbf{T}$  есть матрица перехода от старого к новому базисам:

$$\mathbf{f} = \mathbf{eT}$$

Тогда матрицы  $\mathbf{A}_e$  и  $\mathbf{A}_f$  оператора  $A$  в базисах  $e$  и  $f$  соответственно связаны соотношением

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_e \mathbf{T}$$

или, обозначив через  $b_{ij}$  матричные элементы матрицы  $\mathbf{A}_f$ , соотношениями

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (T^{-1})_{ik} a_{km} T_{mj}$$

где  $(T^{-1})_{ik}$  и  $T_{mj}$  – матричные элементы матриц  $\mathbf{T}^{-1}$  и  $\mathbf{T}$  соответственно.

### 2.4. Ранг и дефект линейного оператора.

Образом  $\mathbf{Im} \mathbf{A}$  линейного оператора  $A$  называется линейное подпространство пространства  $V$ , каждый вектор  $u$  которого является образом некоторого вектора  $w \in V$ :

$$\mathbf{Im} \mathbf{A} = \{u \in V, \quad u = Aw\}$$

Ядром  $\mathbf{Ker} \mathbf{A}$  линейного оператора  $A$  называется линейное подпространство пространства  $V$ , состоящее из всех векторов  $u$  таких, что их образ есть нулевой вектор  $\mathbf{o}$  пространства  $V$ :

$$\mathbf{Ker} \mathbf{A} = \{u \in V, \quad Au = \mathbf{o}\}$$

Размерность образа линейного оператора называется *рангом* ( $\mathbf{rank} \mathbf{A}$ ), а размерность ядра называется *дефектом* ( $\mathbf{def} \mathbf{A}$ ) линейного оператора.

**Теорема о ранге и ядре линейного оператора.** Сумма ранга и дефекта линейного оператора равна размерности пространства  $V$ :

$$\mathbf{rank} \mathbf{A} + \mathbf{def} \mathbf{A} = \dim V.$$

Пусть  $\mathbf{A}_e$  матрица линейного оператора в некотором базисе  $e$ . Рангом матрицы называется максимальное количество линейно независимых столбцов (строк) этой матрицы.

**Теорема.** Ранг матрицы  $\mathbf{A}_e$  равен рангу линейного оператора  $A$ .

### 2.5. Собственные векторы и собственные значения.

Отличный от нуля вектор  $u$  называется *собственным вектором* оператора  $A$ , если существует такое вещественное число  $\lambda$ , что выполняется соотношение

$$Au = \lambda u$$

Число  $\lambda$  называется *собственным значением* оператора  $A$ .

Если ядро оператора имеет размерность большую или равную 1, то ненулевые векторы из ядра являются собственными векторами оператора, отвечающими нулевому собственному значению. Собственные векторы, отвечающие ненулевому собственному значению  $\lambda$ , принадлежат ядру оператора  $A - \lambda E$ , где  $E$  – тождественный (единичный) оператор ( $Eu = u$  для всех  $u \in V$ ).

**Теорема.** Собственные векторы  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , отвечающие различным собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , линейно независимы.

**Следствие.** Линейный оператор не может иметь больше собственных значений, чем размерность пространства  $V$ , в котором он определен.

### 2.6. Характеристический многочлен оператора.

Характеристическим многочленом оператора  $A$  называется многочлен  $f(\lambda)$  вещественного аргумента  $\lambda$  степени равной размерности пространства  $V$ :

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A}_e - \lambda \mathbf{E})$$

где  $\mathbf{A}_e$  – матрица оператора в некотором базисе  $e$ ,  $\mathbf{E}$  – единичная матрица. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

**Теорема.** Число  $\lambda$  является собственным значением оператора  $A$  тогда и только тогда, когда оно – вещественный корень его характеристического многочлена.

Теорема приводит к следующему способу нахождения собственных векторов оператора:

1) находятся все вещественные корни характеристического многочлена оператора,

2) для каждого вещественного корня  $\lambda_k$  решения  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  однородной системы уравнений

$$(\mathbf{A}_e - \lambda_k \mathbf{E}) x = 0$$

относительно неизвестных  $x$  дают координаты  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  собственных векторов  $u$  в базисе  $e$ .

Пусть  $\lambda_k$  есть собственное значение оператора  $A$ . Линейное подпространство  $L_k$  пространства  $V$ , состоящее из собственных векторов оператора  $A$ , отвечающих собственному значению  $\lambda_k$ , называется *собственным подпространством* оператора  $A$ .

**Теорема.** Пусть  $\lambda_j$  – вещественный корень характеристического многочлена кратности  $k$ , тогда размерность собственного подпространства  $L_j$  не превосходит  $k$ .

### 2.7. Обратный оператор.

Линейный оператор  $B$  называется *обратным* к оператору  $A$ , если справедливы равенства  $AB = E$  и  $BA = E$ , где  $E$  тождественный оператор. (На самом деле достаточно выполнения одного из этих равенств).

Обратный оператор единствен. Он обозначается через  $A^{-1}$ . Матрица обратного оператора в любом базисе  $e$  есть обратная матрица  $\mathbf{A}_e^{-1}$  к матрице  $\mathbf{A}_e$ .

**Теорема.** Необходимым и достаточным условием существования обратного оператора является выполнение равенства

$$\text{rank } \mathbf{A} = \dim V$$

или, эквивалентно, выполнение равенства

$$\text{def } \mathbf{A} = 0,$$

где  $\text{rank } \mathbf{A}$  и  $\text{def } \mathbf{A}$  – ранг и дефект оператора  $A$  соответственно.

### 2.8. Структура линейного оператора.

Линейный оператор  $A$  имеет *простую структуру*, если его собственные векторы образуют базис линейного пространства  $V$ . В частности, любой оператор, имеющий столько различных собственных значений, какова размерность пространства  $V$ , является оператором простой структуры. В базисе  $e$ , состоящем из собственных векторов оператора простой структуры, матрица  $\mathbf{A}_e$  оператора диагональна.

Линейное подпространство  $L$  пространства  $V$  называется *инвариантным подпространством* линейного оператора  $A$ , если для любого вектора  $u$  из  $L$  его образ  $Au$  также принадлежит  $L$ . Например, любое собственное подпространство оператора есть его инвариантное подпространство. Инвариантными подпространствами являются ядро и образ линейного оператора.

**Теорема.** У всякого линейного оператора в вещественном линейном пространстве существует хотя бы одно либо одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство.

Если рассматривать действие оператора  $A$  только на векторы его инвариантного подпространства  $L$ , то возникает новый линейный оператор, действующий на инвариантном подпространстве. Этот новый оператор называется *индуцированным оператором* и обозначается через  $A|L$ .

Пусть  $\lambda_j$  – собственное значение оператора  $A$ . Вектор  $u$  пространства  $V$  называется *корневым вектором* оператора  $A$ , отвечающим собственному значению  $\lambda_j$ , если выполнено равенство

$$(A - \lambda_j E)^k u = \mathbf{o} \quad (2.4)$$

для некоторого целого  $k \geq 0$ .

*Высотой корневого вектора* называется наименьшее  $k$ , при котором выполняется равенство (2.4). Нулевой вектор  $\mathbf{o}$  есть корневой вектор, отвечающий любому собственному значению любого оператора, так как равенство (2.8) выполняется при  $k = 1$ . Любой собственный вектор оператора  $A$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_j$ , также является корневым вектором высоты  $k = 1$ . Корневые векторы высоты  $k > 1$  называются также *присоединенными векторами  $k - 1$ -го порядка*. Для последних векторы  $(A - \lambda_j)^{k-1} u$  являются собственными векторами оператора  $A$ , отвечающими собственному значению  $\lambda_j$ .

**Теорема.** Если  $u$  есть корневой вектор высоты  $k > 1$ , то

$$u, (A - \lambda_j)u, (A - \lambda_j)^2 u, \dots, (A - \lambda_j)^{k-1} u \quad (2.5)$$

также являются корневыми векторами высот  $k, k-1, \dots, 1$  соответственно. Векторы (2.5) линейно независимы.

Всевозможные линейные комбинации корневых векторов всех высот, отвечающих одному и тому же собственному значению  $\lambda_j$  оператора  $A$ , называется *корневым подпространством* оператора  $A$ , соответствующим собственному значению  $\lambda_j$ , и обозначается через  $K_{\lambda_j}$ .

## 2.9. Жорданов базис линейного оператора.

Жорданов базис линейного оператора состоит из специальных, так называемых канонических базисов его корневых подпространств. Вычисление жорданова базиса предполагает, что собственные значения оператора известны.

Пусть  $\lambda_j$  есть одно из собственных значений линейного оператора  $A$  кратности  $\mu_j$ . Обозначим через  $N_k$  ядро оператора  $(A - \lambda_j E)^k$ ,  $k \geq 1$ :

$$N_k = \ker (A - \lambda_j E)^k.$$

В частности, подпространство  $N_1$  состоит из линейных комбинаций собственных векторов, отвечающих собственному значению  $\lambda_j$ .

Справедлива цепочка включений

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_{q-1} \subset N_q = N_{q+1}$$

где индекс  $q$ , начиная с которого все подпространства  $N_j$ ,  $j \geq q$  совпадают, называется *индексом стабилизации*. Пространство  $N_q$  является корневым подпространством  $K_{\lambda_j}$ , т.е.  $K_{\lambda_j} = N_q$ .

Построение канонического базиса каждого корневого пространства  $K_{\lambda_j}$  состоит из совокупности одинаковых шагов и начинается с пространства  $N_q$ .

*Первый шаг.* Пусть

$$f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1j_q} \quad (2.6)$$

совокупность векторов пространства  $N_q$ , дополняющих базис пространства  $N_{q-1}$  до базиса пространства  $N_q$ . Векторы совокупности (2.6) порождают следующие  $j_q \times q$  векторов канонического базиса корневого подпространства  $K_{\lambda_j}$ :

$$\begin{aligned} & (A - \lambda_j E)^{q-1} f_{11}, (A - \lambda_j E)^{q-2} f_{11}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{11}, f_{11} \\ & (A - \lambda_j E)^{q-1} f_{12}, (A - \lambda_j E)^{q-2} f_{12}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{12}, f_{12} \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \\ & (A - \lambda_j E)^{q-1} f_{1j_q}, (A - \lambda_j E)^{q-2} f_{1j_q}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{1j_q}, f_{1j_q} \end{aligned}$$

*Второй шаг.* Пусть

$$f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2j_{q-1}} \quad (2.7)$$

совокупность векторов пространства  $N_{q-1}$ , дополняющих векторы  $(A - \lambda_j) f_{11}, (A - \lambda_j) f_{12}, \dots, (A - \lambda_j) f_{1j_q}$ , до базиса пространства  $N_{q-1}$ . Векторы совокупности (2.7) порождают следующие  $j_{q-1} \times (q-1)$  векторов канонического базиса корневого подпространства  $K_{\lambda_j}$ :

$$\begin{aligned} & (A - \lambda_j E)^{q-2} f_{21}, (A - \lambda_j E)^{q-3} f_{21}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{21}, f_{21} \\ & (A - \lambda_j E)^{q-2} f_{22}, (A - \lambda_j E)^{q-3} f_{22}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{22}, f_{22} \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \\ & (A - \lambda_j E)^{q-1} f_{2j_{q-1}}, (A - \lambda_j E)^{q-2} f_{2j_{q-1}}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{2j_{q-1}}, f_{2j_{q-1}} \end{aligned}$$

и т.д.

*k-й шаг.* Пусть

$$f_{k1}, f_{k2}, \dots, f_{kj_{q-k+1}} \quad (2.8)$$

совокупность векторов пространства  $N_{q-k+1}$ , дополняющих векторы  $(A - \lambda_j E)^{k-1} f_{11}, (A - \lambda_j E)^{k-1} f_{12}, \dots, (A - \lambda_j E)^{k-1} f_{1j_q}, (A - \lambda_j E)^{k-2} f_{21}, \dots, (A - \lambda_j E)^{k-2} f_{2j_{q-1}}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{k-11}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{k-1j_{q-k+1}}$ , до базиса пространства  $N_{q-k+1}$ . Действуя операторами  $(A - \lambda_j E)^{q-k}, (A - \lambda_j E)^{q-k-1}, \dots, (A - \lambda_j E)$  на векторы (2.8) получаем новые базисные векторы корневого подпространства  $K_{\lambda_j}$  и т.д.

*Последний шаг.* Дополняем совокупность векторов вида  $(A - \lambda_j E)^{q-1} f_{1i}, i = 1, 2, \dots, j_q, (A - \lambda_j E)^{q-2} f_{2i}, i = 1, 2, \dots, j_{q-1}, \dots, (A - \lambda_j E) f_{q-1i}, i = 1, 2, \dots, j_1$  до базиса пространства  $N_1$  векторами

$$f_{q1}, f_{q2}, \dots, f_{qj_1} \quad (2.9)$$

На этом построение базисных векторов канонического базиса корневого подпространства  $K_{\lambda_j}$  заканчивается.

Нумерация базисных векторов. Полагаем

$$\begin{aligned} e_1 &= (A - \lambda_j E)^{q-1} f_{11}, & e_2 &= (A - \lambda_j E)^{q-2} f_{11}, \dots, \\ e_{q-1} &= (A - \lambda_j E) f_{11}, & e_q &= f_{11}. \end{aligned}$$

Затем нумеруем образы векторов  $f_{1i}$ ,  $i = 2, \dots, j_q$  под действием степеней оператора  $A - \lambda_j E$ . Затем нумеруем образы векторов  $f_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, j_{q-1}$  под действием степеней оператора  $A - \lambda_j E$  и т.д. Последними нумеруем векторы (2.9).

Жорданов базис оператора состоит из векторов канонических базисов всех корневых подпространств  $K_{\lambda_j}$ .

Матрица оператора  $A$  в жордановом базисе называется *жордановой канонической формой* матрицы  $\mathbf{A}_e$  оператора  $A$  в произвольном базисе  $\mathbf{e}$ . Жорданова форма состоит из *жордановых клеток*. Так называются квадратные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

Число строк (столбцов) в жордановой клетке равно кратности  $\kappa_j$  собственного значения  $\lambda_j$ .

## Глава 3. Эвклидовы пространства

### 3.1. Скалярное произведение

Пусть  $V$  есть вещественное линейное пространство и пусть каждой паре  $u$  и  $v$  векторов этого пространства поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое через  $(u, v)$ . Если рассматриваемое соответствие удовлетворяет свойствам:

- 1)  $(u, v) = (v, u)$  (симметричность),
- 2)  $(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha(u_1, v) + \beta(u_2, v)$ , где  $\alpha, \beta$  – вещественные числа (линейность),
- 3)  $(u, u) > 0$ , если  $u \neq \mathbf{o}$  (невырожденность),

то оно называется *скалярным произведением*.

Вещественное линейное пространство, снабженное скалярным произведением, называется *евклидовым пространством*. В евклидовом пространстве число  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$  называется *нормой* (длиной) вектора  $u$ .

Из свойств 1) – 3) выводится следующее *неравенство Коши-Буняковского*

$$(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v)$$

### 3.2. Ортогональные и ортонормированные базисы.

Два вектора  $u$  и  $v$  евклидова пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:  $(u, v) = 0$ . Система  $e_1, e_2, \dots, e_k$  векторов называется *ортогональной*, если любые два вектора этой системы ортогональны.

**Теорема.** *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  евклидова пространства называется *ортогональным*, если различные векторы базиса взаимно ортогональны. Если каждый вектор ортогонального базиса имеет единичную длину, то базис называется *ортонормированным*.

Координаты  $\alpha_i$  любого вектора  $u$  в ортогональном базисе вычисляются по формуле

$$\alpha_i = \frac{(u, e_i)}{(e_i, e_i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а в ортонормированном базисе по формуле

$$\alpha_i = (u, e_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

Скалярное произведение двух векторов  $u$  и  $v$  с координатами  $\alpha_i, \beta_i$  в ортонормированном базисе выражается через эти координаты по формуле

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$$

Произвольный базис  $f_1, f_2, \dots, f_n$  евклидова пространства может быть преобразован в ортогональный  $e_1, e_2, \dots, e_n$  по следующему алгоритму Грама-Шмидта.

*Первый шаг.* Полагаем  $e_1 = f_1$ .

*k-й шаг.* Полагаем

$$e_k = f_k - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \dots - \alpha_{k-1} e_{k-1}$$

и находим коэффициенты  $\alpha_i$  из условия ортогональности вектора  $e_k$  векторам  $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ :

$$\alpha_i = \frac{(f_k, e_i)}{(e_i, e_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Повторив  $k$ -й шаг  $n$  раз, приходим к ортогональному базису.

Если целью является построение ортонормированного базиса, то добавляется еще один шаг.

*Шаг нормализации.* Вычисляем нормы  $n_i = \|e_i\|$  каждого вектора и полагаем

$$g_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$$

Базис  $g_1, g_2, \dots, g_n$  ортонормированный.

### 3.3. Сопряженный оператор.

Пусть  $A$  линейный оператор в евклидовом пространстве  $V$ . Линейный оператор  $B$  в пространстве  $V$  называется сопряженным к оператору  $A$ , если для всех векторов  $u, v \in V$  выполняется равенство

$$(A u, v) = (u, B v) \quad (3.1)$$

Оператор  $B$ , удовлетворяющий (3.1), единственный. Он обозначается через  $A^*$ .

**Теорема.** Для любого оператора  $A$  в  $V$  существует единственный сопряженный оператор  $A^*$ .

Операция сопряжения обладает следующими свойствами:

- 1)  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,
- 2)  $(\alpha A)^* = \alpha A^*$
- 3)  $(AB)^* = B^* A^*$
- 4)  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
- 5)  $(A^*)^* = A$



Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ортонормированный базис пространства  $V$ , то матрица  $\mathbf{A}_e^*$  сопряженного оператора равна транспонированной матрице оператора  $A$ :

$$\mathbf{A}_e^* = (\mathbf{A}_e)^T$$

### 3.4. Ортогональные операторы.

Оператор  $A$  в евклидовом пространстве  $V$  называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение векторов:

$$(Au, Av) = (u, v) \quad \text{для всех } u, v \in V \quad (3.2)$$

Из равенства (3.2) и определения сопряженного оператора следует, что произведение ортогонального оператора на сопряженный к нему равно единичному оператору:

$$AA^* = A^*A = E \quad (3.3)$$

Из равенства (3.3) в свою очередь следует, что сопряженный оператор к ортогональному оператору равен обратному оператору

$$A^* = A^{-1}$$

**Теорема.** В ортонормированном базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  произведение матрицы  $\mathbf{A}_e$  ортогонального оператора  $A$  на транспонированную к  $\mathbf{A}_e$  матрицу равно единичной матрице:

$$\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{A}_e^T = E$$

### 3.5. Самосопряженные операторы.

Линейный оператор  $A$  в евклидовом пространстве  $V$  называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным, т.е.

$$A^* = A$$

**Теорема.** Линейный оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена вещественные. Эквивалентно, когда все его собственные значения вещественны.

**Теорема.** Для любого самосопряженного оператора существует, быть может, не единственный ортонормированный базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  из его собственных векторов.

В этом базисе матрица оператора диагональна с собственными значениями на главной диагонали.

Базис единственен, если все корни характеристического многочлена различны.

### 3.6. Алгоритм построения ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.

Пусть  $A$  есть самосопряженный оператор, а  $\mathbf{f}$  – некоторый базис евклидова пространства.

*Первый шаг алгоритма.* Вычисляется характеристический многочлен

$$\text{char}[\lambda] = \text{Det}[\mathbf{A}_{\mathbf{f}} - \lambda \mathbf{E}]$$

и находятся его корни, т.е. собственные значения оператора.

*Второй шаг.* Выбирается первый корень  $\lambda_1$  и находятся собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$ , отвечающие рассматриваемому собственному значению. Для этого решается линейная система алгебраических уравнений относительно координат  $x_1, x_2, \dots, x_n$  собственных векторов.

Если корень  $\lambda_1$  имеет кратность 1, то система имеет одномерное пространство решений, и остается только нормировать собственный вектор.

Если же корень  $\lambda_1$  имеет кратность два и выше, то прибегают к алгоритму Грама-Шмидта для построения ортонормированной системы собственных векторов.

*Общий шаг.* Вычисления второго шага повторяются для каждого корня характеристического многочлена.

#### 4. КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ К РАЗДЕЛУ 9

Начнем с описания двух лабораторных работ по теме “Линейные пространства”. В работах в качестве линейного пространства рассматривается пространство  $R^n$ , элементами которого являются упорядоченные наборы  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  вещественных чисел  $\alpha_i$ . Базис пространства  $R^n$ , состоящий из векторов  $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$ , называется *стандартным базисом*.

##### Лабораторная работа 1. Базисы, координаты, матрицы перехода.

В задачах лабораторной работы в стандартном базисе даны две системы векторов  $e$  и  $f$  и еще один вектор  $v$ . Требуется доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора  $v$  в первом и во втором базисах.

##### Задания.

1)  $e_1 = (1, 2, 1), e_2 = (2, 3, 3), e_3 = (3, 7, 1), f_1 = (3, 1, 4), f_2 = (5, 2, 1), f_3 = (1, 1, -6), v = (6, 9, 14)$ .

2)  $e_1 = (1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 1, 1), e_3 = (1, 1, 2, 1), e_4 = (1, 3, 2, 3), f_1 = (1, 0, 3, 3), f_2 = (-2, -3, -5, -4), f_3 = (2, 2, 5, 4), f_4 = (-2, -3, -4, -4), v = (7, 14, -1, 2)$ .

3)  $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 2), e_3 = (1, 2, 3), f_1 = (2, 2, 4), f_2 = (5, 2, 7), f_3 = (-1, 1, -6), v = (6, 8, 11)$ .

4)  $e_1 = (2, 1, -3), e_2 = (3, 2, -5), e_3 = (1, -1, 1), f_1 = (-3, 2, -3), f_2 = (7, 2, 3), f_3 = (-1, 7, -6), v = (6, 2, -7)$

5)  $e_1 = (1, 2, -1, -2), e_2 = (2, 3, 0, -1), e_3 = (1, 2, 1, 4), e_4 = (1, 3, -1, 0), f_1 = (0, 1, 3, -3), f_2 = (2, -5, 5, -4), f_3 = (2, 1, 9, 4), f_4 = (12, -3, 14, -4), v = (7, 14, -1, 2)$

##### Образец выполнения задания.

**Задача.** Пусть даны две системы векторов  $e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (2, 1, 1), e_3 = (1, 3, 5)$  и  $f_1 = (1, 1, 0), f_2 = (1, 0, 1), f_3 = (0, 1, 1)$ , а также вектор  $v = (2, 1, -4)$ .

- 1) Требуется доказать, что каждая из двух систем является базисом.
- 2) Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.
- 3) Найти координаты вектора  $v$  в первом и втором базисах.

**Решение.** Докажем, что каждая из двух систем векторов является базисом. Для этого вводим матрицу  $\mathbf{A}$ , столбцы которой состоят из координат векторов  $\mathbf{e}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\{\{1, 2, 1\}, \{0, 1, 3\}, \{-1, 1, 5\}\}$$

С помощью элементарных преобразований приводим ее к верхней ступенчатой форме.

**LinearCombination[3, 1, 2, -3, 3].**

**LinearCombination[3, 1, 1, 1, 3].A//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Число ненулевых строк в полученной матрице равно 3, поэтому ранг матрицы  $\mathbf{A}$  равен 3. Следовательно, все столбцы матрицы  $\mathbf{A}$  линейно независимы, а, значит, векторы системы  $\mathbf{e}$  линейно независимы и образуют базис трехмерного пространства  $V$ . Для дальнейших вычислений сохраним полученную верхнюю ступенчатую матрицу, присвоив символу  $\mathbf{A1}$  значение этой матрицы

**A1 = LinearCombination[3, 1, 2, -3, 3].**

**LinearCombination[3, 1, 1, 1, 3].A**

$$\{\{1, 2, 1\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 0, -3\}\}$$

Аналогично проверяем линейную независимость векторов системы  $\mathbf{f}$ . Вводим матрицу  $\mathbf{B}$ , столбцы которой состоят из координат векторов  $\mathbf{f}$ .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{\{1, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}\}$$

Приводим ее к верхней ступенчатой форме

**LinearCombination[3, 1, 2, 1, 3].**

**LinearCombination[2, 1, 1, -1, 3].B//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы  $\mathbf{B}$  равен 3, поэтому система векторов  $\mathbf{f}$  линейно независима.

Для вычисления матрицы перехода от базиса  $\mathbf{e}$  к базису  $\mathbf{f}$  заметим, что матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  суть матрицы перехода от стандартного базиса к рассматриваемым базисам.

Следовательно, матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  есть матрица перехода от базиса  $\mathbf{e}$  к стандартному базису, а матрица  $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$  есть искомая матрица перехода. Таким образом, нужно вычислить матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ . Для этого элементарными преобразованиями приводим матрицу  $\mathbf{A}\mathbf{1}$  к единичной матрице  $\mathbf{E}$ :

**LinearCombination**[{**3**, **1**}, {**3**,  $-\frac{4}{3}$ }, **3**].  
**LinearCombination**[{**1**, **1**}, {**2**,  $-\mathbf{2}$ }, **3**].  
**LinearCombination**[{**2**, **1**}, {**3**, **1**}, **3**].  
**LinearCombination**[{**1**, **1**}, {**3**,  $\frac{1}{3}$ }, **3**].**A1//MatrixForm**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим через  $\mathbf{C}$  обратную к  $\mathbf{A}$  матрицу. Матрица  $\mathbf{C}$  есть произведение матриц элементарных преобразований, приводящих  $\mathbf{A}$  к диагональной матрице, поэтому

**C = LinearCombination**[{**3**, **1**}, {**3**,  $-\frac{4}{3}$ }, **3**].  
**LinearCombination**[{**1**, **1**}, {**2**,  $-\mathbf{2}$ }, **3**].  
**LinearCombination**[{**2**, **1**}, {**3**, **1**}, **3**].  
**LinearCombination**[{**1**, **1**}, {**3**,  $\frac{1}{3}$ }, **3**].  
**LinearCombination**[{**3**, **1**}, {**2**,  $-\mathbf{3}$ }, **3**].  
**LinearCombination**[{**3**, **1**}, {**1**, **1**}, **3**].

$$\left\{ \left\{ -\frac{2}{3}, 3, -\frac{5}{3} \right\}, \{1, -2, 1\}, \left\{ -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3} \right\} \right\}$$

Следовательно, матрица перехода  $\mathbf{T}$  имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}.\mathbf{C}$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{3}, 1, -\frac{2}{3} \right\}, \{-1, 4, -2\}, \left\{ \frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3} \right\} \right\}$$

Найдем координаты вектора  $v$  в базисах  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$ . Для этого достаточно найти координаты в базисе  $\mathbf{e}$ , а затем воспользоваться матрицей перехода  $\mathbf{T}$ . Обозначим через  $y[1]$ ,  $y[2]$ ,  $y[3]$  координаты вектора  $v$  в базисе  $\mathbf{e}$ . По определению, координаты суть коэффициенты разложения

$$v = y[1]e_1 + y[2]e_2 + y[3]e_3 \quad (1.8)$$

Приравнивая коэффициенты при векторах стандартного базиса в левой и правой частях (1.8), приходим к следующей системе линейных уравнений для координат  $y$ :

$$\begin{aligned} y[1] + 2y[2] + y[3] &= 2 \\ y[2] + y[3] &= -1 \\ -y[1] + y[2] + 5y[3] &= 4 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заметим, что матрицей коэффициентов рассматриваемой системы является матрица  $\mathbf{A}$ . Решаем систему методом Гаусса. Для этого вводим расширенную матрицу системы

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\{\{1, 2, 1, 2\}, \{0, 1, 3, 1\}, \{-1, 1, 5, -4\}\}$$

и приводим ее к верхней ступенчатой форме

`LinearCombination[{3, 1}, {2, -3}, 3].`

`LinearCombination[{3, 1}, {1, 1}, 3].F//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

а затем с помощью команды `MakeSystem[matrix, symbol]` формируем систему уравнений для неизвестных  $y$ :

`MakeSystem[LinearCombination[{3, 1}, {2, -3}, 3].`

`LinearCombination[{3, 1}, {1, 1}, 3].F, y]`

$$\{-2 + y[1] + 2y[2] + y[3] == 0, -1 + y[2] + 3y[3] == 0, 5 - 3y[3] == 0\}$$

решение которой  $y[1] = 25/3$ ,  $y[2] = -4$ ,  $y[3] = 5/3$  легко находится.

Для получения координат вектора  $v$  в базисе  $\mathbf{f}$  вводим вектор  $v$  своими координатами в базисе  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{v} = \{25/3, -4, 5/3\}$$

$$\{25/3, -4, 5/3\}$$

и умножаем ее слева на матрицу перехода  $\mathbf{T}$

`T.v`

$$\left\{ -\frac{7}{3}, -\frac{83}{3}, \frac{32}{3} \right\}$$

Получены координаты вектора  $v$  в базисе  $\mathbf{f}$ . Задача полностью решена!

## Лабораторная работа 2. Линейные подпространства. Линейные многообразия.

Обычно используют два способа задания линейного подпространства. В первом способе задают систему векторов, не обязательно линейно независимых, линейными комбинациями которых исчерпывается линейное подпространство.

Во втором способе задают линейную однородную систему уравнений на координаты векторов, принадлежащих подпространству.

Линейная неоднородная система уравнений на координаты векторов задает линейное многообразие.

### Задания.

В задачах 1)–4) требуется найти базис и размерность линейных подпространств, натянутых на следующие системы векторов.

1)  $u_1 = (1, 0, 0, -1)$ ,  $u_2 = (2, 1, 1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_4 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $u_5 = (0, 1, 2, 3)$ .

2)  $u_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$ ,  $u_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$ ,  $u_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$ ,  $u_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$ .

3)  $u_1 = (1, -1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (2, 0, 1, 1)$ .

4)  $u_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$ ,  $u_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$ ,  $u_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$ .

**Указание к выполнению задач 1) - 4).** По заданной системе векторов построить матрицу, строками которой являются координаты векторов. Привести матрицу к верхней ступенчатой форме. Ненулевые строки последней дают координаты базисных векторов.

В задачах 5) - 8) системы линейных неоднородных уравнений линейные многообразия. Требуется построить базис соответствующего линейного подпространства и найти вектор сдвига этого подпространства.

5)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 22 \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} 53x_1 + 5x_2 - 30x_3 - 20x_4 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -7 \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 &= 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1 \end{aligned}$$

**Образец выполнения заданий 5) – 8).**

**Задача.** Линейное многообразие задано системой линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7 \\3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 12\end{aligned}$$

Требуется построить базис соответствующего линейного подпространства и найти вектор сдвига этого подпространства.

**Решение.** Решаем систему неоднородных уравнений методом Гаусса. Для этого вводим расширенную матрицу системы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\{\{1, 2, 3, 1, 3\}, \{1, 4, 5, 2, 2\}, \{2, 9, 8, 3, 7\}, \{3, 7, 7, 2, 12\}\}$$

и приводим ее к верхнему ступенчатому виду:

```
LinearCombination[4, 1, 3, -2, 4].Permute[3, 4, 4].
LinearCombination[4, 1, 2, -2, 4].
LinearCombination[3, 1, 2, -5, 4].Permute[2, 4, 4].
LinearCombination[4, 1, 1, -3, 4].
LinearCombination[3, 1, 1, -2, 4].
LinearCombination[2, 1, 1, -1, 4].A//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг полученной матрицы равен 3. Следовательно, решения системы образуют одномерное линейное многообразие  $H$ . Для того, чтобы получить преобразованную систему в явном виде, вводим полученную матрицу в компьютер

```
A1 = LinearCombination[4, 1, 3, -2, 4].Permute[3, 4, 4].
LinearCombination[4, 1, 2, -2, 4].
LinearCombination[3, 1, 2, -5, 4].Permute[2, 4, 4].
LinearCombination[4, 1, 1, -3, 4].
LinearCombination[3, 1, 1, -2, 4].
LinearCombination[2, 1, 1, -1, 4].A
```

$$\{\{1, 2, 3, 1, 3\}, \{0, 1, -2, -1, 3\}, \{0, 0, 6, 3, -7\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}\}$$

и выполняем команду **MakeSystem**.



**MakeSystem[A1]**

$$\{-3 + x[1] + 2x[2] + 3x[3] + x[4] == 0, -3 + x[2] - 2x[3] - x[4] == 0, 7 + 6x[3] + 3x[4] == 0, True\}$$

За свободное неизвестное можно принять, например,  $x[4]$ . Тогда общее решение системы будет иметь вид

$$x3 = -\frac{7}{6} - \frac{x4}{2}, \quad x2 = \frac{2}{3}, \quad x1 = \frac{31}{6} + \frac{x4}{2}$$

Придавая свободной неизвестной  $x4$  фиксированное значение, находим частное решение неоднородной системы. Положим, например,  $x4 = 0$ , получим частное решение

$$x1 = \frac{31}{6}, \quad x2 = \frac{2}{3}, \quad x3 = -\frac{7}{6}, \quad x4 = 0$$

Это решение порождает вектор сдвига  $u = (31, 4, -7, 0)$ .

Вычитая из общего решения неоднородной системы частное решение, получаем общее решение однородной системы

$$x1 = a, x2 = 0, x3 = -a, x4 = 2a, \quad (1.10)$$

где  $a$  - параметр. Векторы (1.10) пробегает одномерное линейное подпространство с базисным вектором

$$e_1 = (1, 0, -1, 2).$$

### Лабораторная работа 3. Жорданов базис линейного оператора.э

С вычислительной точки зрения задача построения жорданова базиса состоит в нахождении собственных значений оператора и их кратностей, в вычислении собственных и корневых векторов, а также образов корневых векторов под действием оператора  $A - \lambda E$ . Решение всех перечисленных задач значительно упрощается за счет применения специальных команд “Математики”. Поэтому пользователь может сосредоточиться на уяснении сути метода построения жорданова базиса, предоставляя компьютеру возможность проводить однообразные и утомительные вычисления.

Опишем команды системы “Математика” и команды, запрограммированные преподавателем, которые используются при выполнении лабораторной работы.

Команда системы “Математика” **IdentityMatrix[n]** имеет значением единичную матрицу размерности  $n$ .

Команда системы “Математика” **Det[матрица]** вычисляет детерминант матрицы. С помощью рассмотренных команд легко вычисляется характеристический многочлен:  $f(\lambda) = \text{Det}[A_e - \lambda \text{IdentityMatrix}[n]]$ .

Команда системы “Математика” **Solve[уравнение, неизвестная]** находит корни алгебраических уравнений. С помощью этой команды находятся корни характеристического многочлена и их кратности.

Команда **SystemForEigenvectors[матрица оператора, собственное значение]** после ее выполнения дает систему линейных алгебраических уравнений

для собственных векторов оператора и ее общее решение, зависящее от одного или нескольких параметров. Наличие общего решения позволяет пользователю строить базис собственного подпространства.

Команда **SystemForRootvectors**[**матрица оператора, собственное значение, высота корневых векторов**] после ее выполнения дает систему линейных алгебраических уравнений для корневых векторов оператора высот от 1 до заданного значения (в том числе и собственных векторов) и ее общее решение, зависящее от одного или нескольких параметров.

**Задания.** Требуется найти жорданов базис операторов, заданных в стандартном базисе следующими матрицами.

1)

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Образец выполнения задания.**

**Задача.** Найти жорданов базис жорданов базис линейного оператора, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & -9 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

**Решение.** Вводим матрицу оператора в компьютер:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & -9 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$\{\{2, 0, 0, 0\}, \{6, -1, -3, 1\}, \{0, 0, 2, 0\}, \{20, -9, -10, 5\}\}$

Вычисляем характеристический многочлен оператора  $A$ :

$$f[\lambda] = \mathbf{Det}[A - \lambda \mathbf{IdentityMatrix}[4]]$$

$$16 - 32\lambda + 24\lambda^2 - 8\lambda^3 + \lambda^4$$

Находим корни характеристического многочлена:

$$\mathbf{Solve}[f[\lambda] == 0, \lambda]$$

$$\{\{\lambda \rightarrow 2\}, \lambda \rightarrow 2\}, \lambda \rightarrow 2\}, \lambda \rightarrow 2\}, \}$$

Рассматриваемый оператор имеет единственное собственное значение  $\lambda = 2$  кратности 4. Находим собственные векторы оператора, решая линейную систему уравнений  $(A - 2E)u = 0$ :

$$\mathbf{SystemForEigenvectors}[A, 2]$$

$$\begin{aligned} \text{Equations :} \quad & \{6x[1] - 3x[2] - 3x[3] + x[4] == 0, \\ & 20x[1] - 9x[2] - 10x[3] + 3x[4] == 0\} \end{aligned}$$

$$\text{Eigenvectors :} \quad \begin{pmatrix} \frac{x[3]}{2} \\ \frac{x[4]}{3} \\ x[3] \\ x[4] \end{pmatrix}$$

Система для собственных векторов состоит из двух однородных линейных уравнений и имеет двумерное многообразие решений: свободные неизвестные  $x[3]$  и  $x[4]$ . Собственное подпространство оператора  $A$  является линейной оболочкой векторов

$$g_1 = (1, 0, 2, 0), \quad g_2 = (0, 1, 0, 3)$$

Находим корневые векторы высот 1 (уже найденные собственные векторы) и 2:

$$\mathbf{SystemForRootvectors}[A, 2, 2]$$

$$\begin{aligned} \text{Equations :} \quad & \{2x[1] - x[3] == 0, \\ & 6x[1] - 3x[3] == 0\} \end{aligned}$$

$$\text{Rootvectors :} \quad \begin{pmatrix} \frac{x[3]}{2} \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \end{pmatrix}$$

Корневые векторы высоты 2 принадлежат одномерному подпространству, натянутому на вектор

$$g_3 = (0, 1, 0, 0)$$

Векторы  $g_1, g_2, g_3$  образуют базис подпространства  $N_2$ .

Находим корневые векторы высот от 1 до 3:

**SystemForRootvectors[A, 2, 3]**

$$\left( \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & -9 & -10 & 5 \end{pmatrix} - 2E \right)^3 \right) \text{ equals zero}$$

Полученный результат означает, что все векторы пространства  $V$  есть корневые векторы высот от 0 (нулевой вектор  $\mathbf{o}$ ) до 3.

Рассмотрим вектор

$$f_1 = (1, 0, 0, 0)$$

дополняющий базис  $g_1, g_2, g_3$  подпространства  $N_2$  до базиса всего пространства  $V$ . Вектор  $f_1$  войдет без изменения в жорданов базис оператора  $A$ . Вычисляем образ вектора  $f_1$  под действием оператора  $A - 2E$ :

$$\begin{aligned} & (A - 2\text{IdentityMatrix}[4]).\{1, 0, 0, 0\} \\ & \{0, 6, 0, 20\} \end{aligned}$$

Вычисленный вектор также войдет в жорданов базис оператора  $A$ . Вычисляем образ только что найденного вектора

$$\begin{aligned} & (A - 2\text{IdentityMatrix}[4]).\{0, 6, 0, 20\} \\ & \{0, 2, 0, 6\} \end{aligned}$$

Полученный в результате вычисления вектор равен  $2g_2$ . Следовательно, он – собственный вектор оператора  $A$ , отвечающий собственному значению 2. В соответствии с общей теорией построения жорданова базиса получены все векторы этого базиса, а именно,

$$e_1 = (0, 2, 0, 6), \quad e_2 = (0, 6, 0, 20), \quad e_3 = (1, 0, 0, 0), \quad e_4 = (1, 0, 2, 0)$$

Находим матрицу оператора  $A$  в построенном базисе, одновременно проверяя правильность проведенных вычислений. Находим образ вектора  $e_1$  под действием оператора  $A$ :

$$\begin{aligned} & A.\{0, 2, 0, 6\} \\ & \{0, 4, 0, 12\} \end{aligned}$$

Результат равен  $2e_1$ . Следовательно, первый столбец матрицы оператора  $A$  в вычисленном базисе состоит из чисел 2, 0, 0, 0. Находим образ вектора  $e_2$  под действием оператора  $A$ :

$$\begin{aligned} & A.\{0, 6, 0, 20\} \\ & \{0, 14, 0, 46\} \end{aligned}$$

Результат равен  $2e_2 + e_1$ . Следовательно, второй столбец матрицы оператора  $A$  в вычисленном базисе состоит из чисел 1, 2, 0, 0.

Находим образ вектора  $e_3$  под действием оператора  $A$ :

$$A \cdot \{1, 0, 0, 0\}$$

$$\{2, 6, 0, 20\}$$

Результат равен  $e_2 + 2e_3$ . Следовательно, второй столбец матрицы  $A$  в вычисленном базисе состоит из чисел  $0, 1, 2, 0$ . Поскольку  $e_4$  есть собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $2$ , четвертый столбец матрицы оператора  $A$  в построенном базисе состоит из чисел  $0, 0, 0, 2$ .

Итак, матрица оператора  $A$  в базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

#### Лабораторная работа 4. Ортогональные многочлены.

В задачах лабораторной работы рассматривается линейное пространство многочленов, заданных на некотором отрезке или полуинтервале и степени которых не превосходят некоторого числа  $n$ . Задается некоторый базис в этом пространстве. Требуется с помощью алгоритма Грама-Шмидта построить ортогональный базис. Скалярное произведение задается с помощью определенных интегралов.

**Задача 1. Многочлены Лежандра.** Рассмотрим систему одночленов  $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = 3x^2/2, f_3 = 5x^3/2, f_4 = 35x^4/8, f_5 = 63x^5/8$ , заданных на отрезке  $[-1, +1]$ . Рассматриваемые одночлены образуют базис в линейном пространстве  $V$  всех многочленов не выше пятой степени с вещественными коэффициентами

$$P_k(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, 5$$

определенных на том же подмножестве вещественной числовой оси. Введем скалярное произведение на  $V$ , положив

$$(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) dx$$

Требуется построить ортогональный базис в евклидовом пространстве  $V$ , используя алгоритм Грама-Шмидта.

**Задача 2. Многочлены Чебышева первого рода.** Рассмотрим систему одночленов  $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = 2x^2, f_3 = 4x^3, f_4 = 8x^4, f_5 = 16x^5$ , заданных на отрезке  $[-1, +1]$ . Рассматриваемые одночлены образуют базис в линейном пространстве  $V$  всех многочленов не выше пятой степени с вещественными коэффициентами

$$P_k(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, 5$$

определенных на том же подмножестве вещественной числовой оси. Введем скалярное произведение на  $V$ , положив

$$(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(x) Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Требуется построить ортогональный базис в евклидовом пространстве  $V$ , используя алгоритм Грама-Шмидта.

**Задача 3. Многочлены Чебышева второго рода.** Рассмотрим систему одночленов  $f_0 = 1, f_1 = 2x, f_2 = 4x^2, f_3 = 8x^3, f_4 = 16x^4, f_5 = 32x^5$ , заданных на отрезке  $[-1, +1]$ . Рассматриваемые одночлены образуют базис в линейном пространстве  $V$  всех многочленов не выше пятой степени с вещественными коэффициентами

$$P_k(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, 5$$

определенных на том же подмножестве вещественной числовой оси. Введем скалярное произведение на  $V$ , положив

$$(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x) Q(x) \sqrt{1-x^2} dx$$

Требуется построить ортогональный базис в евклидовом пространстве  $V$ , используя алгоритм Грама-Шмидта.

**Задача 4. Многочлены Эрмита.** Рассмотрим систему одночленов  $f_0 = 1, f_1 = 2x, f_2 = 4x^2, f_3 = 8x^3, f_4 = 16x^4, f_5 = 32x^5$ , заданных на отрезке  $[-\infty, +\infty]$ . Рассматриваемые одночлены образуют базис в линейном пространстве  $V$  всех многочленов не выше пятой степени с вещественными коэффициентами

$$P_k(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, 5$$

определенных на том же подмножестве вещественной числовой оси. Введем скалярное произведение на  $V$ , положив

$$(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x^2} dx$$

Требуется построить ортогональный базис в евклидовом пространстве  $V$ , используя алгоритм Грама-Шмидта.

#### **Образец выполнения задания. Многочлены Лагерра.**

**Задача.** Рассмотрим систему одночленов  $f_0 = 1, f_1 = x, f_2 = x^2/2, f_3 = x^3/6, f_4 = x^4/24, f_5 = x^5/120$ , заданных на отрезке  $[0, +\infty]$ . Рассматриваемые одночлены образуют базис в линейном пространстве  $V$  всех многочленов не выше пятой степени с вещественными коэффициентами

$$P_k(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} x + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, 5$$

определенных на том же подмножестве вещественной числовой оси. Введем скалярное произведение на  $V$ , положив

$$(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} dx$$

Требуется построить ортогональный базис в евклидовом пространстве  $V$ , используя алгоритм Грама-Шмидта.

**Решение.** Введем в компьютер список исходную систему одночленов

$$\{\mathbf{f0} = 1, \mathbf{f1} = x, \mathbf{f3} = \frac{x^2}{2}, \mathbf{f4} = \frac{x^4}{24}, \mathbf{f5} = \frac{x^5}{120}\}$$

$$\{1, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^4}{24}, \frac{x^5}{120}\}$$

Зададим скалярное произведение

**Clear[InnerProduct]**

$$\mathbf{InnerProduct}[\mathbf{u}_-, \mathbf{v}_-] := \int_0^{\infty} \mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{E}^{-x} \mathbf{d} x$$

Выполняем первый шаг алгоритма Грама-Шмидта и полагаем

$$\mathbf{e0} = \mathbf{f0}$$

$$1$$

Полагаем далее

$$\mathbf{e1} = \mathbf{f1} - \mathbf{a0} \mathbf{e0}$$

$$-a0 + x$$

где неизвестный коэффициент  $a0$  находится из условия ортогональности вектора  $e1$  вектору  $e0$ .

$$\mathbf{system1} = \mathbf{InnerProduct}[\mathbf{e1}, \mathbf{e0}] = = \mathbf{0}$$

$$1 - a0 = = 0$$

Находим решение этой системы, состоящей из одного уравнения относительно неизвестного коэффициента  $a0$ , с помощью команды **Solve** системы “Математика”.

$$\mathbf{solution1} = \mathbf{Solve}[\mathbf{system1}, \mathbf{a0}]/\mathbf{First}$$

$$\{a0 \rightarrow 1\}$$

Находим вектор  $e1$ , учитывая только что полученный результат

$$\mathbf{e1} = \mathbf{e1}/.\mathbf{solution1}$$

$$-1 + x$$

Продолжаем выполнение шагов алгоритма и полагаем

$$\mathbf{e2} = \mathbf{f2} - \mathbf{a0} \mathbf{e0} - \mathbf{a1} \mathbf{e1}/\mathbf{Simplify}$$

$$-a0 + a1 - a1 x + \frac{x^2}{2}$$

Заметим, что неизвестный коэффициент  $a_0$  не совпадает, вообще говоря, с ранее найденным коэффициентом  $a_0$ , участвовавшим в представлении вектора  $e_1$ . Коэффициенты  $a_0, a_1$  будем искать из условия ортогональности вектора  $e_2$  векторам  $e_0$  и  $e_1$ .

$$\mathbf{system2} = \{\mathbf{InnerProduct}[e_2, e_0] == 0, \mathbf{InnerProduct}[e_2, e_1] == 0\}$$

$$\{1 - a_0 == 0, 2 - a_1 == 0\}$$

Для решения системы выполняем команду **Solve**.

$$\mathbf{solution2} = \mathbf{Solve}[\mathbf{system2}, \{\mathbf{a0}, \mathbf{a1}\}]//\mathbf{First}$$

$$\{a_0 \rightarrow 2, a_1 \rightarrow 2\}$$

Полагаем

$$\mathbf{e2} = \mathbf{Simplify}[e_2/.solution2]$$

$$\frac{1}{2}(2 - 4x + x^2)$$

Вычисляем четвертый вектор ортогонального базиса  $e_3$ .

$$\mathbf{e3} = \mathbf{f3} - \mathbf{a0} e_0 - \mathbf{a1} e_1 - \mathbf{a2} e_2//\mathbf{Simplify}$$

$$\frac{1}{6}(-6a_0 - 6a_1(-1 + x) + x^3 - 3a_2(2 - 4x + x^2))$$

Вычисляем условия ортогональности

$$\mathbf{system3} = \{\mathbf{InnerProduct}[e_3, e_0] == 0, \mathbf{InnerProduct}[e_3, e_1] == 0, \mathbf{InnerProduct}[e_3, e_2] == 0\}//\mathbf{Simplify}$$

$$\{a_0 == 1, a_1 == 3, a_2 == 3\}$$

и решаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$ .

$$\mathbf{solution3} = \mathbf{Solve}[\mathbf{system3}, \{\mathbf{a0}, \mathbf{a1}, \mathbf{a2}\}]$$

$$\{a_0 \rightarrow 1, a_1 \rightarrow 3, a_2 \rightarrow 3\}$$

Находим окончательное выражение для вектора  $e_3$ .

$$\mathbf{e3} = \mathbf{Simplify}[e_3/.solution3]$$

$$\frac{1}{6}(-6 + 18x - 9x^2 + x^3)$$

Выполняем предписания алгоритма для вычисления базисного вектора  $e_4$ .

$$\mathbf{e4} = \mathbf{f4} - \mathbf{a0} e_0 - \mathbf{a1} e_1 - \mathbf{a2} e_2 - \mathbf{a3} e_3//\mathbf{Simplify}$$

$$\frac{1}{24}(-24a_0 - 24a_1(-1 + x) + x^4 - 12a_2(2 - 4x + x^2) - 4a_3(-6 + 18x - 9x^2 + x^3))$$



**system4** = {**InnerProduct**[e4, e0] == 0, **InnerProduct**[e4, e1] == 0,  
**InnerProduct**[e4, e2] == 0, **InnerProduct**[e4, e3] == 0}

{1 - a0 == 0, 4 - a1 == 0, 6 - a2 == 0, 4 - a3 == 0}

**solution4** = **Solve**[**system4**, {a0, a1, a2, a3}]/First

{a0 → 1, a1 → 4, a2 → 6, a3 → 4}

Базисный вектор  $e_4$  имеет вид:

**e4** = **Simplify**[e4/.**solution4**]

$$1 - 4x + 3x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

Приступаем к выполнению последнего шага алгоритма: вычислению базисного вектора  $e_5$ .

**e5** = **f5** - **a0** **e0** - **a1** **e1** - **a2** **e2** - **a3** **e3** - **a4** **e4**/First

$$-a_0 + a_1 - a_1 x + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{2} a_2 (2 - 4x + x^2) -$$

$$\frac{1}{6} a_3 (-6 + 18x - 9x^2 + x^3) - \frac{1}{24} a_4 (24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4)$$

**system5** = {**InnerProduct**[e5, e0] == 0, **InnerProduct**[e5, e1] == 0,  
**InnerProduct**[e5, e2] == 0, **InnerProduct**[e5, e3] == 0,  
**InnerProduct**[e5, e4] == 0}

{1 - a0 == 0, 5 - a1 == 0, 10 - a2 == 0, 10 - a3 == 0, 5 - a4 == 0}

**solution5** = **Solve**[**system5**, {a0, a1, a2, a3, a4}]/First

{a0 → 1, a1 → 5, a2 → 10, a3 → 10, a4 → 5}

Последний шаг алгоритма Грама-Шмидта приводит к базисному вектору  $e_5$ .

**e5** = **Simplify**[e5/.**solution5**]

$$-1 + 5x - 5x^2 + \frac{5x^3}{3} - \frac{5x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

Задача решена.

Наши вычисления можно проверить, если воспользоваться тем обстоятельством, что в системе “Математика” имеется команда **LaguerreL**[k,x], вычисляющая автоматически  $k$ -й многочлен Лагерра. Сравним результаты вычислений – нашего и автоматического.

{**e0**, **e1**, **e2**, **e3**, **e4**, **e5**}

$$\left\{ 1, -1 + x, \frac{1}{2} (2 - 4x + x^2), \frac{1}{6} (-6 + 18x - 9x^2 + x^3), \right.$$

$$\left. 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{24}, -1 + 5x - 5x^2 + \frac{5x^3}{3} - \frac{5x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \right\}$$

`Table[LaguerreL[k, x], {k, 0, 5}]/Simplify`

$$\left\{ 1, 1 - x, \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2), \frac{1}{6}(-6 + 18x - 9x^2 + x^3), \right. \\ \left. 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{24}, 1 - 5x + 5x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} - \frac{x^5}{120} \right\}$$

Мы видим, что второй и последний базисные векторы отличаются знаком, а остальные векторы совпадают. Это различие несущественно.

### Лабораторная работа 5. Базис самосопряженного оператора.

В задачах данной лабораторной работы требуется по заданной матрице самосопряженного оператора построить базис евклидова пространства, состоящий из собственных векторов оператора.

**Задачи.** В формулировках задач даны только матрицы линейных самосопряженных операторов.

1)

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & -1 & -1 \\ -5 & 7 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 7 & -5 \\ -1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 16 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

6)

$$\begin{pmatrix} 33 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & 33 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 33 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & 33 \end{pmatrix}$$

7)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

9)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

10)

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 14 & 4 \\ -4 & 0 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

**Образец выполнения задания.**

**Задача.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, матрица которого в стандартном базисе евклидова пространства  $V_4$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Решение.** Вводим матрицу в компьютер, пользуясь панелью шаблонов и добавляя столбцы с помощью комбинации клавиш **Ctrl+запятая**, а строки с помощью комбинации **Ctrl+Enter**:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{\{0, 1, 1, -1\}, \{1, 0, -1, 1\}, \{1, -1, 0, 1\}, \{-1, 1, 1, 0\}\}$

Вычисляем характеристический многочлен:

$$\text{char}[\lambda] = \text{Det}[\mathbf{m} - \lambda \text{IdentityMatrix}[4]]$$

$$-3 + 8\lambda - 6\lambda^2 + \lambda^4$$

Находим корни характеристического многочлена:

**polyroots** =  $\lambda/.Solve[char[\lambda] == 0, \lambda]$

$\{-3, 1, 1, 1\}$

Находим собственные векторы, отвечающие первому собственному значению  $-3$ .

**SystemForEigenvectors[m, -3]**

*Equations* :  $\{3x[1] + x[2] + x[3] - x[4] == 0, x[1] + 3x[2] - x[3] + x[4] == 0,$   
 $x[1] - x[2] + 3x[3] + x[4] == 0, -x[1] + x[2] + x[3] + 3x[4] == 0\}$

*Eigenvectors* :  $\{x[4], -x[4], -x[4], x[4]\}$

Так как кратность корня  $-3$  равна единице, то различные собственные векторы образуют одномерное подпространство, отличаясь друг от друга значением параметра  $x[4]$ . Положим  $x[4] = 1$  и придем к собственному вектору

**e1** =  $\{1, -1, -1, 1\}$

$\{1, -1, -1, 1\}$

Обратимся теперь к собственному значению 1:

**SystemForEigenvectors[m, 1]**

*Equations* :  $\{-x[1] + x[2] + x[3] - x[4] == 0, x[1] - x[2] - x[3] + x[4] == 0,$   
 $x[1] - x[2] - x[3] + x[4] == 0, -x[1] + x[2] + x[3] - x[4] == 0\}$

*Eigenvectors* :  $\{x[2] + x[3] - x[4], x[2], x[3], x[4]\}$

Кратность рассматриваемого собственного значения равна 3, поэтому собственные векторы образуют трехмерное пространство. Полагая один из параметров  $x[2]$ ,  $x[3]$ ,  $x[4]$  равным единице, а остальные параметры равными нулю, приходим к следующему базису в собственном подпространстве оператора, отвечающем собственному значению 1:

**f2** =  $\{1, 1, 0, 0\}$ ; **f3** =  $\{1, 0, 1, 0\}$ ; **f4** =  $\{-1, 0, 0, 1\}$ ;

Воспользуемся алгоритмом Грама-Шмидта для построения ортогонального базиса. Вычисляем последовательно

**e2** = **f2**

$\{1, 1, 0, 0\}$

**e3** = **f3** - **a0 e2**

$\{1 - a0, -a0, 1, 0\}$

**system3** = **e3.e2** == 0

$1 - 2a0 == 0$

**solution3** = **Solve[system3, a0]//First**

$a0 \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\mathbf{e3} = \mathbf{e3}/.\mathbf{solution3}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right\}$$

$$\mathbf{e4} = \mathbf{f4} - \mathbf{a0} \mathbf{e2} - \mathbf{a1} \mathbf{e3}$$

$$\left\{ 1 - a0 - \frac{a1}{2}, -a0 + \frac{a1}{2}, -a1, 1 \right\}$$

$$\mathbf{system4} = \mathbf{e4.e2} == 0, \mathbf{e4.e3} == 0 // \mathbf{Simplify}$$

$$\left\{ a0 == -\frac{1}{2}, a1 == -\frac{1}{3} \right\}$$

$$\mathbf{solution4} = \mathbf{Solve}[\mathbf{system4}, \mathbf{a0}, \mathbf{a1}] // \mathbf{First}$$

$$\left\{ a0 \rightarrow -\frac{1}{2}, a1 \rightarrow -\frac{1}{3} \right\}$$

$$\mathbf{e4} = \mathbf{e4}/.\mathbf{solution4}$$

$$\left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right\}$$

В результате вычислений нами получен ортогональный базис в собственном подпространстве рассматриваемого самосопряженного оператора, отвечающем собственному значению 1 кратности 3. Он состоит из векторов  $e2$ ,  $e3$ ,  $e4$ . Присоединяя к этим векторам ранее полученный собственный вектор  $e1$ , приходим к ортогональному базису

$$\{\mathbf{e1}, \mathbf{e2}, \mathbf{e3}, \mathbf{e4}\}$$

$$\left\{ \{1, -1, -1, 1\}, \{1, 1, 0, 0\}, \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right\}, \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right\} \right\}$$

Нормируем векторы этого базиса

$$\left\{ \frac{\mathbf{e1}}{\sqrt{\mathbf{e1.e1}}}, \frac{\mathbf{e2}}{\sqrt{\mathbf{e2.e2}}}, \frac{\mathbf{e3}}{\sqrt{\mathbf{e3.e3}}}, \frac{\mathbf{e4}}{\sqrt{\mathbf{e4.e4}}} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right\}, \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \right\}$$

Задача решена.

## РАЗДЕЛ 10

### ФОРМЫ

#### Глава 1. Билинейные и квадратичные формы

##### 1.1. Билинейные формы

Пусть  $V$  есть вещественное линейное пространство. Функция двух аргументов с вещественными числовыми значениями  $B(x, y)$ , где  $x \in V$ ,  $y \in V$ , называется *билинейной формой* в пространстве  $V$ , если она удовлетворяет следующим свойствам

- 1)  $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$  (аддитивность по первому аргументу),
- 2)  $B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$  (аддитивность по второму аргументу),
- 3)  $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$  (мультипликативность по первому аргументу),
- 4)  $B(x, \alpha y) = \alpha B(x, y)$  (мультипликативность по второму аргументу),

где  $\alpha$  - любое вещественное число.

Примером билинейной формы является скалярное произведение в евклидовом пространстве.

Если  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  - произвольный базис пространства  $V$ , то любая билинейная форма в  $V$  записывается в виде

$$B(x, y) = \sum_{i=1, j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

где  $x_i, y_j$  - координаты векторов  $x, y$  в рассматриваемом базисе. Матрица

$$\mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей коэффициентов билинейной формы.

Пусть  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  - другой базис пространства  $V$  и  $\mathbf{T}$  - невырожденная матрица перехода от  $\mathbf{e}$  к  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{f} = \mathbf{e} \mathbf{T}$$

тогда матрица  $\mathbf{B}_f$  билинейной формы в базисе  $\mathbf{f}$  выражается через матрицы  $\mathbf{B}_e, \mathbf{T}$  в виде

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{T}^{\text{tr}} \mathbf{B}_f \mathbf{T}$$

где  $\mathbf{T}^{\text{tr}}$  – транспонированная матрица  $\mathbf{T}$ .

*Рангом билинейной формы* называется ранг ее матрицы, вычисленный в любом базисе. Билинейная форма называется *вырожденной*, если  $\text{rang } \mathbf{B}_e < \dim V$ , т.е. ранг ее матрицы строго меньше размерности линейного пространства  $V$ .

**Теорема.** *Билинейная форма  $B(x, y)$  вырождена тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор  $u \neq \mathbf{o}$  такой, что для всех векторов  $y \in V$  выполняется равенство*

$$B(u, y) = 0$$

Билинейная форма называется *симметричной*, если

$$B(x, y) = B(y, x)$$

Билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда ее матрица симметрична

$$\mathbf{B}_e^{\text{tr}} = \mathbf{B}_e$$

## 1.2. Квадратичные формы.

Пусть  $B(x, y)$  билинейная форма в пространстве  $V$ . Рассмотрим ее значения при совпадающих аргументах, т.е. при  $y = x$ . Возникает функция

$$Q(x) = B(x, x),$$

которая называется *квадратичной формой* в линейном пространстве  $V$ . Различные билинейные формы могут порождать описанным способом совпадающие квадратичные формы. Однако, если ограничиться симметричными билинейными формами, то по квадратичной форме  $Q(x)$  можно восстановить породившую ее симметричную форму  $B(x, y)$  однозначно. А именно,

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y, x + y) - Q(x) - Q(y)) \quad (1.1)$$

Симметричная билинейная форма (1.1) называется *полярной* билинейной формой к квадратичной форме  $Q(x)$ .

*Матрицей квадратичной формы* в базисе  $e$  называется матрица полярной к ней симметричной билинейной формы в том же базисе. Из свойств 1) - 4) билинейных форм и соотношения (1.1) следуют следующие свойства квадратичных форм:

- 1) Матрица квадратичной формы симметрична.
- 2) Любая симметрическая матрица является матрицей единственной квадратичной формы в фиксированном базисе.
- 3) Матрицы квадратичной формы в базисах  $e$  и  $f = e\mathbf{T}$  связаны соотношением

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{T}^{\text{tr}} \mathbf{B}_e \mathbf{T}$$

4) Если в базисе  $\mathbf{e}$  вектор  $x$  имеет координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то квадратичная форма  $Q(x)$  с матрицей  $\mathbf{B}_e$  записывается в виде

$$Q(x) = \sum_{i=1, j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (1.2)$$

*Рангом квадратичной формы* называется ранг ее матрицы, вычисленный в любом базисе. Квадратичная форма называется *вырожденной*, если  $\text{rang } \mathbf{B}_e < \dim V$ , т.е. ранг ее матрицы строго меньше размерности линейного пространства  $V$ .

Базис  $\mathbf{e}$  называется *каноническим базисом квадратичной формы*, если матрица квадратичной формы в этом базисе диагональна. Из (1.2) следует, что в каноническом базисе квадратичная форма записывается в виде

$$Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2, \quad (1.8)$$

который называется *каноническим видом* квадратичной формы. Числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  называются *каноническими коэффициентами*. Количество ненулевых канонических коэффициентов совпадает с рангом квадратичной формы. Канонический базис не единственен.

**Теорема.** *Для любой квадратичной формы существует канонический базис.*

Наиболее распространенные алгоритмы приведения квадратичных форм к каноническим базисам предложены Лагранжем и Якоби и носят их имена.

### 1.3. Алгоритм Лагранжа.

Пусть  $Q(x)$  ненулевая квадратичная форма. Следующий алгоритм приводит ее к каноническому виду.

*Первый шаг. Предположим, что  $a_{11} \neq 0$ .* Рассмотрим все члены (1.2), содержащие координату  $x_1$ :

$$Q(x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 a_{1n} x_1 x_n + Q_1(x) \quad (1.3)$$

В (6.9) квадратичная форма  $Q_1(x)$  не содержит координаты  $x_1$ . Выделим полный квадрат в первых  $n$  слагаемых в равенстве (1.3):

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 a_{1n} x_1 x_n = a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 - \frac{1}{a_{11}} (a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n)^2$$

и обозначим через  $y_1$  новую координату

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$$

Форма  $Q(x)$  запишется в виде

$$Q(x) = a_{11} y_1^2 + Q_2(x),$$



где квадратичная форма  $Q_2(x)$  не содержит координаты  $x_1$ :

$$Q_2(x) = Q_1(x) - \frac{1}{a_{11}} (a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n)^2$$

**Если  $a_{11} = 0$ , но какой-то диагональный элемент  $a_{ii}$  матрицы  $B_e$  квадратичной формы не равен нулю**, то можно перенумеровать координаты и считать, что новая координата  $x_1$  равна старой координате  $x_i$ . Тогда новый коэффициент  $a_{11} \neq 0$  будет равен старому коэффициенту  $a_{ii} \neq 0$ .

**Если все диагональные элементы  $a_{ii}$  матрицы  $B_e$  равны нулю, а внедиагональный элемент  $a_{ij} \neq 0$** , то замена переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1, \dots, x_i = z_i + z_j, \dots, \\ x_j &= z_i - z_j, x_{j+1} = z_{j+1}, \dots, x_n = z_n \end{aligned}$$

приводит к тому, что в координатах  $z$  квадратичная форма  $Q(z)$  будет иметь отличные от нуля коэффициенты при квадратах координат  $z_i$  и  $z_j$ . Следовательно, можно применить преобразование, описанное в предыдущем абзаце.

*Общий шаг.* Совершать преобразования первого шага последовательно относительно координат  $x_2, x_3, \dots, x_n$ .

## Глава 2. Компьютерный практикум к разделу 10

В задачах практикума используется алгоритм Лагранжа для приведения заданной квадратичной формы к каноническому виду. Вычисления проводятся с использованием команд системы "Математика".

Первая команда осуществляет подстановки новых переменных вместо старых. Вот образец подстановки:

$$\mathbf{x1\ x2/. \{x1 \rightarrow y1 + y2, x2 \rightarrow y1 - y2\}}$$
$$(y1 - y2)(y1 + y2)$$

В произведении  $x1\ x2$  примера вместо переменной  $x1$  подставлена сумма  $y1 + y2$ , а вместо переменной  $x2$  – разность  $y1 - y2$ . Команда подстановки состоит из двух составных частей: правил подстановки, записываемых с помощью стрелки  $\rightarrow$ , и команды  $/.$ , означающей осуществить подстановку по заданному правилу. Стрелка вводится либо с помощью последовательного нажатия клавиш дефиса, а именно -, и клавиши больше >, либо с помощью панели шаблонов.

В вычислениях может использоваться команда **Expand[poly]**, которая раскрывает скобки в произведениях сомножителей, содержащихся в многочлене  $poly$ :

$$\mathbf{Expand[x1x2/. \{x1 \rightarrow y1 + y2, x2 \rightarrow y1 - y2\}]}$$
$$y1^2 - y2^2$$

Команда **FullSquare[ poly, var]**, где  $poly$  - многочлен второй степени по переменной  $var$ , выделяет в многочлене полный квадрат по переменной  $var$ . Например, выполнением команды

$$\mathbf{FullSquare[2\ x^2 + 3\ x\ y + 5\ x\ z + 3\ y^2 + y\ z, x]}$$
$$\frac{15\ y^2}{8} - \frac{11\ y\ z}{4} - \frac{25\ z^2}{8} + 2 \left( x + \frac{3\ y}{4} + \frac{5\ z}{4} \right)^2$$

в многочлене  $2\ x^2 + 3\ x\ y + 5\ x\ z + 3\ y^2 + y\ z$  выделен полный квадрат по переменной  $x$ . Для правильной работы команды необходимо, чтобы квадрат переменной  $var$  входил в многочлен с отличным от нуля числовым коэффициентом.

### Лабораторная работа. Алгоритм Лагранжа.

#### Задания.

В следующих ниже задачах требуется

- а) привести квадратичную форму к каноническому виду,  
 б) указать, является заданная форма вырожденной или нет,  
 в) выписать преобразование исходных координат в канонические.

1)  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

2)  $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

3)  $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

4)  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

5)  $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

6)  $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$

7)  $1/2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$

8)  $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$

9)  $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$

10)  $9x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$

**Образцы выполнения заданий.**

**Образец 1.**

**Задача.** Привести к каноническому виду квадратичную форму  $Q[x] = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ . Указать, является заданная форма вырожденной или нет, а также выписать преобразование исходных координат в канонические.

**Решение.** Вводим квадратичную форму в компьютер:

$$Q[x] = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_3^2$$

Видно, что результатом вычисления является изменение порядка слагаемых. Поскольку коэффициент при квадрате первой координаты  $x_1$  не равен нулю, выделяем полный квадрат по этой переменной

$$\text{step1} = \text{FullSquare}[Q[x], x_1]$$

$$4x_2^2 + (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2$$

Из полученного результата следует, что новую координату  $y_1$  нужно положить равной  $x_1 + x_2 - 2x_3$ . Копируем выполненную команду и производим подстановку

$$\text{step1} = \text{FullSquare}[Q[x], x_1] /. \{x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow y_1\}$$

$$4x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2 + y_1^2$$

Так как в полученной квадратичной форме коэффициент при координате  $x_2$  не равен нулю, выделяем в ней полный квадрат по этой координате.

**step2 = FullSquare[step1, x2]**

$$4 \left( x2 + \frac{x3}{2} \right)^2 - 9 x3^3 + y1^2$$

Делаем подстановку

**step2 = FullSquare[step1, x2]/. {x2 + x3/2 → y2}**  
 $-9 x3^2 + y1^2 + 4 y2^2$

Если положить  $y3 = x3$ , то координаты  $y1 = x1 + x2 - 2 x3$ ,  $y2 = x2 + x3/2$ ,  $y3 = x3$  будут каноническими для данной квадратичной формы.

**step3 = step2/. {x3 → y3}**  
 $y1^2 + 4 y2^2 - 9 y3^2$

Итак, мы получили, что квадратичная форма  $Q[x]$  приводится к каноническому виду  $y1^2 + 4 y2^2 - 9 y3^2$  заменами переменных  $y1 = x1 + x2 - 2 x3$ ,  $y2 = x2 + x3/2$ ,  $y3 = x3$ . Так как в каноническом виде коэффициенты при квадратах координат  $y$  отличны от нуля, то рассматриваемая квадратичная форма невырождена.

## Образец 2.

**Задача.** Привести к каноническому виду квадратичную форму  $Q[x] = x1 x2 + x2 x3 + x3 x4 + x1 x4$ . Указать, является заданная форма вырожденной или нет, а также выписать преобразование исходных координат в канонические.

**Решение.** Вводим квадратичную форму в компьютер:

**Q[x] = x1 x2 + x2 x3 + x3 x4 + x1 x4**  
 $x1 x2 + x2 x3 + x1 x4 + x3 x4$

Так как все диагональные элементы матрицы квадратичной формы равны нулю, а коэффициент  $a_{12} = 1/2$ , то вводим вспомогательные координаты  $z1$ ,  $z2$ ,  $z3$ , с помощью подстановок  $x1 \rightarrow z1 + z2$ ,  $x2 \rightarrow z1 - z2$ ,  $x3 \rightarrow z3$ ,  $x4 \rightarrow z4$ :

**Q[z] = Expand[Q[x]/. {x1 → z1 + z2, x2 → z1 - z2, x3 → z3, x4 → z4}]**  
 $z1^2 - z2^2 + z1 z3 - z2 z3 + z1 z4 + z2 z4 + z3 z4$

В форме  $Q[z]$  выделяем полный квадрат по координате  $z1$ :

**step1 = FullSquare[Q[z], z1]**  
 $-z2^2 - z2 z3 - \frac{z3^2}{4} + \left( z1 + \frac{z3}{2} + \frac{z4}{2} \right)^2 + z2 z4 + \frac{z3 z4}{2} - \frac{z4^2}{4}$

В полученное выражение вместо суммы  $z1 + z3/2 + z4/2$  подставляем новую координату  $y1$ :

**step1 = step1/. {z1 + z3/2 + z4/2 → y1}**

$$y1^2 - z2^2 - z2 z3 - \frac{z3^2}{4} + z2 z4 + \frac{z3 z4}{2} - \frac{z4^2}{4}$$

Выделяем полный квадрат по координате  $z2$ :

$$\mathbf{step2} = \mathbf{FullSquare}[\mathbf{step1}, \mathbf{z2}]$$

$$y1^2 - \left( z2 + \frac{z3}{2} - \frac{z4}{2} \right)^2$$

Выполняем подстановку  $z2 + z3/2 - z4/2 \rightarrow y2$ :

$$\mathbf{step2} = \mathbf{step2}/. \left\{ \mathbf{z2} + \frac{\mathbf{z3}}{2} - \frac{\mathbf{z4}}{2} \rightarrow \mathbf{y2} \right\}$$

$$y1^2 - y2^2$$

Канонический вид рассматриваемой квадратичной формы есть  $y1^2 - y2^2$ . Следовательно, форма вырождена. Канонические координаты:

$$\mathbf{y} = \{ \mathbf{y1} = \mathbf{z1} + \mathbf{z3}/2 + \mathbf{z4}/2, \mathbf{y2} = \mathbf{z2} + \mathbf{z3}/2 - \mathbf{z4}/2, \mathbf{y3} = \mathbf{z3}, \mathbf{y4} = \mathbf{z4} \}$$

$$\left\{ z1 + \frac{z3}{2} + \frac{z4}{2}, z2 + \frac{z3}{2} - \frac{z4}{2}, z3, z4 \right\}$$

Для того, чтобы выразить координаты  $y$  через исходные координаты  $x$  вводим систему уравнений:

$$\mathbf{system} = \{ \mathbf{x1} == \mathbf{z1} + \mathbf{z2}, \mathbf{x2} == \mathbf{z1} - \mathbf{z2}, \mathbf{x3} == \mathbf{z3}, \mathbf{x4} == \mathbf{z4} \}$$

$$\{ x1 == z1 + z2, x2 == z1 - z2, x3 == z3, x4 == z4 \}$$

Решаем систему относительно неизвестных  $z$ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{Solve}[\mathbf{system}, \{ \mathbf{z1}, \mathbf{z2}, \mathbf{z3}, \mathbf{z4} \}] / \mathbf{First}$$

$$\left\{ z1 \rightarrow \frac{x1 + x2}{2}, z2 \rightarrow \frac{x1 - x2}{2}, z3 \rightarrow x3, z4 \rightarrow x4 \right\}$$

Подставляем в выражения координат  $y$  через координаты  $z$  полученное решение:

$$\mathbf{y}/.\mathbf{z}$$

$$\left\{ \frac{x1 + x2}{2}, \frac{x1 - x2}{2}, x3, x4 \right\}$$

Последнее выражение содержит формулы перехода от исходных координат  $x$  к каноническим координатам  $y$ .

**ДОПОЛНЕНИЕ**

**МЕТОДИКА И ФОРМЫ**

**ПРОВЕДЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО ПРАКТИКУМА**

**ПО МАТЕРИАЛУ КНИГИ**

Методики преподавания математических дисциплин можно условно разделить на две категории в зависимости от того, основываются ли они на логическом или прикладном подходе к предмету. В первом случае основные понятия изложены в наибольшей общности с привлечением теоретико-множественных и топологических понятий и изощренной логической техникой доказательств. При этом, как правило, не даются мотивировки введения того или иного понятия и пренебрегается наглядной стороной изложения. В прикладном подходе экспликация идейной основы предмета остается в тени и заменяется обучением рецептам решения прикладных задач.

Автор книги исходит из того, что использование системы "Математика" соединяет преимущества логического и прикладного подходов. Логическая сторона усиливается тем, что вычислительные и графические ресурсы "Математики" дают возможность эксплицитно и обсуждать такие аспекты теоретических концепций, которые остаются в тени при традиционной технологии чтения курса с помощью доски и мела, авторучки и бумаги. В то же время, поручая проведение громоздких и трудоемких вычислений и построение графиков компьютеру, можно заняться выполнением интересных и запоминающихся прикладных задач.

**1.1. Практикум с использованием системы "Математика".**

Ниже описана методика проведения компьютерного практикума (практических занятий), которая используется в течение ряда лет в Московском государственном институте электроники и математики (МИЭМ). Практикум проводится в компьютерных классах с использованием разработанного автором интерактивного электронного учебного пособия.

Учебное пособие состоит из отдельных частей - электронных документов, именуемых "Записными книжками". Каждая книжка тематически посвящена определенному разделу курса и состоит из текстового теоретического материала, выполняемых на компьютере упражнений и необходимых для выполнения упражнений и иллюстрации теоретического материала программ для компьютера, написанных на языке программирования "Математика".

Отличительной характеристикой электронного учебного пособия является его интерактивный характер. Он подразумевает предоставляемую пособием возможность выполнять на компьютере разнообразные математические расчеты, изменяя стратегию вычислений на основе полученных результатов с целью добиться максимального понимания учебного материала. Учебное пособие дает возможность проводить лабораторные работы исследовательского характера по прикладным математическим моделям.

Студенты могут воспользоваться электронными пособиями для самостоятельного изучения курсов “Математический анализ” и “Линейная алгебра” с помощью домашнего персонального компьютера, на котором инсталлирована “Математика”. Лекторы имеют возможность проводить символьные и численные вычисления, а также создавать графический материал в лекционной аудитории, снабженной мультимедийным проектором.

Результаты вычислений, а также персональные заметки по курсу могут быть внесены в новые Записные книжки, создаваемые студентами, сохранены и использованы в дальнейшем для подготовки к экзаменам или зачетам.

Книжки пособия структурированы. Они состоят из глав, параграфов и т.п. На рисунке 11.1 показана титульная страница пособия, посвященного теме “Непрерывность и точки разрыва функций”. Так выглядит каждое учебное пособие после открытия файла, в котором оно содержится.

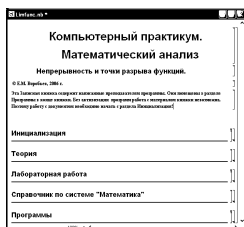


Рис. 11.1

Раскроем раздел “Программы”. В нем находятся программы, обеспечивающие интерактивность пособия. Они написаны на языке программирования, которым, в сущности, является система “Математика”. Приведем текст программы **FunctionLimit**, позволяющей проводить визуализацию исследования

непрерывности функции в точке.

```
<< GraphicsLegend';
Clear[FunctionLimit];
Options[FunctionLimit] = {DisplayFunction -> Identity};
FunctionLimit[Function[expr _], Interval[var _, a _, b _], Sequence[seq_],
              IndexRange[n_, n0_, n1_], opts___] :=
Module[{dtf, dtx, p}, p = Plot[expr, {var, a, b}, PlotStyle -> GrayLevel[1.],
                             DisplayFunction -> Identity];
  dtf = Point/@Table[{seq, expr/.x->seq}, {n, n0, n1}];
  dtx = Point/@Table[{seq, 0}, {n, n0, n1}];
ShowLegend[Show[Graphics[{PointSize[0.012], Hue[0], dtf, Hue[0.8], dtx}],
  Axes -> True, PlotRange -> (PlotRange/.{opts}/.(PlotRange->{{a, b}, All})),
  DisplayFunction -> (DisplayFunction/.{opts}/.Options[FunctionLimit]),
  Background -> GrayLevel[0.9], ImageSize -> {600, 400},
  PlotLabel -> SequenceForm[StyleForm["Точки графика функции",
  FontFamily -> "Courier", FontWeight -> "Bold"], expr,
  StyleForm["для x = ", FontFamily -> "Courier",
  FontWeight -> "Bold"], seq], DefaultFont -> {"Courier", 12}],
  {{{Graphics[{Hue[0], PointSize[0.15], Point[{0, 0}]}],
  StyleForm["точки графика функции", FontSize -> 12]}],
  {Graphics[Hue[0.8], PointSize[0.15], Point[{0, 0}]}],
  SequenceForm[StyleForm["элементы последовательности", FontSize -> 12], seq]}},
  LegendPosition -> {-1., -1.}, LegendSize -> {1.7, 0.25},
  LegendBackground -> GrayLevel[0.7], LegendTextOffset -> {-0.7, 0}]]];
```

Перед началом занятия необходимо выполнить программы, т.е. провести инициализацию пособия. В главе "Инициализация" описаны два способа, как это сделать.

Использование интерактивных учебных пособий не предполагает никакого предварительного знакомства с "Математикой" и не требует ее изучения в дальнейшем поскольку пособие представляет собой учебную оболочку, за которой спрятано вычислительное ядро системы "Математика". Все, что нужно для использования пособия в интерактивном режиме, - это стандартные навыки работы с текстовыми редакторами типа Microsoft Word.

Если открыть главу "Лабораторная работа" (см. Рис. 11.2), то мы увидим, что она состоит из двух параграфов: "Задания" и "Образец выполнения работы".

С заданиями можно познакомиться в Лабораторной работе 6, описанной в главе 6 раздела 1. При выполнении лабораторной работы студенты прежде



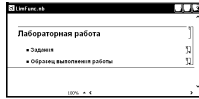


Рис. 11.2

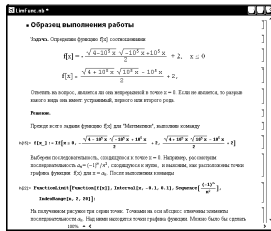


Рис. 11.3

всего знакомятся с тем, как рекомендуется выполнять работу. Раскроем параграф “Образец выполнения работы”.

В нем имеется текст с описанием хода выполнения задания и команды “Математики”. По мере чтения материала студенты последовательно выполняют команды.

После ознакомления с образцом можно начинать выполнение индивидуальных заданий. Для этого студенты открывают свои рабочие окна, копируют в них команды из образца, редактируют их в соответствии со своим заданием и выполняют отредактированные команды.

Отметим, что выполнение задания отнюдь не исчерпывается работой на компьютере. Выполнение компьютерных команд и изучение получаемого графического материала служат исключительно для того, чтобы сформулировать гипотезу о поведении функции в изучаемой точке. После того как гипотеза высказана, наступает теоретическая фаза работы. Гипотеза либо доказывается стандартными математическими рассуждениями, либо опровергается. В последнем случае требуется дополнительная работа на компьютере, т.е. процесс приобретает итеративный характер.

По завершении работы, т.е. выполнения экспериментальной работы на компьютере и теоретического доказательства, студенты сдают отчет о выполнении работы преподавателю.

Отметим, что именно наличие образцов выполнения лабораторных работ и содержащихся в них проблемно ориентированных компьютерных команд позволяет почти полностью избежать необходимости специально изучать саму систему “Математика”.

## 1.2. Практикум с использованием системы “ВебМатематика”.

“ВебМатематика” является прикладной программой для Ява-сервера, обеспечивающей доступ по Интернету к вычислительным ядрам системы “Математика”, размещенным на сервере. Тем самым, становятся реальными удаленные вычисления при помощи компьютеров, не обладающих установленными на них прикладными программами для вычислений, или компьютеров с ограниченными ресурсами. Правда, с помощью “ВебМатематики” на данном сервере можно проводить не любые вычисления, а лишь те, которые предусмотрены разработчиками ВебМатематика-сайта, хотя, потенциально, все вычисления, которые способна проводить система “Математика”.

Используя “ВебМатематику”, сервер по запросу пользователя, осуществляемого с веб-браузера на пользовательском персональном компьютере, создает HTML-страницу с активными элементами, предназначенными для передачи информации от пользователя на сервер, и отправляет созданную страницу пользователю. Каждый активный элемент предназначен для выполнения определенной команды системы “Математика” как встроенной, так и запрограммированной разработчиком HTML-страницы. В качестве HTML-страниц можно после соответствующей обработки использовать интерактивные электронные учебные пособия, которые описаны в предыдущем разделе.

Пользователь вводит в поля ввода активных элементов математические формулы и числовые параметры, нажимает на кнопку Evaluate и отправляет HTML-страницу для вычислений на сервер. Сервер возвращает страницу пользователю, вклеив в нее результаты вычислений.

HTML-страницы интерактивного учебного пособия внешне выглядят совершенно так же, как и на компьютере с установленной системой “Математика”. Однако вместо ячеек с командами “Математики” на веб-странице находятся так называемые *формы*, состоящие из полей ввода математической информации и кнопки Evaluate (см. Рис. 11.4 ).

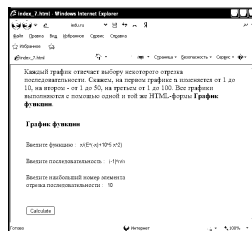


Рис. 11.4

Преимущества использования системы “ВебМатематика” по сравнению с “Математикой” состоят в следующем.

Во-первых, компьютер пользователя может не быть оснащенный системой “Математика”, а быть просто подключенным к Интернету.

Во-вторых, пользователю абсолютно не нужно знать, как используются и как выглядят команды “Математики”. Он должен обладать навыками работы с веб-браузером и знать некоторые правила ввода математических выражений.

В силу изложенного ясно, что “ВебМатематика” обладает колоссальным потенциалом использования в системах дистантного образования для обучения математическим дисциплинам как школьников, так и студентов. Упомянем в связи с этим ресурс <http://integrals.wolfram.com>, который предоставляет возможность вычислять интегралы по Интернету.

Опыт преподавания в Московском государственном университете экономики, статистики и информатики, где “ВебМатематика” используется при чтении лекций и проведения практических занятий, показывает, что упомянутые преимущества весьма существенны с точки зрения обеспечения учебного процесса. Администрирование Ява-сервера проще, чем администрирование многочисленных аудиторий и компьютерных классов с установленной системой “Математика”.

К недостаткам “ВебМатематики” относится то, что существующие в настоящее время ее версии не допускают использования в полях ввода традиционных синтаксических конструкций, используемых в математических формулах: дробей, степеней, математических символов суммы, интегрирования, дифференцирования и т.д. Входная информация должна быть однострочечной, хотя результаты вычислений свободны от этого ограничения.

## ИНДЕКС

### ЧАСТЬ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

#### А

- Аддитивность определенного интеграла – 122
- Аксиома Архимеда – 19
- Аксиома Кантора – 33
- Аксиома непрерывности вещественной числовой оси – 36
- Асимптота
  - вертикальная – 100
  - горизонтальная – 100
  - наклонная – 100

#### Б

- Бесконечно
  - большая
    - – последовательность – 13
    - – функция –
  - малая
    - – последовательность – 13
    - – функция – 82

#### В

- Вещественная числовая ось – 34
  - непрерывность – 34
- Вещественные
  - последовательности – 31
    - – предел – 31
    - – сходящиеся – 31
    - – фундаментальные – 35
  - числа – 26
    - – арифметические операции – 29, 30
    - – десятичное представление – 27
    - – пол – 28
    - – потолок – 28
    - – сравнение – 26, 27

Выпуклость графика функции – 99

Г

Градиент – 173

Д

Деление с остатком – 6

Дифференциал

– функции одного аргумента – 85

– таблица дифференциалов основных элементарных функций – 86

– функции двух аргументов – 170

Длина дуги

– графика функции – 140

– кривой – 142

Дроби –

– эквивалентные – 6

Е

Ж

З

Замечательный предел

– первый –

– второй – 46

И

Интеграл

– Дарбу – 119

– двойной – 191, 196

– – в полярных координатах – 200

– – сведение к повторному – 192, 197

– криволинейный

– – первого рода – 205

– – второго рода – 206

– – – условие независимости от пути – 211

– – сведение к определенному интегралу – 205, 207

– неопределенный – 124

– – интегрирование простейших иррациональностей – 133

– – интегрирование рациональных функций – 130

– – интегрирование тригонометрических выражений – 136

– – метод подстановки – 127

– – метод интегрирования по частям – 129

– несобственный

– – первого рода (неограниченный промежуток) – 147

- – второго рода (неограниченная функция) – 149
- определенный – 121
  - – свойства
    - – – аддитивность – 122
    - – – линейность – 122
  - – теорема о среднем – 122
- поверхностный
  - – первого рода – 225
  - – второго рода – 228
- Римана –
- тройной – 234

## К

- Касательная к графику функции – 84
- Касательная плоскость – 169
- Квадрируемая плоская фигура – 193
- Квадрируемая замкнутая область – 193
- Класс эквивалентности дробей – 6
- Криволинейные координаты
  - на плоскости – 199
  - в пространстве – 236
    - – цилиндрические – 237
    - – сферические – 237
- Криволинейная трапеция – 116
- Критическая точка функции – 96
  - точка перевала – 179
- Кубируемое пространственное тело – 234

## Л

- Лопиталья правило – 88

## М

- Максимум функции (локальный) – 79, 178
- Матрица Якоби – 239
- Метод интегрирования по частям – 129
- Метод подстановки – 127
- Минимум функции (локальный) – 79, 178
- Мгновенная скорость – 70
- Многочлен
  - Тейлора – 89, 176
    - – остаточный член – 91
  - тригонометрический – 269
    - – интерполяционный – 270
    - – приближающий в среднем квадратичном – 271
    - – равномерно приближающий – 271

## Множество

- замкнутое – 163
- ограниченное – 164
- открытое – 163
- связное – 164

## Монотонность

- признаки монотонности – 96
- участки монотонности – 96

## Н

### Натуральный числовой ряд – 5

### Неопределенность

- вида  $\frac{0}{0}$  – 88
- вида  $\frac{\infty}{\infty}$  – 94

### Непрерывность

- вещественной числовой оси – 34
- функций одного вещественного аргумента – 39, 40, 41
  - – по Гейне – 43
  - – по Коши – 43
  - – равномерная непрерывность –
- функций двух вещественных аргументов – 166
  - – равномерная непрерывность – 167

## О

### Область

- замкнутая – 164
- неодносвязная – 164
- открытая – 164
- односвязная – 164
- точка прикосновения – 164

### Окрестность точки на плоскости – 162

## П

### Парабола касания $k$ -го порядка – 91

### Параллелепипед

- замкнутый – 163
- открытый – 162

### Перегиб точки – 99

### Поверхность

- вращения – 144
- двусторонняя – 219
- край – 215
- неявно заданная – 216

- односторонняя – 218
  - лист Мебиуса – 218
- особая точка – 216
- параметрически заданная – 216
  - Гауссовы коэффициенты – 222
- явно заданная (график) – 215
- площадь – 220, 223
- Подпоследовательность – 10
- Полярные координаты –
- Последовательности
  - вещественных чисел
  - график – 11
  - монотонные – 11
  - свойства
    - – бесконечно большие – 13
    - – бесконечно малые – 13
    - – – эталонная – 14
    - – ограниченные – 12
    - – монотонно возрастающие –
    - – монотонно убывающие –
    - – невозрастающие –
    - – неограниченные – 12
    - – неубывающие –
  - сходящиеся
  - рациональных чисел – 9
  - эквивалентные – 25
- Правило Лопиталя – 88
- Предел сходящейся последовательности
  - первый замечательный (число  $e$ ) –
  - второй замечательный – 46
  - рациональной – 14
  - вещественной – 31
- Предел функции – 45, 165
  - левый – 46
  - правый – 46
- Представитель класса – 7
- Преобразование Фурье –
  - дискретное – 275
    - – узлы интерполяции – 275
    - – шаг дискретизации – 275
- Приращение функции – 69
- Прогрессия
  - арифметическая – 10
  - геометрическая – 10
- Производная функции



- одного аргумента
  - – первого порядка – 70
  - – высшие производные – 76
  - – таблица производных – 77
- по направлению – 172
- частная – 168
  - – высших порядков – 171

## Р

- Разностное отношение – 69
- Расстояние на плоскости
  - вычисляемое по максимуму модуля разности координат – 161
  - манхэттенское – 161
  - эвклидово – 161
- Рациональная координатная плоскость – 8
- Рациональная точка – 7
- Рациональные числа – 7
  - арифметические действия – 7
  - сравнение по величине – 7
- Рациональная числовая ось – 8
- Ряд
  - степенной – 262
    - – Маклорена – 265
    - – почленные операции
      - – – дифференцирование – 264
      - – – интегрирование – 264
    - – радиус сходимости – 263
      - – – вычисление радиуса сходимости – 263
  - функциональный – 284
    - – почленные операции
      - – – дифференцирование – 288
      - – – интегрирование – 288
    - – сходимость – 284
      - – – равномерная – 287
  - Фурье – 274
    - – Гиббса эффект – 280
  - числовой – 253
    - – абсолютно сходящийся – 254
    - – знакочередующийся – 259
    - – остаток ряда – 255
    - – признаки сходимости
      - – – Даламбера – 257
      - – – Коши – 258
      - – – Маклорена-Коши – 259
      - – – признаки сравнения – 256, 257

- – сходящийся – 254
- – расходящийся – 254
- – условие Лейбница – 260
- – условно сходящийся – 254
- – частичная сумма – 254

## С

Сумма Дарбу

- верхняя – 118
- нижняя – 118

Сумма Римана – 121

Сферические координаты – 237

Сходимость последовательности точек плоскости – 162

## Т

Таблица

- дифференциалов –
- неопределенных интегралов – 125
- производных – 76

Тело вращения – 144

- объем – 145

Точка разрыва функции – 46

- первого рода – 48
- второго рода – 49
- устранимого – 46

Точка сгущения множества – 45

## У

Условия экстремума – 97, 98

## Ф

Фигура плоская квадратуемая – 193

Формула Грина – 213

Формула конечных приращений

- Лагранжа – 80
- Коши – 80

Формула Ньютона-Лейбница – 123

Формула Остроградского-Гаусса – 242

Формула Тейлора

- функции  $\arctg(x)$  – 93
- функции  $\cos(x)$  – 92
- функции  $e^x$  – 92
- функции  $\ln(1+x)$  – 93
- функции  $(1+x)^a$  – 92
- функции  $\sin(x)$  – 92

- Функции вещественного аргумента – 37
  - бесконечно большие – 95
  - бесконечно малые – 82
    - – одного порядка малости – 83
    - – эквивалентные бесконечно малые – 83
    - –  $k$ -го порядка малости – 83
  - график – 37
  - дифференцирование – 71
    - – правила дифференцирования – 72, 73
  - заголовок – 37
  - заданные неявно – 173
  - линии уровня – 175
  - множество уровня – 175
  - непрерывность – 43
    - – по Гейне – 43
    - – по Коши – 43
  - область значений – 37
  - область определения – 37
  - основные элементарные – 38
  - особые точки – 175
- Функция Дирихле – 51
- Функция Римана – 38

## X

## Ц

- Цилиндрические координаты – 237

## Ч

- Числа
  - вещественные – 26
  - натуральные – 5
  - рациональные – 7
- Число Пифагора  $\sqrt{2}$  – 21
- Число  $e$  – 22
- Число Архимеда  $\pi$  – 23

## Ш

- Шар
  - замкнутый – 163
  - открытый – 162

## Э

- Экстремум функции
  - локальный – 79, 178

– условный – 181  
Элементы последовательности – 9

Ю

Я

Якобиан – 201, 239

## ИНДЕКС

### ЧАСТЬ 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

#### А

- Алгоритм Грама-Шмидта – 370
- Алгоритм Лагранжа – 394

#### Б

- Базис – 313, 316, 369
  - ортогональный – 369
  - ортонормированный – 369
- Базисные векторы – 313

#### В

- Вектор
  - в пространстве – 316
  - на плоскости – 308
    - абсолютная величина – 309
    - длина – 309
    - модуль – 309
    - нулевой – 309
    - точка приложения – 308
- Векторное произведение – 317
- Векторное пространство (см. линейное пространство)
- Векторы
  - коллинеарные – 312
  - линейные операции
    - вычитание – 311
    - сложение – 310, 311
    - умножение на число – 311
  - ортогональные – 315
  - равные – 310

#### Г

#### Д

Е

Ж

З

И

К

Л

Линейный оператор – 362

- дефект – 364
- жорданов базис – 366
- единичный (тождественный) – 362
- инвариантное подпространство – 365
- корневой вектор – 366
- корневое подпространство – 366
- матрица – 362
- нулевой – 362
- образ – 363
- ортогональный – 371
- простой структуры – 365
- ранг – 364
- самосопряженный – 371
- собственный вектор – 364
- собственное значение – 364
- сопряженный – 370
- ядро – 363

Линейное (векторное пространство) – 357

- базис – 358
  - – матрица перехода к новому базису – 359
- размерность – 358
- элемент (вектор)
  - – нулевой – 357
  - – противоположный – 357
- многообразие линейное – 360
  - – размерность – 361
- подпространство – 360
  - – гиперплоскость – 361
  - – тривиальное (несобственное) – 360
- элементы
  - – линейная комбинация – 358
    - – – нетривиальная – 358
  - – линейная независимость – 358

- - противоположные - 357
- - разложение - 358
- - сумма - 357

## М

### Матрица

- вырожденная - 335
- диагональ
  - - главная - 330
  - - побочная - 330
- диагональная - 330
- единичная, или тождественная - 330
- минор - 334
  - - алгебраическое дополнение - 335
  - - базисный - 360
  - - дополнительный - 335
- нулевая - 330
- обратная - 335
- определитель - 334
  - - разложение - 335
- произведение на число - 331
- размерность - 330
- ранг - 360
- скалярная - 330
- след - 330
- столбец - 330
- строка - 330
- ступенчатая
  - - верхняя - 331
  - - нижняя - 331
- транспонированная - 332
- трапециевидная - 331
- треугольная
  - - верхняя - 331
  - - нижняя - 331
- элемент - 330
  - - транспозиция - 333
- элементарные преобразования - 333

### Матрицы

- линейная комбинация - 332
- перестановочные - 332
- произведение - 332
- равные - 331
- разность - 331
- сумма - 331

Метод Гаусса – 338

Н

О

П

Параллельный перенос вектора – 309

Проекция вектора на прямую – 314

Р

С

Система линейных алгебраических уравнений – 337

– коэффициент – 337

– матрица коэффициентов – 337

– – расширенная – 337

– неопределенная – 338

– определенная – 338

– правые части, или свободные члены – 337

– решение – 337

Скалярное произведение – 314

Смешанное произведение – 317

Т

У

Умножение вектора на число – 311

Ф

Форма

– билинейная – 392

– – вырожденная – 393

– – матрица коэффициентов – 392

– – полярная к квадратичной – 393

– – ранг – 393

– – симметричная – 393

– квадратичная – 393

– – канонический базис – 394

– – канонический вид – 394

– – канонические коэффициенты – 394

– – матрица коэффициентов – 393

– – ранг – 394

Х



Ц

Ч

Ш

Э

Эквивалентные системы линейных алгебраических уравнений – 338

Ю

Я