# ГОМОМОРФИЗМЫ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

**Т. Ф. Савина (Саратов)**

Математическая теория игр занимается построением и исследованием математических моделей принятия решений в условиях конфликта, который возникает за счет различия интересов принимающих решение систем. В классической теории игр интересы игроков задаются при помощи целевых функций. Однако на практике построение таких функций сопряжено со значительными трудностями. В настоящей работе рассматривается класс игр, в которых цели игроков формализуются в виде бинарных отношений на множестве исходов.

Игра $n$ $(n \geq 2)$ игроков с отношениями предпочтения определяется как система объектов

$$G = \langle X_1, \ldots, X_n, A, \rho_1, \ldots, \rho_n, F \rangle,$$

где $X_i$ — множество стратегий игрока $i \, (i = 1, \ldots, n)$, $A$ — множество исходов, $F$ — отображение множества ситуаций $X_1 \times \ldots \times X_n$ в множество исходов $A$, $\rho_i$ — отношение предпочтения игрока $i$ $(i = 1, \ldots, n)$, заданное на $A$.

Основной задачей теории игр является нахождение оптимальных решений, при этом известны теоретические результаты об оптимальных решениях игр с отношениями предпочтения специального вида (например, с отношениями порядка [1]). Так как на практике отношения предпочтения задаются при помощи графов, то соответствующие математические модели бывают весьма громоздкими. Основной метод их упрощения состоит в переходе от игры к ее гомоморфному образу.

Для произвольной игры с отношениями предпочтения мы можем построить подобную ей игру более простого вида — фактор-игру. В данной статье исследуется вопрос о том, когда фактор-игра будет игрой с отношениями предпочтения специального вида. В частности, решены задачи — когда фактор-игра будет игрой с транзитивной структурой предпочтений [2] и игрой с ациклиной структурой предпочтений. Решение дается в виде условий, накладываемых на систему эквивалентностей, по которым производится факторизация, причем эти условия записываются в виде элементарных формул на языке теории бинарных отношений.

Пусть теперь, кроме игры $G$, задана еще одна игра с отношениями предпочтения тех же игроков $\Gamma = \langle U_1, \ldots, U_n, B, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \Phi \rangle$.

**Определение 1.** Набор отображений $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1})$, где $\varphi_i \colon X_i \to U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varphi_{n+1} \colon A \to B$ называется *гомоморфизмом игры $G$ в игру* $\Gamma$, если выполняются следующие условия:

$$a_1 \overset{\rho_i}{\lesssim} a_2 \;\Rightarrow\; \varphi_{n+1}(a_1) \overset{\sigma_i}{\lesssim} \varphi_{n+1}(a_2) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{$H1$}$$

$$\varphi_{n+1} \circ F = \Phi \circ (\varphi_1 \Box \ldots \Box \varphi_n).$$

Гомоморфизм $\varphi$ игры $G$ в игру $\Gamma$ называется *строгим*, если условие $(H1)$ заменяется более сильной системой условий:

$$a_1 \overset{\rho_i}{<} a_2 \;\Rightarrow\; \varphi_{n+1}(a_1) \overset{\sigma_i}{<} \varphi_{n+1}(a_2) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$a_1 \overset{\rho_i}{\sim} a_2 \;\Rightarrow\; \varphi_{n+1}(a_1) \overset{\sigma_i}{\sim} \varphi_{n+1}(a_2) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

**Определение 2.** Набор эквивалентностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$, где $\varepsilon_i \subseteq X_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varepsilon_{n+1} \subseteq A^2$, называется *конгруэнтностью в игре* $G$, если для этого набора выполняется условие согласованности для функции реализации, которое имеет вид:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1' & \overset{\varepsilon_1}{\equiv} & x_1 \\ x_2' & \overset{\varepsilon_2}{\equiv} & x_2 \\ & \ldots & \\ x_n' & \overset{\varepsilon_n}{\equiv} & x_n \end{array}\right\} \Rightarrow F(x_1', \ldots, x_n') \overset{\varepsilon_{n+1}}{\equiv} F(x_1, \ldots, x_n).$$

Конгруэнтность $\varepsilon$ в игре $G$ называется *str-конгруэнтностью*, если выполняется дополнительное условие согласованности для отношений предпочтения:

$$a_1 \overset{\rho}{\lesssim} a_2 \wedge a_1' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1 \wedge a_2' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2 \wedge a_2' \overset{\rho}{\lesssim} a_1' \Rightarrow a_1 \overset{\rho}{\sim} a_2.$$

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — игра с отношениями предпочтения, на которой задана конгруэнтность $\varepsilon$. Тогда определена фактор-игра*

$$G/\,\varepsilon = \langle X_1/\,\varepsilon_1, \ldots, X_n/\,\varepsilon_n,\; A/\,\varepsilon_{n+1},\; \rho_1/\,\varepsilon_{n+1}, \ldots, \rho_n/\,\varepsilon_{n+1}, F_{\varepsilon_{n+1}}\rangle$$

*с отношениями предпочтения и каноническое отображение $\varphi_\varepsilon = (\varphi_{\varepsilon_1}, \ldots, \varphi_{\varepsilon_n}, \varphi_{\varepsilon_{n+1}})$, где $\varphi_{\varepsilon_i} \colon X_i \to X_i/\,\varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varphi_{\varepsilon_{n+1}} \colon A \to A/\,\varepsilon_{n+1}$ и $F_{\varepsilon_{n+1}}([x_1]_{\varepsilon_1}, \ldots, [x_n]_{\varepsilon_n}) \overset{df}{=} [F(x_1, \ldots, x_n)]_{\varepsilon_{n+1}}$, будет сюръективным гомоморфизмом игры $G$ на $G/\,\varepsilon$.*

*При этом, если конгруэнтность $\varepsilon$ является str-конгруэнтностью, то каноническое отображение $\varphi_\varepsilon$ будет строгим гомоморфизмом.*

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — игра с отношениями предпочтения, на которой задана конгруэнтность $\varepsilon$. Для того, чтобы фактор-игра $G/\varepsilon$ была игрой с транзитивной структурой предпочтений необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$\rho_i \circ \varepsilon_{n+1} \circ \rho_i \subseteq \varepsilon_{n+1} \circ \rho_i \circ \varepsilon_{n+1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — игра с отношениями предпочтения, на которой задана конгруэнтность $\varepsilon$. Для того, чтобы фактор-игра $G/\varepsilon$ была игрой с ацикличной структурой предпочтений необходимо и достаточно, чтобы для всех $i = 1, \ldots, n$ отношение $\rho_i \cup \varepsilon_{n+1}$ было ацикличным относительно $\varepsilon_{n+1}$, т. е. выполнялась импликация:*

$$a_0 \overset{\rho_i\cup\varepsilon_{n+1}}{\lesssim} a_1 \overset{\rho_i\cup\varepsilon_{n+1}}{\lesssim} \ldots \overset{\rho_i\cup\varepsilon_{n+1}}{\lesssim} a_n \overset{\rho_i\cup\varepsilon_{n+1}}{\lesssim} a_0 \Rightarrow a_0 \overset{\varepsilon_{n+1}}{\equiv} a_1 \overset{\varepsilon_{n+1}}{\equiv} \ldots \overset{\varepsilon_{n+1}}{\equiv} a_n$$

### Список литературы


1. Розен В. В. Гомоморфизмы игр с упорядоченными исходами // Математические модели поведения. Методы и модели принятия решений. Межвуз. науч. сб. — Саратов: Изд-во СГУ, 1981. — С. 90–104.

2. Савина Т. Ф. Гомоморфизмы и конгруэнтности игр с транзитивной структурой предпочтений // Материалы Междунар. науч. конф. "Компьютерные науки и информационные технологии" (1–4 июля 2009 г.). — Саратов: Изд-во СГУ, 2009. — С. 157–160.


## О СВОЙСТВАХ ГИПЕРАВТОМАТОВ


**И. Ю. Самоненко (Москва)**


Обозначим $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$. Пусть $X$ — конечное множество, $n$ и $s$ — натуральные числа. Через $< x_1, ..., x_n >$ обозначим мультимножество состоящее из элементов $x_1, \ldots, x_n$, т. е. $< x_1, ..., x_n >= \{(x_{i_1}, t_{i_1}), \ldots, (x_{i_s}, t_{i_s})\}$, где число вхождений элемента $x_{i_j}$ в вектор $(x_1, ..., x_n)$ равно $t_{i_j}$, $j = 1, \ldots, s$ и $t_{i_1} + \cdots + t_{i_s} = n$. Обозначим

$$p_1(x_1, \ldots, x_s) = (x_1, \ldots, x_s),$$
$$p_2(x_1, \ldots, x_s) =< x_1, \ldots, x_s >,$$
$$p_3(x_1, \ldots, x_s) = \{x_1, \ldots, x_s\}.$$