Математические заметки

Том 95 выпуск 5 май 2014

УДК 517.91

О решениях уравнений типа Эмдена–Фаулера

В. С. Самовол

В работе рассматриваются решения уравнений типа Эмдена–Фаулера произвольного порядка. Статья содержит результаты исследования асимптотических свойств решений указанного уравнения, в ней также дается систематическое изложение многочисленных разрозненных результатов анализа продолжаемых и непродолжаемых решений.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10445

1. Введение. Рассматривается уравнение следующего вида:

$$\begin{gathered} y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}=p(x)|y|^\sigma \operatorname{sgn} y, \qquad n\geqslant 2, \quad \sigma>1, \\ y=y(x), \quad p(x)\in C^0, \quad x,y\in\mathbb{R}^1, \quad p(x)\neq 0. \end{gathered} \tag{1}$$

При $n=2$ и $p(x)=\pm x^\beta$, $x>0$, $\beta=\mathrm{const}$ это известное уравнение Эмдена–Фаулера, связанное с изучением ряда физических процессов. Уравнение (1) изучалось в многочисленных работах (см., в частности, [1]–[6]).

Основная цель данной работы состоит в системном описании решений уравнения (1) при $x\to\pm\infty$ в зависимости от параметров роста функции $p(x)$. Также будут рассматриваться решения, уходящие в бесконечность при $x\to a\neq\pm\infty$.

Определение 1. Решение $y(x)$ уравнения (1) называется *продолжаемым вправо*, если оно определено в некоторой окрестности $+\infty$.

Определение 2. Решение $y(x)$ уравнения (1) называется *продолжаемым влево*, если оно определено в некоторой окрестности $-\infty$.

Определение 3. Решение $y(x)$ уравнения (1) называется *продолжаемым на всей оси*, если оно определено при любых $x\in\mathbb{R}^1$.

Определение 4. Нетривиальное решение $y(x)$ уравнения (1) называется *осциллирующим вправо* (*влево*), если для всякого x, принадлежащего его области определения, найдется такое $\widetilde{x}>x$ ($\widetilde{x}<x$), что $y(\widetilde{x})=0$.

Непродолжаемыми в каком-либо направлении мы будем считать решения, не являющиеся продолжаемыми в соответствующем направлении.

Мы опишем решения уравнения (1) при выполнении следующего условия для функции $p(x)$:

$$|p(x)| \geqslant c|x|^{-n}, \qquad c = \mathrm{const} > 0, \quad |x| \geqslant x_0 > 0. \tag{2}$$

Отметим, что при выполнении (2) результаты при четных и нечетных n существенно различаются. Кроме того, отметим существенное различие в поведении решений уравнения (1) при $p(x) > 0$ и $p(x) < 0$.

Сформулируем вначале общую теорему, которая устанавливает существование непродолжаемых решений уравнения (1) при $p(x) > 0$ вне зависимости от характеристик роста функции $p(x)$ и четности n. Данная теорема впервые была сформулирована и доказана в докладе на Семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в МГУ, который был сделан В. А. Кондратьевым и автором этих строк в 1980 г. [2].

Теорема 1. *Если $p(x) > 0$, то для любого числа a_1 существует непродолжаемое вправо решение $y(x)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{x \to a_1 - 0} |y^{(i)}(x)| = +\infty, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{3}$$

Замечание. Из доказательства теоремы будет следовать, что если решение $y(x)$ с начальными данными $y^{(i)}(x_0) = c_i$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ уравнения (1) (при $p(x) > 0$) удовлетворяет (3), то при некотором $\varepsilon > 0$ любое решение $y_1(x)$, для которого

$$y_1^{(i)}(x_0) = c_{1i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad \sum_{i=0}^{n-1} |c_{1i} - c_i| < \varepsilon,$$

также будет удовлетворять условию вида (3), возможно, с другим значением a_1.

В следующих теоремах изложены результаты, относящиеся к описанию неосциллирующих решений уравнения (1) при выполнении условия (2) и различных предположениях относительно знака функции $p(x)$ и четности n.

Теорема 2. *При выполнении* (2), *где n четное и $p(x) > 0$, уравнение* (1) *имеет непродолжаемые вправо решения $y(x)$, удовлетворяющие условию* (3) *при некотором конечном $a_1 > x_0$.*

Кроме того, данное уравнение имеет продолжаемые вправо и непродолжаемые влево решения, удовлетворяющие следующим условиям: $y^{(i)}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, на области определения решения являются монотонными функциями, для которых

$$y^{(i)}(x) y^{(i+1)}(x) < 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} y^{(i)}(x) = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1; \tag{4}$$

при некотором конечном $a_2 < x_0$ будет

$$\lim_{x \to a_2 + 0} |y^{(i)}(x)| = +\infty, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{5}$$

Других сохраняющих знак при $x \geqslant x_0$ решений уравнение (1) *при выполнении условия* (2), *положительном коэффициенте $p(x)$ и четном n не имеет.*

Существование у уравнения (1) решений вида (4) при условиях, приведенных в теореме 2, доказано в [3].

Теорема 3. *Если выполняется* (2), *где* n *нечетное и* $p(x) > 0$, *уравнение* (1) *имеет непродолжаемые вправо решения*, *удовлетворяющие* (3).

Других сохраняющих знак при $x \geqslant x_0$ *решений уравнение* (1) *при выполнении условия* (2), *положительном коэффициенте* $p(x)$ *и нечетном* n *не имеет*.

Отсутствие у уравнения (1) сохраняющих знак продолжаемых вправо решений при условиях теоремы 3 доказано в [4].

Теорема 4. *При выполнении* (2), *где* n *четное и* $p(x) < 0$, *все нетривиальные решения уравнения* (1) *являются осциллирующими как вправо*, *так и влево*.

То, что при условии (2), четном n и $p(x) < 0$ все продолжаемые нетривиальные решения уравнения (1) осциллируют, доказано в [4].

Теорема 5. *Если имеет место* (2), *где* n *нечетное и* $p(x) < 0$, *то уравнение* (1) *имеет продолжаемые вправо и непродолжаемые влево сохраняющие знак решения* $y(x)$, *для которых все* $y^{(i)}(x)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, *на области определения решения являются монотонными функциями*, *и выполняются условия* (4) *и* (5).

Других сохраняющих знак при $x \geqslant x_0$ *решений уравнение* (1) *при выполнении условия* (2), *отрицательном коэффициенте* $p(x)$ *и нечетном* n *не имеет*.

Основной результат теоремы 5 можно получить как следствие утверждений, содержащихся в [3], [4].

Отметим, что приведенные результаты дают возможность описания решений уравнения (1) также в окрестности левой границы их области продолжаемости, что достигается заменой $x = -u$. При этом уравнения четного порядка сохраняют свой вид, а в уравнениях нечетного порядка функция $p(x)$ меняет знак.

2. Примеры. Первые три примера иллюстрируют содержание сформулированных теорем. Четвертый пример демонстрирует применение этих теорем для анализа конкретного уравнения вида (1) и описания всех возможных типов его решений, как сохраняющих знак близи границ их области определения, так и осциллирующих.

Пример 1 (теоремы 1 и 2). Уравнение

$$y^{(n)} = |y|^\sigma \operatorname{sgn} y, \qquad n \geqslant 2, \quad \sigma > 1, \tag{6}$$

где n четное число, имеет решения

$$y_1(x) = c(-x+1)^\beta, \quad x < 1, \qquad y_2 = c(x-1)^\beta, \quad x > 1, \quad \beta = \frac{n}{1-\sigma},$$
$$c = (\beta(\beta-1) \cdot \dots \cdot (\beta-n+1))^{1/(\sigma-1)},$$

первое из которых удовлетворяет условию (3), где $a_1 = 1$, а второе – условиям (4) и (5), где $a_2 = 1$.

Пример 2 (теорема 3). Уравнение

$$y^{(3)} = |y|^\sigma \operatorname{sgn} y, \qquad \sigma > 1, \tag{7}$$

имеет решение

$$y = y_1(x) = c(-x+1)^{\beta}, \qquad x < 1, \quad \beta = \frac{3}{1-\sigma}, \quad c = (-\beta(\beta-1)(\beta-2))^{1/(\sigma-1)},$$

удовлетворяющее (3), где $a_1 = 1$.

Покажем, что любое положительное решение $y(x)$ уравнения (7) будет удовлетворять (3). Если решение непродолжаемо вправо, то несложно видеть, что оно имеет вид (3). Рассмотрим продолжаемое вправо решение. Если $y(x) > 0$, то $y'''(x) > 0$ и функция $y''(x)$ возрастает. Если $\lim_{x\to+\infty} y''(x) > 0$, то при больших x будет $y^{(i)}(x) > 0$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, и согласно лемме 1 (см. следующий раздел) $y(x)$ будет удовлетворять (3). Пусть теперь указанный предел равен нулю (меньше нуля он быть не может, так как тогда решение станет отрицательным при больших x). Функция $y'(x)$ будет убывающей и положительной. Но тогда $y(x)$ возрастает и удовлетворяет условию $y(x) \geqslant A > 0$. Отсюда получаем, что $y^{(3)} \geqslant A^{\sigma}$, из чего следует, что предел $\lim_{x\to+\infty} y''(x) = +\infty$. Полученное противоречие доказывает требуемое.

Пример 3 (теорема 5). Уравнение

$$y^{(n)} = -|y|^{\sigma} \operatorname{sgn} y, \qquad \sigma > 1, \tag{8}$$

где n нечетное число, имеет решение

$$y = c(x-1)^{\beta}, \qquad \beta = \frac{n}{1-\sigma}, \quad c = (-\beta(\beta-1)\cdot \dots \cdot(\beta-n+1))^{1/(\sigma-1)},$$

удовлетворяющее условиям (4) и (5) при $a_2 = 1$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y^{(4)} = |y|^{\sigma} \operatorname{sgn} y, \qquad \sigma > 1. \tag{9}$$

Из теоремы 2 следует, что решения данного уравнения априори могут иметь следующий вид:

1) имеющие вертикальную асимптоту справа и стремящиеся к нулю при $x \to -\infty$. Решения сохраняют знак на всей области своего определения;
2) имеющие вертикальную асимптоту слева и стремящиеся к нулю при $x \to +\infty$. Решения сохраняют знак на всей области своего определения;
3) имеющие вертикальные асимптоты слева и справа. Решения могут быть как одного, так и разных знаков близи асимптот;
4) имеющие справа (слева) вертикальную асимптоту и осциллирующее влево (вправо);
5) осциллирующие в обе стороны.

Покажем теперь, что все эти типы решений действительно существуют.

Положительные решения первого и второго типов указаны в примере 1. Умножая их на -1, получаем соответствующие отрицательные решения.

Решения третьего типа, стремящиеся к $+\infty$ при $x \to \pm a$, $a = \mathrm{const} > 0$ получим при следующих начальных условиях: $y(0) = 1$, $y^{(i)}(0) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Это решение положительно, является четной функцией и имеет справа и слева вертикальные асимптоты (согласно лемме 1 из следующего раздела).

Решения третьего типа, стремящиеся к $+\infty$ при $x \to a$, $a = \mathrm{const} > 0$ и к $-\infty$ при $x \to -a$, получается при начальных условиях

$$y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

Построим теперь решение четвертого типа. Рассмотрим решения $y_\lambda(x)$, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$y_\lambda(0) = y'_\lambda(0) = y''_\lambda(0) = \lambda, \quad y'''_\lambda(0) = \varepsilon, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Решение $y_0(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to a$, $a = \mathrm{const} > 0$, и к $-\infty$ при $x \to -a$. Решение $y_1(x)$ при малых ε стремится к $+\infty$ при $x \to a_1$, $a_1 = \mathrm{const} > 0$ и при $x \to a_2$, $a_2 = \mathrm{const} < 0$. Заметим, что если решение имеет вертикальную асимптоту, то решения с близкими начальными условиями также имеют вертикальную асимптоту (см. замечание к теореме 1). Теперь нетрудно видеть, что найдется такое $0 < \lambda < 1$, что решение $y_\lambda(x)$ будет стремиться к $+\infty$ при $x \to a_3$, $a_3 = \mathrm{const} > 0$ и осциллировать влево (здесь надо иметь ввиду, что продолжаемые неосциллирующие решения нашего уравнения согласно теореме 2 должны удовлетворять условию (4), что для $y_\lambda(x)$ невозможно).

Перейдем теперь к построению решений, осциллирующих в обе стороны (пятый тип решений). Для этого рассмотрим решения $y_\lambda(x)$, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$y_\lambda(0) = \lambda, \quad y'_\lambda(0) = 0, \quad y''_\lambda(0) = \lambda - 1, \quad y'''_\lambda(0) = 0, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{11}$$

Решение $y_0(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to \pm a_1$, $a_1 = \mathrm{const} > 0$, а решение $y_1(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to \pm a_2$, $a_2 = \mathrm{const} > 0$. Найдется такое $0 < \lambda < 1$, что решение $y_\lambda(x)$ будет осциллировать вправо. Но $y_\lambda(x)$ является четной функцией, так как $y'_\lambda(0) = y'''_\lambda(0) = 0$. Следовательно, это решение будет осциллировать в обе стороны.

Покажем в заключение, что любое осциллирующее решение четвертого типа продолжаемо на левой полуоси, а пятого типа – продолжаемо на всей оси.

Умножим обе части (9) на $y'(x)$ и проинтегрируем полученное равенство от нуля до x_k, где x_k – какая-либо точка экстремума рассматриваемого осциллирующего решения $y(x)$, находящаяся между двумя его соседними нулями. В результате получим

$$-y'(0)y'''(0) + \frac{(y''(0))^2}{2} \geqslant \left|\frac{y^{\sigma+1}(x_k)}{\sigma+1}\right| - \left|\frac{y^{\sigma+1}(0)}{\sigma+1}\right|.$$

Отсюда видно, что если данное решение непродолжаемо вправо, то в окрестности точки $\widetilde{x}$, являющейся правой границей его области определения, выполняется неравенство $|y(x)| \leqslant D$, $D = \mathrm{const} > 0$, из чего, в свою очередь, следует, что $|y^{(i)}(x)| \leqslant D_1|x|^i \leqslant D_2$, $D_1, D_2 = \mathrm{const} > 0$, $0 \leqslant i \leqslant 3$. Но в этом случае точка $\widetilde{x}$ не может являться границей области определения решения. Теперь очевидно, что осциллировать решение может только на бесконечном промежутке. Следовательно, решение четвертого типа продолжаемо влево, а пятого типа – на всей оси.

3. Доказательства теорем. Доказательства ряда утверждений, близких к сформулированным выше теоремам, представленные в опубликованных работах, перегружены, на наш взгляд, техническими деталями, затемняющими суть дела. Для таких случаев мы приведем более простые доказательства, позволяющие яснее раскрыть связь между решениями уравнения (1) и характеристиками функции $p(x)$.

Начнем с доказательства теоремы 1. При дополнительном предположении о том, чтобы функция $p(x)$ удовлетворяла условию Гёльдера, указанная теорема может быть доказана с помощью методов степенной геометрии. К применению этих методов (см. [6], [7]) для изучения решений уравнения (1) мы вернемся в следующих работах.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad y(x_0) = A > 0. \tag{12}$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что для данного ε найдется такое число $A_0 = A_0(\varepsilon, x_0)$, что если $A \geqslant A_0$, то для решения $y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям (12), будет выполняться условие (3) при $x_0 < a_1 < x_0 + \varepsilon$.

Предположим обратное. Тогда возрастающая функция $y(x)$ будет определена при всех $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon$.

Без ограничения общности будем считать, что $p(x) \geqslant 1$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon$ (этого можно добиться преобразованием $y = cz$, $c = \mathrm{const} > 0$). Будем для удобства также считать, что $x_0 = 0$.

Из (12) получаем при $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ цепочку неравенств

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(x) \geqslant A^{\sigma}, && y \geqslant \frac{A^{\sigma}x^n}{n!} \geqslant \frac{A^{\sigma}x^n}{n^n}, \\ &y^{(n)}(x) \geqslant \frac{A^{\sigma^2}x^{n\sigma}}{n^{n\sigma}}, && y \geqslant \frac{A^{\sigma^2}x^{n(\sigma+1)}}{n^{n\sigma+n}(\sigma+1)^n}. \end{aligned}$$

Предполагая теперь, что

$$y \geqslant \frac{A^{\sigma^k}x^{n(\sigma^{k-1}+\dots+1)}}{n^{n(\sigma^{k-1}+\dots+1)}(\sigma+1)^{n\sigma^{k-2}}(\sigma^2+\sigma+1)^{n\sigma^{k-3}}\cdots(\sigma^{k-1}+\dots+1)^n},$$

нетрудно видеть, что

$$y \geqslant \frac{A^{\sigma^{k+1}}x^{n(\sigma^{k}+\dots+1)}}{n^{n(\sigma^{k}+\dots+1)}(\sigma+1)^{n\sigma^{k-1}}(\sigma^2+\sigma+1)^{n\sigma^{k-2}}\cdots(\sigma^{k}+\dots+1)^n}.$$

Отсюда следует, что

$$y \geqslant \frac{A^{\sigma^k}x^{n(\sigma^k-1)/(\sigma-1)}}{D^{\sigma^k}}, \qquad D = D(n,\sigma) > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Логарифмируя последнее неравенство при $x = \varepsilon$, получим

$$\ln y(\varepsilon) \geqslant \sigma^k\biggl(\ln\biggl(\frac{A}{D}\biggr) + \frac{n(\sigma^k-1)}{(\sigma-1)\sigma^k}\ln\varepsilon\biggr), \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{13}$$

Выберем теперь A_0 столь большим, чтобы

$$\ln\biggl(\frac{A_0}{D}\biggr) + \frac{n(\sigma^k-1)}{(\sigma-1)\sigma^k}\ln\varepsilon > 0.$$

Тогда при $A \geqslant A_0$ и $k \to \infty$ (13) приводит к противоречию.

Пусть дана произвольная точка a_1. Рассмотрим множество всех таких чисел A, при которых решения $y_A(x)$ уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$y_A^{(i)}(x_0) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad y_A(x_0) = A > 0, \tag{14}$$

определены на отрезке $[0, a_1]$. Это множество не пусто и согласно доказанному выше ограничено сверху. Пусть A_1 – точная верхняя грань этого множества. Докажем что решение $y_1(x)$ с начальными условиями (14), где $A = A_1$, будет удовлетворять условию (3). Ясно, что это решение не может быть продолжено при $x \geqslant a_1$, иначе это противоречило бы определению числа A_1.

Предположим теперь, что правая граница $\widetilde{a}$ области определения решения $y_1(x)$ меньше числа a_1. Обозначим $\varepsilon = (a_1 - \widetilde{a})/2$ и зафиксируем число $A_0(\varepsilon, \widetilde{a})$. Поскольку $\lim_{x \to \widetilde{a}} y_1(x) = +\infty$, можно выбрать такое $A_2 < A_1$, чтобы решение $y_{A_2}(\widetilde{a}) > A_0(\varepsilon, \widetilde{a})$. Но тогда в область определения решения $y_{A_2}(x)$ не может входить точка $a_1 > \widetilde{a} + \varepsilon$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Для доказательства теорем 2–5 докажем две леммы.

Лемма 1. *Решение $y = y(x)$ уравнения*

$$\begin{gathered} y^{(n)} = p(x)|y|^\sigma \operatorname{sgn} y, \qquad n \geqslant 2, \quad \sigma > 1, \\ p(x) \in C^0, \quad x, y \in \mathbb{R}^1, \qquad p(x) \geqslant c x^{-(n-1)\sigma - 1}, \quad x \geqslant x_0 > 0, \\ c = \mathrm{const} > 0, \end{gathered} \tag{15}$$

удовлетворяющее условиям $y(x) > 0$, $x \geqslant x_0$, $y^{(n-1)}(x_0) > 0$, является непродолжаемым вправо и удовлетворяет условию (3).

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{x}$ правую границу области определения рассматриваемого решения. Заметим, что если $\widetilde{x} < +\infty$, то $y(x)$ будет удовлетворять условию (3). Действительно, поскольку $y^{(n)}(x) > 0$, то $y^{(n-1)}(x)$ – возрастающая функция. Тогда если $\lim_{x \to \widetilde{x}-0} y^{(n-1)}(x) = D_1 < +\infty$, то $|y(x)| \leqslant D_2 < +\infty$ и, значит, $|y^{(n)}(x)| \leqslant D_3 < +\infty$ и, следовательно, при $x_0 \leqslant x < \widetilde{x}$

$$|y^{(i)}(x)| \leqslant D_4 < +\infty, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Но тогда точка $\widetilde{x}$ не может быть границей области определения решения. Следовательно, $\lim_{x \to \widetilde{x}-0} y^{(n-1)}(x) = +\infty$. Тогда вблизи точки $\widetilde{x}$ функция $y^{(n-2)}(x)$ будет возрастающей и аналогично вышеизложенному $\lim_{x \to \widetilde{x}-0} y^{(n-2)}(x) = +\infty$. Продолжая подобные рассуждения, приходим к выводу о том, что $\lim_{x \to \widetilde{x}-0} y^{(i)}(x) = +\infty$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, т.е. решение $y(x)$ удовлетворяет условию (3).

Пусть теперь $\widetilde{x} = +\infty$. Из условий $y(x) > 0$, $x \geqslant x_0$, $y^{(n-1)}(x_0) > 0$ следует, что при $x \geqslant x_0$ будет $y(x) > d x^{n-1}$, $d = \mathrm{const} > 0$. Подставляя это неравенство в (15) и интегрируя, получаем

$$y^{(n-1)}(x) \geqslant c d^\sigma \ln \frac{x}{x_0}, \qquad x \geqslant x_0. \tag{16}$$

Кроме того, без ограничения общности, будем считать, что $y^{(i)}(x) \geqslant 0$, $x \geqslant x_0$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и (делая при необходимости замену $y = c^{1-\sigma} z$) что в (15) $c = 1$.

Ниже нам потребуется неравенство

$$\int_a^x t^p \ln^q \frac{t}{a}\,dt \geqslant \frac{1}{1+p+q^2}\,x^{p+1}\ln^q \frac{x}{\widetilde{a}}\,, \qquad x \geqslant \widetilde{a} = a\sqrt[q]{e}, \quad a>0, \quad p\geqslant -1, \quad q\geqslant 1. \tag{17}$$

Справедливость данного неравенства следует из того, что в точке $\widetilde{a}$ разность функций, находящихся в его левой и правой части, положительна, в то время как разность их производных неотрицательна при $x \geqslant a\sqrt[q]{e}$.

Проведем индуктивное рассуждение. Предположим, что при $x \geqslant x_k > 0$ выполняется неравенство

$$y^{(n-1)}(x) \geqslant \frac{1}{c_k}\ln^{\omega_k}\frac{x}{x_k}\,, \qquad x \geqslant x_k \geqslant x_0, \quad c_k, \omega_k = \mathrm{const} \geqslant 1. \tag{18}$$

Интегрируя (18) $n-1$ раз и применяя (17), получаем

$$y(x) \geqslant \frac{1}{c_k(n-1+\omega_k^2)^{n-1}}\,x^{n-1}\ln^{\omega_k}\frac{x}{x_{k+1}}\,, \qquad x \geqslant x_{k+1} = x_k e^{(n-1)/\omega_k}.$$

Подставляя данное неравенство в уравнение (15) и интегрируя, получим

$$y^{(n-1)}(x) \geqslant \frac{1}{c_{k+1}}\ln^{\omega_{k+1}}\frac{x}{x_{k+1}}\,, \qquad x \geqslant x_{k+1} = x_k e^{(n-1)/\omega_k},$$
$$\omega_{k+1} = \omega_k\sigma + 1, \quad c_{k+1} = Ac_k^{\sigma}\sigma_1^k, \quad A = \left(\frac{2n\sigma}{(\sigma-1)^2}\right)^{n\sigma}, \quad \sigma_1 = \sigma^{2n\sigma}. \tag{19}$$

Учитывая, что $\omega_1 = 1$, $c_1 = d^{-\sigma}$, из доказанного следует

$$y^{(n-1)}(x) \geqslant \frac{1}{B^{\sigma^k}}\ln^{\beta_k}\frac{x}{\widetilde{x}_0}\,, \qquad x \geqslant \widetilde{x}_0,$$
$$B = B(n,\sigma,c_1) = \mathrm{const} > 0, \quad \beta_k = \frac{\sigma^k - 1}{\sigma - 1}\,, \quad \widetilde{x}_0 = \mu x_0, \quad \mu = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma-1}{\sigma^i - 1}\,.$$

Однако полученное неравенство приводит к противоречию при достаточно большом фиксированном x (например, при $\ln\ln(x/\widetilde{x}_0) > 2(\sigma-1)\ln B$) и $k\to\infty$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 легко получить следующее

Следствие. *Решение $y = y(x)$ уравнения* (15), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y^{(i)}(x_0) \geqslant 0, \quad x \geqslant x_0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(x_0) > 0,$$

является непродолжаемым вправо и удовлетворяет условию (3).

Данное утверждение очевидно следует из леммы 1, если заметить, что $y(x) > 0$ при $x > x_0$.

Лемма 2. *Если выполнено условие* $(-1)^n p(x) > 0$, *то уравнение* (1) *имеет продолжаемое вправо решение* $y(x)$ *такое, что при всех* $x_0 \leqslant x < +\infty$

$$(-1)^i y^{(i)}(x) > 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{20}$$

При этом, если выполнено (2), *то имеет место* (4) *и* (5), *а если выполнено условие*

$$|p(x)| \leqslant c x^{-n-\delta}, \qquad c, \delta = \mathrm{const} > 0, \quad x \geqslant x_0 > 0, \tag{21}$$

то

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = A, \qquad 0 < A < +\infty. \tag{22}$$

Доказательство. Будем ниже обозначать

$$z_{i+1}(x) = y^{(i)}(x), \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad z(x, z^0) = (y^{(0)}(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

где $y^{(0)}(x) = y(x)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $(y^{(0)}(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) = z^0$.

Для доказательства существования решений вида (20) воспользуемся идеей конструкции, изложенной в [5].

Рассмотрим в n-мерном пространстве точек $z = (z_1, \dots, z_n)$ область Ω, заданную следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} (-1)^{i+1} z_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i+1} z_i \leqslant 1. \end{cases}$$

Через $\partial\Omega$ будем обозначать границу Ω.

Рассмотрим решения уравнения (1) с начальными условиями $y^{(i-1)}(x_0) = z_i^0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in S$, где S – область, задаваемая системой

$$\begin{cases} (-1)^{i+1} z_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i+1} z_i = 1. \end{cases}$$

Обозначим также через S_1 область, определяемую следующей системой:

$$\begin{cases} (-1)^{i+1} z_i > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i+1} z_i = 1. \end{cases}$$

Докажем, что среди точек $z^0 \in S_1$ найдется такая, что при всех $x > x_0$ будет $z(x, z^0) \in \Omega \setminus \partial\Omega$, из чего следует справедливость (20). Предположим обратное. Это означает, что для каждой точки $z^0 \in S_1$ существуют такое единственное $x = x(z^0) > x_0$ и такое $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, что

$$z_{i_0}(x(z^0), z^0) = 0,$$
$$(-1)^{i+1} z_i(x(z^0), z^0) \geqslant 0, \quad (-1)^{i+1} z_i(x, z^0) > 0, \quad x_0 \leqslant x < x(z^0), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Для $z^0 \in \partial S$ положим $x(z^0) = x_0$. Здесь $\partial S = S \setminus S_1$ – граница S.

Введем отображение

$$H_1(z^0) = z(x(z^0), z^0), \qquad z^0 \in S.$$

Заметим также, что при $z^0 \in S_1$, $x_0 \leqslant x < x(z^0)$ функция

$$Q(z(x, z^0)) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i+1} z_i(x, z^0)$$

будет строго убывать и $0 < \mu(z^0) < 1$, где $\mu(z^0) = Q(z(x(z^0), z^0))$. Отметим также, что при $z^0 \in \partial S_1$ выполнено $\mu(z^0) = 1$.

Рассмотрим отображение

$$H_2 \colon S \to \partial S, \qquad H_2(z^0) = \frac{1}{\mu(z^0)} H_1(z^0), \quad z^0 \in S.$$

Отображение H_2 является непрерывным отображением, тождественным на ∂S. Но S гомеоморфно $(n-1)$-мерному шару V, а ∂S – его граничной сфере ∂V. Отображение H_2 индуцирует непрерывное отображение $H_3 \colon V \to \partial V$ тождественное на ∂V. Считая ноль центром V, зададим на ∂V отображение

$$H_4 \colon \nu \to -\nu, \qquad \nu \in \partial V.$$

Тогда отображение $H_4 H_3 \colon V \to \partial V$ будет непрерывным отображением шара V в себя без неподвижных точек, что противоречит известной теореме Брауэра. Полученное противоречие доказывает существование траектории, удовлетворяющей условию (20).

Покажем теперь, что при выполнении (2) для найденного решения имеет место условие (4). Ограничимся рассмотрением четного n. Если n – нечетное число, то рассуждение аналогично.

Очевидно, что если условие (4) не выполняется, то найдется такое число $0 \leqslant i_0 \leqslant n-2$, что

$$\lim_{x \to +\infty} y^{(i)}(x) = 0, \quad i_0 < i \leqslant n-1, \qquad y^{(i_0)}(x) \geqslant \widetilde{c} > 0, \quad \widetilde{c} = \mathrm{const} > 0, \quad x \geqslant x_1, \tag{23}$$

где $x_1 \geqslant x_0$ – некоторое число ($i_0 = n-1$ невозможно, так как это противоречит лемме 1).

Пусть сначала $i_0 > 0$. Тогда $\lim_{x \to +\infty} y^{(i_0-1)}(x) = +\infty$ и, следовательно, при больших x имеем $y^{(i_0)}(x) y^{(i_0-1)}(x) > 0$, что противоречит (20).

Пусть теперь в (23) $i_0 = 0$. Тогда последовательно получаем при больших x

$$(-1)^n y^{(n)}(x) \geqslant d_n x^{-n}, \quad \ldots, \quad y'(x) \leqslant -d_1 x^{-1}, \qquad d_i = \mathrm{const} > 0.$$

Из последнего неравенства следует, что при больших x будет $y(x) < 0$, что невозможно. Случай $i_0 = 0$ рассмотрен.

После замены $z(t) = y(-t)$ выполнение (5) очевидно вытекает из следствия леммы 1, поскольку уравнение (1) в результате приобретает вид

$$z^{(n)} = \frac{d^n z}{dt^n} = \widetilde{p}(t) |z|^\sigma \operatorname{sgn} z, \qquad \widetilde{p}(t) = (-1)^n p(-t) > 0$$

и из (20) получаем $z^{(i)}(-x_0) > 0$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ как при четном, так и при нечетном n.

Пусть теперь имеет место (21). При этом можно считать, что в (21) $c=1$ (делая при необходимости замену $y=zc^{1/(1-\sigma)}$). Опять ограничимся рассмотрением четного n. Если (22) не выполнено, то $\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$. Тогда для любого $0<\varepsilon<1$ при $x\geqslant x_1\geqslant 1$, где $x_1=x_1(\varepsilon)$ – некоторое число, будет $0<y(x)<\varepsilon$. Кроме того, также будет $\lim_{x\to+\infty} y^{(i)}(x)=0$, $1\leqslant i\leqslant n-1$. С учетом этого, интегрируя неравенство $y^{(n)}(x)\leqslant \varepsilon^{\sigma}x^{-n-\delta}$ n раз на промежутке $[x,+\infty)$ (где $x\geqslant x_1$), получим, что $y(x)<\varepsilon^{\sigma}x^{-\delta}\leqslant\varepsilon^{\sigma}$. Подставляя это неравенство в уравнение (1) и интегрируя, получим, что $y(x)<\varepsilon^{\sigma^2}$ при $x\geqslant x_1$. Продолжая это рассуждение, получим, что $0<y(x_1)<\varepsilon^{\sigma^k}$, где $\lim_{k\to+\infty}\varepsilon^{\sigma^k}=0$, откуда следует, что $y(x_1)=0$, что невозможно. Лемма 2 доказана.

Близкие к леммам 1 и 2 утверждения содержатся в [3].

Доказательство теоремы 2. Существование решений, удовлетворяющих (3), и решений, удовлетворяющих (4) и (5), при выполнении условия (2) установлено, соответственно, теоремой 1 и леммой 2. Остается показать, что при четном n уравнение (1) при выполнении условия (2) и $p(x)>0$ не имеет других решений, сохраняющих знак при $x\geqslant x_0$. Ясно, что можно ограничиться рассмотрением положительных решений (делая при необходимости замену $y=-z$). Пусть при $x\geqslant x_0$ выполнено $y(x)>0$. Обозначим через $\widetilde{x}$ правую границу области определения этого решения. Как и в начале доказательства леммы 1, показывается, что если $\widetilde{x}<+\infty$, то $y(x)$ будет удовлетворять условию (3).

Рассмотрим теперь положительное решение $y(x)$, определенное при $x_0\leqslant x<+\infty$. Поскольку $y^{(n)}(x)>0$, то $y^{(n-1)}(x)$ – возрастающая функция. Тогда выполнено $\lim_{x\to+\infty}y^{(n-1)}(x)=0$ и $y^{(n-1)}(x)<0$, так как в противном случае либо нарушится условие положительности $y(x)$, либо (если $\lim_{x\to+\infty}y^{(n-1)}(x)>0$) при больших x все $y^{(i)}(x)>0$, $0\leqslant i\leqslant n-1$ и решение будет удовлетворять (3) согласно лемме 1. Рассматривая функции $y^{(i)}(x)$, $0\leqslant i\leqslant n-1$, приходим к выводу о том, что либо будет выполнено (4) (а значит и (5), как это было показано в доказательстве леммы 2), либо найдется такое число $0\leqslant i_0\leqslant n-2$, что

$$\lim_{x\to+\infty}y^{(i)}(x)=0,\quad i_0<i\leqslant n-1,\qquad y^{(i_0)}(x)\geqslant\widetilde{c}>0,$$
$$\widetilde{c}=\mathrm{const}>0,\quad x\geqslant x_1\geqslant x_0. \tag{24}$$

Пусть сначала $i_0>0$. Тогда при больших x будет $y(x)\geqslant c_1x^{i_0}$, $c_1=\mathrm{const}>0$. Отсюда получаем $y^{(n)}(x)\geqslant c_2x^{i_0\sigma-n}$, $c_2=\mathrm{const}>0$. Интегрируя данное неравенство на промежутке $[x,+\infty)$ и учитывая (24), получим $y^{(i_0)}(x)\geqslant c_3x^{i_0(\sigma-1)}$, $c_3=\mathrm{const}>0$, откуда при больших x будет $y(x)\geqslant c_4x^{i_0\sigma}$, $c_4=\mathrm{const}>0$. Продолжая данное рассуждение, получим, что при больших x выполняется неравенство

$$y^{(n)}(x)\geqslant c_5x^{i_0\sigma^k-n},\qquad c_5=\mathrm{const}>0, \tag{25}$$

где $k>0$ – произвольное целое число. Однако это невозможно, так как при $i_0\sigma^k>n-1$ из (25) будет следовать, что при больших x выполнено $y^{(n-1)}(x)>0$, и согласно лемме 1 решение будет удовлетворять условию (3).

Если $i_0=0$, то, поскольку $y(x)\geqslant\widetilde{c}>0$, последовательно получаем при больших x

$$y^{(n)}(x)\geqslant c_nx^{-n},\quad \dots,\quad y'(x)\leqslant -c_1x^{-1},\qquad c_i=\mathrm{const}>0.$$

Но из последнего неравенства следует, что $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$, что противоречит условию $y(x) \geqslant \widetilde{c} > 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Существование непродолжаемых решений, удовлетворяющих (3), доказано в теореме 1. Покажем, что уравнение (1) других сохраняющих знак при $x \geqslant x_0$ решений при выполнении условия (2), положительном коэффициенте $p(x)$ и нечетном n не имеет. Предположим обратное. Пусть $y(x)$ – положительное при $x \geqslant x_0$ решение, не удовлетворяющее условию (3). Тогда имеем $y^{(n)}(x) > 0$ и, следовательно, $y^{(n-1)}(x)$ – возрастающая функция. Как и при доказательстве леммы 1, устанавливается, что анализируемое решение определено при $x_0 \leqslant x < +\infty$. Ясно, что $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = 0$; в противном случае либо нарушится условие положительности, либо, согласно лемме 1, решение будет удовлетворять (3). Следовательно $y^{(n-1)}(x) < 0$. Рассматривая функции $y^{(i)}(x)$, $0 \leqslant i < n-1$, как и при доказательстве теоремы 2 приходим к выводу о том, что либо $(-1)^{i+1}y^{(i)}(x) > 0$, $0 \leqslant i \leqslant n$, что противоречит положительности $y(x)$, либо найдется такое число i_0, $0 \leqslant i_0 \leqslant n-2$, что

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(i)}(x) = 0, \quad i_0 < i \leqslant n-1, \qquad y^{(i_0)}(x) \geqslant \widetilde{c} > 0, \quad \widetilde{c} = \mathrm{const} > 0, \quad x \geqslant x_0.$$

Если $i_0 > 0$, то рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2, приводят к выводу о том, что анализируемое решение удовлетворяет условию (3).

Рассмотрим теперь случай $i_0 = 0$. Поскольку $y(x) \geqslant \widetilde{c} > 0$, то $y^{(n)}(x) \geqslant c\widetilde{c}^{\sigma}x^{-n}$; следовательно,

$$y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x_1) \geqslant \frac{c\widetilde{c}^{\sigma}}{n-1}(x_1^{-n+1} - x^{-n+1}), \qquad x \geqslant x_1 \geqslant x_0.$$

Устремляя x к $+\infty$, получаем

$$y^{(n-1)}(x_1) \leqslant \frac{-c\widetilde{c}^{\sigma}}{n-1}x_1^{-n+1}$$

при $x_1 \geqslant x_0$. Продолжая это рассуждение, приходим к оценке

$$y'(x) \geqslant \frac{c\widetilde{c}^{\sigma}}{(n-1)!}x^{-1}, \qquad x \geqslant x_0,$$

откуда следует

$$y(x) \geqslant \frac{c\widetilde{c}^{\sigma}}{n^n}\ln\frac{x}{x_0}, \qquad x \geqslant x_0.$$

Проведем индуктивное рассуждение.

Предположим, что

$$y(x) \geqslant \frac{1}{c_k}\ln^{\omega_k}\frac{x}{x_0}, \qquad x \geqslant x_0, \quad c_k, \omega_k > 0. \tag{26}$$

Следовательно,

$$y^{(n)}(x) \geqslant \frac{1}{c_k^{\sigma}x^n}\ln^{\sigma\omega_k}\frac{x}{x_0}, \qquad x \geqslant x_0.$$

Отсюда, как выше, последовательно интегрируя, получим

$$y(x) \geqslant \frac{1}{c_k^\sigma n^n(\sigma\omega_k+1)} \ln^{\sigma\omega_k+1}\frac{x}{x_0}, \qquad x \geqslant x_0.$$

Таким образом, оценка (26) доказана при всех целых $k > 0$, где

$$\omega_{k+1} = \sigma\omega_k + 1, \quad c_{k+1} = c_k^\sigma n^n(\sigma\omega_k+1), \qquad \omega_1 = 1, \quad c_1 = (c\widetilde{c}^\sigma n^{-n})^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$\omega_k = \frac{\sigma^k - 1}{\sigma - 1}, \qquad 0 < c_k \leqslant D^{\sigma^k}, \quad D = D(n,\sigma) = \mathrm{const} > 1.$$

Следовательно, из (26) имеем оценку

$$\ln y(x) \geqslant \frac{\sigma^k - 1}{\sigma - 1}\ln\ln\frac{x}{x_0} - \sigma^k \ln D, \qquad x \geqslant x_0, \quad k \geqslant 1.$$

Отсюда при достаточно большом фиксированном x (например, при $\ln x > \ln x_0 + D^\sigma$) и $k \to +\infty$ получаем, что $\ln y(x) = +\infty$. Данное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Покажем, что любое решение уравнения (1) при выполнении условия (2), отрицательном коэффициенте $p(x)$ и четном n является осциллирующим как вправо, так и влево. Ясно, что достаточно доказать осцилляцию вправо, так как замена $x = -t$ не меняет вида уравнения вследствие четности n.

Предположим, что при $x \geqslant x_0$ решение $y(x)$ сохраняет знак при $x_0 \leqslant x < \widetilde{x}$, где $\widetilde{x} \leqslant +\infty$ – правая граница области определения решения. Пусть для определенности $y(x) > 0$ (в противном случае можно сделать замену $y = -z$). Покажем прежде всего, что $\widetilde{x} = +\infty$. Предположим обратное, что $\widetilde{x} < +\infty$. Поскольку $y^{(n)}(x) < 0$, то $y^{(n-1)}(x)$ – убывающая функция. Если $\lim_{x\to\widetilde{x}-0} y^{(n-1)}(x) > -\infty$, то получаем, что при $x_0 \leqslant x < \widetilde{x}$ имеем $|y(x)| \leqslant D < +\infty$; следовательно, $|y^{(n)}(x)| \leqslant D_1 < +\infty$ и $|y^{(i)}(x)| \leqslant D_1 < +\infty$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Но тогда точка $\widetilde{x}$ не может быть границей области определения решения. Если же $\lim_{x\to\widetilde{x}-0} y^{(n-1)}(x) = -\infty$, то вблизи точки $\widetilde{x}$ имеем $y^{(n-2)}(x)$ будет убывающей функцией. Рассуждая, как выше, получаем, что в этом случае $\lim_{x\to\widetilde{x}-0} y^{(n-2)}(x) = -\infty$. Продолжая рассуждения подобным образом, приходим к выводу о том, что $\lim_{x\to\widetilde{x}-0} y^{(i)}(x) = -\infty$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, что противоречит положительности решения $y(x)$. Итак, доказано, что сохраняющее знак решение должно быть определено при всех x, $x_0 \leqslant x < +\infty$. Теперь покажем, что таких решений нет.

Поскольку $y^{(n-1)}(x)$ – убывающая функция, то либо $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = 0$, либо $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = c_1 > 0$ (отрицательным указанный предел быть не может, так как в этом случае рассматриваемое решение при больших x станет отрицательным). Если указанный предел больше нуля, то при больших x выполнено $y(x) \geqslant c_2 x^{n-1}$, $c_2 > 0$. Но тогда из (2) получаем, что $y^{(n)}(x) < -c_3 x^{(n-1)\sigma-n}$, $c_3 > 0$. Интегрируя последнее неравенство (учитывая, что $(n-1)\sigma - n > -1$), получаем, что $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = -\infty$. Это противоречит нашему допущению о положительности решения. Итак, доказано, что $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = 0$. Тогда при $x_0 \leqslant x < +\infty$

имеем $y^{(n-1)}(x) > 0$ и, следовательно, функция $y^{(n-2)}(x)$ является возрастающей. Но тогда выполнено либо $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-2)}(x) = 0$, либо $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-2)}(x) = c_2 > 0$. Продолжая данное рассуждение, приходим к выводу о том, что либо

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(i)}(x) = 0, \qquad (-1)^{i+1} y^{(i)}(x) > 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{27}$$

либо при некотором $0 \leqslant i_0 \leqslant n-2$

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(i)}(x) = 0, \quad i_0 < i \leqslant n-1, \qquad \lim_{x\to+\infty} y^{(i_0)}(x) > 0. \tag{28}$$

Но (27) невозможно при $i = 0$, так как это противоречит положительности $y(x)$. Следовательно, имеет место (28). Покажем, что и это невозможно.

Пусть сначала $i_0 > 0$. Тогда при больших x будет $y(x) \geqslant c_3 x^{i_0}$, $c_3 = \mathrm{const} > 0$. Отсюда получаем $y^{(n)}(x) \leqslant -c_4 x^{i_0\sigma - n}$, $c_4 = \mathrm{const} > 0$. Интегрируя данное неравенство на промежутке $[x, +\infty)$ и учитывая (28), получим $y^{(i_0)}(x) \geqslant c_5 x^{i_0(\sigma-1)}$, $c_5 = \mathrm{const} > 0$, откуда при больших x будет $y(x) \geqslant c_6 x^{i_0\sigma}$, $c_6 = \mathrm{const} > 0$. Продолжая данное рассуждение, получим, что при больших x выполняется неравенство

$$y^{(n)}(x) \leqslant -\widetilde{c}_k x^{i_0\sigma^k - n}, \qquad \widetilde{c}_k = \mathrm{const} > 0, \tag{29}$$

где $k > 0$ – произвольное целое число.

Однако это невозможно, так как при $i_0\sigma^k > n-1$ из (29) будет следовать, что $\lim_{x\to+\infty} y^{(n-1)}(x) = -\infty$, что противоречит (28).

Рассмотрим теперь случай $i_0 = 0$. Поскольку $y(x) \geqslant \widetilde{c} > 0$, то $y^{(n)}(x) \leqslant -c\widetilde{c}^{\sigma} x^{-n}$; следовательно,

$$y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x_1) \leqslant \frac{-c\widetilde{c}^{\sigma}}{n-1}(x_1^{-n+1} - x^{-n+1}), \qquad x \geqslant x_1 \geqslant x_0.$$

Устремляя x к $+\infty$, получаем

$$y^{(n-1)}(x_1) \geqslant \frac{c\widetilde{c}^{\sigma}}{n-1}\, x_1^{-n+1}$$

при $x_1 \geqslant x_0$. Продолжая это рассуждение, приходим к оценке

$$y'(x) \geqslant \frac{c\widetilde{c}^{\sigma}}{(n-1)!}\, x^{-1}, \qquad x \geqslant x_0,$$

откуда следует

$$y(x) \geqslant \frac{c\widetilde{c}^{\sigma}}{n^n} \ln\frac{x}{x_0}, \qquad x \geqslant x_0.$$

Рассуждая далее, как и при доказательстве теоремы 3, получаем оценку

$$\ln y(x) \geqslant \frac{\sigma^k - 1}{\sigma - 1} \ln\ln\frac{x}{x_0} - \sigma^k \ln D, \qquad x \geqslant x_0, \quad k \geqslant 1,$$
$$D = D(n,\sigma) = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда при достаточно большом фиксированном x и $k \to +\infty$ получаем, что выражение в правой части неравенства стремится к $+\infty$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что при выполнении условий теоремы уравнение (1) не имеет неосциллирующих решений. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Существование решений требуемого вида доказано в лемме 2. Покажем, что любое знакопостоянное решение уравнения (1) при выполнении условий теоремы удовлетворяет (4) и (5).

Предположим, что при $x \geqslant x_0$ решение $y(x)$ сохраняет знак при $x_0 \leqslant x < \widetilde{x}$, где $\widetilde{x} \leqslant +\infty$ – правая граница области определения решения. Рассуждение, использованное в начале доказательства теоремы 4, показывает, что $\widetilde{x} = +\infty$.

Пусть $y(x) > 0$. Рассуждая, как и при доказательстве предыдущей теоремы, приходим к выводу, что для данного решения будут либо выполняться условия

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(i)}(x) = 0, \quad i_0 < i \leqslant n-1, \qquad \lim_{x\to+\infty} y^{(i_0)}(x) > 0 \tag{30}$$

при некотором $0 \leqslant i_0 \leqslant n-2$ и $x \geqslant x_0$, либо

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(i)}(x) = 0, \qquad (-1)^i y^{(i)}(x) > 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \quad x \geqslant x_0. \tag{31}$$

Но (30) невозможно, что доказывается так же, как и невозможность (28) в предыдущей теореме. Следовательно, имеет место (31), и условие (4) доказано. Сделаем теперь замену $\widetilde{y}(t) = y(-t)$. Поскольку n нечетно, уравнение для $\widetilde{y}(t)$ будет иметь вид

$$\frac{d^n\widetilde{y}}{dt^n} = \widetilde{p}(t)|\widetilde{y}|^\sigma \operatorname{sgn}\widetilde{y}, \qquad \widetilde{p}(t) = -p(-t) > 0.$$

Но к решению $\widetilde{y}(t)$ данного уравнения применимо следствие леммы 1, так как из (31) следует, что $d^i\widetilde{y}/dt^i > 0$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, при $t = -x_0$, что доказывает выполнение условия (5). Теорема 5 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения вопросов, связанных с проблематикой данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1954.

[2] В. А. Кондратьев, В. С. Самовол, “О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера”, *Дифференц. уравнения*, **17**:4 (1981), 749–750.

[3] И. Т. Кигурадзе, Т. Ф. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1990.

[4] И. Т. Кигурадзе, “О колеблемости решений уравнения $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$”, *Матем. сб.*, **65**:2 (1964), 172–187.

[5] И. В. Асташова, *Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа*, ЮНИТИ-ДАНА, М., 2012.

[6] А. Д. Брюно, *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях*, Наука, М., 1998.

[7] А. Д. Брюно, “Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения”, *УМН*, **59**:3 (2004), 31–80.

В. С. Самовол
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Москва
E-mail: 555svs@mail.ru

Поступило
28.05.2013