М.А.Гогулин, В.М.Четвериков

Модель ценовой конкуренции на рынке однородного товара

Известно, что классическая модель ценовой конкуренции Бертрана [1] при гомогенной олигополии приводит к тому, что фирмы (продавцы) вынуждены опустить цены до уровня предельных издержек (если они одинаковы). Другими словами, в модели заложено предпочтение всех покупателей приобретать товар только по минимальной цене.

В модели, предлагаемой в данной статье, предпочтения покупателей не столь жестко привязаны к минимальной цене, как в модели Бертрана, а общий объем рынка определяется максимальной ценой предложения. Мы ограничились подробным рассмотрением конкуренции двух фирм (дуополии), хотя основные формулы написаны для общего случая конкуренции n фирм.

Если объем рынка в целом не изменяется при снижении конкурирующими фирмами цен, исходя из желания получить большую долю фиксированного рынка, то модель приводит к существованию точки ценового равновесия по Нэшу.

Однако если объем рынка растет при уменьшении максимальной цены предложения, то, начиная с определенной «скорости» этого роста, вместо равновесной цены мы получаем непрерывное множество равновесных цен. При определенном соотношении параметров модели это множество может содержать даже квазимонопольную цену, т.е. цену, которая является выгодной для всех фирм в целом при единой ценовой политике.

Несмотря на то, что при исследовании предлагаемой модели находятся цены, равновесные по Нэшу, модель не является моделью теории игр, поскольку в ней не заложен механизм игры – правил, по которым участники игры могут принимать решения. Наш подход имеет простую аналогию с щироко используемым во многих работах поиском таких конфигураций взаимодействующих физических подсистем, которые имеют минимальную энергию. Однако, в отличие от этих работ, в которых механизм и скорость достижения этих конфигураций не рассматривается, мы описываем и динамику процесса.

Принято считать [2], что цены влияют на объемы продаж сильнее, чем все остальные инструменты маркетинга. Однако ценовая конкуренция может дать положительный выигрыш лишь при определенных условиях.

Рассмотрим n фирм, продающих на рынке один и тот же товар (или товары, схожие функционально, но несколько отличающиеся по своим характеристикам) по разным ценам. Предположим, что предельные издержки каждой i -ой фирмы постоянны и равны c_i, а объем продаж q_i определяется как ценой продаж $p - d_i$ i-ой фирмы, так и ценами всех конкурентов $p - d_k, \quad k \neq i$. Используемая запись цены в виде разности двух положительных величин позволяет интерпретировать цену как разность некоторой базовой цены $p \quad (p > c_i \quad \forall i)$, одинаковой для всех фирм и торговых скидок $d_i \geq 0$, которую фирмы определяют из конкурентных соображений.

Задачей фирмы является определение такой торговой скидки, которая приводит к максимуму прибыли

$$\pi_i = (p - c_i - d_i) \cdot q_i.$$

1. **Динамическая модель установления рынка**

В этом разделе приводится модель рынка, из которой будут получены объемы продаж q_i в условиях ценовой конкуренции.

Динамика продаж q_i определяется теми «усилиями» $\mu_i \geq 0$, которые прилагают фирмы для привлечения покупателей. Это могут быть рекламные затраты, дисконтные программы, различные бонусы и другие мероприятия по продвижению товара. В конечном итоге именно дифференциация продукта в сознании покупателя определяет предпочтение покупателя одного продукта другому [3, 4].

Кроме того, у каждой фирмы есть (помимо «усилий» μ_i) и какая-то своя доля рынка κ_i (конечно $\kappa_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \kappa_i = 1$), – определяемая симпатиями покупателей или удобным месторасположением торговых точек; эти доли считаются постоянными.

Для описания динамики рынка мы воспользуемся моделью конкурентного маркетинга [5,6], имеющей большое сходство с моделью Ланчестера (Lanchester) для описания военных действий [7,8].

$$\frac{d}{dt}q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + Q \cdot \nu \cdot \kappa_i, \tag{1.1}$$

где

$$a_{ij} = \begin{cases} -(\nu + \mu - \mu_i) & при \quad j = i, \\ \mu_i & при \quad j \neq i \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \qquad Q > 0, \quad \nu > 0. \tag{1.3}$$

Как будет видно далее, параметр Q (предполагаемый постоянным) – это объем рынка в предельном установившемся режиме, а параметр ν имеет смысл обратного времени установления равновесия в системе (1.1) при «включении» постоянных μ_i.

Матрица a_{ij} является матрицей простой структуры и имеет n линейно независимых собственных векторов u_k $(k = 1, 2, ..., n)$, несмотря на существование лишь двух собственных значений

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\nu \quad кратности \quad 1, \\ \lambda_2 &= -(\mu + \nu) \quad кратности \quad n-1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Собственный вектор u_1, соответствующий λ_1, имеет компоненты $u_{1i} = \mu_i$, а собственные векторы u_k (k=2,…, n), соответствующие кратному собственному значению λ_2, могут быть выбраны, например, в виде

$$u_{ki} = \begin{cases} 1 \ \ для \ \ i = k-1 \\ -1 \ \ для \ \ i = n \\ \quad 0 \ \ для \ всех \ остальных \ i \end{cases} \qquad k = 2, 3, ..., n \quad .$$

Простота структуры матрицы a_{ij} обеспечивает возможность представления общего решения задачи Коши для системы (1.1) в виде

$$q_i(t) = \overline{q}_i + \sum_{k=2}^{n} A_k \cdot u_{ki} \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + A_1 \cdot u_{1i} \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t), \tag{1.5}$$

где константы A_k определяются начальными условиями $q_i(0) = q_i^0$, а стационарное решение:

$$\overline{q}_i = Q \cdot (\mu_i + \kappa_i \cdot \nu) \cdot (\mu + \nu)^{-1}. \tag{1.6}$$

Заметим, что, как и следовало ожидать из вида системы (1.1), суммарный объем продаж $Q(t)$ подчиняется уравнению

$$\frac{d}{dt}Q(t) = -\nu \cdot Q(t) + Q \cdot \nu, \quad Q(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \quad . \tag{1.7}$$

Таким образом, система (1.1) описывает такое поведение потребителей, которое после «включения» постоянных «усилий» μ_i со стороны фирм приводит к стационарному распределению (1.6) объемов продаж по фирмам за характерное время $\approx \nu^{-1}$. Установление почти равновесного соотношения между объемами продаж фирм произойдет быстрее, поскольку согласно формулам (1.4)-(1.5), из двух экспонент быстрее затухает $\exp(\lambda_2 \cdot t)$ и асимптотика решения системы (1.1) на больших временах будет иметь вид:

$$q_i = \frac{Q}{\mu + \nu} \cdot \{\mu_i \cdot [1 + B \cdot \exp(-\nu \cdot t)] + \kappa_i \cdot \nu\}, \textit{ где } B = \frac{\mu + \nu}{\mu} \cdot \sum_{j=1}^{n} (q_j^0 - \overline{q}_j).$$

Чаще всего в подобных моделях характерные «усилия» фирм представляются в виде

$$\mu_i = \beta_i \cdot x_i^{\alpha_i}, \tag{1.8}$$

где x_i – финансовые затраты фирмы, на которые реагируют потребители, β_i и α_i – положительные эмпирические коэффициенты. При этом стационарное распределение объемов продаж (1.6) будет выпуклым вверх по x_i при $0 \le \alpha_i \le 1 \quad \forall i$ или иметь S-образную форму при $\alpha_i > 1 \quad \forall i$.

В данной работе мы будем считать $\alpha_i = 1 \quad \forall i$, а в качестве финансовых затрат, на которые реагируют потребители, будет фигурировать торговая скидка (дисконт) $x_i = d_i$. Кроме того, мы будем предполагать, что переходные процессы установления объемов продаж протекают гораздо быстрее возможных изменений дисконтов фирмами. Поэтому в качестве q_i будем брать стационарное распределение (1.6).

Наши вычисления существенно упростятся, если считать

$$\kappa_i \cdot \nu << \beta_i \cdot d_i \tag{1.9}$$

и пренебречь членами, содержащими k_i. Такое пренебрежение может привести к необходимости пересмотра стратегий фирм при малых дисконтах; этот случай в данной работе не рассматривается, поэтому мы в пространстве дисконтов d малую окрестность начала координат.

Общий объем продаж Q зависит не только от начальной цены p, но и от величин торговых скидок d_i. Т.к. мы уже предположили, что в распределении объемов продаж между фирмами отражается соотношение между скидками различных фирм, то на величину общего объема продаж должна действовать некоторая интегральная величина, характеризующие все скидки. Поскольку потребители не склонны производить серьезный количественный анализ цен на рынке (вряд ли им доступен анализ средневзвешенной по объемам продаж цены, о чем упоминается в Приложении 2), то такой интегральной величиной может служить, например, минимальная величина d_i, которая характеризует максимальную цену предложения среди конкурирующих фирм.

Будем предполагать, что уменьшение максимальной цены сопровождается увеличением общего объема продаж (подробнее см. Приложение 1). Другими словами, введем в нашу модель предположение о возможной связи дисконтов с общим объемом продаж следующего вида:

$$Q = Q_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \min_j d_j), \qquad \gamma \geq 0, \qquad Q_0 > 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, общая модель ценовой конкуренции ссостоит в следующем: фирмы стремятся установить такие торговые скидки для своих покупателей, которые, с учетом аналогичных действий конкурентов, максимизируют получаемую прибыль

$$\pi_i = (p - c_i - d_i) \cdot q_i, \quad p > 0, \quad c_i > 0, \quad d_i > 0, \quad i = 1,2,...,n \tag{A}$$

$$q_i = Q_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \min_j d_j) \cdot (\beta_i \cdot d_i) \cdot (\sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot d_j)^{-1}, \gamma \geq 0, Q_0 > 0 \tag{B}$$

2. **Конкуренция двух одинаковых фирм**

Рассмотрим вначале простой симметрический случай: две фирмы имеют одинаковые издержки $c_1 = c_2 = c$ и одинаковое отношение потребителей $\beta_1 = \beta_2$. В этом случае, согласно формулам (A) и (B) прибыль i-ой фирмы в зависимости от торговых скидок d_1, d_2 имеет вид

$$\pi_i = (p - c - d_i) \cdot d_i \cdot (d_1 + d_2)^{-1} \cdot Q_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \min(d_1, d_2)), \quad i = 1, 2 \tag{2.1}$$

В плоскости (d_1, d_2) кривая f_1 наилучшего отклика первой фирмы на величину скидки второй определяется вне диагонали $d_1 = d_2$, где производная $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial d_1}$ непрерывна, условием $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial d_1} = 0$. В этих областях кривая описывается двумя отдельными непрерывными функциями,

В области $d_2 < d_1$ (ниже диагонали)

$$d_2 = d_1^2 \cdot (p - c - 2 \cdot d_1)^{-1} \tag{2.2}$$

при $d_1 \in (0, d_1^*]$, где

$$d_1^* = 3^{-1} \cdot (p - c), \tag{2.3}$$

что определяется пересечением кривой (2.2) с диагональю.

В области $d_2 > d_1$ (выше диагонали) кривая наилучшего отклика описывается формулой

$$d_2 = d_1^2 \cdot (1 - \gamma \cdot (p - c) - 2 \cdot \gamma \cdot d_1) \cdot [p - c - 2 \cdot d_1 \cdot (1 - \gamma \cdot (p - c)) - 3 \cdot \gamma \cdot d_1^2]^{-1} \tag{2.4}$$

при $d_1 \in [d_1^{**}, \breve{d}_1)$, где число $\breve{d}_1$ является положительным корнем квадратной скобки в формуле (2.4), а $d_1^{**} > 0$ определяется точкой пересечения кривой (2.4) с диагональю, т.е. является положительным корнем уравнения:

$$5 \cdot \gamma \cdot d^2 + 3 \cdot d \cdot (1 - \gamma \cdot (p - c)) - (p - c) = 0, \tag{2.5}$$

который равен

$$d^{**} = (p - c) \cdot \{\sqrt{9 \cdot (1 - \kappa)^2 + 20 \cdot \kappa} - 3 \cdot (1 - \kappa)\} \cdot (10 \cdot \kappa)^{-1}, \quad \gamma = \kappa \cdot (p - c)^{-1} \;. \tag{2.6}$$

Заметим, что если величину γ считать изменяемым параметром, то

$$\lim_{\gamma \to 0} d_1^{**} = d_1^*, \quad \lim_{\gamma \to \infty} d_1^{**} = \frac{3}{5} \cdot (p - c)$$

$$\lim_{\gamma \to 0} \breve{d}_1 = \frac{p - c}{2}, \quad \lim_{\gamma \to \infty} \breve{d}_1 = \frac{2}{3} \cdot (p - c) \;.$$

В области $d_1 \in (d_1^*, d_1^{**})$ производная $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial d_1}$ терпит скачок на диагонали, причем знак этой производной выше и ниже диагонали определяется равенством $sign \dfrac{\partial \pi_1}{\partial d_1} = sign(d_2 - d_1)$, как это и показано на Рис. 1 стрелками.

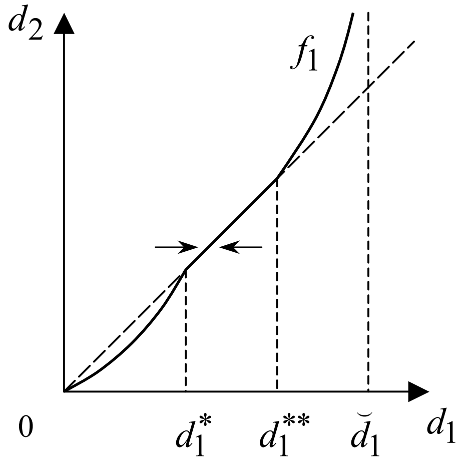

Рис. 1. Кривая наилучшего отклика d_1 первой фирмы на торговые скидки d_2 второй фирмы.

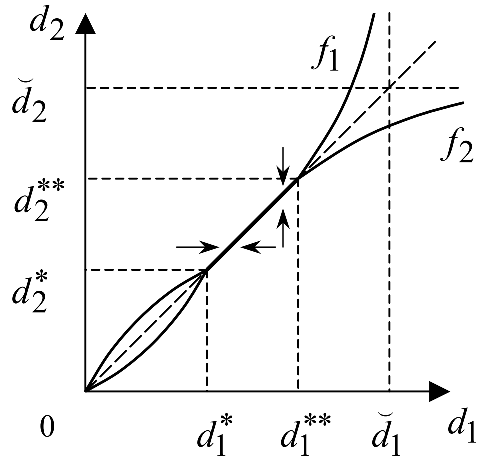

Рис. 2. Кривые наилучшего отклика для первой и второй фирм в симметричном случае.

Если рассмотреть вторую фирму, то в силу симметрии кривая ее наилучшего отклика будет симметрична относительно биссектрисы кривой наилучшего отклика первой фирмы; поэтому объединенная картина двух этих кривых будет выглядеть так, как показано на Рис. 2.

Отрезок диагонали между точками (d_1^*, d_2^*) и (d_1^{**}, d_2^{**}) является общим для этих кривых и представляет собой непрерывное множество точек равновесия Нэша.

Мы отнюдь не предполагаем (по крайней мере в рамках данной модели), что существует действенный механизм, заставляющий фирмы обязательно стремиться к одной из точек равновесия Нэша. По-видимому, в реальности, существование подобной *притягивающей* точки равновесия делает более вероятным выполнение договоренностей (в рамках коалиционной игры), если они касаются поддержания торговых скидок в размерах, определяемых этой точкой. И можно сказать, что в рассматриваемой модели множество торговых скидок, «доступных для переговоров», шире, чем в случае одной точки равновесия. Для приведенного симметричного случая нетрудно определить (из условия максимума прибыли) притягивающую точку из найденного непрерывного множества. Эта возможность становится не столь очевидной для несимметричного случая.

Ответим еще на один вопрос. Возможна ли ситуация, при которой непрерывное множество точек равновесия Нэша в пространстве торговых скидок содержит такую точку (*квазимонополия*), в которой суммарная прибыль двух фирм будет иметь максимальную величину? Для рассматриваемого симметричного случая положительный ответ на этот вопрос следует из следующих простых вычислений.

Как показано в Приложении 1, в общем случае это возможно лишь при $\gamma > (\overline{p-c})^{-1}$. В симметричном случае $\overline{p-c} = p-c$ и согласно (П.5)

$$\tilde{d} = 2^{-1} \cdot (p-c) \cdot (1-k^{-1}), \quad \gamma = k \cdot (p-c)^{-1} \quad . \tag{2.7}$$

При положительном ответе на поставленный вопрос должно существовать такое значение $k > 0$, при котором

$$d^* \le \tilde{d} < d^{**}, \tag{2.8}$$

где d^* определяется формулой (2.3), а d^{**} – формулой (2.6). Нетрудно показать, что неравенство (2.8) выполняются при $k \ge 3$.

3. **Конкуренция двух различных фирм**

Если $c_1 \ne c_2$ и $\beta_1 \ne \beta_2$, то рассмотренная в разделе 2 симметрия нарушается. Для удобства дальнейшего описания введем обозначения

$$a = (p-c_2) \cdot (p-c_1)^{-1}, \quad \beta = \beta_2 \cdot \beta_1^{-1} \tag{3.1}$$

В этих обозначениях формулы (A), (B) для прибыли принимают вид:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (p-c_1-d_1) \cdot \frac{d_1}{d_1+\beta \cdot d_2} \cdot Q_0 \cdot [1+\gamma \cdot \min(d_1, d_2)], \\ \pi_2 &= ((p-c_1) \cdot a - d_2) \cdot \frac{\beta \cdot d_2}{d_1+\beta \cdot d_2} \cdot Q_0 \cdot [1+\gamma \cdot \min(d_1, d_2)]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Пусть при $\gamma = 0$ (в отсутствии роста рынка в целом), кривые наилучшего первой (f_1) и второй (f_2) фирм пересекаются в области $d_2 < d_1$ в точке (d_1^0, d_2^0) (см. Рис. 3).

При $\gamma = 0$ кривая f_1 определяется условием

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial d_1} = 0 \Rightarrow \quad d_2 = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d_1^2}{p-c_1-2 \cdot d_1} \quad , \tag{3.3}$$

а кривая f_2 – условием

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial d_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 = \beta \cdot \frac{d_2^2}{(p - c_1) \cdot a - 2 \cdot d_2} \qquad . \tag{3.4}$$

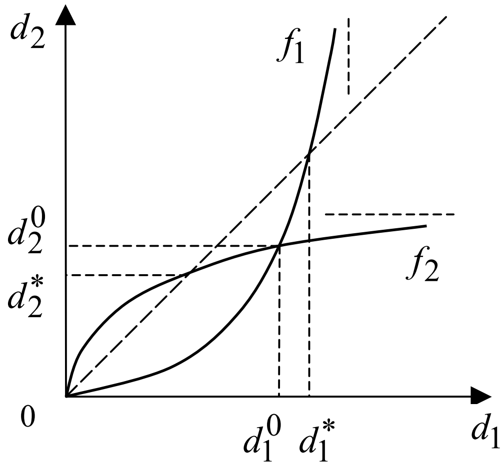

Рис. 3. Кривые наилучшего отклика для двух фирм при $\gamma = 0$ в несимметричном случае.

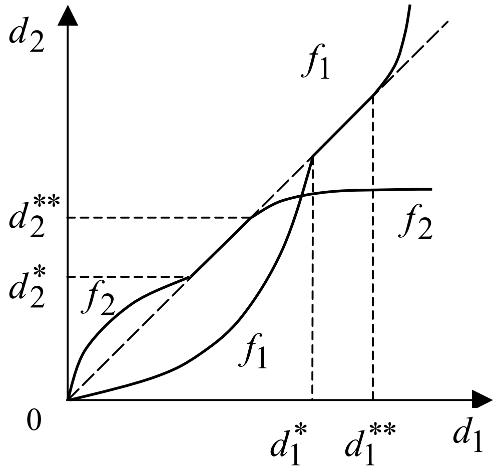

Рис. 4. Кривые наилучшего отклика для двух фирм при малых положительных γ.

Точка пересечения (d_1^0, d_2^0) кривых f_1 и f_2 определяется совместным решением уравнений (3.3) и (3.4). Задача может быть сведена к решению кубического уравнения:

$$3 \cdot \beta \cdot (d_2^0)^3 + 2 \cdot (2 - a \cdot \beta) \cdot (p - c_1) \cdot (d_2^0)^2 - 4 \cdot (p - c_1)^2 \cdot a \cdot d_2^0 + (p - c_1)^3 \cdot a^2 = 0,$$

которое, путем замены переменных

$$d_2^0 = (p - c_1) \cdot a \cdot x, \quad \omega = (a \cdot \beta)^{-1}, \tag{3.5}$$

приводится к виду

$$3 \cdot x^3 + 2 \cdot (2 \cdot \omega - 1) \cdot x^2 - 4 \cdot \omega \cdot x + \omega = 0. \tag{3.6}$$

Нетрудно заметить, что по определению величины a и β положительны и, следовательно, значение левой части равенства (3.6) в точке $x = 0.5$ отрицательно. Отсюда следует, что из двух положительных корней уравнения (3.6) только один не превышает 0.5 (что очевидно из равенства (3.4)) и является функцией произведения параметров $a \cdot \beta$.

Можно показать, что искомый корень уравнения (3.6) будет монотонно возрастающей функцией от ω, стремящейся к значению 0.5 при $\omega \to \infty$ и ведущей себя как $\sqrt{\omega/2}$ при $\omega \to 0$.

Из равенства (3.4) следует, что

$$d_1^0 = (p - c_1) \cdot \omega^{-1} \cdot x^2 \cdot (1 - 2 \cdot x)^{-1} \qquad (3.7)$$

Таким образом, при $\gamma = 0$ равенства (3.5) и (3.6) вместе с единственным корнем уравнения (3.6), лежащим в интервале $x \in (0,\ 0.5)$, определяют равновесную точку Нэша (d_1^0, d_2^0).

Точки пересечения кривых f_1 и f_2 с биссектрисой в плоскости (d_1, d_2) определяются выражениями:

$$d_1^* = (p - c_1) \cdot \beta \cdot (2\beta + 1)^{-1}, \quad d_2^* = (p - c_1) \cdot a \cdot (2 + \beta)^{-1} \quad , \qquad (3.8)$$

и условие того, что точка пересечения (d_1^0, d_2^0), являющаяся точкой равновесия Нэша, лежит ниже биссектрисы, эквивалентна неравенству

$$d_2^* < d_1^* \quad \Rightarrow \quad \beta > \beta_0(a) = \sqrt{(1-a)^2 + a} - (1-a) \quad . \qquad (3.9)$$

При $\gamma > 0$ кривые f_1 и f_2 перестают быть гладкими во всем первом квадранте плоскости (d_1, d_2), как было показано в симметричном случае. При малых γ кривые f_1 и f_2 имеют вид, показанный на Рис. 4.

Начиная с $\gamma = \gamma_1 > 0$ одно из пересечений кривых f_1 и f_2 будет осуществляться на биссектрисе в точке $d_1^* = d_2^{**}$ (см. Рис. 5). Для определения величин d_1^{**} и d_2^{**}, характеризующих точки продолжения гладких участков кривых f_1 и f_2 соответственно выше и ниже биссектрисы, необходимо написать для каждой из них уравнение в соответствующей области и условие пересечение с биссектрисой.

Для кривой f_1 выше биссектрисы ($d_2 > d_1$):

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial d_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d_1^2 \cdot (1 - \gamma \cdot (p - c_1) + 2 \cdot \gamma \cdot d_1)}{(p - c_1) - 2 \cdot d_1 \cdot [1 - \gamma \cdot (p - c_1) + 1{,}5 \cdot \gamma \cdot d_1]} \qquad (3.10)$$

и пересечение с биссектрисой осуществляется в точке $d_1 = d_2 = d_1^{**}$, что приводит к уравнению для определения d_1^{**}:

$$\gamma \cdot (3 + \frac{2}{\beta}) \cdot (d_1^{**})^2 + (1 - \gamma \cdot (p - c_1)) \cdot (2 + \frac{1}{\beta}) \cdot d_1^{**} - (p - c_1) = 0 \,. \qquad (3.11)$$

Положительный корень этого уравнения имеет пределы:

$$d_1^{**} \underset{\gamma \to 0}{\rightarrow} d_1^* = (p - c_1) \cdot \beta \cdot (2 \cdot \beta + 1)^{-1}, \quad d_1^{**} \underset{\gamma \to \infty}{\rightarrow} (p - c_1) \cdot (2 \cdot \beta + 1) \cdot (3 \cdot \beta + 2)^{-1} .$$

Для кривой f_2 ниже биссектрисы ($d_2 < d_1$):

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial d_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 = \beta \cdot \frac{d_2^2 \cdot (1 - \gamma \cdot (p - c_1) \cdot a + 2 \cdot \gamma \cdot d_2)}{(p - c_1) \cdot a - 2 \cdot d_2 \cdot [1 - \gamma \cdot (p - c_1) \cdot a + 1{,}5 \cdot \gamma \cdot d_2]} \quad , \qquad (3.12)$$

и точка пересечения ее с биссектрисой $d_1 = d_2 = d_2^{**}$ удовлетворяет уравнению

$$\gamma \cdot (3 + 2 \cdot \beta) \cdot (d_2^{**})^2 + (1 - \gamma \cdot (p - c_1) \cdot a) \cdot (2 + \beta) \cdot d_2^{**} - (p - c_1) \cdot a = 0 \quad (3.13)$$

положительный корень которого имеет пределы:

$$d_2^{**} \underset{\gamma \to 0}{\to} d_2^* = (p - c_1) \cdot \frac{a}{2 + \beta}, \quad d_2^{**} \underset{\gamma \to \infty}{\to} (p - c_1) \cdot a \cdot \frac{2 + \beta}{3 + 2 \cdot \beta} < \frac{1}{2} \cdot (p - c_1) \cdot a.$$

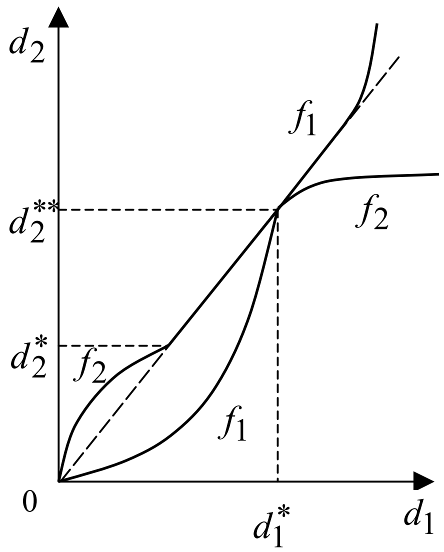

Рис. 5. Кривые наилучшего отклика для двух фирм при $\gamma = \gamma_1$.

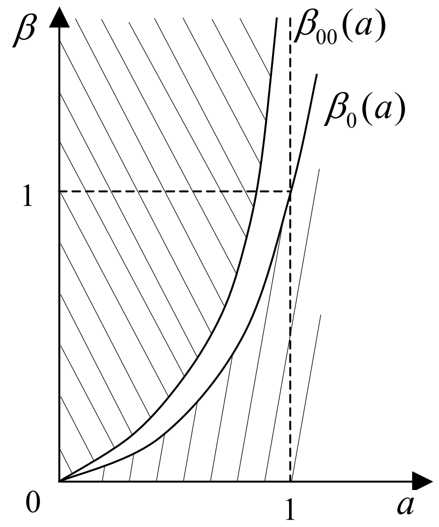

Рис. 6. В не заштрихованной области параметров a, β существует непрерывное множество точек равновесия Нэша при $\gamma > \gamma_1$.

Очевидно, что для того, чтобы существовало такое значение $\gamma_1 > 0$, для которого выполняется условие $d_2^{**}(\gamma_1) = d_1^*$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$d_1^* < \lim_{\gamma \to \infty} d_2^{**}(\gamma). \quad (3.14)$$

Это неравенство справедливо, если между положительными параметрами a и β выполняется соотношение:

$$\begin{cases} \beta < \beta_{00}(a) = \dfrac{5a - 3 + \sqrt{(5a-3)^2 + 16a \cdot (1-a)}}{4 \cdot (1-a)} & \text{при} \quad 0 < a < 1, \\ \beta < \infty & \text{при} \quad a > 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Таким образом, объединение двух условий (3.9) и (3.15) приводит к разрешенной области значений параметров a и β, представленной на Рис. 6 незаштрихованной областью.

Эта область характеризуется двумя условиями: тем, что точка пересечения кривых наилучшего отклика f_1 и f_2 при $\gamma = 0$ лежит ниже биссектрисы (условие (3.9)), и существует такое значение $\gamma_1 > 0$, при котором кривые f_1 и f_2 имеют хотя бы одну общую точку на биссектрисе в плоскости (d_1, d_2) (условие (3.15)).

4. **Выгоды продавцов и покупателей**

От ценовой конкуренции продавцов выгоды (consumers' surplus) получают, прежде всего, покупатели. Это очевидно не только на растущем из-за торговых скидок рынке (когда $\gamma > 0$), но и в ситуации $\gamma = 0$, когда рынок в целом не растет, но происходит перераспределение объемов продаж между двумя фирмами. Источником этого перераспределения являются предлагаемые фирмами ценовые скидки d_1, d_2 и различия в реакции на них со стороны покупателей. Эти различия в нашей модели описываются коэффициентами β_1, β_2. Предположим, что установились скидки (d_1^0, d_2^0), которые соответствуют точке равновесия Нэша при $\gamma = 0$.

Насколько существенно зависят прибыли фирм и выгода покупателей от включенных в модель параметров c_i, β_i? Для ответа на этот вопрос запишем исходную задачу в такой форме, чтобы результаты рассмотрения зависели от одного безразмерного параметра $\omega = (a \cdot \beta)^{-1}$, где величины a и β определены формулами (3.1).

Введем безразмерные величины

$$\delta_i = d_i^0 \cdot (p - c_i)^{-1} < 1,\ i = 1, 2, \tag{4.1}$$

которые определяют равновесную точку Нэша. Экономический смысл величин (4.1) очевиден: это величины равновесных скидок, нормированных на величину прибыли за единицу товара без скидок. Согласно формулам (3.3) – (3.7) величины δ_i определяются единственными, не превышающими значение 0.5 положительными корнями двух кубических уравнений:

$$3 \cdot \delta_2^3 + 2 \cdot (2 \cdot \omega - 1) \cdot \delta_2^2 - 4 \cdot \omega \cdot \delta_2 + \omega = 0 \tag{4.2}$$

$$3 \cdot \omega \cdot \delta_1^3 + 2 \cdot (2 - \omega) \cdot \delta_1^2 - 4 \cdot \delta_1 + 1 = 0 \quad . \tag{4.3}$$

Оба эти корня являются функциями параметра $\omega = (a \cdot \beta)^{-1}$, причем из сравнения (3.6) и (4.3) следует, что если x удовлетворяет уравнению (3.6), то

$$\delta_2(\omega) = x, \quad \delta_1(\omega) = \omega^{-1} \cdot x^2 \cdot (1 - 2 \cdot x)^{-1} \quad . \tag{4.4}$$

В новых обозначениях формулы (3.2) прибыли фирм имеют вид:

$$\begin{aligned} &\pi_i = (p - c_i - d_i) \cdot \beta_i \cdot d_i \cdot (\beta_1 \cdot d_1 + \beta_2 \cdot d_2)^{-1} \cdot Q_0 = (p - c_i) \cdot F_i \cdot Q_0, \\ &F_i = (\delta_i^{-1} - 1) \cdot f_i, \quad f_1 = \omega \cdot \delta_1^2 \cdot (\delta_2 + \omega \cdot \delta_1)^{-1}, \quad f_2 = \delta_2^2 \cdot (\delta_2 + \omega \cdot \delta_1)^{-1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Величины F_i можно интерпретировать как условную «выгоду» i-ой фирмы, определяющую как бы приходящуюся на нее долю рынка при условии продажи без скидок. Общие выгоды покупателей могут быть также представлены через уже введенные величины f_i – условные выгоды покупателей:

$$CS = (p - c_1) \cdot f_1 \cdot Q_0 + (p - c_2) \cdot f_2 \cdot Q_0 \quad . \tag{4.6}$$

Заметим, что согласно определению (4.5) величин F_i, f_i

$$F_1 + f_1 + F_2 + f_2 = 1,$$

т.е. сумма условных выгод продавцов и покупателей одинакова при любых значениях параметров.

Воспользовавшись численным решением уравнений (4.2), (4.3) (результаты которого приведены в табл. 1), можно представить графически (см. Рис. 7) характер изменений условных выгод F_i и f_i при изменении $\delta_1 \cdot \delta_2^{-1}$ отношения нормированных скидок (4.1).

Введенные выше условные выгоды имеют то преимущество перед реальными, что не зависят явно от величин $p - c_i$, что весьма удобно для анализа. Суммарная условная выгода потребителей достигает максимального значения при $\omega = \delta_1 \cdot \delta_2^{-1} = 1$. Отметим, что это значение параметра ω соответствует не только абсолютно симметричному случаю $a = 1, \beta = 1$, но тем не менее приводит к равенству нормированных скидок δ_1 и δ_2.

Максимальное значение нормированных скидок в приведенных вычислениях $\delta_2 = 0.445$ наблюдалось при $\omega = 16$, а минимальное $\delta_2 = 0.125$ при $\omega = 0.05$. Другими словами, в численном эксперименте нормированные скидки менялись в 2.5 раза.

Таблица 1

	omega	delta1/delta2	F1	f1	F2	f2	f1+f2	F1+F2
	0,050	3,600	0,084	0,069	0,742	0,106	0,175	0,825
	0,100	2,730	0,118	0,096	0,656	0,130	0,226	0,774
	0,250	1,760	0,180	0,125	0,533	0,162	0,287	0,713
	0,500	1,330	0,250	0,150	0,431	0,169	0,319	0,681
	1,000	1,000	0,334	0,167	0,334	0,167	0,333	0,667
	2,000	0,760	0,431	0,172	0,248	0,149	0,321	0,679
	4,000	0,570	0,533	0,164	0,179	0,125	0,288	0,712
	8,000	0,440	0,624	0,156	0,121	0,099	0,255	0,745
	16,000	0,310	0,715	0,118	0,091	0,076	0,194	0,806
max	16,000	3,600	0,715	0,172	0,742	0,169	0,333	0,825
min	0,050	0,310	0,084	0,069	0,091	0,076	0,175	0,667
Разность	15,950	3,290	0,631	0,104	0,651	0,093	0,158	0,158
Отношение	320,000	11,613	8,520	2,510	8,155	2,231	1,907	1,238

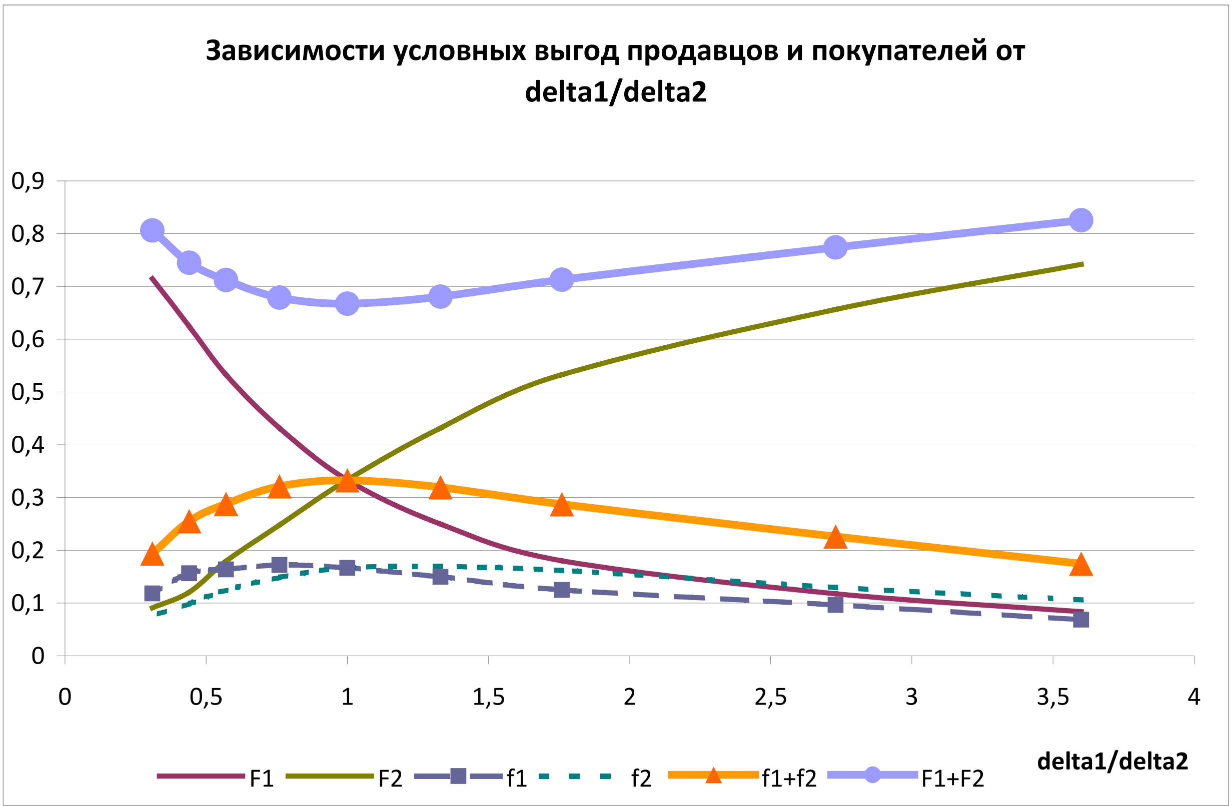

Рис. 7. Жирные линии – сумма условных выгод продавцов (верхняя линия F1+F2) и покупателей (f1+f2). Круто растущая линия – условная выгода второй фирмы (F2), круто убывающая линия – условная выгода первой фирмы (F1). Пунктирными линиями представлены условные выгоды потребителей, покупающих товар у соответствующей фирмы.

Бросается в глаза существенное различие в масштабах изменений условных выгод отдельных фирм и отдельных групп потребителей (отношение максимума к минимуму для различных показателей в табл. 1). Другими словами в нашей модели ценовой конкуренции перераспределение условных выгод между фирмами выражено гораздо ярче, чем перераспределение условных выгод групп потребителей.

5. **Краткие выводы**

Снижение цен торговыми организациями на отдельные группы товаров являются весьма распространенным маркетинговым инструментом. При этом преследуются различные цели. Рассмотренная в данной статье модель ценовой конкуренции обращает внимание на одну из них: увеличение объемов продаж за счет уменьшения их у конкурентов.

Если общий объем рынка при введении торговых скидок не увеличивается, то для данной модели существует такое распределение скидок между продавцами, которое соответствует равновесию Нэша. Оно характерно тем, что отклонение от него для любого участника является не выгодным, если остальные участники сохраняют прежние значения скидок. Численные расчеты для двух конкурирующих фирм показывают, что при изменении предельных издержек и относительного предпочтения покупателей в широком диапазоне равновесные скидки могут изменяться в 2.5 раза, а прибыль фирм может изменяться в восемь раз.

Если общий объем рынка при введении торговых скидок растет, то на примере двух фирм показано, что при не очень жестких предположениях относительно значений параметров возможна ситуация, когда вместо уединенной точки равновесия Нэша реализуется непрерывное множество, обладающее теми же свойствами. При более жестких условиях на параметры модели это множество может даже содержать такую точку, которая соответствует максимальной величине общей прибыли для обоих участников, если бы они принимали скоординированные одинаковые решения относительно величины скидок (ситуация квазимонополии или сговора).

Если исходить из математической структуры рассмотренной модели, то некоторые ситуации, возникающие в теории управления организационными системами [9 – 11], могут приводить к похожим математическим конструкциям.

В заключение авторы приносят благодарность редактору сборника В.З.Беленькому за полезные замечания.

Приложение 1

Рост рынка и квазимонопольная цена

Предположим, что связь между объемом Q продаж и ценой P линейна:

$$Q = \gamma_0 \cdot (P_{\max} - P) \quad . \tag{П.1}$$

Представим цену P в виде

$$P = p - d\,, \tag{П.2}$$

где p – цена, соответствующая объему продаж Q_0, а d – величина торговой скидки. Тогда из (П.1) и (П.2) следует, что объем продаж при наличии скидки

$$Q = Q_0 \cdot (1 + \gamma \cdot d), \qquad \gamma = \gamma_0 \cdot Q_0^{-1} = (P_{\max} - p)^{-1} \tag{П.3}$$

Если цена p определена как монопольная при постоянных предельных издержках c, то тогда

$$p = P_{mon} = 0{,}5 \cdot (P_{\max} + c), \quad Q_0 = Q_{mon} = 0{,}5 \cdot \gamma_0 \cdot (P_{\max} - c), \quad \gamma = \gamma_{mon} = 2 \cdot (P_{\max} - c)^{-1}$$

Однако если цена p без скидок выше монопольной цены P_{mon}, то $Q_0 < Q_{mon}$ (что вполне возможно для нового товара), то $\gamma = \gamma_0 \cdot Q_0^{-1} > \gamma_{mon}$, и для установления P_{mon} и Q_{mon} требуется торговая скидка $d > 0$.

Если рассматривать все фирмы как одну квазимонополию, продающую товар по одной цене $p - d$, то суммарная прибыль всех фирм будет определяться выражением

$$\Pi(d) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = Q_0 \cdot [\overline{p - c} - d] \cdot (1 + \gamma \cdot d), \quad \overline{p - c} = \sum_{i=1}^{n} (p - c_i) \cdot \beta_i \cdot (\sum_{j=1}^{n} \beta_j)^{-1}. \tag{П.4}$$

Определим величину

$$\tilde{d} = 0{,}5 \cdot (\overline{p - c} - \gamma^{-1}) \quad . \tag{П.5}$$

Очевидно, что если $\tilde{d} < 0$, то, согласно (П.4) $\max\limits_{d \ge 0} \Pi(d) = \Pi(0) = Q_0 \cdot \overline{p - c}$.

Это означает, что базовая цена p и является квазимонопольнй. Если же $\tilde{d} > 0$, то

$$\max_{d \ge 0} \Pi(d) = \Pi(\tilde{d}) = 0{,}25 \cdot Q_0 \cdot \overline{p - c} \cdot (2 + \overline{p - c} \cdot \gamma + (\overline{p - c} \cdot \gamma)^{-1}) \ge \Pi(0), \tag{П.6}$$

и, следовательно, существует такая величина торговой скидки $\tilde{d} > 0$, обеспечивающей максимум прибыли для квазимонополии. Очевидно, что это возможно (согласно (П.5) и (П.6)) лишь при $\gamma > (\overline{p - c})^{-1}$, что вполне соответствует предыдущим рассуждениям данного приложения о случае, когда базовая цена p была выше монопольной.

Приложение 2

О модели Шерера и Росса

В книге Шерера и Росса [12] рассматривается следующая модель ценовой конкуренции при дуополии.

Общий объем продаж

$$Q = \gamma_0 \cdot (P_{\max} - P)$$

определяется средневзвешенной ценой

$$P = P_1 \cdot s_1 + P_2 \cdot s_2 ,$$

где P_i цены продаж i-ой фирмы, а s_i – доля рынка i-ой фирмы, которая определяется по следующим формулам:

в области $0,4 \cdot P_{\max} < P_2 < P_1 < P_{\max}$

$$s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{P_1 - P_2}{P_2}, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{P_1 - P_2}{P_2};$$

в области $0,4 \cdot P_{\max} < P_1 < P_2 < P_{\max}$

$$s_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{P_2 - P_1}{P_1}, \quad s_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{P_2 - P_1}{P_1} \quad .$$

Множитель $1/3$ появляется из предположения, что цена не может опуститься ниже $0,4 \cdot P_{\max}$. Поэтому максимально возможное отношение цен равно $10/4$ и при таком соотношении цен доля рынка одной из фирм равна 1. Полные издержки фирмы описываются квадратичной зависимостью

$$TC_i = a_0 + a_1 \cdot s_i \cdot Q + a_2 \cdot (s_i \cdot Q)^2, \quad a_k > 0, \quad k = 0, 1, 2.$$

В этой модели, к сожалению, не просматривается возможность обобщения на случай ценовой конкуренции многих фирм с учетом предпочтений покупателей, поскольку определение долей рынка очень специфическое.

Литература

1. Байе М.Р. Управленческая экономика и стратегия бизнеса. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 743 с.
2. Липсиц И.В. Ценообразование (управление ценообразованием в организации). – М.: Экономист, 2004, – 448 с.
3. Четвериков В.М. Эффективность рекламных затрат для различных рынков. Труды международной конференции «Управление экономическим потенциалом региона в условиях международной интеграции», ноябрь 2004 г., Москва-Гомель, с. 45-52.
4. Четвериков В.М. Оптимальные затраты на рекламу в моделях рынков различных типов. Сб. «Анализ и моделирование экономических процессов», вып.1. – М.: ЦЭМИ РАН 2004, с 45-62.
5. Kimball G.E. Some industrial applications of military operations research methods. Operation Research, 1957, №5, pp. 201-204.
6. Schmalensee R. A model of advertising and product quality. Journal of political economy. 1978, 86, pp. 485-503.
7. Little John D.C. Aggregate advertising models: the state of the art. Operation Research, 1979, v. 27, №4, pp. 629-667.
8. Горшунова С.Н. Оптимизация затрат на рекламу: модели и методы (реферативный обзор). Сб. «Моделирование механизмов функционирования экономики России на современном этапе», вып. 4. – М.: ЦЭМИ РАН, 2000, с. 85-106.
9. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М.: Физматлит, 2007. – 584 с.
10. Четвериков В.М. Влияние конкуренции при распределении корпоративного заказа. Сб. «Анализ и моделирование экономических процессов», вып. 6. – М.: ЦЭМИ РАН, 2009, с. 69-92.
11. Четвериков В.М. Декларируемая эффективность и конкуренция при распределении корпоративного заказа. Сборник научных статей «Теоретические и практические проблемы формирования инновационной экономики» по материалам чтений, посвященных 100-летию со дня рождения П.Друкера.
Беларусь, Гомель, ноябрь 2009 г., Гомель, ЦИИР, 2009, с. 47-51.
12. Шерер Ф.М., Росс Д. Структура отраслевых рынков. – М.: Инфра-М, 1997, 698 с.