ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2009. Том 16, № 2. С. 85–94

УДК 519.178

ГРАНИЧНЫЕ КЛАССЫ ГРАФОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ

Д. С. Малышев

Аннотация. Рассматриваются класс всех графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем 3 листьями, и класс рёберных графов к графам этого класса. Известен ряд задач, для которых эти классы являются граничными. В работе исследуются общие свойства таких задач. Именно, доказывается достаточное условие граничности рассматриваемых классов. При помощи полученного инструмента к известным случаям граничности данных классов добавляется восемь новых.

Ключевые слова: экстремальные задачи на графах, вычислительная сложность, граничный класс.

Введение

Данная работа является продолжением работы [1], в которой исследовалась граница между «простыми» и «сложными» классами для различных задач на графах в семействе *наследственных классов графов*, т. е. классов графов, замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс X определяется множеством своих запрещённых порождённых подграфов S, при этом принята запись $X = \mathrm{Free}(S)$. Для любого наследственного класса X минимальное по включению множество запрещённых порождённых подграфов является единственным и обозначается $\mathrm{Forb}(X)$. Если $\mathrm{Forb}(X)$ конечно, то класс X называется *конечно определённым*.

Рассматриваемый в [1] подход к исследованию указанной границы основан на понятиях П-простого, П-сложного и П-граничного классов графов. Наследственный класс графов называется П-*простым*, если задача П в этом классе полиномиально разрешима. Под П-*сложным* понимается наследственный класс графов, не являющийся П-простым. Наследственный класс графов X называется П-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ П-сложных классов графов, что $X = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Минимальный по включению П-предельный класс называется П-*граничным.* Значение понятия граничного класса графов раскрывает теорема 1, доказанная в работе [3].

Теорема 1. *Если P≠NP, то конечно определённый класс графов X является* П*-сложным тогда и только тогда, когда X содержит какой-нибудь* П*-граничный класс.*

Утверждения данной работы и некоторые цитируемые результаты других работ также справедливы при выполнении гипотезы P≠NP. В статье всегда предполагается справедливость этого неравенства, поэтому далее оно не будет включаться явно в формулировки соответствующих результатов.

В [1] получен критерий граничности произвольного класса графов, а также условия граничности некоторого конкретного класса. Это класс T — класс графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем тремя листьями. Интерес к исследованию случаев граничности именно этого класса был подсказан результатами работы [3], из которых следует его граничность для девяти задач на графах. К этим девяти случаям в [1] было добавлено три новых.

В настоящей работе помимо класса T рассматривается класс D — класс графов, каждая компонента связности которых является либо простым путём, либо получается биективным отождествлением трёх концевых вершин трёх простых путей с вершинами треугольника. Внимание к этому классу вызвано тем обстоятельством, что D является граничным для четырёх задач на графах [3].

Данная работа продолжает начатое в [1] исследование по изучению общих черт задач, для которых классы T и D являются граничными. В работе доказывается достаточное условие граничности классов T и D, а также показывается полезность этого инструмента при поиске новых случаев граничности указанных классов. Именно, доказывается, что класс T является граничным для пяти задач, а класс D — для трёх задач.

Граф G называется *рёберным к графу* H, если множество вершин G соответствует рёбрам H, причём любые две вершины графа G являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра в H являются смежными. Если граф G является рёберным к графу H, то пишем $G = L(H)$. Множество рёберных графов к графам класса X обозначается через $L(X)$.

Введём обозначения: $G[U]$ — подграф графа $G = (V, E)$, порождённый подмножеством вершин $U \subseteq V$; $K_4 - e$ — граф, получаемый удалением любого ребра из графа K_4; $T_{i,j,k}$ — дерево с тремя листьями, находящимися от вершины степени 3 на расстояниях i, j, k соответственно; $D_{i,j,k}$ — рёберный граф к графу $T_{i+1,j+1,k+1}$; мост B_k — граф, получаемый соединением вершин степени 2 у двух копий графа $K_{1,2}$ путём длины k; X^c — множество связных графов из класса X; $\mathrm{Deg}(d)$ — класс графов, степени вершин которых не превосходят d; $U(k)$ — класс $\mathrm{Free}(C_3, \ldots, C_{3+k}, B_1, \ldots, B_k) \cap \mathrm{Deg}(3)$.

1. Условие граничности

В работе [1] доказан следующий критерий граничности произвольного класса графов.

Теорема 2. Π-*предельный класс* A *является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда для каждого* $G \in \mathrm{A}$ *существует такое конечное множество графов* $X \subseteq \mathrm{Forb}(A)$, *что класс* $\mathrm{Free}(X \cup \{G\})$ *является* Π-*простым.*

Лемма 1 [2]. *Пусть* G_1 *и* G_2 *— связные графы, причём графы* $L(G_1)$ *и* $L(G_2)$ *изоморфны. Тогда графы* G_1 *и* G_2 *будут изоморфны всегда, за исключением случая, когда один из них* $K_{1,3}$, *а другой* K_3.

Древесной шириной графа G называется такое минимальное k, при котором G является подграфом некоторого k-дерева [5].

Лемма 2 [7]. *Для любых графов* $G_1 \in T$ *и* $G_2 \in D$ *существует такое число* t, *что древесная ширина графов класса* $\mathrm{Free}(G_1, G_2) \cap \mathrm{Deg}(3)$ *ограничена числом* t.

Лемма 3 [6]. *Пусть для некоторого числа* d *выполнено включение* $X \subseteq \mathrm{Deg}(d)$. *Тогда древесная ширина графов этого класса ограничена некоторым числом* t_1 *в том и только том случае, когда древесная ширина графов класса* $L(\mathbf{X})$ *ограничена некоторым числом* t_2.

Обозначим через $\mathrm{TW}(3, t)$ множество графов из $\mathrm{Deg}(3)$, древесная ширина которых не превосходит t.

Лемма 4. *Если класс* T *является* Π-*предельным и для любого* t *задача* Π *полиномиально разрешима в классе* $\mathrm{TW}(3, t) \cap \mathrm{Free}(\{C_3\})$, *то класс* T *является* Π-*граничным. Если класс* D *является* Π-*предельным и для любого* t *задача* Π *полиномиально разрешима в классе* $L(\mathrm{TW}(3, t)) \cap \mathrm{Deg}(3)$, *то класс* D *является* Π-*граничным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф $G \in T$. Графы $K_{1,4}$ и C_3 принадлежат множеству $\mathrm{Forb}(T)$. Так как $C_3 \in D$ и

$$\mathrm{Free}(\{G, K_{1,4}, C_3\}) = \mathrm{Free}(\{G, C_3\}) \cap \mathrm{Deg}(3),$$

по лемме 2 древесная ширина графов из $\mathrm{Free}(\{G, K_{1,4}, C_3\})$ ограничена числом t, поэтому $\mathrm{Free}(\{G, K_{1,4}, C_3\}) \subseteq \mathrm{TW}(3, t) \cap \mathrm{Free}(\{C_3\})$. Из теоремы 2 следует, что T является П-граничным.

Рассмотрим произвольный граф $G \in D$. Графы $K_{1,3}$, K_4, $K_4 - e$, $L(B_1)$ принадлежат множеству $\mathrm{Forb}(D)$. Поскольку $K_{1,3} \in T$ и

$$X = \mathrm{Free}(\{G, K_{1,3}, K_4, K_4 - e, L(B_1)\}) \subseteq \mathrm{Free}(\{G, C_3\}) \cap \mathrm{Deg}(3),$$

по лемме 2 древесная ширина графов из X ограничена числом t. Хотя бы один из графов множества $\{K_{1,3}, K_4 - e\}$ является порождённым подграфом в любом из девяти запрещённых подграфов класса рёберных графов, список которых можно найти в теореме 8.4 монографии [2]. Поэтому класс X состоит из рёберных графов, т. е. для некоторого класса Y справедливо равенство $X = L(Y)$. Так как $K_4 \notin X$, то $Y \subseteq \mathrm{Deg}(3)$. Из леммы 3 следует, что древесная ширина графов класса Y ограничена некоторым числом t^*, поэтому $X \subseteq L(\mathrm{TW}(3, t^*)) \cap \mathrm{Deg}(3)$. Отсюда и из теоремы 2 следует, что D является П-граничным. Лемма 4 доказана.

2. Задача о наибольшем подграфе

Пусть X — некоторый класс графов. Будем предполагать, что существует алгоритм (не обязательно полиномиальный), распознающий принадлежность графа этому классу. Подграф некоторого графа, принадлежащий X, будем называть *X-подграфом.* X-подграф некоторого графа будем называть *рёберно наибольшим*, если он содержит наибольшее число рёбер, и *вершинно наибольшим*, если этот подграф является порождённым и содержит наибольшее количество вершин. Число рёбер в рёберно наибольшем X-подграфе графа G обозначим через $m_X(G)$, а количество вершин в вершинно наибольшем X-подграфе графа G обозначим через $n_X(G)$. В дальнейшем всегда будем считать, что $K_1 \in X$, тогда $m_X(G)$ определено для любого графа G. Если G не содержит ни одного порождённого X-подграфа, то положим $n_X(G) = 0$.

Задача о рёберно наибольшем X-подграфе, называемая далее задачей SUBGRAPH[X], состоит в том, чтобы по данным графу G и числу k определить, верно ли, что $m_X(G) \geqslant k$. Задача о вершинно наибольшем X-подграфе, называемая в дальнейшем задачей ISUBGRAPH[X], состоит в том, чтобы по задаваемым графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $n_X(G) \geqslant k$.

Лемма 5. *Пусть класс X состоит из связных графов. Тогда в любом классе графов Y задача* SUBGRAPH[X] *полиномиально эквивалентна задаче* ISUBGRAPH[$L(X)$] *в классе $L(Y)$.*

Доказательство. Пусть $H \in Y$, причём $G = L(H)$. Графы G и H можно считать связными. Ясно, что задача SUBGRAPH$[X]$ для графов K_3, $K_{1,3}$ и задача ISUBGRAPH$[L(X)]$ для графа K_3 решается за $O(1)$ время. Поэтому можно предполагать, что $G \neq K_3$, $H \neq K_3$, $H \neq K_{1,3}$. Тогда из леммы 1 следует, что один из графов множества $\{G, H\}$ однозначно определяет другой. Понятно, что граф G может быть построен из H за полиномиальное время. Обратно, граф H может быть построен из G за полиномиальное время [9].

Очевидно, что рёберный граф к любому X-подграфу графа H является порождённым $L(X)$-подграфом графа G, поэтому $n_{L(X)}(G) \geqslant m_X(H)$. Рассмотрим два случая. Если $n_{L(X)}(G) \leqslant 3$, то $m_X(H) \leqslant 3$. Понятно, что этом случае число $m_X(H)$ вычисляется за $O(1)$ время. Если $n_{L(X)}(G) > 3$, то любой вершинно наибольший $L(X)$-подграф графа G отличен от графа C_3. Тогда из леммы 1 следует, что H содержит некоторый X-подграф, число рёбер которого не менее $n_{L(X)}(G)$. Таким образом, если $n_{L(X)}(G) > 3$, то $m_X(H) = n_{L(X)}(G)$.

Из рассуждений следует утверждение леммы. Лемма 5 доказана.

Через TO обозначим класс всех графов сравнимости, т. е. транзитивно ориентируемых графов, а через Bipartite обозначим класс всех двудольных графов. Очевидно, что оба класса графов являются наследственными.

Лемма 6. *Для любого графа $G \in \mathrm{Free}(\{C_3\})$ имеет место равенство $m_{\mathrm{TO}} = m_{\mathrm{Bipartite}}$.*

Доказательство. Пусть H_1 — рёберно наибольший двудольный подграф графа G. Ясно, что граф H_1 является транзитивно ориентируемым (поскольку его рёбра можно ориентировать так, что стоки окажутся в одной доле, а источники — в другой), поэтому $m_{\mathrm{TO}} \geqslant m_{\mathrm{Bipartite}}$.

Пусть H_2 — рёберно наибольший TO-подграф графа G. Понятно, что H_2 не содержит треугольников. Так как для любого $k > 1$ цикл C_{2k+1} не принадлежит классу TO, то H_2 является двудольным графом. Поэтому $m_{\mathrm{TO}} \leqslant m_{\mathrm{Bipartite}}$. Лемма 6 доказана.

Обозначим через Path класс всех простых путей, а через Cycle — класс всех простых циклов.

Лемма 7. *Для любого связного рёберного графа $G \in \mathrm{Deg}(3)$, отличного от простого цикла и графа K_4, выполнено неравенство $n_{\mathrm{Path}}(G) \geqslant n_{\mathrm{Cycle}}(G)$.*

Доказательство. Пусть C — наибольший порождённый цикл графа G. Так как граф G отличен от цикла, то существует вершина x, не принадлежащая C и смежная хотя бы с одной вершиной цикла C. Пусть длина цикла C равна 3, тогда вершина x не может быть смежна сразу со всеми тремя его вершинами. Следовательно, граф G содержит порождённый путь на трёх вершинах. Далее будем считать, что длина C не менее чем 4. Вершина x не может быть смежна ровно с одной вершиной цикла C, так как иначе образовался бы порождённый $K_{1,3}$ и граф G не был бы рёберным. Рассмотрим два возможных случая.

1. Вершина x смежна ровно с двумя вершинами цикла C. Эти вершины обязательно должны быть смежными, иначе снова образуется порождённый $K_{1,3}$. Таким образом, вершина x смежна с двумя смежными вершинами v_1 и v_2. Но тогда граф G содержит путь длины n_{Cycle}, порождённый вершиной x и всеми вершинами C, кроме v_1.

2. Вершина x смежна с тремя вершинами v_1, v_2, v_3 цикла C. Понятно, что эти вершины обязательно должны быть последовательными, иначе снова образуется порождённый $K_{1,3}$. Будем считать, что $(v_1, v_2) \in E(G)$ и $(v_2, v_3) \in E(G)$. Пусть a и b — такие вершины цикла C, что $a \neq v_2$, $b \neq v_2$ и $(a, v_1) \in E(G)$, $(b, v_3) \in E(G)$. Тогда вершины x, v_1, v_2, v_3, a, b порождают подграф графа G, не являющийся рёберным [2]. Поэтому и сам граф G не является рёберным. Лемма 7 доказана.

Задача о рёберно наибольшем связном подграфе ограниченной степени, называемая в дальнейшем задачей BDCS, состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, числам d и k определить, содержит ли граф G подграф из $\mathrm{Deg}(d)^c$, число рёбер которого не менее чем k. Задача о вершинно наибольшем связном подграфе ограниченной степени, называемая в дальнейшем задачей BDCIS, состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, числам d и k определить, содержит ли граф G порождённый подграф из $\mathrm{Deg}(d)^c$, число вершин которого не менее чем k.

Теорема 3. *Класс T является* BDCS-*граничным, а D —* BDCIS-*граничным. Кроме того, класс T является* SUBGRAPH[TO]-*граничным, а класс D —* ISUBGRAPH[Path]- *и* ISUBGRAPH[Cycle]-*граничным.*

Доказательство. Понятно, что $L(\mathrm{Path}) = \mathrm{Path}$, $L(\mathrm{Cycle}) = \mathrm{Cycle}$. Класс $U(k)$ является SUBGRAPH[Path]- и SUBGRAPH[Cycle]-сложным при любом $k > 2$ [3]. Отсюда и из леммы 5 следует, что при любом k класс $L(U(k))$ является ISUBGRAPH[Path]- и ISUBGRAPH[Cycle]-сложным.

Понятно, что пары задач BDCS и SUBGRAPH[$\mathrm{Deg}(2)^c$], BDCIS и ISUBGRAPH[$\mathrm{Deg}(2)^c$] в классе графов $\mathrm{Deg}(3)$ являются парами полиномиально эквивалентных задач. Очевидно, что для любого графа

$G \in \mathrm{Deg}(3)$ имеют место равенства

$$n_{\mathrm{Deg}(2)^c}(G) = \max(n_{\mathrm{Path}}(G), n_{\mathrm{Cycle}}(G)),$$
$$m_{\mathrm{Deg}(2)^c}(G) = \max(m_{\mathrm{Path}}(G), m_{\mathrm{Cycle}}(G)).$$

Так как при любом k справедливо включение $L(U(k)) \subseteq \mathrm{Deg}(3)$, то из леммы 7 следует, что задача ISUBGRAPH[Path] для графов класса $L(U(k))$ полиномиально сводима к задаче ISUBGRAPH[$\mathrm{Deg}(2)^c$] для графов того же класса. Отсюда следует, что при любом k класс $L(U(k))$ является ISUBGRAPH[$\mathrm{Deg}(2)^c$]-сложным. Так как $L(\mathrm{Deg}(2)^c) = \mathrm{Deg}(2)^c$, то из леммы 5 следует, что класс $U(k)$ является SUBGRAPH[$\mathrm{Deg}(2)^c$]-сложным при любом k. Таким образом, при любом k класс $U(k)$ является BDCS-сложным, а класс $L(U(k))$ является BDCIS-сложным.

Из леммы 6 следует, что при любом k задачи SUBGRAPH[Bipartite] и SUBGRAPH[TO] в классе $U(k)$ полиномиально эквивалентны. При любом k класс $U(k)$ является SUBGRAPH[Bipartite]-сложным [1], поэтому при любом k этот класс является SUBGRAPH[TO]-сложным.

Легко проверить, что при любом k классы $U(k)$ и $L(U(k))$ являются наследственными, выполняются включения

$$U(k) \supseteq U(k+1), \quad L(U(k)) \supseteq L(U(k+1))$$

и имеют место равенства

$$T = \bigcap_{k=1}^{\infty} U(k), \quad D = \bigcap_{k=1}^{\infty} L(U(k)).$$

Поэтому из предыдущих рассуждений следует, что класс T является BDCS- и SUBGRAPH[TO]-предельным, а класс D является BDCIS-, ISUBGRAPH[Path]- и ISUBGRAPH[Cycle]-предельным. При любом фиксированном t класс $\mathrm{TW}(3,t)$ является SUBGRAPH[Bipartite]-, SUBGRAPH[Path]- и SUBGRAPH[Cycle]-простым [4]. Из проделанных рассуждений и лемм 4, 5 и 6 следует BDCS- и SUBGRAPH[TO]-граничность класса T и BDCIS-, ISUBGRAPH[Path]- и ISUBGRAPH[Cycle]-граничность класса D. Теорема 3 доказана.

3. Новые случаи граничности класса T

Множество путей $\{Path_1, Path_2, \ldots, Path_k\}$ некоторого графа G будем называть $DP(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$-*системой*, если любые два его пути не имеют общих вершин и при любом i путь $Path_i$ соединяет вершины s_i и t_i графа G. Задача о непересекающихся путях (задача DP) состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, его вершинам $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k$, t_k определить, содержит ли граф $DP(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$-систему.

Лемма 8. *При любом r класс $U(r)$ является* DP*-сложным.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathrm{Deg}(3)$ и граф G_r получается из графа G заменой каждого ребра путём длины $r+1$. Ясно, что для графа G и его вершин $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$ $DP(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k)$-система существует тогда и только тогда, когда такая система существует для графа G_r и его вершин $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$. Поскольку $G_r \in U(r)$, задача DP в классе графов Deg(3) полиномиально сводима к той же задаче в классе $U(r)$. Отсюда следует, что при любом r класс $U(r)$ является DP-сложным, так как класс Deg(3) является DP-сложным [8]. Лемма 8 доказана.

Вершинным покрытием графа называется такое подмножество его вершин, что любое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине из подмножества. Количество вершин в *наименьшем вершинном покрытии* (т. е. покрытии с минимальным числом вершин) графа G обозначим через $\beta(G)$. Задача о вершинном покрытии (задача VC) состоит в том, чтобы для заданных графа G и числа k определить, выполняется ли неравенство $\beta(G) \leqslant k$.

Покрытием полными двудольными графами ($CCBS$) графа G называется такая система подмножеств $\{V_1, V_2, \ldots, V_s\}$ множества $V(G)$, что выполняются следующие условия.

1. Для любого i подграф $G[V_i]$ является полным двудольным графом.

2. Для любого ребра e графа G существует такое подмножество V_j, что граф $G[V_j]$ содержит e.

Покрытие полными двудольными графами называется *наименьшим*, если оно содержит минимальное количество полных двудольных графов. Количество графов в наименьшем $CCBS$ графа G обозначим через $\mathrm{ccbs}(G)$. Задача о покрытии полными двудольными графами, называемая далее задачей CCBS, состоит в том, чтобы по заданным графу G и числу k определить, выполняется ли неравенство $\mathrm{ccbs}(G) \leqslant k$.

Лемма 9. *Для любого k класс $U(k)$ является* CCBS*-сложным.*

Доказательство. Рассмотрим граф $G \in U(k)$. Покажем, что $\beta(G) = \mathrm{ccbs}(G)$. Пусть $\{V_1, V_2, \ldots, V_{\mathrm{ccbs}(G)}\}$ — наименьшее $CCBS$ графа G. Ясно, что при любом i граф $G[V_i]$ является либо графом K_2, либо графом $K_{1,2}$, либо графом $K_{1,3}$. Для любого i в графе $G[V_i]$ выберем вершину наибольшей степени. Понятно, что построенное множество будет вершинным покрытием графа G. Таким образом, $\beta(G) \leqslant \mathrm{ccbs}(G)$.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{\beta(G)}$ — наименьшее вершинное покрытие графа G. Для каждой вершины v_i этого множества рассмотрим V_i — множество смежных с v_i вершин. Ясно, что при любом i граф $G[V_i \cup \{v_i\}]$ принадлежит множеству $\{K_2, K_{1,2}, K_{1,3}\}$. Поэтому множество

$$\{V_1 \cup \{v_1\}, V_2 \cup \{v_2\}, \ldots, V_{\beta(G)} \cup \{v_{\beta(G)}\}\}$$

является *CCBS* графа G. Отсюда $\beta(G) \geqslant \mathrm{ccbs}(G)$.

При любом k класс $U(k)$ является ВП-сложным [3]. Отсюда и из равенства $\beta(G) = \mathrm{ccbs}(G)$ следует, что при любом k класс $U(k)$ является CCBS-сложным. Лемма 9 доказана.

Задача о разбиении на пути длины 2 (задача PPLT) состоит в том, чтобы по задаваемому графу G определить, можно ли так разбить $V(G)$ на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_k$, что для любого i граф $G[V_i]$ изоморфен графу P_3.

(B, s)-*Разбиением на деревья* графа G называется такое разбиение множества $V(G)$ на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_s$, что при любом i подграф $G[V_i]$ является деревом и содержит не более B вершин. Задача о лесе с ограниченными компонентами, называемая далее задачей BCF, состоит в том, чтобы по задаваемым графу G, числам B и k определить, имеет ли граф (B, s)-разбиение на деревья для некоторого $s \leqslant k$.

Теорема 4. *Класс T является* DP-, CCBS- *и* BCF-*граничным.*

Доказательство. В работе [3] показано, что при любом k класс графов $U(k)$ является PPLT-сложным. Ясно, что задача PPLT в любом классе графов X полиномиально сводима к задаче BCF для графов того же класса. Таким образом, класс $U(k)$ является BCF-сложным при любом k. Отсюда и из лемм 8, 9 следует, что класс T является DP-, CCBS- и BCF-предельным. Известно, что при любом фиксированном t класс графов $\mathrm{TW}(3, t)$ является DP- [10], CCBS- и BCF-простым [4]. Граничность класса T для всех трёх указанных задач следует из леммы 4. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Критерий граничности и его применения // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. Т. 15, №6. — С. 3–10.
2. **Харари Ф.** Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 с.
3. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoret. Comp. Sci. — 2007. — V. 389. — P. 219–236.

4. **Bodlaender H. L.** Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Automata, languages and programming (Tampere, 1988). Proc. — Berlin: Springer-Verl., 1988. — P. 105–118. (Lect. Notes in Comp. Sci.; V. 317.)
5. **Kloks T.** Treewidth, computations and approximations // Lect. Notes in Comp. Sci. — Berlin: Springer-Verl., 1994. — V. 842. — P. 211.
6. **Lozin V. V.** Boundary classes of planar graphs // Combinatorics, Probability and Computing. — 2008. — V. 17. — P. 287–295.
7. **Lozin V. V., Rautenbach D.** On the band-, tree- and clique-width of graphs with bounded vertex degree // SIAM J. Discrete Math. — 2004. — V. 18. — P. 195–206.
8. **Middendorf M., Pfeiffer F.** On the complexity of the disjoint path problem // Combinatorica. — 1993. — V. 13, N 1. — P. 97–107.
9. **Roussopoulos N.** A $\max\{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph G // Information Processing Letters. — 1973. — V. 2, N 4. — P. 108–112.
10. **Scheffler P.** A practical linear algorithm for vertex disjoint path in graphs with bounded treewidth // Technical report №396, Department of Mathematics, Technische Universität Berlin, 1994. — 21 p.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: ave@uic.nnov.ru

Статья поступила
20 октября 2008 г.
Переработанный вариант —
9 февраля 2009 г.