

УДК 532.59-3

© 2013 г. А. А. АБРАШКИН, А. Г. СОЛОВЬЕВ

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ДАВЛЕНИИ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Изучены плоские периодические колебания бесконечно глубокой жидкости при неоднородном распределении давления на ее свободной поверхности. Движение жидкости описывается точным решением уравнения Эйлера в лагранжевых переменных. Исследованы динамика колеблющегося стоячего солитона, а также сценарий эволюции солитона и возникновение волны аномально большой амплитуды на фоне однородного герстнеровского волнения (модель волны-убийцы). Все течения являются неоднородно завихренными.

Ключевые слова: лагранжевые координаты, точное решение, птолемеевские течения, волна-убийца.

В теории волн на воде известно только два точных решения [1]. Первое получено Герстнером и описывает трохоидальные гравитационные волны на глубокой воде. Второе принадлежит Крэпперу и относится к случаю капиллярных установившихся волн. В настоящей работе построены и проанализированы точные решения для вихревых нестационарных колебаний свободной поверхности, поддерживаемых неоднородным периодически изменяющимся давлением на ней.

Рассматриваются плоские нестационарные вихревые движения жидкости, относящиеся к классу птолемеевских течений [2–4]. Они включают в себя волны Герстнера как частный случай. Ранее птолемеевские решения применялись для описания динамики одиночной вихревой области во внешнем потенциальном потоке [2–4], азимутальных волн на поверхности вращающейся полости [5] и магнитогидродинамических течений в однородном продольном магнитном поле [6]. В данной работе они используются для изучения движений жидкости со сложной динамикой свободной границы. Основное внимание уделяется анализу образования на поверхности волны аномально большой амплитуды.

В последнее время возникновение волн, в три и более раз превышающих по высоте среднюю амплитуду волнения (волн-убийц), активно изучается численными методами в рамках полных уравнений гидродинамики (см. обзор [7]). Рассмотрение проводится в предположении потенциальности движения жидкости и, за исключением единичных случаев, без учета действия ветра: давление на свободной поверхности при этом полагается постоянным. Влияние ветра в работе [8] учитывается наложением линейной связи между давлением и локальной крутизной поверхности для тех участков профиля, где она превышает некоторое пороговое значение. Тем самым воздействие ветра моделируется неоднородным распределением давления на поверхности.

Ниже построены и проанализированы примеры рождения конечно-амплитудного возвышения для двух случаев – на фоне покоящейся на бесконечности жидкости и стационарной волны Герстнера. Все исследуемые течения являются неоднородно завихренными. Давление на свободной поверхности изменяется для них в противофазе с подъемом профиля.

1. Птолемеевские течения. Система уравнений двумерной гидродинамики идеальной жидкости в переменных Лагранжа эквивалентна условиям сохранения двух якобианов [2–4]

$$\frac{D(W, W^*)}{D(\chi, \chi^*)} = \frac{D(W_0, W_0^*)}{D(\chi, \chi^*)} = D_0(\chi, \chi^*) \quad (1.1)$$

$$\frac{D(W_t, W_t^*)}{D(\chi, \chi^*)} = \frac{D(W_{t_0}, W_{t_0}^*)}{D(\chi, \chi^*)} = \frac{i}{2} D_0 \Omega(\chi, \chi^*)$$

Здесь $W = X + iY$ ($W^* = X - iY$); X, Y – декартовы координаты жидкой частицы, звездочка – знак комплексного сопряжения, $\chi = a + ib$ ($\chi^* = a - ib$); a, b – лагранжевы координаты жидкой частицы, W_t – производная по времени, W_0 – значение в начальный момент времени. Функция D_0 характеризует связь начальных положений частиц X_0, Y_0 с лагранжевыми переменными, она не может обращаться в нуль в области течения. Первое из уравнений системы (1.1) является уравнением непрерывности, а второе – условие сохранения завихренности Ω для жидких частиц.

Непосредственной подстановкой в (1.1) можно убедиться, что функция

$$W = G(\chi)e^{i\delta t} + F(\chi^*)e^{i\mu t} \quad (1.2)$$

является точным решением уравнений двумерной гидродинамики; G, F – функции, аналитические в области течения; δ, μ – произвольные действительные числа. Функции G, F в значительной степени произвольны, так как единственным ограничением на их выбор будет требование постоянства знака D_0 , т.е. для определенности условие

$$D_0 = |G|^2 - |F|^2 \geq 0 \quad (1.3)$$

Траекториями жидких частиц, описываемых (1.2), будут эпициклоиды (гипоциклоиды). По таким орбитам вращались планеты в Птолемеевой картине Мира. В связи с этим данный тип течений назван птолемеевским [2–4].

Предположим, что области волнового движения жидкости в лагранжевых переменных соответствует нижнее полупространство $b \leq 0$, и течение описывается следующим выражением:

$$W = G(\chi) + F(\chi^*)e^{-i\omega t} \quad (\text{Im } \chi \leq 0) \quad (1.4)$$

Течение принадлежит к семейству птолемеевских течений (1.2), в показателе экспоненты для удобства выбрано, что $\mu = -\omega$. Функция $G(\chi)$ должна быть однозначной, т.е. ее производная $G'(\chi)$ не должна обращаться в нуль в области течения. Это выполняется, если справедливо требование (1.3): из знакоположительности D_0 следует однозначность $G(\chi)$.

В случае $\delta = 0$ жидкие частицы вращаются относительно своего равновесного положения по окружности. Радиус вращения определяется значением модуля функции F . На глубине частицы покоятся, поэтому должно выполняться условие

$$|F| \rightarrow 0 \quad \text{при } b \rightarrow -\infty$$

Поскольку функция F является аналитической, то наибольшего значения ее модуль достигает на свободной границе. Следовательно, максимальная величина осцилляций отдельной жидкой частицы будет обязательно соответствовать частицам, находящимся на свободной поверхности.

Определим, какому распределению давления на свободной поверхности будет отвечать волновое решение (1.4). Выражение для давления записывается так:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = -g(\operatorname{Im}G + \operatorname{Im}Fe^{-i\omega t}) + \frac{1}{2}\omega^2|F|^2 + \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \int \omega^2 G' F^* d\chi)$$

Как видно из этого соотношения, при $b = 0$ давление будет зависеть от горизонтальной лагранжевой координаты a и периодически меняться во времени. Вид неоднородного распределения вдоль свободной поверхности определяется функциями G и F . Выражение (1.4) задает целый класс точных решений, описывающий динамику свободной поверхности при неоднородном и гармонически изменяющемся давлении. Во всех примерах неоднородность давления будет задаваться на ограниченном интервале. На бесконечности давление стремится к постоянному значению p_0 .

Найденные нелинейные волны не осуществляют переноса массы: жидкие частицы движутся по окружности, и дрейфовое течение отсутствует. Завихренность течения (1.4) определяется выражением

$$\Omega = \frac{2\omega|F'|^2}{|G'|^2 - |F'|^2}$$

и в силу условия (1.3) она всегда знакопостоянна. Величина Ω максимальна на свободной границе и спадает с глубиной до нуля (на дне).

На профиле свободной поверхности волны могут возникать особые точки (заострения). Необходимым условием возникновения такой особой точки является появление вертикальной касательной на профиле, что для данного решения соответствует обращению в нуль якобиана D_0 : это возможно только на свободной поверхности в точках, удовлетворяющих соотношению $|G'(a)| = |F'(a)|$. При этом обращение в нуль якобиана D_0 возможно только в дискретные моменты времени.

Рассмотрим птолемеевское решение (1.4) следующего вида

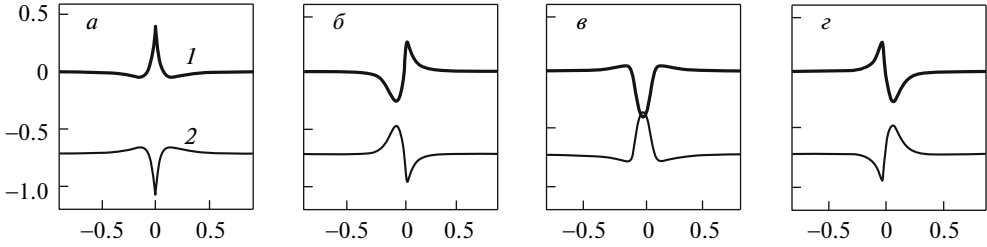
$$W = \chi + iA \exp[i(k\chi^* - \omega t)]$$

Это соотношение задает волны Герстнера. Жидкие частицы в них движутся по окружностям радиуса $A \exp kb$ (изолиниям b соответствуют одинаковые амплитуды колебаний). В каждый момент времени свободная поверхность рассматриваемой волны представляет собой трохойду. Оставаясь неизменной, волна движется со скоростью $c = \omega k^{-1}$. Ее амплитуда равна A , а волновое число k . Физический смысл имеют только решения с амплитудой волны $A \leq k^{-1}$, в противном случае профиль самопересекается. Если же $A = k^{-1}$, то гребни на нем становятся острыми. Завихренность волн Герстнера равна

$$\Omega = \frac{2k^3 A^2 c \exp(2kb)}{1 - k^2 A^2 \exp(2kb)}$$

Она быстро убывает по мере погружения в жидкость. Дисперсионное соотношение для волн Герстнера имеет вид $\omega^2 = gk$, как и для линейных потенциальных волн на глубокой воде. При выполнении этого условия давление на профиле волны остается постоянным.

2. Колеблющийся стоячий солитон. Линейная функция G и экспоненциальная функция F отвечают наиболее простому выбору. Это единственный случай, когда решение (1.4) описывает стационарную волну на воде. Произвол в выборе функции F (при



Фиг. 1. Профиль (1) и давление (2) для одиночного возвышения без заострения:
 $F = 0.4/(\chi^* + i)^2$: $a - \varepsilon - \omega t = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$

линейной G) позволяет рассматривать широкий спектр возможных начальных форм профиля свободной поверхности.

Рассмотрим птолемеевское решение следующего вида:

$$W = \chi + \frac{\beta}{(\chi^* + i)^n} e^{-i\omega t}; \quad \beta > 0; \quad n \geq 2 \quad (2.1)$$

Оно описывает динамику одиночного возвышения. Функция F в данном случае имеет полюс порядка n . Он соответствует значению $b = 1$ и потому лежит вне области течения. В данной формуле величины χ, β выбраны безразмерными. Согласно (1.3) область допустимых параметров описывается условием $\beta \leq 1/n$.

Давление на свободной поверхности для течения (2.1) запишется так

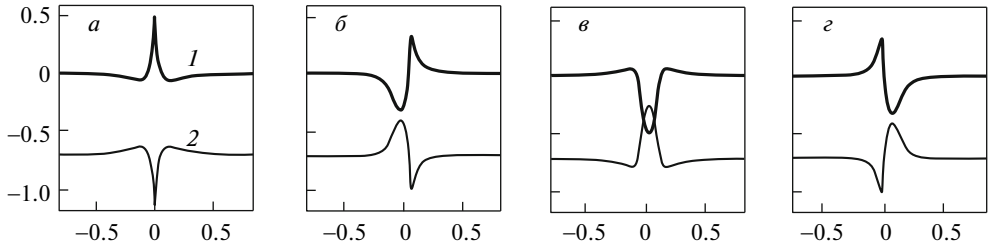
$$\frac{p - p_0}{\rho} = -g \operatorname{Im} \frac{\beta \exp(-i\omega t)}{(a + i)^n} + \frac{\beta \omega^2}{2(a^2 + 1)^n} - \frac{\omega^2 \beta}{n - 1} \operatorname{Re} \frac{\exp(i\omega t)}{(a - i)^{n-1}}$$

Оно спадает по мере удаления от солитона и равно постоянному значению на бесконечности. В формуле (2.1) величина $n \geq 2$. Если положить значение n равным единице, то давление на бесконечности будет расти логарифмически. Такое решение не имеет физического смысла.

На фиг. 1 приведены картина эволюции свободной поверхности и график изменения давления в зависимости от времени для значений параметров $n = 2, \beta = 0.4$. Кривая давления построена для нормированного давления $p_n = p/(\rho g L)$, где L — единичный масштаб длины. Для удобства анализа она смещена на постоянный уровень вниз.

В момент времени $t = \pi/(2\omega)$ свободная поверхность имеет вид одиночного выплеска с небольшими впадинами по бокам. Через четверть периода на поверхности образуется симметричное переколебание, причем его максимум по сравнению с начальным солитонным профилем смещается вправо и уменьшается по амплитуде. Еще через четверть периода на профиле появляется одиночная впадина с двумя небольшими боковыми всплесками, и, наконец, пройдя полный период колебаний, профиль возвращается к своему начальному виду. Давление на поверхности при этом изменяется в противофазе с профилем свободной границы. Такую нестационарную структуру можно считать колеблющимся стоячим солитоном.

Фигура 2 соответствует случаю $\beta = 1/2$. Это предельное допустимое значение параметра β . Параметрическое представление формы свободной поверхности в этом случае имеет следующий вид:



Фиг. 2. Профиль (1) и давление (2) для одиночного возвышения с заострением:
 $F = 0.5/(\chi^* + i)^2$: $a - \varepsilon - \omega t = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$

$$X_s = a + \frac{1}{2(a^2 + 1)} \left(\cos \omega t - \frac{2a}{a^2 + 1} \sin \omega t \right)$$

$$Y_s = -\frac{1}{2(a^2 + 1)} \left(\sin \omega t + \frac{2a}{a^2 + 1} \cos \omega t \right)$$

На профиле свободной поверхности в моменты времени $t = (\pi/2 + 2\pi l)/\omega$, где l – целое число в точке, соответствующей лагранжевой координате $a = 0$, образуются заострения. На профиле давления в данной точке в этот момент времени также появляется заострение. В противофазе $t = (3\pi/2 + 2\pi l)/\omega$, когда всплеск превращается во впадину, заострения ни у профиля, ни у распределения давления нет.

Эволюция формы свободной поверхности в рассмотренном примере хорошо согласуется с профилем бризера, полученным с помощью численных расчетов в рамках уравнения Эйлера [9]. В моменты времени $t = 2\pi l/\omega$ колеблющийся солитон имеет гладкую впадину и более острый всплеск, а с течением времени превращается в симметричный профиль с двумя впадинами и более острым гребнем. Подчеркнем, что в отличие от [9] решение (2.1) является вихревым. Его завихренность определяется равенством

$$\Omega = \frac{2\omega n^2 \beta^2}{[a^2 + (1 - b)^2]^{n+1} - n^2 \beta^2}$$

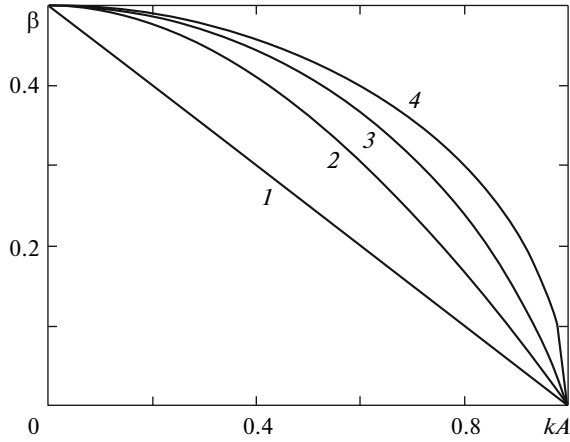
В отличие от волн Герстнера, где Ω выражается через экспоненциально убывающие функции, завихренность солитона зависит от координат полиномиально и спадает по мере удаления от него достаточно медленно.

3. Солитон на фоне однородного волнения. В решении (1.4) при заданной линейной функции G функция F может быть в достаточной степени произвольной. Для нее справедлив принцип суперпозиции: если выбрать F в виде суммы двух функций, то профиль свободной поверхности будет соответствовать наложению профилей, определяемых отдельными слагаемыми.

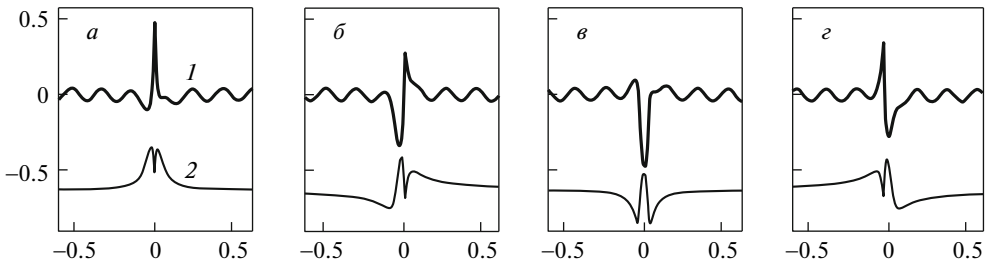
Выберем решение (1.4) в следующем виде:

$$W = \chi + \left(iA \exp(ik\chi^*) + \frac{\beta}{(\chi^* + i)^n} \right) \exp(-i\omega t) \tag{3.1}$$

Первое слагаемое в выражении для F соответствует волне Герстнера, а второе – солитонному решению (величину k здесь считаем безразмерной). Выражение (3.1) опи-



Фиг. 3. Граница области допустимых параметров для одиночного возвышения на фоне однородного волнения: 1 – $\beta = (1 + kA)/2$; 2–4 – $k = 1, 2, 3$



Фиг. 4. Профиль (1) и давление (2) для одиночного возвышения на фоне однородного волнения: $F = 0.04i \exp(i\chi^*) + 0.48/(\chi^* + i)^2$: а–г – $\omega t = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$

сывает одиночное возвышение на фоне стационарного волнения. Простая аналитическая оценка для области допустимых значений параметра β приводит к неравенству

$$\beta \leq (1 - Ak)/n \quad (3.2)$$

Более точные ограничения на величину β получаются с помощью численного расчета. На фиг. 3 изображены границы области параметров для значений β , как функции kA для случаев $k = 1, 2, 3$ и $n = 2$. Все они являются выпуклыми дугами, опирающимися на отрезок, задаваемый соотношением (3.2). Параметры, отвечающие этим кривым, дают решение с однократным заострением профиля в один из моментов времени в течение периода колебания.

На фиг. 4 представлены профиль свободной поверхности (1) и распределение давления (2) для случая $A = 0.04, k = 1, \beta = 0.48, n = 2$. При выбранных значениях параметров высота возвышения в момент $t = \pi/2\omega$ в 12 раз превышает уровень однородного волнения. Заострения на гребне при этом не будет. В общих чертах эволюция такого солитона схожа с поведением колеблющегося солитона при отсутствии однородного волнения (фиг. 1, 2). Вдали от солитона возмущение давления стремится к нулю как $1/a$. Оно в основном сосредоточено в области солитона. Давление изменяется в противофазе с изменением высоты профиля.

Данные на фиг. 4, демонстрирующие динамику одиночного возвышения на фоне герстнеровской волны, интерпретируются как вариант формирования и распада волны аномально большой амплитуды (волны-убийцы). Область резкого всплеска при этом соответствует локальному минимуму давления. Закон изменения давления в течение полного периода в области солитона носит довольно сложный характер, но существование решения вида (3.1) доказывает принципиальную возможность образования экстремальных волн под действием неоднородно распределенного давления на поверхности.

Как и в задаче с солитоном без волнения (фиг. 1, 2) перед возвышением имеется впадина, растущая в течение половины периода. Одиночный всплеск достаточно большой амплитуды с впадиной перед волной соответствует описанию так называемой “волны Лавренова” [10]. Впадина усиливает разрушительный эффект воздействия волны, поскольку судно зарывается носом во впадину, после чего подвергается удару волны аномальной высоты.

Добавлением в функцию F конечного числа слагаемых, имеющих полюс вне области течения, можно построить решение для цуга волн с любым наперед заданным числом максимумов. При этом очевидно, что характер изменения давления на поверхности будет тем сложнее, чем больше учитывается такого рода слагаемых.

4. Модель возникновения волны-убийцы. С качественной точки зрения все рассмотренные выше решения недостаточно точно описывают волну-убийцу, поскольку в этих случаях движение периодически и одиночный всплеск с течением времени превращается во впадину с глубиной, близкой к высоте всплеска.

Однако можно построить решение (1.2) с другим качественным поведением. Выбор подходящей функции $G(\chi)$, отличной от линейной, позволяет скомпенсировать впадину, формируемую слагаемым с функцией $F(\chi^*)$. Такого рода решение будет уже моделировать возникновение аномально высокой волны на фоне однородного волнения.

Рассмотрим птолемеевское решение следующего вида:

$$W = \chi + \frac{\beta_1}{(\chi - i)^n} + \left[iA \exp(ik\chi^*) + \frac{\beta_2}{(\chi^* + i)^n} \right] e^{-i\omega t} \quad (4.1)$$

Полюс функции $G(\chi)$ соответствует точке $b = 1$ и лежит вне области течения. В отличие от случая одиночного возвышения параметры β_1, β_2 не обязательно являются действительными числами. Аналитическая оценка на область допустимых значений параметров выглядит теперь так

$$|\beta_1| + |\beta_2| \leq (1 - Ak)/n$$

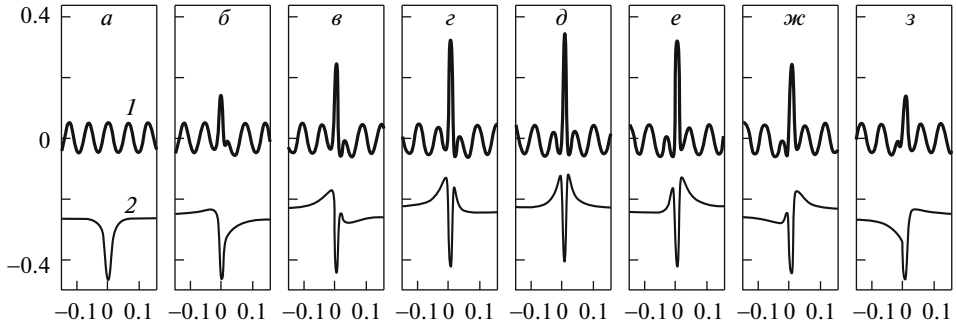
Если положить $|\beta_1| = |\beta_2| = \beta > 0$, то это условие переписывается следующим образом: $\beta \leq (1 - Ak)/(2n)$. Область допустимых значений β в решении (4.1) в два раза меньше, чем в случае одиночного возвышения (3.2).

Чтобы дополнительное слагаемое в функции $G(\chi)$ компенсировало впадину, следует считать n четным и положить

$$\beta_1 = (-1)^m ri, \quad r > 0, \quad m = n/2$$

Если $n = 2$, то $\beta_1 = -ri$, а предельная высота возмущения равна 2β .

При максимально возможном значении $\beta = (1 - Ak)/(2n)$ отношение максимальной высоты профиля к амплитуде однородного волнения достигает величины $(1/A - k)/n$, и может быть сколь угодно велико. Если величина kA стремится к единице, то макси-



Фиг. 5. Профиль (1) и давление (2) для модели возникновения anomalно высокой волны на фоне однородного волнения; $W = \chi - 0.2i/(\chi - i)^2 + [0.05i \exp(i\chi^*) + 0.2/(\chi^* + i)^2]e^{-i\omega t}$; $a-z - \omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$

мальная высота возмущения — к нулю. Таким образом, волна anomalно высокой амплитуды тем выше, чем меньше крутизна герстнеровской волны.

Фигура 5 представляет динамику одиночного возвышения для случая $A = 0.05$, $k = 1$, $\beta_1 = -0.2i$, $\beta_2 = 0.2i$, $n = 2$. В момент времени $t = 0$ возмущения нет, и профиль волны в точности повторяет профиль волны Герстнера. Далее с течением времени появляется небольшое возмущение, которое растет, достигая максимальной величины в момент времени $t = \pi/\omega$, после чего спадает до малой амплитуды и исчезает. Данное движение повторяется периодически, при этом волна anomalно высокой амплитуды не движется. Отношение максимальной высоты выплеска к амплитуде однородного волнения равно приблизительно пяти.

Характерная особенность распределения давления состоит в том, что на протяжении всего периода в точке возникновения волны-убийцы реализуется абсолютный минимум давления, причем амплитуда его “провала” остается практически неизменной. Со временем он становится уже, а на его краях вырастают два всплеска меньшего уровня (относительно постоянного значения, определяемого волной Герстнера). Такое поведение давления связано с выбором величины $k = 1$. При значениях k , отличающихся от этой величины, изменения давления носят более сложный, осциллирующий характер. При этом картина появления anomalно большой волны из герстнеровского волнения качественно остается прежней.

Построенные решения позволяют, в принципе, предположить, что одним из возможных механизмов появления волн-убийцы является наличие перепадов давления на свободной поверхности океана. Области пониженного давления способны сформировать на фоне однородного волнения выплески достаточной большой амплитуды.

Заключение. В рамках лагранжевого описания движения идеальной несжимаемой жидкости изучено семейство точных двумерных решений, моделирующих образование одиночных выплесков при неоднородном распределении давления на свободной поверхности. Проанализирован сценарий рождения волны anomalно большой амплитуды на фоне волны Герстнера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. Абрашкин А.А., Якубович Е.И. О плоских вихревых течениях идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 76–78.

3. *Абрашкин А.А., Якубович Е.И.* О нестационарных вихревых течениях идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1985. № 2. С. 57–64.
4. *Абрашкин А.А., Якубович Е.И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006. 175 с.
5. *Абрашкин А.А.* Нелинейные азимутальные волны в центрифуге // ПМТФ. 1984. № 3. С. 86–89.
6. *Абрашкин А.А.* Плоские нелинейные МГД-течения в круглом плазменном цилиндре в продольном магнитном поле // Физика плазмы. 1984. Т. 10. Вып. 4. С. 730–734.
7. *Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A.* Rogue Waves in the Ocean. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 216 p.
8. *Kharif C., Giovanangeli J.P., Touboul J., Grare L., Pelinovsky E.N.* Influence of wind on extreme wave events: experimental and analytical approaches // J. Fluid Mech. 2008. V. 594. P. 209–247.
9. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // Письма в ЖЭТФ. 2008. V. 88. № 5. P. 356–359.
10. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н.* Моделирование “волны Лавренова” на поверхности неглубокого моря // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2009. № 2 (4). С. 30–36.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
11.IV.2012