УДК 515.173 + 512.745

Гиперболические группы Шевалле в $\mathbb{C}^2$ [1]

О.В. Шварцман

I. Определения, результаты, обозначения, план статьи.

1. В комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^2$ рассмотрим эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$ и конус K:$|z_1|^2 - |z_2|^2 < 0$. Пусть $PK = K/\mathbb{C}^*$ проективизация конуса K. Область PK – это единичный диск $D = \{|\frac{z_1}{z_2}| < 1\}$ в проективном пространстве $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{C}^*$. В диске D имеется риманова метрика постоянной отрицательной кривизны, совместимая с его комплексной структурой.

2. Линейные преобразования из группы $GL(2, \mathbb{C})$, сохраняющие эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$, образуют унитарную группу $U(1,1)$. Унитарная группа сохраняет конус K. Проективная группа $PU(1,1)$ действует в $\mathbb{C}P^1$ дробно-линейными преобразованиями, сохраняя диск D. При этом проективная группа $PU(1,1)$ есть группа всех сохраняющих ориентацию движений гиперболической плоскости D (модель Пуанкаре в диске).

3. В дальнейшем образ линейной группы $\Gamma < U(1,1)$ в проективной группе $PU(1,1)$ будет обозначаться через $P\Gamma$ и называться материнской группой.

Определение. Дискретная группа $\Gamma < U(1,1)$ называется гиперболической группой Шевалле, если

1) факторпространство $K/\Gamma = \mathbb{C}^2 - \{0\}$ (изоморфизм комплексных многообразий)

2) группа $P\Gamma$ есть кокомпактная фуксова группа (т.е. дискретная группа сохраняющих ориентацию движений гиперболической плоскости D с компактным факторпространством $D/P\Gamma$).

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №07-01-00390

В дальнейшем прилагательное "гиперболическая" мы писать не будем.

4. Элемент $\gamma \in U(1,1)$ называется отражением, если у γ есть неподвижный вектор в конусе K. Известно (см. например [4]), что группа Шевалле Γ порождена отражениями.

Как следствие, группа $P\Gamma$ есть фуксова группа рода нуль, то есть риманова поверхность $D/P\Gamma$ есть сфера Римана $\mathbb{C}P^1$.

Обозначим через $(n_1, \ldots, n_s)$ порядки ветвления накрытия $D \to D/P\Gamma$. Набор $(n_1, \ldots, n_s)$ называется сигнатурой фуксовой группы $P\Gamma$ рода нуль. При этом, как известно, $\sum\limits_1^s 1/n_i < s-2$.

5. Главным результатом статьи является следующая теорема:

<u>Теорема 1</u>. Пусть $\Gamma < U(1,1)$ дискретная группа, порожденная отражениями, и $P\Gamma$ фуксова группа рода нуль с сигнатурой $(n_1, \ldots, n_s)$.

Группа Γ тогда и только тогда есть группа Шевалле, когда

$$\nu = 2\left((s-2) - \sum_1^s 1/n_i\right)^{-1} \text{- целое число} \qquad (*).$$

Следующий результат позволяет в принципе обозреть все группы Шевалле в $\mathbb{C}^2$.

<u>Теорема 2</u>. Рассмотрим в группе $U(1,1)$ множество всех дискретных подгрупп Γ, порожденных отражениями, с фиксированной фуксовой материнской группой T рода нуль.

Тогда

1) число таких групп Γ конечно

2) среди них имеется единственная максимальная группа Γ_T, которая содержит любую другую такую группу в качестве нормальной подгруппы конечного индекса.

Комментарий.

1) Важно подчеркнуть, что критерий $(*)$ в теореме 1 касается <u>любой</u> группы отражений Γ в $\mathbb{C}^2$ с данной материнской группой $P\Gamma$. Для <u>максимальной</u> же группы Γ_T он был получен совершенно другим способом в [6]. Таким образом, в данной статье мы обобщаем основной

результат работы [6], предлагая, в частности, и его независимое доказательство. Вместе с тем, в [6] остаются несколько лемм, ключевых для нашего доказательства теорем 1 и 2.

2) В эллиптическом случае, любая конечная линейная группа G в $\mathbb{C}^2$, порожденная отражениями (т.е. элементами, у которых есть собственное значение, равное единице), автоматически обладает тем свойством, что $\mathbb{C}^2 - \{0\}/G = \mathbb{C}^2 - \{0\}$. Это одна из формулировок теоремы Шевалле ([7]) для конечных групп, порожденных отражениями, в $\mathbb{C}^n$ (это обстоятельство и объясняет название рассматриваемых нами групп).

Теорема Шевалле утверждает, что $\mathbb{C}^n/G = \mathbb{C}^n$ для любой конечной линейной группы $G < GL(n, \mathbb{C})$, порожденной отражениями. В гиперболическом случае, всякая группа Шевалле порождена отражениями, но далеко не всякая группа, порожденная отражениями, есть группа Шевалле.

3) Условию $(*)$ удовлетворяет только конечное число сигнатур (см. [6]).

Теорема 1, Теорема 2 и Теорема 3 (параграф V) показывают, что множество групп Шевалле в $\mathbb{C}^2$ конечно и обозримо.

6. Договоримся:

а) через $\overline{\gamma}$ обозначать подъем элемента $\gamma \in P\Gamma$ в группу $U(1,1)$. Ясно, что любые два подъема отличаются множителем, по модулю равным 1

б) через l_x обозначать прямую в $\mathbb{C}^2$, соответствующую точке $x \in \mathbb{C}P^1$, а через $\overline{x}$ – любой ненулевой вектор, лежащий на l_x

в) через $Z(\Gamma)$ обозначать центр группы Γ

г) через (a, b) обозначать НОД(a, b), писать $a|b$, если a делит b, и обозначать через $\{a\}$ дробную часть числа a

д) через T или $T(n_1, \ldots, n_s)$ обозначать фуксову группу рода нуль с сигнатурой $(n_1, \ldots, n_s)$

е) называть группу, порожденную отражениями, группой отражений

з) всюду писать ν вместо числа $2\left((s-2)-\sum\limits_1^s 1/n_i\right)^{-1}$

ж) обозначать через W^* пространство расслоения W без нулевого сечения.

План статьи таков:

в II-V изучаются группы отражений Γ в конусе K с заданной материнской группой T и доказываются теоремы 2 и 3;

в VI мы напоминаем некоторые хорошо известные факты о Γ-расслоениях и начинаем подготовку к доказательству теоремы 1;

в VII собраны главные результаты о свободных коциклах, полученные в [7];

в VIII доказывается центральная теорема 1.

II. Канонический подъем эллиптических элементов, фуксовы группы рода нуль и максимальная группа Γ_T

1. Рассмотрим в группе $PU(1,1)$ эллиптический элемент A. У преобразования A есть в $\mathbb{C}P^1$ две неподвижные точки, одна из которых, назовем её x, лежит в диске D. Другая его неподвижная точка y лежит в дополнительном диске $\mathbb{C}P^1\setminus D$. Пусть в касательном пространстве диска в точке x элемент A действует умножением на $e^{i\varphi}$. Рассмотрим в группе $U(1,1)$ отражение $\overline{A}$, которое поточечно сохраняет прямую l_x, а на прямой l_y действует умножением на $e^{i\varphi}$. Такое отражение определено однозначно. Его порядок равен порядку эллиптического элемента A. Отражение $\overline{A}$ назовем каноническим подъемом элемента A.

2. Пусть $T=T(n_1,\dots,n_s)$, $n_i\geq 2$, $s\geq 3$.

Фундаментальная область для действия группы T в диске D может быть выбрана в виде такого выпуклого многоугольника P со сторонами $c_1,c_1',c_2,c_2',\dots,c_s,c_s'$ (следующими по часовой стрелке), что

(a) угол между сторонами c_i и c_i' равен $\frac{2\pi}{n_i}$;

(б) стороны c_i и c_i' отождествляются вращением A_i вокруг их общей вершины на угол $\frac{2\pi}{n_i}$ (против часовой стрелки);

(в) относительно порождающих A_i группа T имеет генетический код

$\langle A_1, \ldots, A_s | A_1^{n_1} = \ldots = A_s^{n_s} = 1, A_1 \ldots A_s = 1 \rangle$ [4].

Выберем в группе T такую каноническую систему образующих $A_1, \ldots, A_s$. Через Γ_T обозначим группу, порожденную отражениями $\langle \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_s} \rangle$. По построению, $P\Gamma_T = T$.

Следующая лемма доказана в [6].

Лемма 2.1.

1) Группа Γ_T является дискретной подгруппой, порожденной отражениями, в группе $U(1,1)$.

2) Любое отражение из группы Γ_T сопряжено ровно одному отражению вида $\overline{A_i}^{k_i}$ ($i = 1, \ldots, s$), $0 \leq k_i < n_i$.

Последнее утверждение этой леммы позволяет дать инвариантное описание группы Γ_T, как подгруппы в $U(1,1)$, порожденной каноническими подъемами всех эллиптических элементов из группы T.

3. В лемме 2.2 собраны важные для дальнейшего свойства группы Γ_T, доказанные в [6].

Лемма 2.2.

1) Центр $Z(\Gamma_T)$ конечен, состоит из скалярных матриц и порождается элементом

$z = \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_s} = e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\nu}} E.$

2) Относительно порождающих $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_s}$, группа Γ_T имеет код

$\overline{A_1}^{n_1} = \ldots = \overline{A_s}^{n_s} = 1$, $[\overline{A_i}, \overline{A_1} \ldots \overline{A_s}] = 1$, $i = 1, \ldots, s$, $(\overline{A_1} \ldots \overline{A_s})^{|Z(\Gamma_T)|} = 1$.

III. Группы отражений Γ, содержащиеся в группе Γ_T и обладающие той же материнской группой T

Лемма 3.1. Пусть Γ группа отражений, $\Gamma \leq \Gamma_T$ и $P\Gamma = T$.

Тогда:

1. $Z(\Gamma) = \Gamma \cap Z(U(1,1))$

2. группа Γ нормальна в Γ_T и $\Gamma_T/\Gamma = Z(\Gamma_T)/Z(\Gamma)$.

Доказательство. Центр группы $U(1,1)$ состоит из скалярных матриц вида

λE, $|\lambda| = 1$. Поэтому, $T = \Gamma/\Gamma \cap Z(U(1,1))$. Но, так как центр группы T тривиален ([4]), то $Z(\Gamma) = \Gamma \cap Z(U(1,1))$. Таким образом, $Z(\Gamma) = Z(\Gamma_T) \cap \Gamma$. Кроме того, $P\Gamma_T = P\Gamma = T$. Следовательно, $\Gamma_T = Z(\Gamma_T) \cdot \Gamma$, что и доказывает оба утверждения п.2. $\blacksquare$

IV. Доказательство теоремы 2

Из инвариантного описания группы Γ_T (см. II.2) сразу следует утверждение о включении $\Gamma \leq \Gamma_T$. В самом деле, все отражения из группы Γ лежат в Γ_T. Нормальность группы Γ доказана в лемме 3.1, а конечность индекса $[\Gamma_T : \Gamma]$ следует из конечности центра $Z(\Gamma_T)$ (Лемма 2.2) $\blacksquare$.

Для доказательства теоремы 1 полезно иметь дополнительную информацию о том, как нормальная подгруппа Γ расположена в максимальной группе Γ_T.

V. Γ как нормальная подгруппа в Γ_T

Теорема 3. Пусть Γ группа отражений, $\Gamma \lhd \Gamma_T$ и $P\Gamma = T$. Тогда Γ есть нормальное замыкание в Γ_T коллекции отражений $\{\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_i}^{l_i}, \ldots, \overline{A_j}^{l_j}, \ldots \overline{A_s}\}$, $1 \leq i < j \leq s$, $1 \leq l_i \leq n_i$, $1 \leq l_j \leq n_j$, $(l_i, l_j) = 1$ и $l_i | n_i$, $l_j | n_j$ (равенство $l_i = n_i$ означает, что отражение $\overline{A_i}$ в коллекции отсутствует).

Доказательство. Фактически это утверждение о свойстве группы T, которое удобно сформулировать в виде отдельной леммы.

Лемма 5.1. Пусть группа $T = T(n_1, \dots, n_s)$ нормально порождена коллекцией эллиптических элементов $\{{A_1}^{k_1}, \dots, {A_s}^{k_s}\}$, $k_i \geq 1$ (см. II.2).

Тогда

1. Среди чисел (n_i, k_i), $i = 1, \dots, s$, имеется не более двух, больших единицы

2. Числа (n_i, k_i) и (n_j, k_j), при $i \neq j$, взаимно просты

Доказательство Леммы 5.1. Известно (см. например [4]), что группа с генетическим кодом

$\langle x_1, \dots, x_s | {x_1}^{t_1} = \dots {x_s}^{t_s} = 1, x_1 \dots x_s = 1\rangle$ нетривиальна для любого целочисленного набора $(t_1, \dots, t_s)$, $t_i > 1$, длина которого больше двух. Если же $s = 2$, то группа с таким кодом изоморфна циклической группе порядка $d = (t_1, t_2)$.

Через T' обозначим нормальное замыкание в группе T коллекции элементов $\{{A_1}^{k_1}, \dots, {A_s}^{k_s}\}$. По условию $T' = T$. С другой стороны, фактор-группа T/T' имеет код (см.II.2)

$$\langle \widetilde{A_1}, \dots, \widetilde{A_s} | \widetilde{A_1}^{(n_1,k_1)} = \dots = \widetilde{A_s}^{(n_s,k_s)} = 1, \widetilde{A_1}, \dots, \widetilde{A_s} = 1\rangle$$

Но такая группа тривиальна только в том случае, если все показатели (n_i, k_i) равны 1, кроме, быть может, двух, которые должны быть взаимно-просты, ч.т.д. ■

Приступим к доказательству теоремы 3. Нормальная подгруппа Γ порождается отражениями. Тогда, ввиду леммы 2.1, п.2, группа Γ нормально порождается коллекцией отражений $\{\overline{A_1}^{k_1}, \dots, \overline{A_s}^{k_s}\}$, $k_i \geq 1$.

Следовательно, группа T нормально порождается коллекцией $\{{A_1}^{k_1}, \dots, {A_s}^{k_s}\}$, которую по лемме 5.1 можно заменить коллекцией

$\{A_1, \dots, {A_i}^{l_i}, \dots, {A_j}^{l_j}, \dots, A_s\}$, $l_i = (n_i, k_i)$, $l_j = (n_j, k_j)$.

По тем же причинам коллекцию $\{\overline{A_1}^{k_1}, \dots, \overline{A_s}^{k_s}\}$ можно заменить обещанной коллекцией отражений $\{\overline{A_1}, \dots, \overline{A_i}^{l_i}, \dots, \overline{A_j}^{l_j}, \dots, \overline{A_s}\}$. ■

Итак, пусть подгруппа отражений Γ нормально порождается коллекцией отражений $\langle\overline{A_1}, \dots, \overline{A_i}^{l_i}, \dots, \overline{A_j}^{l_j}, \dots, \overline{A_s}\rangle$ из теоремы 3. Вычислим порядок центра $|Z(\Gamma)|$ и индекс $[\Gamma_T : \Gamma]$. Пусть порядок центра группы Γ_T равен M.

Лемма 5.2.

1) $|Z(\Gamma)| = M/(M, l_i l_j) = M/(M, l_i)(M, l_j)$.

2) $[\Gamma_T : \Gamma] = (M, l_i)(M, l_j)$

Доказательство. Воспользовавшись кодом группы Γ_T относительно образующих $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_s}$ из леммы 2.2 п.3, найдем, что абелева фактор-группа Γ_T/Γ имеет код

$\langle\widetilde{A_i}, \widetilde{A_j} | \widetilde{A_i}^{l_i} = 1, \widetilde{A_j}^{l_j} = 1, (\widetilde{A_i}\widetilde{A_j})^M = 1\rangle$.

Элементарное вычисление показывает, что имеется эквивалентный код вида $(M, l_i)\widetilde{A_i} = 0$, $(M, l_j)\widetilde{A_j} = 0$, то есть перед нами циклическая группа порядка $(M, l_1)(M, l_2)$. А первое утверждение леммы прямо следует из леммы 3.1 п.2. ■

VI. О действии группы Γ в конусе K.

Здесь собраны нужные нам факты, которые касаются действия в конусе K дискретной линейной группы $\Gamma < U(1,1)$, не обязательно порожденной отражениями, но с кокомпактной материнской фуксовой группой $P\Gamma$.

1. Через L обозначим тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^1$, ограниченное на диск D. В пространстве L^* естественно действует группа $U(1,1)$ и, автоматически группа Γ. Введём в L^* глобальные координаты $z = \frac{z_1}{z_2}$ и $w = z_2$, $z \in D$, $z_2 \in \mathbb{C}$. В этих координатах действие элемента $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) < U(1,1)$ задается формулой

$$\gamma(z, w) = \left(\frac{az+b}{cz+d}, (cz+d)w\right) \qquad (**)$$

2. При доказательстве теоремы 1 нам понадобится расслоение $U = L^{\otimes|Z(\Gamma)|}$. Оно является естественным $P\Gamma$-расслоением над диском D: если $\overline{\gamma} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, а $z = z_1/z_2$, $u = w^{|Z(\Gamma)|}$ – координаты в U^*, то действие элемента $\gamma \in P\Gamma$ в U^* выглядит так

$$\gamma(z,u) = \left(\tfrac{az+b}{cz+d}, (cz+d)^{|Z(\Gamma)|}u\right) \qquad (1)$$

3. Известно, что каждое линейное голоморфное $P\Gamma$-расслоение U над диском D изоморфно $P\Gamma$-расслоению $W(a)$, которое следующим образом строится по заданному коциклу $a(\gamma, z)$, $\gamma \in P\Gamma$, $z \in D$, группы $P\Gamma$: в произведении $D \times \mathbb{C}$ группа $P\Gamma$ действует по формуле

$$\gamma(z,u) = \big(\gamma(z), a(\gamma,z)u\big), \quad \gamma \in P\Gamma,\ z \in D,\ u \in \mathbb{C} \qquad (2)$$

Коцикл a подчиняется условию $a(\gamma_1\gamma_2, z) = a(\gamma_1, \gamma_2 z)a(\gamma_2, z)$, а потому указанная формула корректно определяет действие группы $P\Gamma$. Если коциклы a и a' эквивалентны, то расслоения $W(a)$ и $W(a')$ изоморфны. Таким образом, $P\Gamma$-расслоение над диском D задается (с точностью до изоморфизма) классом $[a]$ коцикла a, то есть элементом группы $H^1(P\Gamma, O_D^*)$ [3].

4. Сравнение формул (1) и (2) показывает, что $P\Gamma$-расслоение U задается классом коцикла $a(\gamma, z) = (cz+d)^{|Z(\Gamma)|}$.

5. Рассмотрим пару $(P\Gamma, a)$, состоящую из фуксовой группы $P\Gamma$ и её коцикла a. Голоморфная в диске D функция $f(z)$ называется $(P\Gamma, a)$-автоморфной формой веса i, если она удовлетворяет уравнению $f(\gamma z) = a(\gamma, z)^i f(z)$. Через $A_i(a)$ обозначим пространство автоморфных форм веса i, и пусть $A(a) = \bigoplus_{i\geq 0} A_i(a)$ градуированная алгебра $(P\Gamma, a)$ автоморфных форм. Через $A_+(a)$ обозначим её единственный максимальный идеал.

VII. Группа классов коциклов и описание свободных коциклов

В этом параграфе мы рассматриваем фуксову группу $T = T(n_1, \dots, n_s)$ рода нуль.

1. Обозначим через C множество всех рациональных наборов $x = (x_0, x_1, \dots, x_s)$ специального вида: у такого набора координата x_0 целочисленна, а координата x_i, при $i > 0$,

является неотрицательной правильной дробью (возможно сократимой) со знаменателем n_i.

Два таких набора x и x' мы будем складывать покоординатно по такому правилу

$$x + x' = (x_0 + x_0' + q, \{x_1 + x_1'\}, \dots \{x_s + x_s'\}),$$

где q – число ненулевых разрядов, в которых произошло переполнение (случилось так, что $x_i + x_i' \geq 1$).

Множество C с такой операцией сложения является абелевой группой, и верно следующее утверждение:

Утверждение 7.1 (см. например [9]). Группа $H^1(T, O_D{}^*)$ классов коциклов группы T (со значениями в группе обратимых голоморфных в диске D функций) изоморфна группе C. Изоморфизм осуществляется путем сопоставления каждому классу $[a]$ его кода $(\mathrm{Ch}a, \frac{d_1}{n_1}, \dots, \frac{d_s}{n_s})$ из группы C.

Нулевая координата $\mathrm{Ch}a$ называется числом Черна коцикла a.

2. Геометрический смысл числа d_i таков: в T-расслоении $W(a)$ элемент $A_i \in T$ действует в слое W_{a_i} (над его неподвижной точкой $a_i \in D$) умножением на $e^{2\pi\sqrt{-1}d_i/n_i}$ (II, п.2).

3. Пример. Код классического коцикла $j^{-1}(t, z) = \frac{(cz+d)^2}{\det\bar{t}}$, где $\bar{t} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in U(1,1)$, равен $\left(-2; \frac{n_1 - 1}{n_1}, \dots, \frac{n_s - 1}{n_s}\right)$.

4. Назовем коцикл a свободным, если алгебра автоморфных форм $A(a)$ – это алгебра многочленов от двух переменных.

В статье [6] доказано следующее важное для нас утверждение.

Утверждение 7.2. Коцикл a свободен тогда и только тогда, когда код его класса $[a]$ совпадает с одним из трех (взаимно-исключающих) типов:

0) $(1; 0, \dots 0)$

1) $(0, 0, \dots, \frac{d_i}{n_i}, \dots 0)$, $d_i \neq 0$, $i > 0$, $d_i | n_i$

2) $(-1, 0, \dots, \frac{d_i}{n_i}, \dots, \frac{d_j}{n_j}, \dots, 0)$, $i, j > 0$, $d_i \neq 0$, $d_j \neq 0$, и $\frac{d'_i}{n'_i} + \frac{d'_j}{n'_j} = 1 + \frac{1}{n'_i n'_j}$ (здесь $\frac{d'_i}{n'_i}$ – несократимая запись дроби $\frac{d_i}{n_i}$).

VIII. Доказательство теоремы 1

Пусть $\Gamma \leq \Gamma_T$ – группа отражений, $P\Gamma = T(n_1 \dots, n_s)$.

1. Отождествим конус K с пространством L^*. Переход от L^* к L^*/Γ осуществим в два этапа. Сначала перейдем к факторпространству $L^*/Z(\Gamma)$. Легко понять, что $L^*/Z(\Gamma) = U^*$.

Практически этот переход означает замену координаты w в слое $\mathbb{C}^*$ координатой $u = w^{|Z(\Gamma)|}$ (см. VI.2). В пространстве U^* продолжает действовать группа T, и это действие задается коциклом $a(t, z) = (cz + d)^{|Z(\Gamma)|}$ (см. VI.4).

2. Кроме группы T в пространстве U^* действует группа $\mathbb{C}^*$: $\alpha(z, w) = (z, \alpha w)$, $(z, w) \in U^*$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, и эти действия перестановочны. Обозначим через $\mathcal{F}_i$ пространство T-инвариантных, голоморфных, однородных по w функций в U^* степени однородности $-i$.

Рассмотрим градуированную алгебру $\mathcal{F} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{F}_i$. Прямая проверка показывает, что отображение, которое каждой (T, a) автоморфной форме $f(z)$ веса i ставит в соответствие функцию $f(z) \cdot w^{-i}$, есть изоморфизм градуированных алгебр $A(a)$ и $\mathcal{F}$.

С другой стороны, алгебра $\mathcal{F}$ – это градуированная (степенью однородности) алгебра голоморфных функций на пространстве U^*/Γ. Известно (см, например, [2], [11]), что $U^*/T = \mathrm{Spec}\mathcal{F} - \{\mathcal{F}_+\}$, если градуированная алгебра $\mathcal{F}$ конечного типа и $\dim\mathcal{F}_i = O(i)$. Как следствие всего сказанного, мы получаем следующее утверждение: фактор-пространство U^*/T тогда и только тогда будет изоморфно $\mathbb{C}^2 - \{0\}$, когда алгебра автоморфных форм $A(a)$ свободна, т.е. когда коцикл a является свободным коциклом.

3. Итак, для доказательства теоремы нам достаточно проверить, что коцикл $a(t, z) = (cz + d)^{|Z(\Gamma)|}$ тогда и только тогда свободен, когда выполняется условие $(*)$.

Идентификацию коцикла $a(t, z) = (cz+d)^{|Z(\Gamma)|}$ с коциклом одного из трех типов, указанных в Утверждении 7.2, мы начнем с его "дробной части". С этой целью изучим действие группы T в слоях U^* над неподвижными точками.

По теореме 3 (см. V) группа Γ есть нормальное замыкание в Γ_T коллекции отражений $\{\overline{A_1}, \dots, \overline{A_i}^{l_i}, \dots, \overline{A_j}^{l_j}, \dots, \overline{A_s}\}$, $(l_i, l_j) = 1$, $l_i | n_i$, $l_j | n_j$. Заметим, что действие элемента A_i в слое U_{a_i} расслоения $U = L^{\otimes |Z(\Gamma)|}$ полностью определяется тем, как в слое L_{a_i} расслоения L действует <u>любой</u> подъем элемента A_i в группу Γ. Причина этого состоит в том, что два любых таких подъема отличаются на элемент из центра группы Γ. Но такой элемент действует в пространстве U тождественно. Если $k \neq i, j$, то элемент A_k поднимается в группу Γ отражением $\overline{A_k}$. Следовательно, если $k \neq i, j$, то в слое расслоения U над точкой $a_k \in D$ элемент A_k действует тождественно. Выясним, как действуют оставшиеся элементы A_i и A_j в соответствующих слоях. Для этого построим их удобные подъемы в группу Γ.

По лемме 2.2 центр группы Γ_T порожден элементом $z = \overline{A_1}, \dots, \overline{A_s}$. Пусть порядок центра $Z(\Gamma_T)$ равен M. Тогда $z = e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}\tau}{M}}$, где $(\tau, M) = 1$. Согласно китайской теореме об остатках существует такая единственная пара целых чисел (P, Q), что

$$0 < P \leq (M, l_i)(M, l_j), \qquad 0 < Q \leq (M, l_i)(M, l_j)$$

$$P \equiv -1 \mod (M, l_i) \qquad P \equiv 0 \mod (M, l_j)$$

$$Q \equiv 0 \mod (M, l_i) \qquad Q \equiv -1 \mod (M, l_j)$$

Лемма 8.1. Элемент $\overline{A_i} z^P$ (соотв $\overline{A_j} z^Q$) служит подъемом элемента A_i (соотв. A_j) в группу Γ.

<u>Доказательство</u>. Проверим, например, что $\overline{A_i} z^P \in \Gamma$. Для этого рассмотрим естественный гомоморфизм φ: $\Gamma_T \to \Gamma_T / \Gamma$, и пусть $\varphi(\overline{A_i}) = \widetilde{A_i}$. Тогда $\varphi(\overline{A_i} z^P) = \widetilde{A_i}(\widetilde{A_i}\widetilde{A_j})^P = \widetilde{A_i}^{1+P}\widetilde{A_j}^P$. Но $(M, l_i)\widetilde{A_i} = 0$ и $(M, l_j)\widetilde{A_j} = 0$ (см. доказательство леммы 5.2). Следовательно $\varphi(\overline{A_i} z^P) = 0$, что и требовалось доказать ■.

Если теперь учесть, что $|Z(\Gamma)| = \frac{M}{(M, l_i)(M, l_j)}$ (лемма 5.2), то элементарное вычисление показывает, что A_i (соотв. A_j) в слое U_{a_i} (соотв. U_{a_j}) действует умножением на $\alpha_i = e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}P\tau}{(M,l_i)(M,l_j)}}$ (соотв. $\alpha_j = e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}Q\tau}{(M,l_i)(M,l_j)}}$).

Далее возможны три случая

1) $(M, l_i) = (M, l_j) = 1$

2) Одно из чисел, скажем $(M, l_i) = 1$, а другое $(M, l_j) > 1$.

3) Оба числа (M, l_i) и (M, l_j) больше единицы.

Мы ограничимся проверкой того, что в наиболее хлопотном случае 3) условие $(*)$ необходимо и достаточно для того, чтобы коцикл a был коциклом второго типа из Утверждения 7.2.

Положим $P' = \frac{-P}{(M,l_j)}$ и $Q' = \frac{-Q}{(M,l_i)}$. Пусть $\frac{P'\tau}{(M,l_i)} = N_i + \frac{c_i}{(M,l_i)}$, где $1 \leq c_i < (M, l_i)$, а числа c_i и (M, l_i) взаимно просты. Тогда $\alpha_i = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}c_i}{(M,l_i)}}$. Кроме того,

$(M, l_j)c_i \equiv \tau(\mod (M, l_i))$.

Аналогично, $\alpha_j = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}c_j}{(M,l_j)}}$, $1 \leq c_j < (M, l_j)$, $(c_j, (M, l_j)) = 1$ и $(M, l_i)c_j \equiv \tau(\mod (M, l_j))$.

Итак, мы получили, что код коцикла a имеет следующий вид (напомним, что $l_i|n_i$, $l_j|n_j$)

$$\left(x, 0, \ldots, \frac{c_i}{(M,l_i)}, \ldots, \frac{c_j}{(M,l_j)}, 0, \ldots 0\right).$$

Пусть коцикл a оказался коциклом второго типа. Это означает, что $x = -1$ и $\frac{c_i}{(M,l_i)} + \frac{c_j}{(M,l_j)} = 1 + \frac{1}{(M,l_i)(M,l_j)}$.

Теперь воспользуемся тем обстоятельством, что коцикл a соизмерим с классическим коциклом j^{-1}. А именно, рассмотрим коцикл $a^{2n_1n_2\ldots n_s(M,l_i)(M,l_j)}$. Вспоминая, что коцикл $a(t, z) = (cz + d)^{|Z(\Gamma)|}$, а коцикл $j^{-1}(t, z) = \frac{(cz+d)^2}{\det \bar{t}}$ получаем (с учетом Леммы 5.2), что

$$a^{2n_1\ldots n_s(M,l_i)(M,l_j)} = (cz + d)^{2n_1\ldots n_s M} = \left(\frac{(cz+d)^2}{\det \bar{t}}\right)^{n_1\ldots n_s M} = (j^{-1})^{n_1\ldots n_s M}$$

(последнее равенство есть следствие того обстоятельства, что в группе Γ_T, а, следовательно, и в группе Γ, определитель любого элемента в степени $n_1 \ldots n_s$ равен 1).

Осталось сравнить коды коциклов, стоящих в правой и левой частях равенства. Код коцикла $a^{2n_1\dots n_s(M,l_i)(M,l_j)}$ равен $(2n_1\dots n_s,0,0,\dots,0)$.

А код коцикла $(j^{-1})^{n_1\dots n_s M}$ (см. VII, п.3) равен $\big((n_1,\dots,n_s)M\big((s-2)-\sum\limits_{i=1}^{s}1/n_i\big),0,\dots,0\big)$. Следовательно, $M=\frac{2}{\left((s-2)-\sum 1/n_i\right)}$, то есть ν – целое число. Наоборот, пусть ν – целое число, равное M. Тогда M есть порядок центра $Z(\Gamma_T)$ и, следовательно, $\tau=1$ (Лемма 2.2). Возвращаясь к коду коцикла a, имеем

$\frac{c_i}{(M,l_i)}+\frac{c_j}{(M,l_j)}=\frac{c_i(M,l_j)+c_j(M,l_i)}{(M,l_i)(M,l_j)}$.

Так как $\tau=1$, то $c_i(M,l_j)\equiv 1(\mod (M,l_i))$ и $c_j(M,l_i)\equiv 1(\mod (M,l_j))$.

В числителе дроби справа стоит число, большее единицы, но меньшее, чем $2(M,l_i)(M,l_j)$. При делении на каждое из двух взаимно простых чисел (M,l_i) и (M,l_j) это число дает в остатке 1. Следовательно, оно равно $1+(M,l_i)(M,l_j)$. Остается проверить, что $\mathrm{Ch}(a)=-1$. Если $\mathrm{Ch}(a)=x$, то, повторяя уже проделанное сравнение чисел Черна степеней коцикла a и классического коцикла j^{-1}, найдем, что $x(M,l_i)(M,l_j)+1+(M,l_i)(M,l_j)=1$, т.е. $x=-1$.

Теорема 1 доказана. ■

Я благодарю Э.Б. Винберга за интерес к работе и ценные обсуждения её результатов.

Шварцман О.В.

Московский Независимый Университет

E-mail: ossip@mccme.ru

Литература

1. Винберг Э.Б. Гиперболические группы отражений. УМН, 40, N1, 29-64 (1985)

2. Долгачев И.В. Автоморфные формы и квазиоднородные особенности. Функц. анализ и его прил., 9, вып.2, 67-68 (1975)

3. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. ИЛ, М. (1961)

4. Цишанг Х, Фогт Э, Колдвай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. М., Наука (1988)

5. Шварцман О.В. О коциклах групп комплексных отражений и сильной односвязности фактор-пространств. Вопросы теории групп и гомологической алгебры, Ярославль, стр.32-39 (1991)

6. Шварцман О.В. О фуксовых группах рода нуль. Функц. анализ и его прил., 28, вып.4, 66-73 (1994)

7. Шварцман О.В. Свободные алгебры автоморфных форм на верхней полуплоскости. Функц. анализ и его прил., 37, вып.2, 147-154 (2003)

8. Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections. Amer.J.Math., 77, 778-782 (1955)

9. Dolgachev I. Invariant stable bundles over modular curves $X(p)$. Contemporary Math., 224, 65-69 (1999)

10. J. Milnor On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p,q,r)$. Ann. Math. Studies, 84, 175-225 (1975)

11. Pinkham H. Normal surface Singularities with C^* Action. Math. Ann, 227, 183-193 (1977)

12. Shephard G., Todd J. Finite unitary reflection groups. Can. J. Math., v.25, 159-198 (1954)