

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 681.5

**УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ  
ЗА СЧЕТ ВВЕДЕНИЯ В УПРАВЛЯЮЩЕЕ  
УСТРОЙСТВО ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ЗВЕНА КОРРЕКЦИИ**

© 2011 г. М. Г. Зотов

Москва, МИЭМ (технический ун-т)

Поступила в редакцию 08.09.10 г.

Показано, что при конструировании оптимального управляющего устройства в классе структур со звеном коррекции, определяемым из дополнительного условия, можно добиться существенного улучшения качества функционирования системы.

**Введение.** Рассмотрим схему, приведенную на рис. 1: УУ – двухканальное управляющее устройство;  $A_1(s)$  – передаточная функция УУ для задающего воздействия  $g_1(t)$ ;  $A_2(s)$  – передаточная функция УУ относительно выхода объекта управления  $y(t)$  (знак минус перед  $A_2(s)$  указывает на отрицательность обратной связи);  $W_0(s)$  – передаточная функция объекта управления;  $u(t)$  – управление;  $g_2(t)$  – наложенная на управление  $u(t)$  помеха.

Практика проектирования и эксплуатации систем управления показала полезность использования УУ различной конфигурации. Некоторые из них получили даже специальные названия [1]: обычное УУ

$$A_1(s) = A_2(s) = W_1(s); \quad A_1(s) = W_1(s), \quad A_2(s) = W_1(s)W_2(s);$$

УУ с внутренней обратной связью

$$A_1(s) = A_2(s) = W_1(s)/(1 + W_1(s)W_2(s));$$

разомкнуто-замкнутое УУ

$$A_1(s) = W_1(s) + W_2(s); \quad A_2(s) = W_1(s).$$

В рассмотренных соотношениях  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  – передаточные функции звеньев коррекции.

Методика конструирования других возможных структур УУ приведена в [2], где показана их принадлежность к трем классам:

с недостаточным числом звеньев коррекции, где выполняются соотношения

$$A_1(s) = F_1(W_1(s)), \quad A_2(s) = F_2(W_1(s)).$$

Как видно, передаточные функции каналов УУ связаны выражением

$$A_1(s) = F_3(A_2(s)).$$

Если количество звеньев коррекции увеличить до двух, то

$$A_1(s) = F_1(W_1(s), W_2(s)), \quad A_2(s) = F_2(W_1(s), W_2(s)).$$

В отличие от класса структур с недостаточным числом звеньев коррекции, где передаточные функции УУ  $A_1(s)$  и  $A_2(s)$  жестко связаны, в классе структур с достаточным числом звеньев коррекции такая связь отсутствует, что положительно сказывается на характеристиках проектируемой системы, кроме, пожалуй, показателя сложности. В приведенных соотношениях функции  $F_1$  и  $F_2$  раскрывают характер зависимостей  $A_1(s)$  и  $A_2(s)$  от передаточных функций звеньев коррекции,  $F_3$  описывает связь  $A_1(s)$  и  $A_2(s)$ . Передаточные функции  $A_1(s)$  и  $A_2(s)$  находятся из условия оптимума критерия, оценивающего качество системы. При конструировании УУ с недостаточным числом звеньев коррекции при оптимизации критерия необходимо учитывать ограничение  $A_1(s) = F_3(A_2(s))$ , что ухудшает оптимальное значение критерия. Кроме того, в УУ могут быть вве-

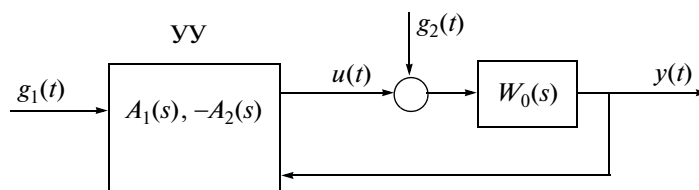


Рис. 1

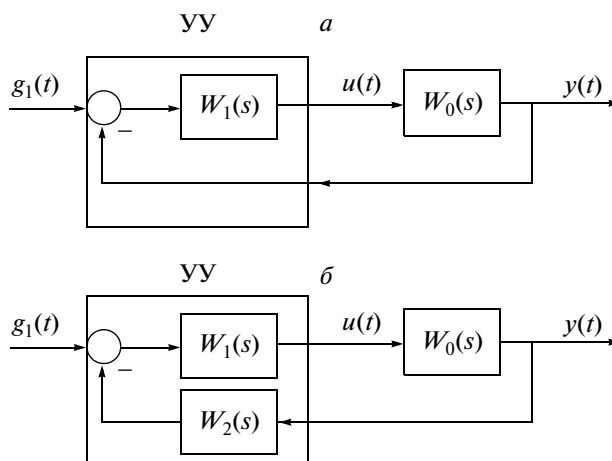


Рис. 2

дены звенья коррекции, определяемые из дополнительных условий. Такие УУ образуют класс устройств со звеньями коррекции, выбираемыми из дополнительных условий. Математические модели УУ с одним звеном  $W_i^{\Delta}(s)$  могут иметь вид

$$A_1(s) = F_1(W_1(s), W_2^{\Delta}(s)), \quad A_2(s) = F_2(W_1(s), W_2^{\Delta}(s)),$$

$$A_1(s) = F_1(W_1(s), W_2(s), W_3^{\Delta}(s)), \quad A_2(s) = F_2(W_1(s), W_2(s), W_3^{\Delta}(s)).$$

В [3] для класса структур с недостаточным числом звеньев коррекции было показано, что структура УУ оказывает существенное влияние на качество оптимальной системы управления. В настоящей статье рассмотрен способ улучшения качества системы за счет введения звена коррекции, выбираемого из дополнительного условия.

**1. Решение задачи.** Алгоритм построения и сравнительную оценку полезности использования УУ со звеном коррекции, выбираемым из дополнительного условия, продемонстрируем на примерах. Алгоритмы конструирования реализованы с применением методик из [2].

**Пример 1.** Объект управления описывается передаточной функцией

$$W_0(s, a) = \frac{Q_0(s, a)}{P_0(s, a)} = \frac{1+a}{s-a}, \quad a \geq 0.$$

Далее для простоты записи параметр  $a$  в соотношениях опущен.

Задана структура УУ:  $A_1(s) = A_2(s) = W_1(s)$ . Схема системы с таким УУ приведена на рис. 2, а. Желаемая передаточная функция относительно задающего воздействия  $g_1(t)$  – фильтр Баттерворта первого порядка

$$P_1(s) = \frac{3}{s+3}.$$

Необходимо сконструировать реализуемое УУ, обеспечивающее максимальную близость действительной передаточной функции системы относительно задающего воздействия

$$\tilde{H}(s) = \frac{A_2(s)W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)} = \frac{W_1(s)W_0(s)}{1 + W_1(s)W_0(s)}$$

к желаемой функции  $P_1(s)$ . Это обычная классическая задача по конструированию оптимального УУ. Из сформулированной постановки задачи следует функционал

$$I_{11} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |P_1(s) - \tilde{H}(s)|^2 ds + \lambda_{20} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |\tilde{H}(s)|^2 ds - \rho_1 \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}(-s) \frac{1}{s+a} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}(s) \frac{1}{-s+a} ds - 2 \right).$$

Его первая составляющая оценивает близость желаемой и действительной передаточных функций. Ограниченность второй составляющей гарантирует реализуемость звена коррекции  $W_1(s)$ . Численная величина этой составляющей характеризует качество переходного процесса [4]. Последнее слагаемое есть ограничение на компенсацию передаточной функцией УУ, определяемого соотношением

$$A_2(s) = W_1(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))},$$

полюса передаточной функции объекта управления, лежащего в правой полуплоскости. В Приложении приведен вывод этой составляющей.

Минимум функционала достигается, если искомая передаточная функция удовлетворяет уравнению Винера–Хопфа

$$(1 + \lambda_{20})\tilde{H}(s) - P_1(s) - \rho_1 \frac{1}{s+a} = \Gamma(s),$$

где  $\lambda_{20}$  – весовой множитель,  $\rho_1$  – множитель Лагранжа, здесь и далее  $\Gamma(s)$  – функция с полюсами из правой полуплоскости. Из уравнения видно, что ограничение на реализуемость может быть опущено. Решая уравнение при  $\lambda_{20} = 0$ , найдем

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)} = \frac{(\rho_1 + 3)s + 3(\rho_1 + a)}{(s + 3)(s + a)}.$$

Множитель Лагранжа ищется из условия

$$\tilde{N}(s) - \tilde{M}(s)|_{s=a} = 0, \quad \rho_1 = 2a^2/(a + 3).$$

Тогда

$$\tilde{H}(s) = \frac{(2a^2 + 3a + 9)s + 9a(a + 1)}{(a + 3)(s + a)(s + 3)},$$

$$A_2(s) = W_1(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))} = \frac{(2a^2 + 3a + 9)s + 9a(a + 1)}{(a + 1)((a + 3)s + 6a)}.$$

Оценка близости действительной передаточной функции  $\tilde{H}(s, a)$  к желаемой  $P_1(s)$  определяется соотношением

$$I_{21} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |P_1(s) - \tilde{H}(s)|^2 ds = \frac{2|a|^3}{(a + 3)^2}. \quad (1.1)$$

Из полученной оценки следует: с увеличением параметра  $a$  оценка близости стремится к бесконечности. Нулевое значение оценки достигается, если  $a = 0$ , однако в этом случае

$$\tilde{H}(s)|_{a=0} = \frac{9s}{3s(s + 3)} = \frac{3}{s + 3}, \quad W_1(s)|_{a=0} = \frac{9s}{3s} = 3,$$

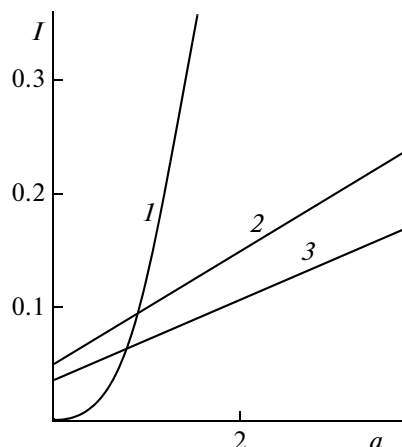


Рис. 3

что свидетельствует о том, что спроектированная система при малых значениях  $a$ , когда в числителе и знаменателе функций  $\tilde{H}(s)$  и  $W_1(s)$  имеются совпадающие между собой малые корни, хотя и из левой полуплоскости, свойством грубости не обладает. На рис. 3 (кривая 1) приведена зависимость от параметра  $a$  степени близости действительной передаточной функции системы  $\tilde{H}(s)$  к желаемой  $P_1(s)$ .

Решим рассмотренную в примере 1 задачу, используя УУ из класса устройств с дополнительным звеном коррекции. Это может быть и классическая схема, приведенная на рис. 2, б. Для нее  $A_1(s) = W_1(s)$ ,  $A_2(s) = W_1(s)W_2(s)$ .

Пример 2. Объект управления задан передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{1+a}{s-a}, \quad a \geq 0.$$

Структура УУ  $A_1(s) = W_1(s)$ ,  $A_2(s) = W_1(s)W_2(s)$ . Схема системы с таким УУ представлена на рис. 2, б.

$$P_1(s) = \frac{3}{s+3}.$$

Как и прежде, необходимо получить реализуемое УУ, при котором достигается близость действительной передаточной функции системы относительно задающего воздействия

$$\hat{W}(s) = \frac{A_1(s)W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)} = \frac{W_1(s)W_0(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_0(s)}$$

к желаемой функции  $P_1(s)$ .

Приступим к решению задачи. Введем в рассмотрение функционал, оценивающий чувствительность системы относительно задающего воздействия к изменению самой нестабильной части системы – передаточной функции объекта управления

$$I_{12} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{d \ln \hat{W}(s)}{d \ln W_0(s)} W_0(s) \right|^2 ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |(1 - \tilde{H}(s))W_0(s)|^2 ds. \quad (1.2)$$

В (1.2) подынтегральная логарифмическая функция чувствительности взвешивается функцией  $W_0(s)$  ( $s = j\omega$ ), отражающей ширину полосы пропускания системы

$$\hat{W}(s) = \frac{A_1(s)W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)}, \quad \tilde{H}(s) = \frac{A_2(s)W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)},$$

$\hat{W}(s)$  — передаточная функция системы относительно задающего воздействия  $g_1(t)$ . Передаточную функцию  $A_2(s)$  найдем из дополнительного условия: минимума  $I_{12}$ . Запишем функционал

$$I_{22} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |(1 - \tilde{H}(s))W_0(s)|^2 ds + \lambda_{20} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |\tilde{H}(s)|^2 ds - \rho_1 \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}(-s) \frac{1}{s+a} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}(s) \frac{1}{-s+a} ds - 2 \right). \quad (1.3)$$

Первая компонента функционала оценивает  $I_{12}$ . Конечность второй составляющей обеспечивает реализуемость  $A_2(s)$  [4]. Последнее слагаемое представляет собой ограничение на компенсацию передаточной функцией  $A_2(s)$  полюса функции  $W_0(s)$ , лежащего справа от мнимой оси.

Уравнение Винера–Хопфа имеет вид

$$(\lambda_{20} + W_0(s)W_0(-s))\tilde{H}(s) - \left( W_0(s)W_0(-s) + \rho_1 \frac{1}{s+a} \right) = \Gamma(s). \quad (1.4)$$

Решая это уравнение при  $\lambda_{20} = 0.01$ , найдем

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)} = \frac{100(a^2 + 2a(\rho_1 + 1) + 1)}{(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})}.$$

Множитель Лагранжа определяется из условия

$$\tilde{N}(s) - \tilde{M}(s)|_{s=a} = 0, \quad \rho_1 = \left( \sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a \right) / 100.$$

Тогда

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)} = \frac{2(a\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + 51a^2 + 100a + 50)}{(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})}, \quad (1.5)$$

а передаточная функция одного из каналов УУ, найденного из дополнительного условия, выражается соотношением

$$A_2^{\text{д}}(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))} = \frac{2(a\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + 51a^2 + 100a + 50)}{(a+1)(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)}.$$

Приступим к отысканию  $\hat{W}(s)$  — оптимальной передаточной функции системы относительно задающего воздействия. Из условия задачи запишем функционал

$$I_{32} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |P_1(s) - \hat{W}(s)|^2 ds + \lambda_{10} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |\hat{W}(s)|^2 ds. \quad (1.6)$$

Его первое слагаемое выражает близость действительной передаточной функции системы  $\hat{W}(s)$  к ее желаемому значению  $P_1(s)$ . Конечность второй составляющей обеспечивает реализуемость передаточной функции УУ  $A_1(s)$ . Ее численная величина характеризует качество переходного процесса.

Подходящим решением может быть тривиальное решение  $\hat{W}(s) = P_1(s) = 3/(s+3)$ , при котором имеет место нулевое значение первой составляющей и конечность второй. Найдем передаточную функцию другого канала УУ

$$A_1(s) = W_1(s) = \frac{V_1^k(s)}{G_1^k(s)} = \frac{\hat{W}(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))} = \frac{3(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})}{(a+1)(s+3)}$$

и передаточную функцию звена коррекции

$$W_2^D(s) = \frac{V_2^k(s)}{G_2^k(s)} = \frac{A_2^D(s)}{A_1(s)} = \frac{2\left(a\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + 51a^2 + 100a + 50\right)}{\left(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a\right)} \frac{(s+3)}{3\left(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100}\right)}.$$

Запишем значение передаточной функции системы относительно задающего воздействия

$$\begin{aligned} \hat{W}(s) &= \frac{A_1(s)W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)} = \frac{V_1^k(s)G_2^k(s)Q_0(s)}{G_1^k(s)G_2^k(s)P_0(s) + V_1^k(s)V_2^k(s)Q_0(s)} = \\ &= \frac{3\left(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a\right)\left(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100}\right)}{(s+3)\left(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a\right)\left(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100}\right)} = \frac{3}{s+3}. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений видно, что при любом положительном значении параметра  $a$  совпадающие корни числителя и знаменателя функции  $\hat{W}(s)$  лежат в левой полуплоскости на достаточном расстоянии от мнимой оси. Таким образом, введение в УУ звена коррекции, выбираемого из дополнительного условия, позволило:

спроектировать систему, обладающую свойством грубости при любом  $a \geq 0$ ;

действительная передаточная функция системы относительно задающего воздействия  $\hat{W}(s)$  независимо от параметра  $a$  всегда совпадает с желаемой функцией  $P_1(s)$ . В примере 1 с увеличением параметра  $a$  расхождение между функциями  $\hat{W}(s)$  и  $P_1(s)$ , согласно соотношению (1.1), возрастает. Отметим, что введение в УУ звена, выбираемого из дополнительного условия, без привлечения функционала вида (1.2) к успеху не приводит. В силу сказанного дополнительное условие и дополнительное звено, в данном случае  $W_2(s)$ , тесно связаны.

Рассмотрим, за счет чего происходит улучшение качества функционирования системы. С этой целью выпишем передаточные функции относительно задающего воздействия систем из примеров 1 и 2

$$\tilde{H}(s) = \frac{A_1(s)W_0(s)}{1 + A_1(s)W_0(s)}, \quad \hat{W}(s) = \frac{A_1(s)W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)}.$$

В передаточной функции  $\tilde{H}(s)$  за счет функции  $A_1(s)$  достигается: устойчивость системы;

близость передаточной функции  $\tilde{H}(s)$  к функции  $P_1(s)$ .

В передаточной функции  $\hat{W}(s)$  звено:

$A_2(s)$  придает устойчивость системе и оптимальное значение функционала, оценивающего чувствительность системы к изменению передаточной функции заданной части;

функция  $A_1(s)$  обеспечивает близость передаточной функции системы  $\hat{W}(s)$  к желаемой.

Между собой какой-либо функциональной зависимостью, как это имеет место в  $\tilde{H}(s)$ , где в числителе и знаменателе присутствует передаточная функция  $A_1(s)$ , функции  $A_1(s)$  и  $A_2(s)$  в  $\hat{W}(s)$  не связаны. Рассмотрим систему, на управляющее воздействие которой  $u(t)$  влияет помеха  $g_2(t)$ .

**П р и м е р 3.** Объект управления описывается передаточной функцией

$$W_0(s, a) = \frac{Q_0(s, a)}{P_0(s, a)} = \frac{1+a}{s-a}, \quad a \geq 0.$$

Задана структура УУ:  $A_1(s) = W_1(s)$ ,  $A_2(s) = W_1(s)W_2(s)$ . Схема системы с таким УУ приведена на рис. 4,  $a$ . Желаемая передаточная функция относительно задающего воздействия  $g_1(t) - P_1(s) = 3/(s+3)$ . Для наложенной на управление помехи  $g_2(t)$  желаемая передаточная функция  $U_2(s) = 0$ . Необходимо сконструировать реализуемое УУ, обеспечивающее максимальную близость действительных передаточных функций системы к желаемым  $P_1(s)$  и  $U_2(s)$ .

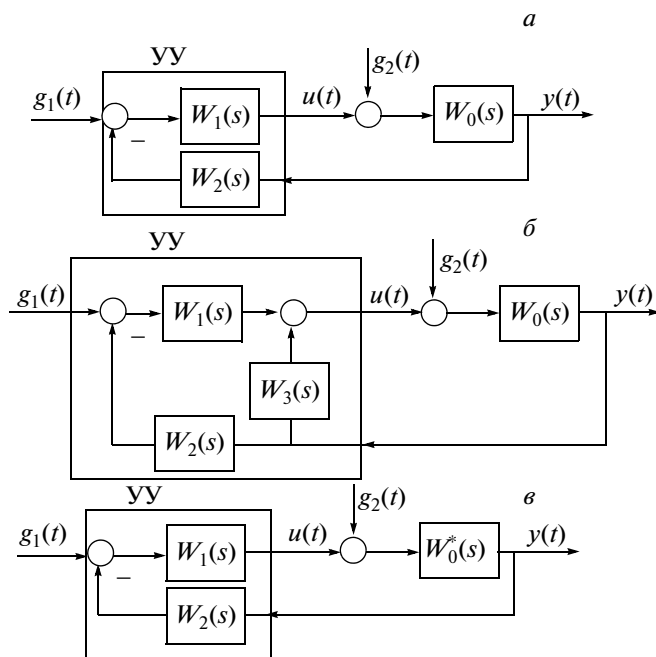


Рис. 4

Приведем классический способ решения задачи. По постановке задачи составим функционал, оценивающий качество системы относительно задающего воздействия  $g_1(t)$ . Он совпадает с функционалом (1.6). Решение имеет вид  $\hat{W}(s) = 3/(s + 3)$ . Используем функционал, выражающий качество системы по отношению к помехе  $g_2(t)$

$$I_{13} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |(1 - \tilde{H}(s))W_0(s)|^2 ds + \lambda_{20} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |\tilde{H}(s)|^2 ds - \rho_1 \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}(-s) \frac{1}{s+a} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}(s) \frac{1}{-s+a} ds - 2 \right). \quad (1.7)$$

Первая составляющая отражает степень инвариантности системы относительно возмущения  $g_2(t)$

$$I_{23} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| U_2(s) - \frac{W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)} \right|^2 ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |(1 - \tilde{H}(s))W_0(s)|^2 ds \text{ при } U_2(s) = 0.$$

Конечность второй компоненты в (1.7) гарантирует реализуемость передаточной функции УУ  $A_2(s)$ , а ее численная величина характеризует качество переходного процесса в системе относительно помехи  $g_2(t)$ . Последнее слагаемое есть ограничение на компенсацию передаточной функцией  $A_2(s)$  полюса функции  $W_0(s)$ , лежащего справа от мнимой оси.

Составленный функционал совпадает с (1.3) и достигает минимального значения, если  $\tilde{H}(s)$  удовлетворяет уравнению Винера–Хопфа (1.4). Решение этого уравнения совпадает с (1.5). Оценка степени инвариантности определяется соотношением

$$I_{33} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |(1 - \tilde{H}(s))W_0(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{a+1}{\sqrt{101a^2 + 200a + 100 + j\omega}} \right|^2 d\omega = \frac{(a+1)^2}{2\sqrt{101a^2 + 200a + 100}}.$$

На рис. 3 (кривая 2) приведена зависимость  $I_{33}$  от параметра  $a$ . Передаточные функции УУ и звеньев коррекции имеют вид

$$A_2(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))} = \frac{2(a\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + 51a^2 + 100a + 50)}{(a + 1)(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)},$$

$$A_1(s) = W_1(s) = \frac{V_1^k(s)}{G_1^k(s)} = \frac{\hat{W}(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))} = \frac{3(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})}{(a + 1)(s + 3)},$$

$$W_2(s) = \frac{V_2^k(s)}{G_2^k(s)} = \frac{A_2(s)}{A_1(s)} = \frac{2(a\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + 51a^2 + 100a + 50)}{(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)} \left( \frac{(s + 3)}{3(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})} \right)^{-1}.$$

Передаточные функции системы относительно задающего воздействия  $g_1(t)$  и помехи  $g_2(t)$  соответственно запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{W}(s) &= \frac{V_1^k(s)G_2^k(s)Q_0(s)}{G_1^k(s)G_2^k(s)P_0(s) + V_1^k(s)V_2^k(s)Q_0(s)} = \\ &= \frac{9(a + 1)(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})^2}{3(a + 1)(s + 3)(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})^2} = \frac{3}{s + 3}, \\ H(s) &= \frac{G_1^k(s)G_2^k(s)Q_0(s)}{G_1^k(s)G_2^k(s)P_0(s) + V_1^k(s)V_2^k(s)Q_0(s)} = \\ &= \frac{3(a + 1)^2(s + 3)(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})}{3(a + 1)(s + 3)(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})^2} = \frac{(a + 1)}{(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})}. \end{aligned}$$

Покажем, что введением в УУ звена коррекции, рассчитываемого из дополнительного условия, степень инвариантности системы относительно помехи  $g_2(t)$  может быть увеличена. Рассмотрим пример.

**Пример 4.** Объект управления описывается передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{1 + a}{s - a}, \quad a \geq 0.$$

Известна структура УУ:  $A_1(s) = W_1(s)$ ,  $A_2(s) = W_1(s)W_2(s) + W_3(s)$ . Схема системы с таким УУ приведена на рис. 4, б. Желаемая передаточная функция относительно задающего воздействия  $g_1(t) - P_1(s) = 3/(s + 3)$ . Для наложенной на управление помехи  $g_2(t)$  желаемая передаточная функция  $U_2(s) = 0$ . Необходимо сконструировать реализуемое УУ, обеспечивающее максимальную близость действительных передаточных функций системы к желаемым передаточным функциям  $P_1(s)$  и  $U_2(s)$ .

Приступим к решению задачи. Запишем передаточные функции системы относительно  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  и преобразуем их



$$\hat{W}(s) = \frac{W_1(s)W_0(s)}{1 + (W_1(s)W_2(s) + W_3(s))W_0(s)} = \frac{\frac{W_1(s)W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}}{1 + \frac{W_1(s)W_2(s)W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}},$$

$$H(s) = \frac{W_0(s)}{1 + (W_1(s)W_2(s) + W_3(s))W_0(s)} = \frac{\frac{W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}}{1 + \frac{W_1(s)W_2(s)W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}}.$$
(1.8)

Введем обозначения

$$W_0^*(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}, \quad W_1(s)W_2(s) = A_2(s), \quad W_1(s) = A_1(s).$$
(1.9)

Тогда, согласно (1.9), соотношения (1.8) переписутся так

$$\hat{W}(s) = \frac{A_1(s)W_0^*(s)}{1 + A_2(s)W_0^*(s)}, \quad H(s) = \frac{W_0^*(s)}{1 + A_2(s)W_0^*(s)}.$$
(1.10)

Передаточная функция  $W_0^*(s)$  определяется из формулы (1.2), которая для рассматриваемого случая преобразуется следующим образом:

$$I_{14} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{d \ln W_0^*(s)}{d \ln W_0(s)} W_0(s) \right|^2 ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |(1 - \tilde{W}_0(s))W_0(s)|^2 ds,$$

$$\tilde{W}_0(s) = \frac{W_3^{\Delta}(s)W_0(s)}{1 + W_3^{\Delta}(s)W_0(s)}.$$
(1.11)

Передаточная функция  $W_3^{\Delta}(s) = W_3(s)$  следует из условия минимума функционала вида (1.3), который записывается так

$$I_{24} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |(1 - \tilde{W}_0(s))W_0(s)|^2 ds + \lambda_{20} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |\tilde{W}_0(s)|^2 ds -$$

$$- \rho_1 \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{W}_0(-s) \frac{1}{s+a} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{W}_0(s) \frac{1}{-s+a} ds - 2 \right).$$
(1.12)

Первая составляющая функционала оценивает  $I_{14}$ . Конечность второго слагаемого обеспечивает реализуемость передаточной функции  $W_3^{\Delta}(s)$ . Последняя составляющая есть ограничение на компенсацию функцией  $W_3^{\Delta}(s)$  полюса функции  $W_0(s)$ , лежащего справа от мнимой оси. Найденное значение из условия минимума (1.12)  $\tilde{W}_0(s)$  при  $\lambda_{20} = 0.01$  совпадает с функцией (1.5)

$$\tilde{W}_0(s) = \frac{\tilde{M}_0(s)}{\tilde{N}_0(s)} = \frac{2(a\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + 51a^2 + 100a + 50)}{(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)(s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100})}.$$
(1.13)

Из последнего соотношения в (1.11) определим

$$W_3^{\Delta}(s) = \frac{\tilde{W}_0(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{W}_0(s))} = \frac{2(a\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + 51a^2 + 100a + 50)}{(a+1)(\sqrt{101a^2 + 200a + 100} + a)}.$$

Из (1.9) имеем

$$W_0^*(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)} = \frac{(a+1)}{s + \sqrt{101a^2 + 200a + 100}}. \quad (1.14)$$

Приступим к поиску передаточных функций  $A_1(s)$  и  $A_2(s)$ . Далее по ним будут найдены  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ . С учетом соотношений (1.10) и (1.14) схему на рис. 4, б преобразуем в схему 4, в. Из постановки задачи следует: функции

$$\begin{aligned} \hat{W}(s) &= \frac{A_1(s)W_0^*(s)}{1 + A_2(s)W_0^*(s)}, & H(s) &= \frac{W_0^*(s)}{1 + A_2(s)W_0^*(s)} = \\ &= (1 - \tilde{H}(s))W_0^*(s), & \tilde{H}(s) &= \frac{A_2(s)W_0^*(s)}{1 + A_2(s)W_0^*(s)} \end{aligned}$$

должны быть соответственно близки к  $P_1(s)$  и  $U_2(s)$ , т.е. могут определяться из условия минимума функционалов

$$\begin{aligned} I_{34} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |P_1(s) - \hat{W}(s)|^2 ds + \lambda_{10} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |\hat{W}(s)|^2 ds, \\ I_{44} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |(1 - \tilde{H}(s))W_0^*(s)|^2 ds + \lambda_{20} \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |\tilde{H}(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Первый функционал совпадает с (1.6), второй — с (1.12). Однако так как все полюсы функции  $W_0^*(s)$ , что видно из (1.14), находятся только в левой полуплоскости, ограничение на компенсацию передаточной функцией  $A_2(s)$  правого полюса функции  $W_0^*(s)$  в состав функционала  $I_{44}$  не включено. Первая составляющая в  $I_{44}$  характеризует степень инвариантности системы к воздействию помехи  $g_2(t)$ . Минимум значения  $I_{44}$  достигается, если искомая передаточная функция  $\tilde{H}(s, a)$  удовлетворяет уравнению Винера—Хопфа

$$\left( \lambda_{20} + W_0^*(s)W_0^*(-s) \right) \tilde{H}(s) - W_0^*(s)W_0^*(-s) = \Gamma(s).$$

Решив его при  $\lambda_{20} = 0.01$ , найдем

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{\tilde{N}(s)} = \frac{100(a^2 + 2a + 1)}{\left( \sqrt{201a^2 + 400a + 200} + \sqrt{101a^2 + 200a + 100} \right) \left( s + \sqrt{201a^2 + 400a + 200} \right)}.$$

Передаточная функция  $\hat{W}(s)$  совпадает с  $P_1(s)$ . Перейдем к поиску передаточных функций УУ

$$A_1(s) = W_1(s) = \frac{\hat{W}(s)}{W_0^*(s)(1 - \tilde{H}(s))} = \frac{3 \left( s + \sqrt{201a^2 + 400a + 200} \right)}{(a+1)(s+3)},$$

$$A_2(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{W_0^*(s)(1 - \tilde{H}(s))} = \frac{100(a+1)}{\left( \sqrt{201a^2 + 400a + 200} + \sqrt{101a^2 + 200a + 100} \right)},$$

$$W_2(s) = \frac{A_2(s)}{A_1(s)} = \frac{100(a+1)^2(s+3)}{3 \left( \sqrt{201a^2 + 400a + 200} + \sqrt{101a^2 + 200a + 100} \right) \left( s + \sqrt{201a^2 + 400a + 200} \right)}.$$

Степень инвариантности системы относительно воздействия  $g_2(t)$  определяется соотношением

$$I_{54} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| U_2(s) - \frac{W_0^*(s)}{1 + A_2(s)W_0^*(s)} \right|^2 ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(a+1)}{j\omega + \sqrt{201a^2 + 400a + 200}} \right|^2 d\omega =$$

$$= \frac{(a+1)^2}{2\sqrt{201a^2 + 400a + 200}}, \quad U_2(s) = 0.$$

На рис. 3 (кривая 3) приведена зависимость  $I_{44}$  от параметра  $a$ . Сравнивая кривые 2 и 3, приходим к выводу, что с увеличением параметра  $a$  преимущество системы на рис. 4, б перед системой на рис. 4, а возрастает, так как степень инвариантности к помехе  $g_2(t)$  увеличивается. Аналогичные результаты можно получить, используя вместо (1.8) преобразования вида

$$\hat{W}(s) = \frac{W_1(s)W_0(s)}{1 + (W_1(s)W_2(s) + W_3(s))W_0(s)} = \frac{\frac{W_1(s)W_0(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_0(s)}}{1 + \frac{W_3(s)W_0(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_0(s)}} = \frac{\frac{W_1(s)W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}}{1 + \frac{W_1(s)W_2(s)W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}},$$

$$H(s) = \frac{W_0(s)}{1 + (W_1(s)W_2(s) + W_3(s))W_0(s)} = \frac{\frac{W_0(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_0(s)}}{1 + \frac{W_3(s)W_0(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_0(s)}} = \frac{\frac{W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}}{1 + \frac{W_1(s)W_2(s)W_0(s)}{1 + W_3(s)W_0(s)}},$$

$$W_0^*(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_0(s)}, \quad W_3(s) = A_2(s), \quad W_1(s) = A_1(s).$$

**Заключение.** На примерах продемонстрировано существенное улучшение характеристик системы (близость действительных передаточных функций системы к желаемым функциям) с введением в состав УУ звена коррекции, характеристики которого определяются из дополнительного условия. Как видно из приведенных примеров, особенно большая эффективность достигается для систем с неустойчивой заданной частью.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Для схемы на рис. 1 передаточные функции системы имеют вид

$$\hat{W}(s) = \frac{A_1(s)W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)},$$

$$H(s) = \frac{W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)} = (1 - \tilde{H}(s))W_0(s), \quad \tilde{H}(s) = \frac{A_2(s)W_0(s)}{1 + A_2(s)W_0(s)}.$$

Через функции  $\hat{W}(s)$  и  $\tilde{H}(s)$  записывается функционал, отражающий качество системы. По оптимальным выражениям  $\hat{W}(s)$  и  $\tilde{H}(s)$  находятся передаточные функции оптимального УУ

$$A_1(s) = \frac{\hat{W}(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))}, \quad A_2(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{W_0(s)(1 - \tilde{H}(s))}. \quad (\text{П.1})$$

Как видно, передаточные функции УУ компенсируют передаточную функцию объекта управления, так как в их знаменатель входят передаточные функции модели объекта. Если нули или полюсы  $W_0(s)$  находятся справа от мнимой оси, такая система свойством грубости не обладает. Введем обозначения

$$\hat{W}(s) = \frac{R(s)}{L(s)}, \quad \tilde{H}(s) = \frac{M(s)}{N(s)}, \quad W_0(s) = \frac{Q_0^+(s)Q_0^-(s)}{P_0^+(s)P_0^-(s)}. \quad (\text{П.2})$$

У функций  $Q_0^+(s) P_0^+(s)$  корни находятся слева, а у функций  $Q_0^-(s) P_0^-(s)$  – справа от мнимой оси. С учетом (П.2) соотношения (П.1) переписуются так

$$A_1(s) = \frac{P_0^+(s)P_0^-(s)R(s)}{Q_0^+(s)Q_0^-(s)L(s)} \frac{N(s)}{N(s) - M(s)}, \quad A_2(s) = \frac{P_0^+(s)P_0^-(s)}{Q_0^+(s)Q_0^-(s)} \frac{M(s)}{N(s) - M(s)}. \quad (\text{П.3})$$

Если на элементы искомым функций наложить ограничения

$$N(s) - M(s) = C_1(s)P_0^-(s), \quad M(s) = C_2(s)Q_0^-(s), \quad R(s) = C_3(s)Q_0^-(s), \quad (\text{П.4})$$

то соотношения (П.3) можно выразить в виде

$$A_1(s) = \frac{P_0^+(s)C_3(s)N(s)}{Q_0^+(s)C_1(s)}, \quad A_2(s) = \frac{P_0^+(s)C_2(s)}{Q_0^+(s)C_1(s)}.$$

Найденные таким образом передаточные функции  $A_1(s)$  и  $A_2(s)$  не будут компенсировать нули и полюсы объекта управления из правой полуплоскости. Перепишем (П.4) в другой форме, для чего воспользуемся соотношениями

$$A(s) = \int_0^{\infty} a(t)e^{-st} dt, \quad A(\alpha_i) = \int_0^{\infty} a(t)e^{-\alpha_i t} dt.$$

Привлекая соотношение Парсеваля, запишем

$$A(\alpha_i) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} A(s) \frac{1}{-s + \alpha_i} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} A(-s) \frac{1}{s + \alpha_i} ds. \quad (\text{П.5})$$

Используя (П.5), преобразуем первое соотношение из (П.4)

$$1 - \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{C_1(s)P_0^-(s)}{N(s)}, \quad 1 - \tilde{H}(s)|_{s=\alpha_i} = 0,$$

$$\tilde{H}(\alpha_i) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \tilde{H}(-s) \frac{1}{s + \alpha_i} ds = 1.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.
2. Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.
3. Зотов М.Г. О связи качества системы с конфигурацией структуры ее управляющего устройства // Изв. РАН. ТИСУ. 2006. № 5. С. 39–42.
4. Кухтенко В.И. К расчету корректирующих цепей систем автоматического управления по критерию минимума среднеквадратичной ошибки // АиТ. 1959. № 9. С. 1180–1187.