Рассмотрим двумерный случай $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Предложение 1. *Пусть функция стоимости имеет вид*

$$c(x,y) = \min(ax+by, cx+dy)$$

$a \neq c$, $b \neq d$. *Тогда для для любого оптимального плана* π *существует точка* (x_0,y_0), *принадлежащая множеству* $l = \{ax+by = cx+dy\}$, *для которого носитель* π *лежит во множестве*

$$\Gamma_{x_0,y_0} = \Big\{x \le x_0, y \ge y_0\Big\} \cup \Big\{x \ge x_0, y \le y_0\Big\}, \quad \textit{если} \quad \frac{a-c}{b-d} < 0$$

$$\Gamma_{x_0,y_0} = \Big\{x \ge x_0, y \ge y_0\Big\} \cup \Big\{x \le x_0, y \le y_0\Big\}, \quad \textit{если} \quad \frac{a-c}{b-d} > 0.$$

Будем говорить, что две линейных функции $l_1 = ax+by, l_2 = cx+dy$ являются парой функций общего положения, если $a \neq b, c \neq d$.

Теорема 1. *Пусть функция стоимости имеет вид*

$$c(x,y) = \min(l_1,l_2,l_3),$$

l_i*—линейная функция на* $\mathbb{R}^2$, $1 \le i \le 3$ *Предположим, что любые две из них являются парой общего положения и множество* $\Omega_i = \{c = l_i\}$ *содержит непустую внутренность для всех* i.

Пусть π *— оптимальный транспортный план для* c. *Существуют три непересекающихся множества (возможно, некоторые из них пусты)* Γ_i *со свойствами:*

1. *носитель* π *содержится в* $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$
2. $\Gamma_i = I_{i,x} \times I_{i,y}$ *являются прямым произведением двух связных одномерных подмножеств* $I_{i,x}, I_{i,y}$ *осей* x,y.
3. *Проекции* $I_{1,x}, I_{2,x}, I_{3,x}$ $(I_{1,y}, I_{2,y}, I_{3,y})$ *не пересекаются.*

Доказательство. Положим $h = \min(l_1,l_2)$. Рассмотрим множество $\Omega_{12} := \{c = h\}$. Докажем, что $\pi|_{\Omega_{12}}$ — мера, оптимальная для своих проекций $Pr_x\pi_{\Omega_{12}}, Pr_y\pi_{\Omega_{12}}$ на оси x, y и функции стоимости h.

Действительно, если это не так, рассмотрим меру $\tilde{\pi}$, с такими же проециями и оптимальную для функции стоимости h. В силу оптимальности $\int h d\pi|_{\Omega_{12}} > \int h d\tilde{\pi}$. Рассмотрим меру $\mu = \pi|_{\Omega_{12}^c} + \tilde{\pi}$. Очевидно, μ имеет те же проекции, что и π. Заметим, что $c \le h$, поэтому

$$\int c d\pi = \int c d\pi|_{\Omega_{12}^c} + \int c d\pi|_{\Omega_{12}} = \int c d\pi|_{\Omega_{12}^c} + \int h d\pi|_{\Omega_{12}} > \int c d\pi|_{\Omega_{12}^c} + \int h d\tilde{\pi} \ge \int c d\pi|_{\Omega_{12}^c} + \int c d\tilde{\pi} = \int c d\mu.$$

Таким образом, $\int c d\pi > \int c d\mu$, отсюда следует, что мера π не оптимальна и мы пришли к противоречию.

Из предложения 1 следует, что носитель $\pi|_{\Omega_{12}}$ содержится во множестве $\Omega_{12} \cap \Gamma^{1,2}_{x_{12},y_{12}}$ для некоторой точки $(x_{12},y_{12}) \in \{l_1 = l_2\}$. Аналогично получаем, что существует множество $\Omega_{13} \cap \Gamma^{1,3}_{x_{13},y_{13}}$, содержащая носитель $\pi|_{\Omega_{13}}$, $\Omega_{13} = \{c = \min(l_1,l_3)\}$. Следовательно, на множестве $\Omega_i = \{c = l_i\}$ носитель $\pi|_{\Omega_i}$, $i \in \{1,2,3\}$ содержится во множестве

$$\Gamma_i = \Gamma^{i,j}_{x_{ij},y_{ij}} \cap \Gamma^{i,k}_{x_{ik},y_{ik}} \cap \Omega_i, j \neq i, k \neq i.$$

Свойства (1), (2) множеств Γ_i очевидны. Докажем свойство (3). Рассмотрим для определенности множества Γ_1, Γ_2. Они находятся по разные стороны от прямой $\{l_1 = l_2\}$, поэтому содержатся в двух различных компонентах связности множества $\Gamma^{1,2}_{x_{12},y_{12}}$, которые, как легко видеть, имеют непересекающиеся проекции на обе оси. $\square$